Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Е.В.Захаров, И.В.Дмитриева, С.И.Орлик.

Методическое пособие по курсу «Уравнения математической физики»
(для студентов бакалавриата факультета ВМиК)

Москва — 2003

УДК 517.5
ББК 22.311
З-38

Печатается по решению Редакционно-издательского Совета факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова

Рецензенты:
доцент *И.Н. Иновенков*,
доцент *А.В. Разгулин*

Е.В. Захаров, И.В.Дмитриева, С.И.Орлик

Методическое пособие по курсу «Уравнения математической физики» (для студентов бакалавриата факультета ВМиК). – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, (Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01.), 2003. – 124 с.

ISBN 5-89407-128-3

Методическое пособие содержит основной материал курса лекций для студентов бакалавриата факультета ВМиК МГУ и соответствует программе семестрового курса «Уравнения математической физики». Формулируются основные задачи для простейших уравнений в частных производных второго порядка параболического, эллиптического и гиперболического типов, в общем случае – с тремя пространственными переменными. Рассматриваются краевые условия первого, второго и третьего рода. Изучаются вопросы о существовании, единственности и устойчивости классических решений поставленных задач. Рассматриваются некоторые методы построения решений таких задач.

УДК 517.5
ББК 22.311

ISBN 5-89407-128-3

Содержание

Литература.

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. – М., “ Наука”, 1977.
2. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. – М., “Наука”, 1974.
3. А.В. Бицадзе. Уравнения математической физики. – М., “ Наука”, 1976.
4. В.Я. Арсенин Методы математической физики и специальные функции. – М., “ Наука”, 1974.

Введение.

Курс «Уравнения математической физики» является естественным продолжением курса «Дифференциальные уравнения», который был посвящен теории обыкновенных дифференциальных уравнений, начальным и краевым задачам для таких уравнений.

В курсе уравнений математической физики изучаются дифференциальные уравнения в частных производных в основном второго порядка для функций нескольких переменных (от двух до четырех). Слова «математическая физика» появились в названии курса вследствие того, что рассматриваемые в нём дифференциальные уравнения в частных производных и задачи для них являются математическими моделями ряда фундаментальных физических процессов: распространения тепла, колебаний, волновых процессов и других.

Остановимся на обозначениях и определениях. Пусть R_2–евклидово пространство (x_1, x_2). Соотношение, включающее функцию $u(x_1, x_2)$ и производные этой функции по x_1 и x_2 любого порядка называется дифференциальным уравнением в частных производных (ДУЧП).

Определение. Порядком ДУЧП называется порядок наивысшей производной входящей в уравнение.

Если обозначить $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = u_{x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u_{x_1 x_2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u_{x_1 x_1}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{x_2 x_2}$, то соотношение

$$F\left(x_1, x_2, u(x_1, x_2), u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, u_{x_2 x_2}\right) = 0, \qquad (1)$$

есть ДУЧП второго порядка общего вида. Уравнение (1) называется линейным, если оно линейно относительно функции и всех её производных. Общая форма линейного ДУЧП второго порядка для функции $u = u(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &a_{11} u_{x_1 x_1} + 2a_{12} u_{x_1 x_2} + a_{22} u_{x_2 x_2} + \\ &+ b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + cu + f(x_1, x_2) = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где коэффициенты уравнения $a_{ij}, b_i, c, i, j = 1, 2$ – в общем случае функции координат (x_1, x_2), $f(x_1, x_2)$ – заданная функция.

Если $f(x_1, x_2) \equiv 0$, то уравнение (2) называется однородным, в противном случае неоднородным.

Если все коэффициенты $a_{ij}, b_i, c, i, j = 1, 2$ – постоянны, то уравнение (2) называется ДУЧП с постоянными коэффициентами, в противном случае с переменными. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица второго порядка, называется матрицей коэффициентов при старших производных. Так как $u_{x_1 x_2} = u_{x_2 x_1}$, то матрицу A всегда можно считать симметричной $(a_{12} = a_{21})$.

Классификацию уравнений типа (2) можно осуществить, используя свойства симметричных матриц и закон инерции квадратичных форм из линейной алгебры. Из линейной алгебры следует, что характеристические числа (собственные значения) симметричных матриц всегда вещественны, а количество положительных, отрицательных и нулевых характеристических чисел инвариантно относительно выбора системы координат.

Зафиксируем точку $M(x_1, x_2)$. Тогда A – числовая матрица, а её характеристические числа вещественны.

Пусть (α, β, γ) – тип уравнения, α – число положительных характеристических чисел, β – число отрицательных характеристических чисел, γ – число нулевых характеристических чисел. Возможны 3 типа уравнений (2, 0, 0) или (0, 2, 0) – уравнения эллиптического типа, (1, 1, 0) – уравнения гиперболического типа, (1, 0, 1) или (0, 1, 1) – уравнения параболического типа.

Примеры. Пусть $x_1 = x$, $x_2 = y$ — пространственные координаты, тогда $u_{xx} + u_{yy} = 0$ – уравнение эллиптического типа (уравнение Лапласа). Если $x_1 = x$ – пространственная координата, а $x_2 = t$ – координата времени, то $u_{tt} - u_{xx} = 0$ – уравнение гиперболического типа (уравнение колебаний), а $u_t - u_{xx} = 0$ – уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности).

Эта классификация полностью исчерпывает всё множество уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Замечание 1. Аналогично можно провести классификацию ДУЧП второго порядка с любым числом независимых переменных и выделить классы эллиптических, параболических и гиперболических типов.

1. $(1, n-1, 0)$ или $(n-1, 1, 0)$ – гиперболический тип.
2. $(n, 0, 0)$ или $(0, n, 0)$ – эллиптический тип.
3. $(n-1, 0, 1)$ или $(0, n-1, 1)$ – параболический тип.

Глава 1. Граничные задачи для уравнения теплопроводности.

§ 1. Построение математической модели процесса распространения тепла в пространстве. Вывод уравнения теплопроводности.

Процесс распространения тепла в пространстве можно описать температурой $u(M,t)$, зависящей от точек $M(x,y,z)$ и времени t (x, y, z – декартовы координаты точки в пространстве). Если температура зависит от точек M, то возникают потоки тепла, направленные от областей с высокой температурой к областям с меньшей температурой. Их можно охарактеризовать вектором плотности теплового потока $\vec{W}(M,t)$. Пусть $d\sigma$ – некоторая площадка, а $\vec{n}$ – единичная нормаль к $d\sigma$. Количество тепла, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно $W_n d\sigma = (\vec{W} \cdot \vec{n}) d\sigma$. По закону Фурье $\vec{W} = -k\, grad_M\, u$, где скалярная величина k – коэффициент теплопроводности среды. В общем случае, если среда неоднородна, k является функцией точки M.

Выведем уравнение, описывающее процесс распространения тепла (уравнение теплопроводности). Рассмотрим некоторую область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S. Уравнение баланса тепла для Ω за время $\Delta t = t_2 - t_1$ запишется в виде

$$\iiint_{\Omega} C\rho[u(M,t_2)-u(M,t_1)]\,d\tau_M =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S W_n(P,t)\,d\sigma_P + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} F(M,t)\,d\tau_M, \qquad (1.1)$$

где $M(x_M, y_M, z_M)$ – точка интегрирования по Ω, $d\tau_M = dx_M dy_M dz_M$ – элемент объёма, $P(x_P, y_P, z_P)$ – точка интегрирования по поверхности S, $d\sigma_P$ – элемент поверхности, C – удельная теплоемкость, ρ – плотность массы, $F(M,t)$ – плотность тепловых источников (тепло может подаваться в область, либо поглощаться вне зависимости от его температуры). Соотношение (1.1) представляет собой уравнение теплового баланса в области Ω за время Δt: изменение количества тепла в объёме Ω за время Δt (левая часть уравнения), обусловлено потоком тепла через граничную поверхность S (первое слагаемое в правой части уравнения) и теплом, выделившимся в объёме Ω за время Δt в результате действия источников (второе слагаемое в правой части уравнения).

Чтобы перейти от интегрального уравнения баланса к дифференциальному, предположим, что функция $u(M,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по (x,y,z) и один раз по t, а соответствующие производные непрерывны. Тогда можно воспользоваться формулой Гаусса-Остроградского

$$\iint_S W_n\,d\sigma_P = \iiint_{\Omega} div\,\vec{W}\,d\tau_M = -\iiint_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)\,d\tau_M .$$

$$\iiint_{\Omega} C\rho[u(M,t_2)-u(M,t_1)]\,d\tau_M = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)\,d\tau_M +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} F(M,t)\,d\tau_M .$$

Фиксируем произвольную точку $\widetilde{M}(x,y,z)$ внутри Ω и будем стягивать Ω в эту точку, а Δt устремим к нулю. Применим формулу конечных приращений:

$$u(M,t_2)-u(M,t_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_3} \Delta t, \quad t_3 \in (t_1,t_2),$$

тогда получим

$$\iiint_{\Omega} C\rho \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_3} \Delta t\,d\tau_M = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} div(k\cdot grad\,u)\,d\tau_M +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Omega} F(M,t)\,d\tau_M .$$

К каждому из интегралов применим теорему о среднем:

$$\Delta t\cdot\Omega\cdot C\cdot\rho\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_3\\ M=M_1}} = \left.div(k\cdot grad\,u)\right|_{\substack{t=t_4\\ M=M_2}}\cdot\Delta t\cdot\Omega +$$

$$+F(M,t)\Big|_{\substack{t=t_5\\ M=M_3}}\cdot\Delta t\cdot\Omega,\ \ t_4,t_5\in(t_1,t_2),\quad M_1,M_2,M_3\in\Omega.$$

Сокращая на $\Omega\cdot\Delta t$ и осуществляя предельный переход, получим $$C\rho\frac{\partial u(\widetilde{M},t)}{\partial t} = div(k\cdot grad\,u) + F(\widetilde{M},t).$$

Учитывая, что точка $\widetilde{M}$ выбрана произвольно, будем иметь дифференциальное уравнение

$$C\rho\frac{\partial u(M,t)}{\partial t} = div(k\cdot grad\,u(M,t)) + F(M,t),$$

$M = M(x,y,z)\in\Omega$, или

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F.$$

В частности, если среда однородна $(k=const)$, то $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{F}{C\rho}$, где $a^2=\frac{k}{C\rho}$ – коэффициент температуропроводности. В более короткой форме записи

$$u_t=a^2\Delta u+f, \tag{1.2}$$

$f=\frac{F}{C\rho}$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.2) называется уравнением теплопроводности в пространстве, оно относится к уравнениям параболического типа. Если $f=0$ (т.е. внутри тела отсутствуют тепловые источники), то уравнение будет однородным: $u_t=a^2\Delta u$. Если функция $u(M,t)$ зависит только от одной пространственной переменной (допустим, от x), т.е. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, то уравнение будет иметь вид $u_t=a^2u_{xx}+f$.

§ 2. Постановка начально-краевых задач.

Для построения математической модели распространения тепла в теле необходимо к уравнению (1.2) добавить дополнительные условия. Такими условиями являются, например, начальное условие, определяющее температуру во всех точках тела в начальный момент времени, и граничное условие. Так как уравнение содержит только первую производную по времени, то достаточно лишь одного начального условия.

Если граница S области Ω поддерживается при заданной температуре, то

$$u(P,t)=\mu(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0,$$

где $\mu(P,t)$ – заданная функция. Это условие называется граничным условием I рода или условием Дирихле.

Если на поверхности S задан тепловой поток, то

$$-k(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=W_n(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0,$$

где $k(P)$, $W_n(P,t)$ – заданные функции, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к поверхности S в точке $P\in S$. Так как $k(P)\ne 0$, то это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}=\nu(P,t),\quad \nu(P,t)=-\frac{W_n(P,t)}{k(P)},\quad P\in S,\quad t\ge 0.$$

Это условие называется граничным условием II рода или условием Неймана.

Если на границе S области Ω происходит теплообмен с внешней средой, то по закону Ньютона получим третье краевое условие:

$$\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+h(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0,$$

где $h(P)$, $\chi(P,t)$ – заданные функции, $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к S в точке $P\in S$.

Подводя итог, можно поставить общую задачу:

$C(M)\cdot\rho(M)\cdot u_t=div(k(M)\cdot grad\,u)+F(M,t)$,

$M\in\Omega,\quad t>0$,

$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}=\Omega\cup S$,

$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\ge 0,$

где $C(M), \rho(M), k(M), F(M,t), \varphi(M), \alpha(P), \beta(P), \chi(P,t)$ – заданные функции.

Замечание. Если $\alpha \equiv 0$, $\beta \neq 0$, то имеем граничное условие Дирихле. Если $\alpha \neq 0$, $\beta \equiv 0$, то – граничное условие Неймана. Изучая задачу именно с третьим краевым условием (а не с краевым условием Дирихле и не с краевым условием Неймана), будем предполагать, что $\alpha(P) \neq 0$ всюду на S. Тогда краевое условие $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta \cdot u = \chi$ можно записать в виде $\dfrac{\partial u}{\partial n} + h \cdot u = \eta$, где $h = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\eta = \dfrac{\chi}{\alpha}$.

Рассмотрим теперь одномерное уравнение теплопроводности, т.е. будем искать распределение температуры внутри стержня длины l, у которого все точки поперечного сечения имеют одинаковую температуру. Направим ось x вдоль стержня. Тогда начально-краевая задача будет представлена так:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l],$$

I краевая задача: $u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0,$

II краевая задача: $u_x(0,t) = \nu_1(t), \quad u_x(l,t) = \nu_2(t), \quad t \geq 0,$

III краевая задача:

$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = \eta_1(t), \quad u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = \eta_2(t), \quad t \geq 0$;

$h_1 = const > 0$, $h_2 = const > 0$. Граница $S: \{x = 0, x = l\}$.

Так как в действительности решаются поставленные выше задачи при $0 \leq t \leq T$, то фазовая плоскость для этих задач представляет собой прямоугольник ABCD, расположенный в системе координат (x,t), где вершины прямоугольника имеют координаты $A(0,0)$, $B(l,0)$, $C(l,T)$, $D(0,T)$. Уравнение

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ выполняется внутри прямоугольника ABCD, включая границу CD. Начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$ выполняется на границе AB. А граничные условия выполняются на границах AD и BC. Если потребовать, чтобы уравнение удовлетворялось бы, например, на границе AB, т.е. при $t = 0$, то тогда необходимо, чтобы выполнялось условие $\varphi''(x) = u_{xx}(x,0)$. Это условие ограничивает область рассматриваемых функций как решение задачи.

Задача может быть смешанной; в этом случае, например, на левом конце будет I краевое условие, на правом – II краевое условие или наоборот.

Рассмотрим некоторые предельные (асимптотические) случаи.

Допустим, что длина стержня достаточно велика, а изучается распределение температуры стержня вдали от его концов и в тот период времени, за который краевые условия не успеют повлиять на температуру. Тогда получим задачу на всей числовой оси:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (-\infty,\infty), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty,\infty).$$

Эта задача называется задачей с начальными условиями для уравнения теплопроводности или задачей Коши для уравнения теплопроводности.

Может быть другая предельная задача: краевое условие на левом конце сказывается на температуре рассматриваемого участка стержня, а краевое условие на правом конце – нет. Тогда получаем задачу на полубесконечной оси:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\infty), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,\infty),$$

I краевая задача: $u(0,t) = \mu(t), \quad t \geq 0,$

II краевая задача: $u_x(0,t)=\nu(t)$, $t\ge 0$,
III краевая задача: $u_x(0,t)-hu(0,t)=\eta(t)$, $t\ge 0$; $h>0$.

Можно рассматривать задачи, предельные не только в пространстве, но и по времени, т.е. возможна постановка задачи без начальных условий.

Уточним математическую постановку начально краевой задачи в четырёхмерном пространстве $R^3\times[0,T]$. Будем рассматривать в пространстве R^3 область Ω, ограниченную поверхностью S. Назовём открытым цилиндром в $R^3\times[0,T]$ область Q_T вида $Q_T=\Omega\times(0,T]=\{(M,t): M\in\Omega, t\in(0,T]\}$, замкнутым цилиндром – область $\overline{Q}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]=\{(M,t): M\in\overline{\Omega}, t\in[0,T]\}$, где $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$. Если $T=\infty$, то полагаем $Q=Q_T$.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности ставится следующим образом:

$$u_t=a^2\Delta u+f(M,t),\quad (M,t)\in Q, \tag{2.1}$$

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad M\in\overline{\Omega}, \tag{2.2}$$

$$\alpha\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\quad t\in[0,\infty) \tag{2.3}$$

$\alpha+\beta>0$, $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$.

Дадим определение классического решения начально-краевой задачи (2.1) – (2. 3).

Определение. Классическим решением начально-краевой задачи (2.1) – (2.3) называется функция $u(M,t)$, $u(M,t)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{2,1}(Q)$, непрерывная в цилиндре $\overline{Q}$, имеющая непрерывные производные первого порядка по t и второго порядка по координатам точки M в цилиндре Q, удовлетворяющая в Q уравнению (2.1), начальному условию (2.2) и краевому условию (2.3).

Замечание 1. Необходимым условием существования классического решения начально-краевой задачи (2.1) – (2. 3) является согласование начального условия (2.2) и краевого условия (2.3), т.е.

$$\alpha\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n}+\beta\varphi(P)=\chi(P,0),\quad P\in S.$$

Замечание 2. Часто возникают задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемых к **классическим** решениям. Например, может не выполняться согласование начального и краевого условий. Такие решения надо понимать в некотором **обобщённом** смысле. В настоящем курсе рассматриваются только классические решения.

В отношении поставленной задачи (2.1) – (2.3) возникают вопросы о единственности решения задачи, о существовании решения задачи, о непрерывной зависимости решения задачи (**об устойчивости**) от дополнительных условий. Если поставленная задача удовлетворяет этим трём условиям, то такая задача называется **корректнопоставленной**.

§ 3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения.

Следующая теорема является основной, из неё будут получены важнейшие следствия, описывающие свойства решений уравнения теплопроводности.

Теорема (принцип максимума).

Решение уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2\cdot\Delta u,\quad (M,t)\in Q_T,$$

непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, большие, чем значения при $t=0$ или на границе S области Ω.

Доказательство.

Введём обозначение $A=\max\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\quad \underset{P\in S,\,t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}$. Надо доказать, что $u(M,t)\le A$ для всех точек $(M,t)\in\overline{Q}_T$.
Это утверждение будем доказывать от противного. Пусть в точке $(M_0,t_0)\in Q_T$ функция $u(M,t)$ достигает своего максимального значения, большего A, т.е.
$u(M_0,t_0)=A+\varepsilon,\quad \varepsilon>0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $v(M,t)=u(M,t)+\alpha(t_0-t),\quad \alpha>0$. Очевидно, $v(M_0,t_0)=u(M_0,t_0)=A+\varepsilon$. Теперь оценим максимальное значение $v(M,t)$ на границе области $\overline{\Omega}$ или в начальный момент времени:

$$\max\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{v(M,0)};\quad \underset{P\in S;\,t\in[0,T]}{v(P,t)}\right\}\le A+\alpha T<A+\frac{\varepsilon}{2},\text{ если }\quad \alpha<\frac{\varepsilon}{2T}.$$

Таким образом, максимальное значение функции $v(M,t)$ на границе цилиндра меньше, чем некоторое её значение внутри. Следовательно, существует точка (M_1,t_1) внутри цилиндра, в которой функция должна достигать своего максимума: $(M_1,t_1)\in Q_T$,
$v(M_1,t_1)\ge v(M_0,t_0)=A+\varepsilon$. Так как (M_1,t_1) – точка максимума, то должны выполняться условия для первых производных: $grad_M v(M_1,t_1)=0$, $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\M=M_1}}\ge 0$

($\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\M=M_1}}=0$, если $t\ne T$, или $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=T\\M=M_1}}\ge 0$) и для вторых производных: $\Delta v(M_1,t_1)\le 0$. Посмотрим, что это даёт для функции $u(M,t)$:

$$u(M,t)=v(M,t)-\alpha(t_0-t),\quad \alpha>0;$$
$$grad_M u(M_1,t_1)=grad_M v(M_1,t_1)=0;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\t=t_1}}=\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\t=t_1}}+\alpha\ge\alpha>0;$$
$$\Delta u(M_1,t_1)=\Delta v(M_1,t_1)\le 0.$$

Таким образом в точке (M_1,t_1), лежащей внутри области Q_T, $\Delta u\le 0$, $u_t>0$, т.е. не выполняется уравнение теплопроводности. Пришли к противоречию, теорема доказана.

Для однородного уравнения теплопроводности справедлив и принцип минимума:
Теорема. Решение уравнения теплопроводности $u_t=a^2\cdot\Delta u$, $(M,t)\in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, меньшие, чем значения при $t=0$ или на границе S области Ω.
Доказательство.

Функция $u_1(M,t)=-u(M,t)$ – тоже решение уравнения теплопроводности. Максимальное значение для функции $u(M,t)$ является минимальным для функции $u_1(M,t)$. Следовательно, справедливость этой теоремы следует из предыдущей.
Следствие. Из доказанных теорем следует принцип экстремума: значения функции $u(M,t)$ для всех точек $(M,t)\in\overline{Q}_T$ лежат между максимальным и минимальным значениями функции на границе, т.е.

$$\min\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\,t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}\le u(M,t)\le\max\left\{\underset{M\in\overline{\Omega}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;\,t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}.$$

Замечание. Функция $u(M,t) = const$ является решением уравнения $u_t = a^2 \cdot \Delta u$ и не противоречит принципам максимума и минимума.

Теорема сравнения 1. Пусть функции $u_i(M,t)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $u_1(M,0) \geq u_2(M,0)$, $M \in \overline{\Omega}$, и $u_1(P,t) \geq u_2(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,T]$. Тогда $u_1(M,t) \geq u_2(M,t)$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство.

Введём функцию $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. Пусть функция $v(M,t)$ не равна тождественно нулю, в противном случае утверждение теоремы очевидно. Так как уравнение $u_t = a^2 \cdot \Delta u$ линейно и однородно, то линейная комбинация решений тоже является решением этого уравнения. Следовательно, функция $v(M,t)$ является решением уравнения $v_t = a^2 \cdot \Delta v$, $v(M,t) \in C(\overline{Q}_T)$. Т.е. функция $v(M,t)$ – классическое решение уравнения $v_t = a^2 \cdot \Delta v$, и выполнены неравенства $v(M,0) \geq 0$, $M \in \overline{\Omega}$, и $v(P,t) \geq 0$, $P \in S$, $t \in [0,T]$. Для функции $v(M,t)$ выполняется принцип минимума. Следовательно, $v(M,t) \geq 0$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$, и $u_1(M,t) \geq u_2(M,t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$. Теорема доказана.

Теорема сравнения 2. Пусть функции $u_i(M,t)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \cdot \Delta u$, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям

$|u_1(M,0) - u_2(M,0)| \leq \varepsilon$, $M \in \overline{\Omega}$, и $|u_1(P,t) - u_2(P,t)| \leq \varepsilon$, $P \in S$, $t \in [0,T]$. Тогда $|u_1(M,t) - u_2(M,t)| \leq \varepsilon$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство.

Рассмотрим три функции: $v_1(M,t) = -\varepsilon$, $v_3(M,t) = \varepsilon$ и $v_2(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. Все функции $v_i(M,t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнению $v_t = a^2 \cdot \Delta v$, принадлежат классу непрерывных функций $C(\overline{Q}_T)$ и удовлетворяют условиям $v_1(M,0) \leq v_2(M,0) \leq v_3(M,0)$, $M \in \overline{\Omega}$, и $v_1(P,t) \leq v_2(P,t) \leq v_3(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,t]$. Из принципов максимума и минимума следует $v_1(M,t) \leq v_2(M,t) \leq v_3(M,t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$. Теорема доказана.

Замечание. Принципы максимума и минимума имеют место и для более общего уравнения $C\rho u_t = div(k(M) \cdot grad\, u) - qu$, $q \geq 0$.

§ 4. Единственность и устойчивость решения первой начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводнос:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad (M,t) \in Q_T \tag{4.1}$$

$$u(M,0) = \varphi(M), \quad M \in \overline{\Omega} \tag{4.2}$$

$$u(P,t) = \mu(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,T] \tag{4.3}$$

Для существования классического решения этой задачи функции $\varphi(M)$ и $\mu(P,t)$ должны быть согласованы, т.е. $\varphi(P)=\mu(P,0)$, $P\in S$ (4. 4).

Теорема единственности решения.

Задача (4.1) – (4.3) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство.

Допустим, что существуют две функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являющиеся классическими решениями задачи (4.1) – (4.3). Функции $u_i(M,t)\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{(2,1)}(Q_T)$, $i=1,2$. Тогда функция $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$ является классическим решением задачи

$$v_t=a^2\Delta v,\quad (M,t)\in Q_T$$
$$v(M,0)=0,\quad M\in\overline{\Omega}$$
$$v(P,t)=0,\quad P\in S,\quad t\in[0,T],\quad v\in C(\overline{Q}_T).$$

Для функции $v(M,t)$ справедливы принципы максимума и минимума. (Для функций $u_i(M,t)$, $i=1,2$ принципы максимума и минимума не применимы, так как они удовлетворяют неоднородному уравнению). Следовательно, $v(M,t)$ удовлетворяет принципу экстремума: $0\le v(M,t)\le 0$, т.е. $v(M,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим понятие устойчивости краевой задачи.

Определение. Решение задачи (4.1) – (4.3) называется устойчивым, если малым изменениям начальных и граничных условий соответствует малое изменение решения.

Теорема об устойчивости решения.

Классическое решение задачи (4.1) – (4.3) устойчиво по начальным и граничным условиям.

Доказательство.

Пусть функции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являются решениями задач

$$u_t=a^2\Delta u+f(M,t),\quad (M,t)\in Q_T$$
$$u(M,0)=\varphi_i(M),\quad M\in\overline{\Omega}$$
$$u(P,t)=\mu_i(P,t),\quad P\in S,\quad t\in[0,T],\quad i=1,2.$$

Предположим, что $|\varphi_1(M)-\varphi_2(M)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$. Надо доказать, что $|u_1(M,t)-u_2(M,t)|\le\varepsilon$ для всех $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Рассмотрим функцию $v(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$, которая является решением задачи

$$v_t=a^2\Delta v,\quad (M,t)\in Q_T$$
$$v(M,0)=\varphi_1(M)-\varphi_2(M),\quad M\in\overline{\Omega}$$
$$v(P,t)=\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t),\quad P\in S,\quad t\in[0,T].$$

Так как функция $v(M,t)$ в граничных и начальных точках удовлетворяет условиям $|v(M,0)|\le\varepsilon$, $M\in\overline{\Omega}$, и $|v(P,t)|\le\varepsilon$, $P\in S$, $t\in[0,T]$, то из теоремы сравнения 2 следует, что $|v(M,t)|\le\varepsilon$, $(M,t)\in\overline{Q}_T$. Это и требовалось доказать.

§ 5. Метод разделения переменных для доказательства существования решения начально – краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

В предыдущем параграфе были доказаны теоремы единственности и устойчивости для первой начально – краевой задачи любой размерности. Для корректной постановки задачи необходимо существование решения задачи. В этом параграфе будет рассмотрена теорема существования для начально – краевой задачи в одномерном случае, т.е. в случае, когда $\Omega = (0,l)$. Чтобы подчеркнуть это введём обозначения:

$$\omega_l = \{x : 0 < x < l\}, \quad \overline{\omega}_l = \{x : 0 \le x \le l\},$$
$$q_l = \omega_l \times (0,\infty) = \{(x,t) : x \in \omega_l, t > 0\},$$
$$\overline{q}_l = \overline{\omega}_l \times [0,\infty) = \{(x,t) : x \in \overline{\omega}_l, t \ge 0\}.$$

Рассмотрим первую краевую задачу на отрезке $[0,l]$ для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \omega_l, \quad t > 0, \tag{5.1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\omega}_l, \tag{5.2}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{5.3}$$

Необходимым условием существования классического решения является $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Классическое решение $u(x,t) \in C(\overline{q}_l) \cap C^{(2,1)}(q_l)$. Общая схема метода разделения переменных даёт решение этой задачи, построенное формально:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{5.4}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \ldots.. \tag{5.5}$$

Общая схема метода разделения переменных рассматривается на семинарах. Покажем, что при некоторых условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (5.4) с коэффициентами (5.5) представляет собой классическое решение этой задачи. Для этого необходимо воспользоваться обобщенным принципом суперпозиции и свойствами рядов Фурье.

Лемма (обобщенный принцип суперпозиции). Пусть $u_n(x,t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения $L[u_n] = 0$, и все дифференциальные операции над функцией $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$ можно проводить путём почленного дифференцирования ряда. Тогда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $L[u] = 0$.

Доказательство.

$$L[u] = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n] = 0.$$

Теорема о рядах Фурье.

Пусть функция $F(x)$, заданная на отрезке $x \in [-l, l]$, периодически продолжена на всю числовую ось с периодом $2l$. Если $F(x)$ имеет на интервале $(-l, l)$ k непрерывных производных, а $(k+1)$ – ая производная кусочно- непрерывна, то сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \{|a_n| + |b_n|\}$, где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $F(x)$ по тригонометрической системе функций $\left\{\cos\frac{\pi n}{l}x, \quad \sin\frac{\pi n}{l}x\right\}$:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $x \in [0,l]$, непрерывна на нём и $f(0) = f(l) = 0$. Чтобы $f(x)$ можно было разложить в ряд Фурье по синусам, нужно $f(x)$ нечётным образом продолжить на $[-l,l]$, т.е. положить $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l \\ -f(-x), & -l < x < 0 \end{cases}$. Условие $f(0) = f(l) = 0$ гарантирует непрерывность функции, а нечётность продолжения гарантирует непрерывность первой производной.

Теорема о существовании решения.

Пусть функция $\varphi(x) \in C[0,l]$, имеет в области $x \in \overline{\omega}_l$ кусочно – непрерывную производную и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда задача (5.1) – (5.3) имеет классическое решение, представимое рядом (5.4) с коэффициентами (5.5).

Доказательство.

Ряд (5.4) с коэффициентами (5.5) удовлетворяет однородным условиям (5.3) $\left(\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0\right)$, а при $t = 0$ он переходит в ряд Фурье для функции $\varphi(x)$ в

области $x \in \overline{\omega}_l$: $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x$. Ряд (5.4) является формальным решением задачи (5.1) – (5.3). Надо доказать, что сумма этого ряда в открытой области удовлетворяет уравнению теплопроводности, а в замкнутой области является непрерывной функцией. Докажем, что сумма ряда (5.4) непрерывна при $x \in \overline{\omega}_l$, $t \geq 0$. Ряд (5.4) мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$, который сходится по теореме о рядах Фурье (в нашем случае $k = 0$ и все $a_n = 0$). В силу признака Вейерштрасса ряд (5.4) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{q}_l$, а его сумма является непрерывной функцией в области $\overline{q}_l$. Таким образом, $u(x,t) \in C(\overline{q}_l)$. Следовательно, при $t \to 0$ функция $u(x,t)$, заданная формулой (5.4), удовлетворяет условию (5.2), а при $x \to 0$ и $x \to l$ – условию (5.3).

Покажем далее, что при $t \geq \bar{t} > 0$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} \qquad (5.6), \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} \qquad (5.7),$$

где $u_n(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, то она ограничена: $|\varphi(x)| \leq M, \quad x \in [0,l]$. Тогда

$|C_n| = \frac{2}{l}\left|\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\right| \leq 2M$. При $t \geq \bar{t}$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| \le 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}},$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| \le 2M\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}}.$$

Мажорантные ряды имеют вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}}$, где N – некоторая константа, для ряда (5.6) равная $N = 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$, для ряда (5.7) равная $N = 2M\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$.

Сходимость мажорантного ряда следует из признака Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2(2n+1)\bar{t}} = 0$. Ряды (5.6) и (5.7) сходятся равномерно и, следовательно, ряд (5.4) можно дифференцировать почленно в области q_l.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x,t)$ представимая рядом (5.4) с коэффициентами (5.5), является классическим решением начально – краевой задачи (5.1) – (5.3). Теорема доказана.

§ 6. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

Постановка задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t)\in q, \tag{6.1}$$

где $q = \{(x,t): \ x\in R^1, t>0\}$, $\bar{q} = \{(x,t): \ x\in R^1, t\ge 0\}$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in R^1, \tag{6.2}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции, $u(x,t)$ – искомое решение задачи.

Определение. Классическим решением задачи (6.1) – (6.2) называется функция $u(x,t)$, определённая и непрерывная вместе со своими производными u_t и u_{xx} в q, удовлетворяющая уравнению (6.1) в q, непрерывная по t в $\bar{q}$ и удовлетворяющая условию (6.2).

Замечание 1. Для этой задачи пользоваться принципом максимума нельзя, так как область неограниченная.

Замечание 2. При решении задачи на бесконечной прямой существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области, т.е. существование такого M, что $|u(x,t)| < M$ для всех точек $(x,t)\in\bar{q}$.

Теорема единственности.

Задача (6.1) – (6.2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\bar{q}$.

Доказательство.

Предположим, что существуют два ограниченных решения $u_i(x,t)$, $i=1,2$, которые удовлетворяют задаче (6.1) – (6.2). Введём функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, не равную тождественно нулю. В силу линейности задачи (6.1) – (6.2) функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородной задаче Коши:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t)\in q, \tag{6.3}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x\in R^1. \tag{6.4}$$

Условие ограниченности для функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ даёт условие ограниченности для функции $v(x,t)$:

$|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \le 2M$, где

$|u_1(x,t)| \le M$, $|u_2(x,t)| \le M$. Таким образом, функция $v(x,t)$ является решением задачи (6.3) – (6.4) и ограничена в области $\bar{q}$. Покажем, что $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in q$. Выберем в полуплоскости q линии $|x| = L$ и $t = T$ и будем рассматривать ограниченную область q_L: $q_L = [-L, L] \times (0, T]$, $\bar{q}_L = [-L, L] \times [0, T]$. Введём вспомогательную функцию $w(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$.

Функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению $w_t = a^2 w_{xx}$. Положим $t = 0$, тогда $w(x,0) = \frac{2Mx^2}{L^2} \ge |v(x,0)| = 0$. Пусть $|x| = L$, тогда $w(\pm L,t) = 2M + \frac{4Ma^2 t}{L^2} \ge 2M \ge |v(\pm L,t)|$. Так как область q_L ограничена, внутри этой области функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности, а на границе выполняются условия $|v(x,0)| \le w(x,0)$ и $|v(\pm L,t)| \le w(\pm L,t)$, то к функциям $v(x,t)$ и $w(x,t)$ можно применить следствие из принципа максимума: $|v(x,t)| \le w(x,t)$, $(x,t) \in \bar{q}_L$, или $-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \le v(x,t) \le \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$. Зафиксируем точку $(x,t) \in \bar{q}_L$ и перейдём к пределу при $L \to \infty$, получим $\lim\limits_{L\to\infty} v(x,t) = 0$. В силу независимости $v(x,t)$ от L и произвольности выбора точки (x,t) получим, что всюду в области $\bar{q}$ $v(x,t) \equiv 0$. Следовательно,

$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ в $\bar{q}$ и решение задачи единственно. Теорема доказана.

Замечание. Если отказаться от условия ограниченности, то можно доказать теорему единственности в классе функций $|\varphi(x)| < N \cdot e^{bx}$, $b > 0$, – с ограниченным степенным ростом.

§ 7. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Перейдём к построению решения задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in q, \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R^1. \tag{7.2}$$

Будем считать, что решение ограничено и воспользуемся методом разделения переменных. Решение будем искать в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, в результате получим уравнение $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$. Поскольку x и t – независимые переменные, имеем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \quad \lambda = const. \tag{7.3}$$

В результате получим уравнения для $X(x)$ и $T(t)$:

$$\begin{cases} X'(x) + \lambda X(x) = 0 \\ |X(x)| < M, \quad M = const \end{cases} \tag{7.4}$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{7.5}$$

Будем искать ненулевые решения уравнений (7.4) и (7.5). Решение уравнения (7.5) имеет вид $T(t) = A \cdot e^{-a^2 \lambda t}$. Здесь A – постоянная, которая, вообще говоря, зависит от λ. Для ограниченности решения потребуем $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$. Решение уравнения (7.4) имеет вид $X(x) = B_1 \cdot e^{i\sqrt{\lambda}x} + B_2 \cdot e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. Здесь B_1 и B_2 – постоянные, которые зависят от λ. Для ограниченности решения нужно, чтобы $\operatorname{Im}\lambda = 0$, т.е. $0 \le \lambda = k^2$, $k \in R^1$. Следовательно, имеем решения

$$\begin{cases} X(x) = B(k) \cdot e^{ikx}, & k \in R^1, \quad x \in R^1 \\ T(t) = A(k) \cdot e^{-a^2k^2t}, & t > 0 \end{cases}$$

$$u_k(x,t) = C(k) \cdot e^{ikx - a^2k^2t}, \quad C(k) = A(k) \cdot B(k), \quad k \in R^1.$$

Функция $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) \cdot e^{-a^2k^2t + ikx} dk \tag{7.6}$$

будет общим решением уравнения (7.1), если этот несобственный интеграл, зависящий от x и t, сходится в области q к непрерывной функции $u(x,t)$, и существуют частные производные u_t и u_{xx}, которые можно вычислять под знаком интеграла. Константа $C(k)$ находится из условия (7.2):

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) \cdot e^{ikx} dk. \tag{7.7}$$

Соотношение (7.7) является разложением заданной функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье даёт

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-ik\xi} d\xi. \tag{7.8}$$

Подставим формулу (7.8) в (7.6) и поменяем порядок интегрирования, тогда получим

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2t + ik(x-\xi)} dk \right\} \varphi(\xi) d\xi \tag{7.9}$$

Вычислим интеграл $J(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2k^2 + ik\alpha} dk$, который является внутренним интегралом в формуле (7.9) при $\beta^2 = a^2t$, $\alpha = x - \xi$. Для этого вычислим его производную по α:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} ike^{-\beta^2k^2 + ik\alpha} dk = -\frac{i}{2\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\alpha} d\left(e^{-\beta^2k^2}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2\beta^2} e^{ik\alpha - \beta^2k^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i}{2\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha e^{-\beta^2k^2 + ik\alpha} dk = -\frac{\alpha}{2\beta^2} J(\alpha,\beta).$$

Следовательно, для $J(\alpha,\beta)$ получили дифференциальное уравнение: $\frac{dJ(\alpha,\beta)}{d\alpha} + \frac{\alpha}{2\beta^2} J(\alpha,\beta) = 0$. Его решение имеет вид

$$J(\alpha,\beta) = C(\beta) \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}},$$

$$C(\beta) = J(0,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2k^2} dk = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}.$$

Отсюда $J(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}$. Подставляя это в формулу (7.9), получим решение задачи Коши:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Определение. Функция $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ называется функцией Грина или фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Интеграл

$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ называется интегралом Пуассона.

Рассмотрим свойства функции Грина:

1. Функция $G(x,\xi,t)$ определена при $t>0$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности.
2. Функция $G(x,\xi,t)$ положительна при любых $x,\xi\in(-\infty,\infty)$ и любом $t>0$.
3. При $t=0$ функция $G(x,\xi,t=0)$ имеет неопределенность в точке $x=\xi$: $\lim\limits_{t\to 0+} G(\xi,\xi,t)=+\infty$.
4. Функция $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет принципу взаимности $G(x,\xi,t)=G(\xi,x,t)$.

§ 8. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

Теорема существования решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.

Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная функция на числовой прямой: $\varphi(x)\in C$, $|\varphi(x)|<M$, $x\in R^1$. Тогда формула $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ определяет при $(x,t)\in\overline{q}$ классическое решение задачи (7.1) – (7.2).

Доказательство.

Докажем существование и ограниченность функции $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$. Сделаем замену

переменных $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, $\xi=2a\sqrt{t}z+x$. В результате получим:

$$|u(x,t)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(x+2za\sqrt{t}\right)\right|e^{-z^2}dz\le\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=M.$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ существует и ограничена.

Чтобы доказать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, используем так называемый обобщенный принцип суперпозиции:

если функция $v(x,t,\alpha)$ по переменным x,t удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению $L[v]=0$ при любом α, то и функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x,t,\alpha)\cdot d\alpha$ удовлетворяет этому уравнению: $L[u]=0$.

Из обобщенного принципа суперпозиции непосредственно следует, что функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности.

Для применимости обобщенного принципа суперпозиции достаточно доказать, что интеграл, полученный формальным дифференцированием функции $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ по x и t, сходится равномерно. Докажем равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$. (8.1)

Так как $\dfrac{\partial G}{\partial t}=-\dfrac{1}{2t}G(x,\xi,t)+\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}G(x,\xi,t)$, то нужно доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\left\{-\frac{1}{2}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\frac{\varphi(\xi)}{t}d\xi \tag{8.2}$$

в области $\overline{q}_\varepsilon=R^1\times[\varepsilon,T]$. Сделаем замену переменных $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, тогда получим интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(x,x+2a\sqrt{t}z,t)\left\{-\frac{1}{2}+z^2\right\}\frac{2a\sqrt{t}\varphi(z)}{t}dz=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi(z)}{t}e^{-z^2}dz.$$

Проведём мажорантную оценку для этого интеграла в области $\overline{q}_\varepsilon$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi(z)}{t}e^{-z^2}dz\right|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|z^2-\frac{1}{2}\right|\frac{|\varphi(z)|}{t}e^{-z^2}dz<$$

$$<\frac{M}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(z^2+\frac{1}{2}\right)e^{-z^2}dz.$$

Интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(z^2+\frac{1}{2}\right)e^{-z^2}dz$ абсолютно сходится, следовательно, интеграл (8.2) равномерно сходится в области $\overline{q}_\varepsilon$. Аналогично доказывается равномерная сходимость интеграла $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}G_{xx}(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет

однородному уравнению теплопроводности в области $\overline{q}_\varepsilon$, а в силу произвольности выбора ε однородное уравнение теплопроводности будет выполняться в области q.

Осталось доказать, что функция $u(x,t)$ непрерывно примыкает к граничной функции $\varphi(x)$. Сделаем замену $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, получим

$u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\varphi(x+2az\sqrt{t})dz$. Так как подынтегральная функция мажорируется функцией $\dfrac{M}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}$, интеграл от которой сходится, то интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}\varphi(x+2az\sqrt{t})dz$ сходится равномерно. В силу непрерывности подынтегральной функции можно осуществить предельный переход под знаком интеграла, т.е. $\lim\limits_{t\to0}u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\varphi(x)$. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{q}$ и непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$. Теорема доказана.

§ 9. Метод функции Грина.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения $u_t=a^2u_{xx}$, $(x,t)\in q_l$, с однородными граничными условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$, $t>0$, и начальным условием $u(x,0)=\varphi(x)$, $x\in(0,l)$. Решение этой задачи строится методом разделения переменных и представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad (9.1)$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi, \quad n=1,2,\ldots.. \qquad (9.2).$$

Преобразуем полученное решение, подставляя (9.2) в (9.1) и меняя порядок интегрирования:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]\varphi(\xi)d\xi.$$

Введём обозначение

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi, \qquad (9.3)$$

тогда решение получим в виде

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)d\xi \qquad (9.4).$$

Определение. Функция $G(x,\xi,t)$, определяемая формулой (9.3), называется функцией Грина для первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

Рассмотрим краевую задачу для ограниченного стержня с источником тепла, т.е. будем искать решение неоднородного уравнения теплопроводности

$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$, $(x,t)\in q_l$, с нулевыми граничными условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$, $t>0$, и нулевым начальным условием $u(x,0)=0$, $x\in(0,l)$.

С помощью функции Грина решение этой задачи представимо в виде

$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau$, где функция $G(x,\xi,t-\tau)$ определяется по формуле (9.3).

Замечание 1. Если уравнение и начальное условие неоднородные, то решение задачи

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad (x,t)\in q_l,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l)$$
$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t>0$$

можно представить в виде суммы $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$, где функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$u_{1t}=a^2u_{1xx},\quad (x,t)\in q_l,$$
$$u_1(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l)$$
$$u_1(0,t)=0,\quad u_1(l,t)=0,\quad t>0,$$

а функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$u_{2t}=a^2u_{2xx}+f(x,t),\quad (x,t)\in q_l,$$
$$u_2(x,0)=0,\quad x\in(0,l)$$
$$u_2(0,t)=0,\quad u_2(l,t)=0,\quad t>0.$$

Замечание 2. Если кроме неоднородности в уравнении и начальном условии ещё и граничные условия неоднородные, т.е.

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad (x,t)\in q_l,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l)$$
$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad t>0,$$

то решение задачи будем искать в виде $u(x,t)=v(x,t)+U(x,t)$. Потребуем, чтобы функция $U(x,t)$ удовлетворяла условиям $U(0,t)=\mu_1(t)$, $U(l,t)=\mu_2(t)$. Эти условия определяют функцию $U(x,t)$ неоднозначно. В качестве этой функции возьмём функцию, линейную по x, т.е.

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x-l}{l}(\mu_1(t)-\mu_2(t)).$$

Теперь перепишем краевую задачу для функции $v(x,t)$:

$$v_t=a^2v_{xx}+F(x,t),$$
$$F(x,t)=f(x,t)-U_t\,,\quad (x,t)\in q_l\,,$$
$$v(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x)-U(x,0),\quad x\in(0,l)$$
$$v(0,t)=0\,,\quad v(l,t)=0,\quad t>0\,.$$

Получили задачу, которая рассматривалась в замечании 1.

§ 10. Интегральные тождества. Доказательства теорем единственности для начально – краевых задач.

Теорема единственности решения краевой задачи I типа была доказана на основе принципа максимума. Теоремы единственности решений краевых задач II и III типов докажем с использованием интегральных тождеств.

Рассмотрим уравнение $u_t=a^2u_{xx}$, $(x,t)\in[0,l]\times[0,\infty)$. Пусть функция $u(x,t)$ является решением этого уравнения в замкнутой области.

Введём квадратичный функционал $J(t)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^l u^2(x,t)dx$.

Вычислим производную от этого функционала по переменной t:

$$\frac{dJ}{dt}=\int\limits_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx=a^2\int\limits_0^l u\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx=\left(a^2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}-a^2\int\limits_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx.$$

В результате получим интегральное тождество:

$$\int\limits_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}dx=\left(a^2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}-a^2\int\limits_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx. \qquad (10.1)$$

Перейдём теперь к трёхмерному случаю: ограниченная область $\Omega\in R^3$. По аналогии введём однопараметрический функционал $J(t)=\dfrac{1}{2}\iiint\limits_\Omega u^2d\tau$; где $d\tau$ – элемент объёма. Вычислим производную $\dfrac{dJ}{dt}$, используя при этом, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2\Delta u$ в замкнутой области: при $(M,t)\in\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ получим

$$\frac{dJ}{dt}=\iiint\limits_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau=a^2\iiint\limits_\Omega u\Delta u\,d\tau=a^2\iiint\limits_\Omega u\,div\,grad\,u\,d\tau.$$

Далее воспользуемся тождеством $div(u\,grad\,u)=u\,div(grad\,u)+(grad\,u)^2$:

$$\iiint\limits_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau=a^2\iiint\limits_\Omega div(u\,grad\,u)d\tau-a^2\iiint\limits_\Omega(grad\,u)^2d\tau.$$

Теперь воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского $\iiint\limits_\Omega div(u\,grad\,u)d\tau=\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$, где поверхность S ограничивает область Ω, а $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к S. В результате получим интегральное тождество:

$$\iiint_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}d\tau = a^2\iint_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - a^2\iiint_{\Omega}(grad\, u)^2 d\tau, \qquad (10.2)$$

где функция $u(x,t)\in C^1$.

Теперь перейдём к начально – краевым задачам. Рассмотрим одномерный случай:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\right)\bigg|_{x=0} = \chi_1(t), \left(\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2 u\right)\bigg|_{x=l} = \chi_2(t), \quad t>0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in(0,l).$$

Докажем единственность решения этой задачи. Допустим, что существуют два решения этой задачи: $u_i(x,t)$, $i=1,2$. Тогда рассмотрим функцию $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Функция $v(x,t)$ будет удовлетворять задаче

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\alpha_1\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_1 v\right)\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(\alpha_2\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_2 v\right)\bigg|_{x=l} = 0, \quad t>0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,l).$$

Пусть $v(x,t)$ – классическое решение этой задачи. Введём функционал $J(t)=\frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,t)dx$. Воспользуемся интегральным тождеством (10.1). Если рассматривать краевую задачу I или II типа, то $\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0}^{x=l} = 0$. Тогда из интегрального тождества (10.1) получаем

$\frac{dJ}{dt} = -a^2\int_0^l\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx$. Следовательно, $\frac{dJ}{dt}\le 0$ для любого $t>0$. Если $t=0$, то $v(x,0)=0$, т.е. $J(0)=0$. Так как функционал $J(t)$ положителен, убывает по t и $J(0)=0$, то $J(t)\equiv 0$. Следовательно, краевые задачи I и II типа имеют единственное решение.

При рассмотрении третьей краевой задачи мы можем записать граничные условия в виде $\frac{\partial u}{\partial x}+hu=\eta(t)$, где h- заданная постоянная. Таким образом, третья краевая задача ставится следующим образом:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-h_1 u\right)\bigg|_{x=0} = \eta_1(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+h_2 u\right)\bigg|_{x=l} = \eta_2(t), \quad t>0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in(0,l).$$

Теорема.

Если $h_1\ge 0$, $h_2\ge 0$, то третья краевая задача имеет единственное решение.

Доказательство.

Пусть существуют два решения $u_i(x,t)$, $i=1,2$. Тогда функция $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (x,t)\in q_l,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}-h_1 v\right)\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}+h_2 v\right)\bigg|_{x=l} = 0, \quad t>0,$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,l).$$

Следовательно, $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1 v\big|_{x=0}$, $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = -h_2 v\big|_{x=l}$.

Введём функционал $J(t) = \frac{1}{2}\int_0^l v^2(x,t)dx$ и воспользуемся интегральным тождеством (10.1):

$\frac{dJ}{dt} = -a^2 h_2 v^2\big|_{x=l} - a^2 h_1 v^2\big|_{x=0} - a^2\int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \le 0$. Так как $v(x,0)=0$, то $J(0)=0$. Т.е. функционал $J(t)$ положителен, убывает и $J(0)=0$. Следовательно, $J(t)\equiv 0$ и $v(x,t)=0$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим трехмерный случай:

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,t),\quad M\in\Omega,\quad t>0,$$
$$u(M,t)\big|_{t=0} = \varphi(M),\quad M\in\Omega,$$
$$\left.\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P)\right)\right|_{P\in S} = \eta(P).$$

Здесь уравнение рассматривается в ограниченной области Ω с гладкой границей S.

Теорема.

Если коэффициент $h(P)\ge 0$, $P\in S$, то третья начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в пространственной области Ω имеет единственное классическое решение.

Доказательство.

Пусть существуют два решения $u_i(M,t)$, $i=1,2$, $M\in\overline{\Omega}$, $t>0$. Введём функцию $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$, которая будет удовлетворять задаче

$$v_t = a^2\Delta v,\quad M\in\Omega,\quad t>0,$$
$$v(M,t)\big|_{t=0} = 0,\quad M\in\Omega,$$
$$\left.\left(\frac{\partial v(P)}{\partial n} + h(P)v(P)\right)\right|_{P\in S} = 0.$$

Введём квадратичный функционал $J(t) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega v^2 d\tau \ge 0$,

$J(0)=0$. $\frac{dJ}{dt} = a^2\iint_S v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - a^2\iiint_\Omega (grad\, v)^2 d\tau$.

Так как $\left.\frac{\partial v(P,t)}{\partial n}\right|_{P\in S} = -h(P)v(P,t)$, то

$\frac{dJ}{dt} = -a^2\iint_S h(P)v^2 d\sigma - a^2\iiint_\Omega (grad\, v)^2 d\tau \le 0$,

следовательно $J(t)\equiv 0$ и $v(M,t)=0$. Теорема доказана.

Глава. 2. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

§ 1. Уравнения Лапласа и Пуассона.

Пусть температура в области Ω $u(M)$ зависит от точки M и не зависит от времени t, т.е. тепловое поле в Ω стационарно. В предыдущей главе было показано, что температура $u(M,t)$ нестационарного теплового поля удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t = a^2\Delta u + f(M,t)$, причем, если тепловые источники отсутствуют, то $f(M,t)=0$. Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(M)$, не меняющееся с течением времени, $\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$ и, следовательно, удовлетворяющее уравнению $\Delta u = 0$, которое называется уравнением Лапласа. При наличии источников тепла получаем уравнение $\Delta u = -f(M)$, которое называется уравнением Пуассона. Уравнения Лапласа и Пуассона относятся к уравнениям эллиптического типа.

Рассмотрим некоторую область пространства Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S. Задача о стационарном распределении температуры $u(M)$ внутри области Ω формулируется следующим образом: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u = -f(M)$ в Ω и граничному условию одного из следующих типов:

I. $u(P)=\mu(P),\quad P\in S$, (первая краевая задача)

II. $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S} = \nu(P)$, (вторая краевая задача)

III. $\alpha\frac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta u(P) = \chi(P),\quad P\in S$, (третья краевая задача), где $\alpha+\beta\neq 0$, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, μ, ν, α, β, χ – заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции $u(M)$ по внешней нормали к поверхности S.

Первую краевую задачу называют задачей Дирихле, а вторую – задачей Неймана. Изучая именно третью краевую задачу (а не первую и не вторую), будем предполагать, что $\alpha(P)\neq 0$ всюду на S. Тогда краевое условие $\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \chi$ можно записать в виде $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = \eta$, где $h = \frac{\beta}{\alpha}$, $\eta = \frac{\chi}{\alpha}$.

Если ищется решение задачи в области Ω, внутренней (внешней) к поверхности S, то задачу называют внутренней (внешней) краевой задачей.

В декартовой системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta_{(x,y,z)}u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

в сферической ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$)

$$\Delta_{(r,\theta,\varphi)}u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + $$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

в цилиндрической $(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z)$ –

$$\Delta_{(r,\varphi,z)}u(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Аналогично ставятся задачи в плоской области D, границей которой является кривая γ. Такие задачи описывают стационарное распределение температуры $u(M)$ в пластине D. В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид $\Delta_{(x,y)}u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в декартовой системе координат, или $\Delta_{(r,\varphi)}u(r,\varphi) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ – в полярной $(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi)$.

§ 2. Гармонические функции. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(M)$, которая в области Ω удовлетворяет уравнению Лапласа, называется гармонической в Ω функцией.

Замечание. Если нас интересуют гармонические функции, которые являются решениями краевых задач для уравнения Лапласа, то надо дополнительно указать их свойства на границе S. В задаче Дирихле искомая функция $u(M)$ должна быть непрерывной в замкнутой области $\overline{\Omega}$, т.е. $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$; в задаче Неймана $u(M)$ должна иметь нормальные производные на S. При

этом не надо требовать, чтобы функция $u(M)$ была гармоничной на S.

Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью S в R^3. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка в Ω. Найдём решение уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Введём сферическую систему координат (r,θ,φ) с центром в точке $M_0(r_0,\theta_0,\varphi_0)$. Такое решение будет обладать сферической симметрией, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Следовательно, будет выполняться уравнение $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{du}{dr}\right) = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $u(r) = \dfrac{C_1}{r} + C_2$, где $r = R_{MM_0}$. Решение $u(M,M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Это гармоническая функция переменной M, определённая всюду в R^3, кроме точки $M = M_0$.

В двумерном случае введём полярную систему координат (r,φ) с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Найдём решение уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, и будет выполняться уравнение $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du}{dr}\right) = 0$. Его общее решение имеет вид $u(r) = C_1 \ln \frac{1}{r} + C_2$, где $r = R_{MM_0}$.

Функция $u(M, M_0) = \ln \frac{1}{R_{MM_0}}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.

Замечание. Можно привести сколько угодно примеров гармонических функций. Например, любая линейная функция $u(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ гармонична в R^3.

Фундаментальным решением уравнения Лапласа называют такую гармоническую функцию, которая имеет определённого вида особенность в единственной точке M_0.

§ 3. Постановка краевых задач.

Внутренняя задача Дирихле.

Пусть S – замкнутая, достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область Ω. Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и принимает на границе S заданные значения: $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$. Таким образом, мы ищем функцию $u(M)$, гармоничную внутри Ω. Требование гармоничности функции $u(M)$ на границе излишне. Условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области необходимо для единственности решения задачи. Поэтому требуем $\mu \in C(S)$. В этом случае функция $u(M)$ называется классическим решением задачи. $u(M) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\mu \in C(S)$.

Внутренняя задача Неймана.

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, её нормальная производная принимает на границе заданные значения $\left.\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{P \in S} = \nu(P)$, $P \in S$. $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\nu \in C(S)$.

Внутренняя третья краевая задача.

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, на границе удовлетворяет условию

$\alpha \frac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta u(P) = \chi(P), P \in S, \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0$.

$u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\chi \in C(S)$.

Внешние краевые задачи для трех и двух независимых переменных ставятся по-разному.

Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть Ω' – область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности S.

Внешняя задача Дирихле.

Требуется найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области Ω', непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$, принимающую на границе заданные значения $u(M) = \mu(M)$, $M \in S$ и равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности. Стремление к нулю функции $u(M)$ на бесконечности необходимо для единственности решения задачи.

Если рассматривать случай двух переменных, то стремление к нулю функции на бесконечности нужно заменить на условие ограниченности функции на бесконечности.

Внешние краевые задачи II и III типа ставятся аналогично.

Замечание. В настоящем курсе мы рассматриваем только **классические** решения, хотя многие практические задачи приводят к необходимости обобщения этого понятия на случай, когда функция $u(M)$ и краевые условия не удовлетворяют сформулированным выше требованиям.

§ 4. Первая и вторая формулы Грина. Интегральное представление функции в ограниченной области (третья формула Грина).

Пусть в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, заданы две функции $u(M)$ и $v(M)$: $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Функции u, v – произвольные, не обязательно гармонические. Тогда в области Ω справедлива первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\, d\tau = \iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{\Omega}(grad\, u \cdot grad\, v)d\tau . \qquad (4.1)$$

Доказательство. Вспомним теорему Остроградского – Гаусса: Если $\vec{A}$ – векторное поле, то $\iiint\limits_{\Omega} div\, \vec{A}\, d\tau = \iint\limits_{S} A_n d\sigma$, где A_n – проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ к границе S. В качестве векторного поля $\vec{A}$ можно взять $\vec{A} = v(M)\cdot grad\, u(M)$.

$div(v \cdot grad\, u) = v \cdot div(grad\, u) + (grad\, v \cdot grad\, u) =$
$= v \cdot \Delta u + (grad\, v \cdot grad\, u)$, $\Delta u = div(grad\, u)$. Отсюда $v \cdot \Delta u = div(v \cdot grad\, u) - (grad\, v \cdot grad\, u)$. Теперь, проинтегрировав по объёму Ω, получим формулу (4. 1).

Если поменять местами функции $u(M)$ и $v(M)$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\, d\tau = \iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{\Omega}(grad\, u \cdot grad\, v)d\tau . \qquad (4.2)$$

Вычтем из формулы (4.1) формулу (4.2), тогда получим вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)d\tau = \iint\limits_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma . \qquad (4.3)$$

Вторая формула Грина симметрична относительно функций $u(M)$ и $v(M)$.

Теперь, используя вторую формулу Грина и фундаментальное решение уравнения Лапласа, получим третью формулу Грина – интегральное представление дважды непрерывно дифференцируемой функции в ограниченной области. Пусть $u(M)$ – произвольная, непрерывная и дважды непрерывно дифференцируемая функция в области Ω, а $v(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$, где $M_0 \in \Omega$.

$u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, а $v(M, M_0)$ имеет особенность, когда точка M совпадает с точкой M_0. Поэтому к функциям $u(M)$ и $v(M, M_0)$ в области Ω применить вторую формулу Грина нельзя. Окружим точку M_0 шаром $K_\varepsilon^{M_0}$

радиуса ε, ограниченного сферой $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M,M_0)$ вторую формулу Грина в области $\Omega\setminus K_\varepsilon^{M_0}$:

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus K_\varepsilon^{M_0}} (u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (4.4)$$

В интеграле $\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$ n – внешняя нормаль к поверхности S, а в интеграле $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$ n – внутренняя нормаль к поверхности сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Учитывая, что $v(P)\Big|_{P\in\Sigma_\varepsilon^{M_0}} = \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial v(P)}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma_\varepsilon^{M_0}} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$, вычислим интеграл по сфере:

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u(P)\frac{\partial v(P,M_0)}{\partial n_P} - v(P,M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u(P)\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)d\sigma_P = *.$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$* = \left(\frac{1}{\varepsilon^2}u(P^*) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n}\right)4\pi\varepsilon^2 =$$

$$= 4\pi\, u(P^*) - 4\pi\varepsilon\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n} = **,$$

где точки P^* и P^{**} принадлежат сфере $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$, тогда сфера $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$ и шар $K_\varepsilon^{M_0}$ будут стремиться к точке M_0, значения $u(P^*)$ и $\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n}$ будут стремиться к $u(M_0)$ и $\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}$; в силу ограниченности $\frac{\partial u}{\partial n}$ и непрерывности функции u получаем $** = 4\pi\, u(M_0)$. Таким образом, формула (4.4) примет вид

$$\iiint\limits_\Omega \frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u\, d\tau_M = 4\pi\, u(M_0) +$$

$$+\iint\limits_S \left(u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right) - \frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P$$

или

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_\Omega \frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M, \qquad (4.5)$$

где $M_0\in\Omega$. Формула (4.5) называется третьей формулой Грина или интегральным представлением функции $u(M)$.

Замечание.

Если точка $M_0\in R^3\setminus\overline{\Omega}$, то точки M и M_0 не могут совпасть. Тогда правая часть формулы (4.5) равна нулю. Если точка M_0 принадлежит гладкой границе области $\overline{\Omega}$, то вырезать эту точку можно сферическим куполом, в пределе это будет полусфера, а её поверхность будет равна $2\pi\varepsilon^2$. Тогда формулу (4.5) можно переписать так:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)d\sigma_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}d\tau_M=\begin{cases}u(M_0), & M_0\in\Omega,\\ 0, & M_0\in R^3\setminus\overline{\Omega},\\ \dfrac{u(M_0)}{2}, & M_0\in S.\end{cases}$$

§ 5. Свойства гармонических функций. Формула среднего значения. Принцип максимума гармонической функции.

1. Если функция $u(M)$ гармонична в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью S, то $\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$.

Доказательство. Положим в первой формуле Грина $v(M)\equiv 1$, тогда получим

$\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\iiint_\Omega v\Delta u\,d\tau-\iiint_\Omega(grad\,v\cdot grad\,u)d\tau=0$, так как $\Delta u=0$ и $grad\,v=0$.

Из доказанного свойства вытекает необходимое условие существования решения задачи Неймана для уравнения Лапласа:

решение задачи $\Delta u=0$, $M\in\Omega$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=v(P)$

может существовать только если $\iint_S v(P)d\sigma=0$. Условие разрешимости аналогичной задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u=-f(M),\quad M\in\Omega,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=v(P)$$

выглядит так: $\iiint_\Omega f(M)d\tau+\iint_S v(P)d\sigma=0$. Это условие так же вытекает из первой формулы Грина, если положить $v(M)\equiv 1$.

2. Формула среднего значения.

Если $u(M)$ – гармоническая функция в области Ω, то для любой точки $M\in\Omega$ имеет место представление $u(M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a^M}u(P)d\sigma_P$, где Σ_a^M – сфера радиуса a с центром в точке M, целиком лежащая в Ω, т.е. $\Sigma_a^M\subset\Omega$.

Доказательство.

Применим третью формулу Грина к шару K_a^M с поверхностью Σ_a^M:

$u(M)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_a^M}\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)-\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)d\sigma_P$. Так как $\left.\frac{1}{R_{MP}}\right|_{P\in\Sigma_a^M}=\frac{1}{a}$, $\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right|_{P\in\Sigma_a^M}=-\frac{1}{a^2}$, то, учитывая $\iint_{\Sigma_a^M}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0$, получим $u(M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a^M}u(P)\sigma_P$.

3. Существование всех производных у гармонической функции.

Доказательство этого свойства следует из третьей формулы Грина. При $M \in \Omega$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифференцировать по координатам точки M любое число раз.

Замечание.

Гармоническая функция во всех внутренних точках Ω аналитична, т.е. в окрестности любой точки $M \in \Omega$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд. При этом радиус сходимости ряда не меньше, чем расстояние до границы S.

4. Принцип максимума гармонической функции.

Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью S, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

Теорема.

Пусть функция $u(M)$ гармонична в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Тогда она достигает своего максимального и минимального значения на границе области $\overline{\Omega}$, т.е. $\max\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \max\limits_{M \in S} u(M)$, $\min\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M) = \min\limits_{M \in S} u(M)$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса функция $u(M)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\overline{\Omega}$, достигает своего максимального значения. Обозначим $A = \max\limits_{M \in \overline{\Omega}} u(M)$. Предположим, что это значение достигается в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, т.е. внутри области Ω. Рассмотрим сферу $\Sigma_a^{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую в области Ω. Для этой сферы напишем формулу среднего значения:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(P)\, d\sigma_P \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(M_0)\, d\sigma_P = u(M_0). \tag{7.1}$$

Таким образом, возможно только равенство. Это значит, что в каждой точке сферы $\Sigma_a^{M_0}$ значение функции $u(M)$ равно A, т.е. $u(M)\big|_{M \in \Sigma_a^{M_0}} = A$; в противном случае равенство в формуле (7.1) не будет выполняться.

Теперь рассмотрим сферу $\Sigma_{a_1}^{M_1}$ с центром в точке $M_1 \in \Sigma_a^{M_0}$ радиуса a_1, целиком лежащую в области Ω. Аналогично предыдущему покажем, что $u(M)\big|_{M \in \Sigma_a^{M_1}} = u(M_1) = u(M_0) = A$. Можно построить такую последовательность сфер $\Sigma_{a_n}^{M_n}$ с центрами в точках $M_n \in \Omega$ радиусов a_n, целиком лежащих в Ω, что последовательность точек $\{M_n\}$ будет сходиться к точке $\overline{M} \in S$. В силу нашего построения $u(M_n) = u(M_0) = A$ для любого n. Так как функция $u(M)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, то последовательность $\{u(M_n)\}$ будет сходиться к $u(\overline{M})$, откуда следует, что $u(\overline{M}) = A$. Теорема доказана.

Замечание 1.

Аналогично доказывается теорема о минимальном значении гармонической функции: вместо функции $u(M)$ надо рассмотреть функцию $v(M) = -u(M)$.

Замечание 2.

Метод, которым была доказана теорема называется методом выметания.

Замечание 3.

Фактически доказано более сильное утверждение: функция $u(M)$, гармоническая в Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$, принимающая максимальное значение в Ω, является константой в $\overline{\Omega}$. Т.е. из всех гармонических функций только постоянная функция может достигать экстремального значения внутри области Ω.

Замечание 4.

Для функций двух переменных все указанные свойства сохраняются, только теорема о среднем значении запишется так: $u(M_0)=\dfrac{1}{2\pi a}\int\limits_{L_a^{M_0}} u(P)dl_P$, где

$L_a^{M_0}$ – окружность радиуса a с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Следствие.

Если две гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $u(M)\big|_{M\in S}\le v(M)\big|_{M\in S}$, то всюду в Ω $u(M)\le v(M)$.

Доказательство.

Надо рассмотреть гармоническую функцию $w(M)=v(M)-u(M)$, которая будет непрерывной в $\overline{\Omega}$, $w(M)\big|_{M\in S}\ge 0$. В силу принципа максимального значения $w(M)\ge 0$ всюду в Ω.

§ 6. Единственность и устойчивость решения внутренней задачи Дирихле.

Функция $u(M)$ называется решением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, если $u(M)$ определена и непрерывна в $\overline{\Omega}$, гармонична в Ω, а на

границе S принимает заданные значения: $u(P)\big|_{P\in S}=\mu(P)$, $\mu\in C(S)$.

Замечание 1. Не требуем гармоничности функции на границе.

Замечание 2. Если отбросить условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то нарушится единственность решения задачи, так как любая функция вида $u(M)=\begin{cases} const, & M\in\Omega,\\ \mu(M), & M\in S\end{cases}$ будет решением задачи.

Теорема единственности решения задачи Дирихле. Задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ будет удовлетворять условиям

$$v\in C(\overline{\Omega});\quad \Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega;\quad v(P)\big|_{P\in S}=0.$$

Функция $v(M)$ является решением задачи Дирихле с однородными граничными условиями. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает своего максимального и минимального значений. Если $v(M)>0$ хотя бы в одной точке области Ω, то она достигает своего максимального значения внутри области Ω, но это невозможно в силу принципа максимума, так как $v(M)\big|_{M\in S}=0$. Аналогично доказывается, что $v(M)$ не может быть меньше нуля внутри Ω. Следовательно, $v(M)\equiv 0$. Теорема доказана.

Перейдем к определению устойчивости решения задачи Дирихле.

Определение. Задача называется устойчивой, если малым изменениям входной информации соответствует малое изменение решения.

Рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u_i(M)=0, \quad M\in\Omega,$$

$$u_i(P)\big|_{P\in S}=\mu_i(P), \quad i=1,2.$$

Введём понятие расстояния между функциями:

$$\rho(\mu_1,\mu_2)=\|\mu_1-\mu_2\|_{C(S)}=\max_{P\in S}|\mu_1(P)-\mu_2(P)|,$$

$$\rho(u_1,u_2)=\|u_1-u_2\|_{C(\overline{\Omega})}=\max_{M\in\overline{\Omega}}|u_1(M)-u_2(M)|.$$

Используя $\rho(\mu_1,\mu_2)$ и $\rho(u_1,u_2)$, определим понятие устойчивости для задачи Дирихле.

Определение. Решение задачи Дирихле называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $\rho(\mu_1,\mu_2)<\delta(\varepsilon)$ следует $\rho(u_1,u_2)<\varepsilon$.

Теорема. Для задачи Дирихле, если $\rho(\mu_1,\mu_2)\le\varepsilon$, то $\rho(u_1,u_2)\le\varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что функция $u(M)\equiv\varepsilon$ гармонична и всюду положительна. Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. Из принципа максимума следует, что если на границе области $|v|_{P\in S}\le\varepsilon$, то $|v(M)|\le\varepsilon$ всюду в $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Замечание. Если функция $\mu(P)$, $P\in S$, имеет разрывы I рода, то надо отказаться от первого условия в постановке задачи Дирихле. Т.е. если $\mu-$ кусочно-непрерывная функция, то задача Дирихле будет ставиться так:

найти функцию $u(M)$, гармоничную внутри Ω, $u(P)\big|_{P\in S}=\mu(P)$, где P - точки непрерывности функции μ, и $|u|\le A$.

Для такой обобщенной постановки задачи остаётся справедливой теорема единственности.

§ 7. Внутренняя задача Неймана в пространстве.

Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta u(M)=0, \quad M\in\Omega, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}=\nu(P), \quad P\in S. \tag{7.2}$$

Определение. Классическим решением задачи Неймана называется функция $u(M)$, которая непрерывна вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные второго порядка в открытой области Ω, гармонична в Ω, а её нормальная производная на границе удовлетворяет условию $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}=\nu(P), \quad P\in S$.

Замечание 1. Если нормаль $\vec{n}$ к поверхности S составляет угол α с осью OX, угол β с осью OY и угол γ с осью OZ, то

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Замечание 2. Решение задачи Неймана отличается от решения задачи Дирихле тем, что оно определяется с точностью до константы. Если $u(M)$ – решение задачи Неймана, то $v(M)=u(M)+C$, где $C=const$, – тоже решение той же задачи Неймана. Это легко проверить, если подставить функцию $v(M)$ в задачу (7.1) – (7.2).

Теорема.

Решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной, т.е. если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ – решения одной и той же задачи Неймана, то $u_1(M)-u_2(M)=const$.

Доказательство.

Здесь нельзя воспользоваться принципом максимума, так как неизвестно чему равны значения функции $u(M)$ на границе. Поэтому используем формулы Грина. Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями задачи Неймана (7.1), (7.2). Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$, которая не равна тождественно нулю. $v(M)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$. Функция $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega,$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}=0,\quad P\in S.$$

Очевидно, решением этой задачи является $v(M)=const$. Докажем, что других решений нет. Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint_\Omega v\Delta v d\tau=\iint_S v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint_\Omega(grad\,v\cdot grad\,v)d\tau.$$

Учитывая, что $\Delta v(M)=0$, $M\in S$, и $\left.\frac{\partial v(P)}{\partial n}\right|_{P\in S}=0$, получим $\iiint_\Omega(grad\,v\cdot grad\,v)d\tau=0$, т.е.

$(grad\,v\cdot grad\,v)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2=0$. Так как сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$ всюду в области Ω. Отсюда получаем $v(M)=const$. Теорема доказана.

Необходимым условием разрешимости задачи Неймана является $\iint_S v(P)d\sigma=0$. Это следует из свойства гармонической функции: $\iint_S\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma=0$.

Теперь рассмотрим третью краевую задачу: найти функцию $u(M)$, гармоническую в области Ω и удовлетворяющую граничному условию

$\alpha(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}+\beta(P)u(P)=\chi(P)$, $P\in S$, $\alpha(P)\ge 0$, $\beta(P)\ge 0$, $\alpha(P)+\beta(P)>0$.

Пусть коэффициент $\alpha(P)$ не равен нулю всюду на S. Тогда разделим граничное условие на $\alpha(P)$ и получим задачу

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in\Omega, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=\eta(P),\quad P\in S, \tag{7.4}$$

где функция $h(P)=\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}$ не равна тождественно нулю на S (иначе получим вторую краевую задачу, а не третью), а $\eta(P)=\frac{\chi(P)}{\alpha(P)}$.

Определение. Классическим решением третьей краевой задачи называется функция $u(M)\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (7.3), (7.4).

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. Если функция $h(P)$ неотрицательна всюду на S, не равна тождественно нулю и непрерывна на S, то третья краевая задача не может иметь более одного решения.

Доказательство. Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями задачи (7.3), (7.4). Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega,$$
$$\frac{\partial v(P)}{\partial n}+h(P)v(P)=0,\quad P\in S.$$

Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint\limits_{\Omega} v\Delta v d\tau=\iint\limits_{S} v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_{\Omega}(grad\,v\cdot grad\,v)d\tau.$$

Учитывая, что $\Delta v(M)=0,\quad M\in\Omega$, и $\dfrac{\partial v(P)}{\partial n}+h(P)v(P)=0,\quad P\in S$, получим $\iint\limits_{S} h(P)v^2(P)d\sigma+\iiint\limits_{\Omega}(grad\,v\cdot grad\,v)d\sigma=0$. По условию теоремы $h(P)\geq 0$, поэтому из не отрицательности обоих слагаемых получаем $\iint\limits_{S} h(P)v^2(P)d\sigma=0$, $\iiint\limits_{\Omega}(grad\,v\cdot grad\,v)d\sigma=0$. Отсюда $(grad\,v\cdot grad\,v)=0$, поэтому $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial z}\equiv 0$ в Ω, и $v\equiv const$ в Ω. Из

непрерывности функции $v(M)$ в $\overline{\Omega}$ получаем $v\equiv const$ на S. Но тогда из равенства $\iint\limits_{S} h(P)v^2(P)d\sigma=0$ и условий $h\geq 0$ и h не равно тождественно нулю следует $v\equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Замечание 1. Совершенно аналогично могут быть рассмотрены вторая и третья краевые задачи на плоскости.

Замечание 2. Условие $h(P)\geq 0,\quad P\in S$, существенно. Если $h(P)<0,\quad P\in S$, то можно построить задачу, которая имеет более одного решения. Рассмотрим круг радиуса a (область D с границей γ). Надо найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in D,$$
$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=0,\quad P\in\gamma.$$

Возьмём две функции $u_1\equiv 0$ и $u_2=x$ и подберём $h(P)$ таким образом, чтобы обе они были решениями этой задачи. Запишем задачу в полярной системе координат. Тогда получим $x=r\cdot\cos\varphi$, $u_2=r\cdot\cos\varphi$ и $\dfrac{\partial u_2}{\partial n}=\dfrac{\partial u_2}{\partial r}=\cos\varphi$ (нормаль n к границе γ совпадает с направлением радиуса). Если $h=-\dfrac{1}{a}$, то условие $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=0,\quad P\in\gamma$, превратится в тождество как для функции u_1, так и для функции u_2. Следовательно, из-за выбора $h<0$ мы построили два решения третьей краевой задачи.

§ 8. Внешние краевые задачи в пространстве.

п. 1. Внешняя задача Дирихле.

Рассмотрим область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S в пространстве R^3. Тогда область $\Omega' = R^3 \setminus \overline{\Omega}$ будет внешней к области Ω в R^3, $\overline{\Omega}' = \Omega' \cup S$. Поставим внешнюю задачу Дирихле:

найти функцию $u(M)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega}'$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в открытой области Ω', принимающую на границе области $\overline{\Omega}'$ заданные значения $u(P)\big|_{P\in S} = \mu(P)$, а на бесконечности равномерно стремящуюся к нулю. $u(M) \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega}')$.

Замечание. Условие равномерного стремления к нулю функции $u(M)$ на бесконечности важно для единственности решения задачи.

Пример. Рассмотрим задачу $\Delta u(r) = 0$, $r > a$, $u(r = a) = 1$. Функция $u(r)$ вне шара радиуса a удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границе принимает заданное значение $u(r = a) = 1$. Тогда функции $u_1(r) \equiv 1$ и $u_2(r) = \dfrac{a}{r}$ удовлетворяют и уравнению Лапласа вне шара и граничному условию. Получили два решения поставленной задачи. Если учесть условие на бесконечности, то функция $u_1(r) = 1$ не подходит. Из двух решений $u_1(r) = 1$ и $u_2(r) = \dfrac{a}{r}$ можно построить целое семейство решений $u(r) = \alpha u_1(r) + \beta u_2(r)$, $\alpha + \beta = 1$, которое будет удовлетворять поставленной задаче. Условие $\lim\limits_{r\to\infty} u = 0$

позволяет выделить единственное решение внешней задачи Дирихле.

Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле в пространстве. Внешняя задача Дирихле в пространстве R^3 может иметь только одно решение.

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$

$$u(P) = \mu(P), \quad P \in S,$$

$u(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$.

Введём функцию $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Для $w(M)$ получим задачу

$$\Delta w(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$

$$w(P) = 0, \quad P \in S,$$

$w(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$.

Предположим, что в области Ω' существует точка M_1, в которой $w(M_1) \neq 0$ $(u_1(M_1) \neq u_2(M_1))$. Тогда выберем шар большого радиуса R с границей S_R так, чтобы точка M_1 лежала между поверхностями S и S_R, и чтобы на поверхности S_R выполнялось неравенство $|w(M)| < \varepsilon$ для произвольного малого $\varepsilon > 0$. В замкнутой области, ограниченной поверхностями S и S_R, получили гармоническую функцию $w(M)$; $w(M_1) \neq 0$ и $w(M)\big|_{M\in S} = 0$, $|w(M)|\big|_{M\in S_R} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу принципа максимума $|w(M_1)| < \varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ $w(M_1) = 0$. Поэтому $u_1(M) = u_2(M)$ в области Ω'. Теорема доказана.

Замечание. Внешняя задача Дирихле **на плоскости** ставится по-другому. Условие равномерного стремления функции к нулю на бесконечности надо заменить на условие её ограниченности на бесконечности: существует $N>0$, что $|u(M)|<N$. Требование обращения в нуль функции на бесконечности достаточно для единственности решения, но оно является слишком сильным, так как задача может оказаться вовсе неразрешимой.

Пример. Рассмотрим круг радиуса a с границей γ. Требуется найти стационарное распределение температуры вне γ при условии, что на границе поддерживается постоянная температура: $\Delta u(r)=0$, $r>a$, $u(r)\big|_{r=a}=u_0$. Решение уравнения $\Delta u(r)=0$ имеет вид $u(r)=A+B\ln\frac{1}{r}$. Так как $u(r)\big|_{r=a}=u_0$, то $u_0=A+B\ln\frac{1}{a}$. Из ограниченности решения на бесконечности $B=0$, $A=u_0$ и $u=u_0$. Если потребовать, чтобы решение на бесконечности обращалось в нуль, то задача станет неразрешимой.

п. 2. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области.

Пусть $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Определение. Функция $u(M)$, $M\in R^3$, называется регулярной на бесконечности, если при всех достаточно больших r выполнены неравенства

$$|u|\le\frac{A}{r},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\le\frac{A}{r^2},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\le\frac{A}{r^2},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\le\frac{A}{r^2},\quad A=const.$$

Для регулярных на бесконечности функций справедливы формулы Грина. Рассмотрим некоторую

область $\Omega\subset R^3$, ограниченную поверхностью S. Обозначим через Ω' область, являющуюся внешней к S. $R^3=\Omega\cup S\cup\Omega'$.

Теорема. Пусть функции $u(M)$ и $v(M)$ регулярны на бесконечности и $u,v\in C^2(\Omega')\cap C^1(\overline{\Omega}')$. Тогда для $u(M)$ и $v(M)$ имеет место первая формула Грина.

Доказательство. Вокруг области Ω опишем сферу S_{R_0} радиуса R_0 так, чтобы Ω целиком лежала внутри шара Ω_{R_0}. Обозначим через Ω'_{R_0} шаровой слой, лежащий между поверхностями S_{R_0} и S. Область Ω'_{R_0} ограничена, поэтому в ней можно применить первую формулу Грина для функций $u(M)$ и $v(M)$:

$$\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}}u\Delta v\,d\tau=\iint\limits_{S}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma+\iint\limits_{S_{R_0}}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-$$
$$-\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau\,. \qquad (8.1)$$

Здесь $\bar{n}$ является внешней нормалью к границе области Ω'_{R_0}. Оценим интеграл по поверхности S_{R_0}:

$$\left|\iint\limits_{S_{R_0}}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma\right|=\left|\iint\limits_{S_{R_0}}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)d\sigma_P\right|\le$$
$$\le\iint\limits_{S_{R_0}}|u|\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\cdot|\cos\alpha|+\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\cdot|\cos\beta|+\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\cdot|\cos\gamma|\right)d\sigma_P\le$$
$$\le\iint\limits_{S_{R_0}}\frac{A}{R_0}\left(\frac{A}{R_0^2}+\frac{A}{R_0^2}+\frac{A}{R_0^2}\right)d\sigma_P=\iint\limits_{S_{R_0}}\frac{3A^2}{R_0^3}d\sigma_P=$$
$$=\frac{3A^2}{R_0^3}4\pi R_0^2=\frac{12A^2\pi}{R_0}\,.$$

Так как $\lim\limits_{R_0\to\infty}\frac{12A^2\pi}{R_0}=0$, то $\lim\limits_{R_0\to\infty}\iint\limits_{S_{R_0}}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma=0$.

Теперь рассмотрим интеграл $\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau$ и оценим его подынтегральное выражение:

$$|(grad\,u\cdot grad\,v)|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\cdot\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|\le\frac{3A^2}{R_0^4}.$$

Так как подынтегральное выражение при $R_0\to\infty$ является величиной $O\left(\frac{1}{R_0^p}\right)$, $p>3$, то существует

$$\lim_{R_0\to\infty}\iiint\limits_{\Omega'_{R_0}}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau=\iiint\limits_{\Omega'}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau\ -$$

несобственный интеграл первого рода. Поэтому при $R_0\to\infty$ правая часть формулы (8.1) имеет предел, равный $\iint\limits_{S}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_{\Omega'}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau$.

Следовательно, существует и предел левой части (8.1). Получили формулу

$$\iiint\limits_{\Omega'}u\Delta v d\tau=\iint\limits_{S}u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint\limits_{\Omega'}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau. \qquad (8.2)$$

Она называется первой формулой Грина.

Поменяв местами функции u и v в соотношении (8.2) и вычтя из одного соотношения другое, получим вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega'}(u\Delta v-v\Delta u)d\tau=\iint\limits_{S}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (8.3)$$

Учитывая, что фундаментальное решение $\frac{1}{R_{MM_0}}$ уравнения Лапласа регулярно на бесконечности, получим третью формулу Грина для функции $u(M)$ в области Ω'. При этом нормаль к поверхности S должна быть внешней по отношению к Ω', т.е. направлена внутрь Ω.

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right)d\sigma_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{\Delta u(M)}{R_{M_0M}}d\tau_M.$$

Замечание. Гармоническая в области Ω' функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности.

п. 3. Единственность решений внешней задачи Неймана и третьей краевой задачи.

Пусть снова Ω' – неограниченная область, внешняя к замкнутой поверхности S. В третьей краевой задаче надо найти регулярную гармоническую функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta u(M)=0,\quad M\in\Omega',$$

$$u\in C^1(\overline{\Omega'})\cap C^2(\Omega'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n}+h(P)u(P)=\eta(P),$$

$$P\in S,\quad h(P)\ge0,\quad h(P)\in C(S).$$

Предположим, что функция $h(P)$ не равна тождественно нулю, и будем искать регулярную функцию $u(M)$, т.е. $u(M)$ равномерно стремится к нулю при $M\to\infty$.

Теорема.

Внешняя третья краевая задача имеет единственное классическое решение, если $h(P) \geq 0$ и не равна тождественно нулю на границе области.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения третьей краевой задачи $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в области Ω'. Тогда функция $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$

$$v \in C^1(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega'),$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n} + h(P)v(P) = 0,$$

$$P \in S, \quad h(P) \geq 0, \quad h(P) \in C(S),$$

причём функция $v(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности.

К функции $v(M)$ применим первую формулу Грина в области Ω':

$$\iiint\limits_{\Omega'} v(M)\Delta v(M) d\tau_M = \iint\limits_S v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$

$$- \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M .$$

Пользуясь тем, что $\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega'$, и $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = -h(P)v(P), \quad P \in S$, получим $0 = -\iint\limits_S h(P)v^2(P)d\sigma_P - \iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M$. Так как каждый из интегралов неотрицателен, а и их сумма равна нулю, то

$$\iint\limits_S h(P)v^2(P)d\sigma_P = 0, \tag{8.1}$$

$$\iiint\limits_{\Omega'} (grad\, v \cdot grad\, v) d\tau_M = 0 . \tag{8.2}$$

Из условия (8.2) следует, что $(grad\, v \cdot grad\, v) = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = 0$, т.е. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$, следовательно, $v(M) \equiv const$ в $\overline{\Omega}'$. Из условия (11.1), непрерывности функции v вплоть до границы S и условий $h \geq 0$ и h не равно тождественно нулю следует, что $v(P) \equiv 0$ на S. Поэтому $v(M) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}'$. Следовательно, $u_1(M) \equiv u_2(M)$ в $\overline{\Omega}'$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы мы не использовали условие регулярности функции $v(M)$ на бесконечности, но первая формула Грина в области Ω' верна лишь если функция $v(M)$ регулярна на бесконечности.

Во внешней задаче Неймана надо найти регулярную гармоническую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in \Omega',$$

$$u \in C^1(\overline{\Omega}') \cap C^2(\Omega'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = v(P), \quad P \in S.$$

Будем искать равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности функцию $u(M)$.

Теорема. Внешняя задача Неймана в R^3 имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения задачи Неймана $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в области

Ω'. Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$ Выписывая краевую задачу для функции $v(M)$ как в предыдущей теореме, и применяя к ней первую формулу Грина в области Ω', получим $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$, $M\in\Omega'$, т.е. $v(M)\equiv const$ в Ω'. Так как функция $v(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности, то $v(M)\equiv const=0$, в Ω'. Теорема доказана.

§ 9. Внешние краевые задачи на плоскости.

Для уравнения Лапласа **на плоскости** требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности является жестким, такого решения может не существовать.

Пример. В полярных координатах (r,φ) на плоскости рассмотрим задачу Дирихле вне круга радиуса $a\neq 1$:

$$\Delta u(r)=0,\quad r>a,$$
$$u(r=a)=1.$$

Можно построить два решения этой задачи $u_1(r)\equiv 1$ и $u_2(r)=\dfrac{\ln r}{\ln a}$. Других линейно независимых решений у этой задачи нет, общее решение уравнения $\Delta u(r)=0$ имеет вид $u(r)=C_1+C_2\ln r$. Если потребовать, чтобы функция $u(r)$ равномерно стремилась к нулю на бесконечности, то ни одно из этих решений не подходит, задача не имеет решений. Условие равномерного стремления к нулю на бесконечности надо заменить требованием существования конечного предела решения на бесконечности. Тогда подходит решение $u_1(r)\equiv 1$.

Определение. Функция двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной на бесконечности, если она имеет конечный предел на бесконечности.

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле. Пусть в R^2 имеется ограниченная область D с границей γ и внешней к ней областью D'. $R^2=D\cup\gamma\cup D'$. Тогда внешняя задача Дирихле заключается в нахождении функции $u(x,y)$, непрерывной в области $\overline{D}'=D'\cup\gamma$, гармоничной в области D', удовлетворяющей условию $u(P)=\mu(P)$, $P\in\gamma$, и ограниченной на бесконечности.

Теорема. Внешняя задача Дирихле на плоскости может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$ такие, что

$$\Delta u_i(M)=0,\quad M\in D',\quad u_i\in C(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$
$$u_i(P)=\mu(P),\quad P\in\gamma,\quad \mu(P)\in C(\gamma),$$
$$|u_i(M)|<N,\quad i=1,2,\quad N=const.$$

Предположим, что $u_1(M)\neq u_2(M)$. Введём функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. $v(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0,\quad M\in D',\quad v\in C(\overline{D}')\cap C^2(D'),$$
$$v(P)=0,\quad P\in\gamma,$$
$$|v(M)|<N,\quad N=const.$$

Возьмём внутри области D точку M_0 и построим окружность $C^a_{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую внутри D. Пусть R_{MM_0} – расстояние между точками M и M_0, тогда функция $u_a(M)=\ln\dfrac{R_{MM_0}}{a}$ гармонична в D' и положительна в D', так как $R_{MM_0} > a$. Построим окружность $C^b_{M_0}$ с центром в точке M_0, содержащую границу γ внутри себя.

Введём функцию $u_b(M) = N \dfrac{\ln \dfrac{R_{MM_0}}{a}}{\ln \dfrac{b}{a}}$, $N > 0$, которую будем называть “барьером”. Функция $u_b(M)$ удовлетворяет следующим условиям: $\Delta u_b(M) = 0$, $M \in D''$, где D'' – область, заключенная между границами γ и $C^b_{M_0}$, $u_b(M) > 0$, $M \in \gamma$, и $u_b(M)\big|_{M \in C^b_{M_0}} = N$. Функция $v(M)$ удовлетворяет условиям $\Delta v(M) = 0$, $M \in D''$, $v(M)\big|_{M\in\gamma} = 0$ и $|v(M)| < N, M \in C^b_{M_0}$. $|v(M)| \le u_b(M)$ на границе области D'' и, следовательно, в силу принципа максимума $|v(M)| \le u_b(M)$ всюду в области D''. Фиксируем точку M и устремим b в бесконечность. $\lim\limits_{b\to\infty} u_b(M) = 0$, следовательно, $v(M) = 0$. В силу произвольности выбора точки M получаем, что $v(M) \equiv 0$ в D'. Теорема доказана.

Сформулируем внешние вторую и третью краевые задачи на плоскости.

Внешняя задача Неймана:

$\Delta u(M) = 0$, $M \in D'$, $u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D')$,

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P)$, $P \in \gamma$, n – нормаль к границе γ в точке P,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

Внешняя третья краевая задача:

$\Delta u(M) = 0$, $M \in D'$, $u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D')$,

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P)$, $P \in \gamma$, $\eta, h \in C(\gamma)$, n – нормаль к границе γ в точке P,

функция $h(P)$ не равна тождественно нулю,

функция $u(M)$ регулярна на бесконечности.

Докажем, что для гармоничных в D' функций, регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина.

Лемма. Для гармоничных в D' функций, регулярных на бесконечности, справедливы следующие оценки первых производных:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2} \quad \text{при} \quad r > r_0 .$$

Доказательство. Построим окружность $C^a_{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, содержащую контур γ внутри себя. Введём полярную систему координат (r,φ) с центром в точке M_0. Методом разделения переменных можно доказать, что **регулярное на бесконечности** решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде ряда Фурье

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

(9.1)

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi , \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi ,$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)d\varphi .$$

При $r > a$ ряд сходится абсолютно и равномерно, и его можно дифференцировать почленно. Тогда $\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \le \frac{A}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right| \le \frac{A}{r}$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, то $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}$, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2}$.

Лемма доказана.

Теорема. Для функций, гармоничных в области D' на плоскости и регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина:

$$\iint_{D'} v\Delta u\, ds = \int_\gamma v\frac{\partial u}{\partial n}dl - \iint_{D'}(grad\, u \cdot grad\, v)ds$$ – первая формула Грина,

$$\iint_{D'}(v\Delta u - u\Delta v)ds = \int_\gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dl$$ – вторая формула Грина.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично пространственному случаю. Доказать самостоятельно.

Теорема единственности решения внешней третьей краевой задачи. Если $h(P) \ge 0$ и $h(P)$не равна тождественно нулю, то внешняя третья краевая задача на плоскости

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D', \; u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P), \quad P \in \gamma,$$

может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично пространственному случаю. Доказать самостоятельно.

Теорема. Классическое решение внешней задачи Неймана на плоскости, ограниченное и регулярное на бесконечности, определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Пусть функция $u(M)$ – классическое решение задачи Неймана:

$$\Delta u(M) = 0, \quad M \in D', \; u \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), \quad P \in \gamma,$$

$u(M)$ регулярна на бесконечности.

Пусть функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$– два различных решения поставленной задачи. Введём функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$, которая удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in D', \; v \in C^1(\overline{D}') \cap C^2(D'),$$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n} = 0, \quad P \in \gamma,$$

$v(M)$ регулярна на бесконечности.

Применим к $v(M)$ первую формулу Грина:

$$\iint_{D'} v(M)\Delta v(M)ds = \int_\gamma v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n}dl - \iint_{D'}\|grad\, v(M)\|^2 ds.$$

Так как функция $v(M)$ удовлетворяет поставленной выше задаче, то $\iint_{D'}\|grad\, v(M)\|^2 ds = 0$. Следовательно, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, т.е. $v(M) \equiv const$ в D'. Функция $v(M)$ имеет на бесконечности конечный предел, вообще говоря, не равный нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Для существования решения внешней задачи Неймана необходимо выполнение условия $\int\limits_{\gamma} \nu(P)dl = 0$.

Замечание. Были поставлены и рассмотрены три внешние краевые задачи на плоскости для уравнения Лапласа. Доказанные утверждения справедливы и для уравнения Пуассона $\Delta u = -f$, так как разность двух возможных его решений $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$ является решением той же краевой задачи для уравнения Лапласа.

§ 10. Функция Грина задачи Дирихле. Свойства функции Грина.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(M) = -f(M), \quad M \in \Omega, \quad u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),$$
$$u(P) = \mu(P), \quad P \in S.$$

Запишем интегральное представление решения этой задачи:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \frac{1}{R_{M_0P}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right\} d\sigma_P -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega \frac{\Delta u(M)}{R_{M_0M}} d\tau_M. \qquad (10.1)$$

Пусть функция $v(M)$ гармонична в области Ω и непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M)$ вторую формулу Грина:

$$0 = \iint\limits_S \left\{ v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P -$$

$$- \iiint\limits_\Omega v(M) \Delta u(M) d\tau_M. \qquad (10.2)$$

Сложим формулы (10.1) и (10.2), получим

$$u(M_0) = \iint\limits_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(M_0, P) - u(P) \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_P} \right\} d\sigma_P -$$
$$- \iiint\limits_\Omega G(M_0, M) \Delta u(M) d\tau_M,$$

где $\quad G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0M}} + v(M).$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие $G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$, то

$$u(M_0) = -\iint\limits_S u(P) \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_P} d\sigma_P -$$
$$- \iiint\limits_\Omega \Delta u(M) G(M_0, M) d\tau_M. \qquad (10.3)$$

Определение. Функция $G(M_0, M)$ называется функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если

1. $\quad G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0M}} + v(M)$, где функция $v(M)$ гармонична всюду в области Ω;
2. $\quad G(M_0, P) = 0, \quad P \in S$.

Из определения следует, что функция Грина $G(M_0, M)$ с точностью до гармонической функции v является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Второе условие в определении продиктовано типом граничных условий. Если функция Грина $G(M_0, M)$ существует, то решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона находится в явном виде по формуле

$$u(M_0) = -\iint\limits_S \mu(P)\frac{\partial G(M_0,P)}{\partial n_P}d\sigma_P +$$

$$+ \iiint\limits_\Omega f(M)G(M_0,M)d\tau_M . \qquad (10.4$$

Замечание. Формула (10.4) содержит производну $\frac{\partial G(M_0,M)}{\partial n_M}$, существование которой не следует и определения.

Формула (10.4) даёт классическое решение задачи Дирихле при выполнении условий $\mu \in C(S)$ и $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Для построения функции Грина $G(M_0,M$ необходимо найти функцию $v(M)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega, \qquad (10.5)$$

$$v(P) = -\frac{1}{4\pi R_{M_0P}}, \quad P \in S. \qquad (10.6)$$

Для достаточно широкого класса поверхностей (так называемых поверхностей Ляпунова) задача (10.5) (10.6) разрешима, поэтому функция Грина существует.

Свойства функции Грина.

1. $G(M_0,M) > 0$, если $M, M_0 \in \Omega$.

Доказательство. Возьмем точку M_0, в которой функция Грина имеет особенность и вырежем её шаром K_ε ограниченным поверхностью Σ_ε. Из представления функции Грина следует, что на поверхности Σ_ε и внутри неё $G(M_0,M) > 0$ и $G(M_0,P) = 0$, $P \in S$. Так как функция Грина $G(M_0,M)$ в области, заключенной

между поверхностями Σ_ε и S, удовлетворяет уравнению Лапласа, то в силу принципа максимума $G(M_0,M) > 0$ всюду в области, заключенной между поверхностями Σ_ε и S. В силу произвольности выбора ε получаем $G(M_0,M) > 0$ всюду в области Ω.

Замечание. Так как функция $v(M)$ удовлетворяет задаче (10.5), (10.6), то из принципа максимума следует, что $v(M) < 0$ всюду в области Ω. Следовательно, $G(M_0,M) = \frac{1}{4\pi R_{M_0M}} + v(M) < \frac{1}{4\pi R_{M_0M}}$. Отсюда получаем границы изменения значений функции $G(M_0,M)$:

$$0 \le G(M_0,M) < \frac{1}{4\pi R_{M_0M}}, \quad M_0 \ne M,$$

причём равенство нулю учитывает, что $G(M_0,P) = 0$, $P \in S$.

2. Функция Грина симметрична относительно точек M_0 и M: $G(M_0,M) = G(M,M_0)$.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – некоторые фиксированные точки области Ω. Построим сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ радиусов ε с центрами в точках M_1 и M_2. Введём функции $w_1(M) = G(M,M_1)$ и $w_2(M) = G(M,M_2)$ и применим к ним вторую формулу Грина в области $\Omega \setminus (K_\varepsilon^{M_1} \cup K_\varepsilon^{M_2})$, где $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$ – шары радиусов ε с центрами в точках M_1 и M_2.

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus(K_\varepsilon^{M_1} \cup K_\varepsilon^{M_2})} (w_1(M)\Delta w_2(M) - w_2(M)\Delta w_1(M))d\tau_M =$$

$$= \iint\limits_S \left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P} - w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

Учитывая, что функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ удовлетворяют уравнению Лапласа в $\Omega\setminus M_1$ и в $\Omega\setminus M_2$ соответственно, а на границе S области Ω принимают нулевые значения, получим

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=0,$$

где нормали n_P к поверхностям $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ направлены внутрь шаров $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=0.$$

Функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ внутри шаров $K_\varepsilon^{M_2}$ и $K_\varepsilon^{M_1}$ соответственно удовлетворяют уравнению Лапласа. Напишем интегральное представление функции $w_1(M)$ в точке M_2 и функции $w_2(M)$ в точке M_1:

$$w_1(M_2)=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

$$w_2(M_1)=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_2(P)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}-G(P,M_1)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}-G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}\right)d\sigma_P.$$

Подставляя, полученные формулы для функций $w_1(M)$ и $w_2(M)$ в выше стоящую формулу, получим $w_1(M_2)-w_2(M_1)=0$ или $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$. Это свойство называется принципом взаимности.

Глава 3. Граничные задачи для уравнения колебаний.

§ 1. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний.

Рассмотрим струну длины l – одномерную упругую однородную нить, которая не сопротивляется изгибу. В невозмущённом состоянии её можно представить себе как отрезок $0 \le x \le l$ оси Ox в пространстве $Oxyz$. Можно разными способами возмутить струну:

– изогнуть, а затем отпустить её;

– ударить, сообщив ей некоторый распределённый вдоль отрезка $0 \le x \le l$ импульс;

– приложить к струне распределённую вдоль $0 \le x \le l$ силу;

– двигать по определённому закону концы струны;

– приложить силы к её концам,

и так далее. В любом случае по струне станут распространяться возмущения, – по ней побегут волны. Для описания распространения волн введём вектор $\{u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\}$, задающий положение в пространстве в момент времени t той точки струны, которая в невозмущённом состоянии имела координаты $(x,0,0)$. Рассмотрим простейший случай, когда все возмущения и вызывающие их причины лежат только в плоскости Oxz. Тогда достаточно ввести одну скалярную величину $u(x,t)$ – смещение в направлении оси Oz в момент времени t той точки струны, которая имела в невозмущенном состоянии координату x на оси Ox. Величина u является **поперечным** смещением в

точке x; не будем рассматривать возможные продольные смещения. Из-за наличия изгиба в струне возникнут упругие силы, которые можно описать при помощи закона Гука; их величины пропорциональны $u_x(x,t)$. Если не учитывать действие на струну внешних сил (например, силы тяжести), то изменение количества движения на любом участке струны $[x_1, x_2]$ за промежуток времени $[t_1, t_2]$ равно импульсу упругих сил. И ту, и другую величину легко выразить через первые производные функции $u(x,t)$ (по t и по x). Стягивая отрезки $[x_1, x_2]$ и $[t_1, t_2]$ в точки x и t, и предполагая все смещения $u(x,t)$ малыми, получим равенство $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$, где постоянная $a > 0$ характеризует материал, из которого сделана струна. Оказывается, что a является величиной скорости распространения волн **вдоль** оси Ox. Полученное равенство выполняется для всех внутренних точек струны, т.е. на интервале $0 < x < l$; оно называется уравнением свободных колебаний струны (относительно функции $u(x,t)$). Если на струну действует распределённая вдоль неё поперечная сила, зависящая от времени, то импульс этой силы надо учесть, записывая изменение количества движения на $[x_1, x_2]$ в течение времени $[t_1, t_2]$. В результате получим уравнение вида $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$, где $f(x,t)$ характеризует распределение внешней силы по пространственной переменной и во времени. Информацию о поведении концов струны надо задать отдельно. Например, если известно, что конец струны $x = 0$ неподвижен (жёстко закреплён), то $u(0,t) = 0$. Если в эксперименте измеряется его положение во все моменты времени, то

$u(0,t)=\mu(t)$ – известная функция. Если измеряется действующая на этот конец внешняя поперечная сила, то $u_x(0,t)=\nu(t)$ – известная функция. В частности, если внешние силы на конец $x=0$ не действуют (конец свободен), то $u_x(0,t)=0$. Если действующая на конец струны внешняя сила пропорциональна величине его смещения $u(0,t)$ (сила упругого закрепления конца) и действует не зависящая от смещения внешняя сила, то $\alpha\cdot u_x(0,t)+\beta\cdot u(0,t)=\chi(t)$ – известная функция. Аналогичные граничные условия могут выполняться и на конце $x=l$. Если в некоторый момент времени t_0 известен профиль струны, то $u(x,t_0)=\varphi(x)$, $0\le x\le l$, – заданная функция. Если в этот момент времени измерены скорости поперечного движения точек струны, то $u_t(x,t_0)=\psi(x)$, $0\le x\le l$, – известная функция.

Теперь рассмотрим в плоскости Oxy связную область D с границей γ. Можно считать её двумерной однородной невозмущённой мембраной. Возмутим мембрану каким-либо образом. Предположим при этом, что любая точка мембраны, которая в невозмущённом состоянии имела пространственные координаты $(x,y,0)$, смещается только в направлении оси Oz на величину $u(x,y,t)$ в момент времени t. Для описания распространения волн по мембране сделаем предположения, аналогичные предположениям о колебаниях струны. Тогда получим уравнение малых свободных поперечных колебаний мембраны $u_{tt}(x,y,t)=a^2\left(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)\right)$. Если на мембрану действует распределённая по ней поперечная внешняя сила, то уравнение колебаний мембраны имеет вид $u_{tt}(x,y,t)=a^2\left(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)\right)+f(x,y,t)$.

Информацию о поведении края мембраны надо задать отдельно. Например, если край мембраны неподвижен, то $u(P,t)=0$ для всех точек $P\in\gamma$, $P=P(x,y)$, во все моменты времени. Если в каждый момент времени измеряется положение движущихся точек края мембраны, то $u(P,t)=\mu(P)$, $P\in\gamma$, – известная функция. Как и на конце струны, на краю мембраны можно задать более общее граничное условие вида $\alpha(P)\cdot\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n}+\beta(P)\cdot u(P,t)=\chi(P,t)$, выражающее баланс внутренних сил упругости, пропорциональных смещению сил упругого закрепления края и не зависящих от смещения внешних сил; здесь $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к γ. Если в момент времени t_0 известен изгиб мембраны, то $u(M,t_0)=\varphi(M)$, $M\in\overline{D}$, – заданная функция. Если в этот момент времени измеряются скорости поперечного движения точек мембраны, то $u_t(M,t_0)=\psi(M)$, $M\in\overline{D}$, – известная функция.

Наконец, рассмотрим пространственную область Ω с границей S. Пусть эта область заполнена газом, в котором распространяются звуковые волны. В невозмущённом состоянии объёмная плотность газа ρ и давление p постоянны в Ω. Звуковая волна возмущает эти величины, т.е. приводит к зависимости их от точки $M(x,y,z)\in\Omega$ и времени t: $\rho=\rho(M,t)$, $p=p(M,t)$. Будем считать, что в области Ω нет источников или стоков газа, что звуковые колебания малы, внешние силы на частицы газа не действуют, и что процесс распространения звука является адиабатическим (т.е. газ не получает тепло извне и не отдаёт его). Тогда ρ и p удовлетворяют в Ω уравнениям

$$\rho_{tt}(M,t)=a^2\Delta_{(x,y,z)}\rho(M,t),$$
$$p_{tt}(M,t)=a^2\Delta_{(x,y,z)}p(M,t).$$

Здесь a – величина скорости звука в газе.

Поставим начально – краевую задачу для уравнения колебаний в ограниченной области. Пусть задана ограниченная область Ω с границей S, допускающей применение формул Грина. Задача состоит в определении в цилиндрической области $\overline{Q}=\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ функции $u(M,t)$, удовлетворяющей уравнению колебаний

$$u_{tt}(M,t)-a^2\Delta u(M,t)=f(M,t),$$
$$(M,t)\in Q=\Omega\times(0,\infty), \tag{1.1}$$

начальным условиям

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad u_t(M,0)=\psi(M),\quad M\in\overline{\Omega},$$

и граничным условиям (1.2)

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\quad P\in S,\, t\in[0,\infty), \tag{1.3}$$

где $\alpha(P)+\beta(P)\neq 0, \alpha(P)\geq 0, \beta(P)\geq 0$.

Если $\alpha(P)\equiv 0$, то получаем первую начально – краевую задачу; если $\beta(P)\equiv 0$, то получаем вторую начально – краевую задачу; в противном случае имеем третью начально – краевую задачу. Изучая именно третью краевую задачу (а не первую и не вторую), будем предполагать, что $\alpha(P)\neq 0$ всюду на S. Тогда краевое условие $\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u=\chi$ можно записать в виде

$\frac{\partial u}{\partial n}+hu=\eta$, где $h=\frac{\beta}{\alpha}$, $\eta=\frac{\chi}{\alpha}$. Будем далее предполагать, что $h\geq 0$; это условие важно в вопросе о единственности решения начально-краевой задачи.

Определение. Классическим решением начально – краевой задачи называется функция $u(M,t)$, непрерывная вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{Q}$, имеющая непрерывные производные второго порядка в открытой области Q, удовлетворяющая в Q уравнению колебаний (1.1), в области $\overline{\Omega}$ – начальным условиям (1.2), а на поверхности S при $t\in(0,\infty)$ – граничным условиям (1.3). $u(M,t)\in C^1(\overline{Q})\cap C^2(Q)$.

Замечание 1. Если граничное условие (1.3) есть условие Дирихле, т.е. $\alpha(P)\equiv 0$, то непрерывности первых производных функции $u(M,t)$ в $\overline{Q}$ не требуется. Достаточно предположения $u(M,t)\in C(\overline{Q})\cap C^2(Q)$.

Замечание 2. Для существования классического решения необходимо согласование начальных и граничных условий:

$$\alpha(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_P}+\beta(P)\varphi(P)=\chi(P,0),\quad P\in S,$$
$$\alpha(P)\frac{\partial\psi(P)}{\partial n_P}+\beta(P)\psi(P)=\chi_t(P,0),\quad P\in S.$$

Замечание 3. В силу линейности задачи (1.1) – (1.3) её решение $u(M,t)$ можно представить в виде суммы решений трёх задач: $u(M,t)=u_1(M,t)+u_2(M,t)+u_3(M,t)$, где $u_1(M,t)$ – решение задачи с однородным уравнением, однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями, $u_2(M,t)$ – решение задачи с неоднородным уравнением и однородными граничными и начальными условиями, $u_3(M,t)$ – решение задачи с однородным уравнением, однородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями. При этом задачу для $u_3(M,t)$ можно свести к первым двум задачам.

Замечание 4. Часто встречаются задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к **классическим** решениям. Если не выполняется согласование начальных и граничных условий или искомая функция $u(M,t)$ не может обладать требуемой гладкостью, то понятие решения задачи надо рассматривать в более широком, **обобщённом** смысле. В настоящем курсе мы рассматриваем только классические решения.

§ 2. Задачи Коши для уравнения колебаний на прямой.

п.1. Метод Даламбера.

Сформулируем задачу Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0, \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in R^1. \tag{2.2}$$

Определение. Классическим решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $u(x,t)$, определенная при $x\in R^1, t\geq 0$ и непрерывная вместе со своей первой производной по t в области $x\in R^1, t\geq 0$, имеющая непрерывные вторые производные в области

$x\in R^1, t>0$ и удовлетворяющая уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2).

Из линейности задачи (2.1), (2.2) следует, что можно провести её редукцию и представить $u(x,t)$ в виде суммы двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний и неоднородных начальных условий, $u_2(x,t)$ – решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний и однородных начальных условий.

Рассмотрим сначала задачу для **однородного** уравнения колебаний и неоднородных начальных условий:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0, \tag{2.3}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in R^1. \tag{2.4}$$

Предположим, что существует классическое решение $u(x,t)$ этой задачи. Преобразуем уравнение колебаний к виду, содержащему смешанную производную. Запишем дифференциальное уравнение характеристик: $(dx)^2-a^2(dt)^2=0$. $dx-adt=0$, $dx+adt=0$. Найдём характеристики уравнения колебаний (так называются интегралы дифференциального уравнения характеристик):

$$x-at=C_1\ , \ x+at=C_2.$$

Введём новые переменные $\xi=x-at$, $\eta=x+at$. В результате уравнение колебаний преобразуется к виду $U_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0$, (2.5)

где $U(\xi,\eta)=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$. Общий интеграл уравнения (2.5) имеет вид $U_\eta(\xi,\eta)=\bar{f}(\xi,\eta)$

$$U(\xi,\eta)=\int\bar{f}(\eta)d\eta+f_1(\xi)=f_2(\eta)+f_1(\xi). \tag{2.6}$$

Следовательно, функция $u(x,t)$ может быть записана в виде

$$u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at). \qquad (2.7)$$

Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (2.4):

$$u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),$$
$$u_t(x,0)=-af_1'(x)+af_2'(x)=\psi(x), \quad x\in R^1,$$

где штрих означает производную по полному аргументу.

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \\ -f_1(x)+f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C, \quad C=const. \end{cases}$$

Отсюда

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) называется формулой Даламбера, а метод построения решения задачи (2.3), (2.4) называется методом Даламбера.

п. 2. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно

дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^1. Тогда классическое решение задачи Коши (2.3), (2.4) существует, единственно и определяется формулой Даламбера.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда непосредственной проверкой устанавливаем, что функция $u(x,t)$, представимая формулой Даламбера, является классическим решением задачи. Существование решения доказано.

Докажем теперь, что решение задачи единственно. Если решение существует, то оно представимо формулой Даламбера. Если есть второе решение, то оно так же представимо формулой Даламбера. Разность двух решений $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению и нулевым начальным условиям и так же представима формулой Даламбера. Подставляя в формулу Даламбера нулевые начальные условия, получаем $v(x,t)\equiv 0$ и $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$. Теорема доказана.

Формула Даламбера даёт возможность доказать устойчивость решения задачи Коши по начальным данным.

Теорема устойчивости решения задачи Коши. Пусть функции $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$– начальные данные двух задач Коши

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in R^1,$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t)=a^2\tilde{u}_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$
$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{u}_t(x,0)=\tilde{\psi}(x), \quad x\in R^1.$$

Пусть они удовлетворяют условиям $\left|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\right| \le \varepsilon$, $x \in R^1$, $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|\psi(x)-\tilde{\psi}(x)\right|^2 dx \le \varepsilon^2(\beta-\alpha)$ для любых действительных постоянных α и β и любого $\varepsilon > 0$. Тогда для решений этих задач $u(x,t)$ и $\tilde{u}(x,t)$ при $t \in [0,T]$ выполнено неравенство $\left|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right| \le \varepsilon(1+T)$, $x \in R^1$, $t \in [0,T]$.

Доказательство.

$$\left|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\left|\varphi(x-at)-\tilde{\varphi}(x-at)\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi(x+at)-\tilde{\varphi}(x+at)\right| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)\right|dz.$$

Запишем неравенство Коши-Буняковского:

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)\right|dz \le \left(\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\varepsilon^2 2at\right)^{\frac{1}{2}}(2at)^{\frac{1}{2}} = 2a\varepsilon t.$$

Тогда $\left|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2a}2a\varepsilon t \le \varepsilon(1+T)$.

Теорема доказана.

п. 3. Существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на прямой.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \qquad (2.9)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in R^1. \qquad (2.10)$$

Пусть функция $w(x,t,\tau)$ является решением вспомогательной задачи Коши с параметром τ

$$w_{tt}(x,t,\tau) = a^2 w_{xx}(x,t,\tau), \quad x \in R^1, \quad t > 0, \qquad (2.11)$$

$$w(x,t,\tau)\Big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial w(x,t,\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau), \quad x \in R^1. \qquad (2.12)$$

Формула Даламбера даёт решение задачи (2.11), (2.12):

$$w(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

Легко понять, что для построения решения задачи (2.9), (2.10) осталось проинтегрировать функцию $w(x,t,\tau)$ по переменной τ в пределах от 0 до t.

Теорема. Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $x \in R^1$, $t > 0$. Тогда задача (2.9), (2.10) имеет решение, оно единственно и определяется формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Доказательство. Найдём $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра x интеграл по формуле Лейбница:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(f(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - f(\xi,\tau)\Big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+a(t-\tau)} - \frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Найдём $u_t(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, дифференцируя зависящий от параметра t интеграл по формуле Лейбница:

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\left(f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x+a(t-\tau)}+f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t)=f(x,t)+\frac{a}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Подставляя полученные выражения производных $u_{tt}(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в уравнение (2.9), а $u(x,t)$ и $u_t(x,t)$ – в начальные условия (2.10), убеждаемся в том, что $u(x,t)$ является решением задачи Коши.

Если бы существовали два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (2.9), (2.10), то функция $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяла бы задаче

$$w_{tt}(x,t)=a^2w_{xx}(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0,\quad x\in R^1.$$

Но по теореме единственности решения последней задачи нет решений, отличных от $w(x,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Решение задачи

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in R^1$$

можно записать в виде

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

§ 3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой методом продолжений.

Рассмотрим задачи о распространении волн на полупрямой $x\in[0,\infty)$. Эти задачи ставятся следующим образом:

Найти решение уравнения

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t)=\mu(t)\ \text{ или }\ u_x(0,t)=\nu(t),\quad t\ge 0, \tag{3.2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0. \tag{3.3}$$

Решение каждой из этих двух задач можно представить как сумму решений двух задач: с однородными начальными условиями, но с неоднородным граничным условием, и с неоднородными начальными условиями, но с однородным граничным.

Рассмотрим сначала начально-краевую задачу с однородным условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0, \tag{3.4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad x\ge 0, \tag{3.5}$$

$$u(0,t)=0,\quad t\ge 0. \tag{3.6}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на всю прямую:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ -\varphi(-x), & x\le 0,\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\ge 0,\\ -\psi(-x), & x\le 0.\end{cases}$$

Тогда на всей прямой получим задачу для функции $U(x,t)$:

$$U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$
$$U(x,0)=\varphi_1(x), \quad U_t(x,0)=\psi_1(x), \quad x\in R^1.$$

Решение этой задачи даётся формулой Даламбера

$$U(x,t)=\frac{\varphi_1(x-at)+\varphi_1(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(z)dz.$$

В области $x\ge 0$ функция $U(x,t)$ совпадает с решением задачи (3.4) – (3.6), так как в этой области уравнение и начальные данные в обеих задачах одинаковые, а $U(0,t)=0$ в силу свойств нечетных функций. Выпишем теперь формулу Даламбера для задачи (3.4) – (3.6), учитывая при этом, что $x-at$ может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Если $x+at>x-at>0$, то $\varphi_1(x\pm at)=\varphi(x\pm at)$, $\psi_1(x\pm at)=\psi(x\pm at)$. Если $x-at<0$, то $\varphi_1(x-at)=-\varphi(at-x)$, $\psi_1(x-at)=-\psi(at-x)$.

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz,\\ x>0, \quad 0<t\le\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz,\\ x>0, \quad t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Для существования классического решения необходимо, чтобы функция $\varphi(x)$ была дважды непрерывно дифференцируема в области $x\ge 0$, а функция $\psi(x)$ –

один раз непрерывно дифференцируема в области $x\ge 0$, и чтобы $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$.

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу с однородным условием Неймана:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t), \quad x>0, \quad t>0, \tag{3.7}$$
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\ge 0, \tag{3.8}$$
$$u_x(0,t)=0, \quad t\ge 0. \tag{3.9}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четным образом на всю прямую:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ \varphi(-x), & x\le 0,\end{cases}$$
$$\psi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\ge 0,\\ \psi(-x), & x\le 0.\end{cases}$$

На всей прямой получаем задачу для функции $U(x,t)$:

$$U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t), \quad x\in R^1, \quad t>0,$$
$$U(x,0)=\varphi_1(x), \quad U_t(x,0)=\psi_1(x), \quad x\in R^1.$$

В области $x\ge 0$ функция $U(x,t)$ совпадает с решением задачи (3.7) – (3.9), так как уравнение и начальные данные у обеих задач одинаковые, а $U_x(0,t)=0$ в силу свойств чётных функций. Учитывая, что если $x+at>x-at>0$, то $\varphi_1(x\pm at)=\varphi(x\pm at)$, $\psi_1(x\pm at)=\psi(x\pm at)$, а если $x-at<0$, то $\varphi_1(x-at)=\varphi(at-x)$, $\psi_1(x-at)=\psi(at-x)$, получим решение задачи (3.7) – (3.9):

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz, \\ x>0,\quad 0<t\le\dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\int_0^{at-x}\psi(z)dz\right\}, \\ x>0,\quad t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Для существования классического решения необходимо выполнение тех же условий гладкости функций φ и ψ, что в задаче (3.4) – (3.6). Кроме того, надо потребовать $\varphi_x(0)=0$, $\psi_x(0)=0$.

§ 4. Существование решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой с неоднородным краевым условием.

Рассмотрим начально-краевую задачу в области $x\ge 0$ для однородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями и неоднородным краевым условием Дирихле:

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad x>0,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad x\ge 0,$$
$$u(0,t)=\mu(t),\quad t\ge 0.$$

Причиной возникновения возмущений здесь может быть только краевой режим. Будем искать решение в виде бегущей вправо волны: $u(x,t)=f(x-at)$, где $f(z)$ – достаточно гладкая функция. Из первого начального условия получим $u(x,0)=f(x)=0$, $x>0$. Второе

начальное условие даёт $u_t(x,0)=-af'(x)=0$, $x>0$. С другой стороны, $u(0,t)=f(-at)=\mu(t)$, где $\mu(t)$ – заданная при $t>0$ функция. Следовательно,

$$f(z)=\begin{cases}0,\quad 0<t<\dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right),\quad t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Замечание. При $t<\dfrac{x}{a}$ влияние граничного режима не сказывается на точке с координатой x. При $t>\dfrac{x}{a}$ возмущение в точке x формируется граничным режимом.

Аналогичными рассуждениями решается и задача с неоднородным краевым условием Неймана.

§ 5. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний в пространстве и на отрезке.

п.1. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний в пространстве.

Теорема единственности решения задачи в пространстве. Задача (1.1) – (1.3) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Допустим, что существуют два различных решения $u_1(M,t)$ и $u_2(M,t)$ задачи (1.1) –

(1.3). Введём функцию $w(M,t)=u_1(M,t)-u_2(M,t)$, которая удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(M,t)-a^2\Delta w(M,t)=0\ ,\qquad (M,t)\in Q\,,$$
$$w(M,0)=0\,,\quad w_t(M,0)=0\,,\quad M\in\overline{\Omega}\,,$$
$$\alpha(P)\frac{\partial w(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)w(P,t)=0\,,\quad P\in S\,,t\in[0,\infty)\ .$$

Построим функционал E, зависящий от t как от параметра:

$$E(t)=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(w_t^2(M,t)+a^2\left|grad\,w(M,t)\right|^2\right)d\tau_M\,.$$

$E(t)$ является полной энергией колебательной системы в момент времени t. Из определения функционала и из начальных условий следует, что $E(t)\geq 0$ и $E(0)=0$. Покажем, что $\frac{dE}{dt}\equiv 0$. Вычислим производную, дифференцируя подынтегральное выражение:

$$\frac{dE}{dt}=\iiint\limits_{\Omega}\left(w_t\cdot w_{tt}+a^2\left(grad\,w(M,t)\cdot grad\,w_t(M,t)\right)\right)d\tau_M\ .$$

Вспомним первую формулу Грина (здесь t – параметр, градиенты вычисляем только по пространственным переменным):

$$\iiint\limits_{\Omega}v\Delta u\,d\tau_M=\iint\limits_{S}v\frac{\partial u}{\partial n_M}d\sigma_M-\iiint\limits_{\Omega}(grad\,u\cdot grad\,v)d\tau_M\ .$$

Пусть в этой формуле $u(M,t)=w(M,t)$, $v(M,t)=w_t(M,t)$, тогда

$$-a^2\iiint\limits_{\Omega}\Delta w(M,t)\cdot w_t(M,t)d\tau_M+$$
$$+a^2\iint\limits_{S}w_t\frac{\partial w}{\partial n_M}d\sigma_M=a^2\iiint\limits_{\Omega}(grad\,w\cdot grad\,w_t)d\tau_M\ .\qquad(5.1)$$

Подставляя (5.1) в выражение для $\frac{dE}{dt}$ и используя волновое уравнение получим

$$\frac{dE}{dt}=a^2\iint\limits_{S}w_t(M,t)\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M}d\sigma_M\ .$$

В случае первой краевой задачи $w(M,t)=0$, $M\in S$, во все моменты времени $t\in[0,\infty)$. Поэтому $w_t(M,t)=0$, $M\in S$. Отсюда $\frac{dE}{dt}=0$. Но $E(0)=0$, поэтому $E(t)\equiv 0$.

В случае второй краевой задачи $\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M}=0$, $M\in S$. Отсюда $\frac{dE}{dt}=0$ и снова $E(t)\equiv 0$.

Для третьей краевой задачи положим всюду на S $\alpha(M)\equiv 1$, $\beta(M)=h\geq 0$. Тогда краевое условие имеет вид $\frac{\partial w(M,t)}{\partial n_M}+h(M)\cdot w(M,t)=0$, $M\in S$, $t\in[0,\infty)$.

Поэтому

$$\frac{dE}{dt}=-a^2\iint\limits_{S}hw_t w\,d\sigma_M=-\frac{a^2}{2}\frac{d}{dt}\iint\limits_{S}hw^2d\sigma_M\ ,$$
$$\frac{d}{dt}\left(E(t)+\frac{a^2}{2}\iint\limits_{S}hw^2(M,t)d\sigma_M\right)=0\,,$$
$$E(t)+\frac{a^2}{2}\iint\limits_{S}hw^2(M,t)d\sigma_M=const\ .$$

Так как $E(0)=0$ и $w(M,0)=0$, то $E(t)+\frac{a^2}{2}\iint\limits_{\Sigma} hw^2(M,t)d\sigma_M=0$ при всех $t\in[0,\infty)$. Так как $E(t)\ge 0$, $a^2>0$, $h(M)\ge 0$, то $E(t)\equiv 0$.

Следовательно, $E(t)\equiv 0$ для всех трех краевых задач. Отсюда получаем $w_t(M,t)\equiv 0$ и $grad\, w(M,t)\equiv 0$, $(M,t)\in Q$. Поэтому $w(M,t)=const$. Так как $w(M,0)=0$, то $w(M,t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Используя первую формулу Грина на плоскости, можно совершенно аналогично доказать теорему единственности решения в ограниченной области $D\subset R^2$.

п.2. Единственность решений начально – краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Сформулируем начально – краевую задачу на отрезке:

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{5.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,t)=\psi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{5.3}$$

$$\left[\alpha_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_1(x)u(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\chi_1(t), \tag{5.4}$$

$$\left[\alpha_2(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_2(x)u(x,t)\right]\Bigg|_{x=l}=\chi_2(t),\qquad t\ge 0.$$

Теорема единственности решения задачи на отрезке. Задача (5.2) – (5.4) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. Предположим, что существуют два различных решения

$u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (5.2) – (5.4). Функция $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(x,t)-a^2w_{xx}(x,t)=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,t)=0,\quad 0\le x\le l,$$

$$\left[\alpha_1(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+\beta_1(x)w(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=0,$$

$$\left[\alpha_2(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+\beta_2(x)w(x,t)\right]\Bigg|_{x=l}=0,\ t\ge 0.$$

Введём функционал

$E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(w_t^2(x,t)+a^2w_x^2(x,t)\right)dx$. Из определения $E(t)$ и из начальных условий следует, что $E(t)\ge 0$, $E(0)=0$.

$$\frac{dE}{dt}=\int\limits_0^l\left(w_t(x,t)w_{tt}(x,t)+a^2w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\right)dx.$$

Интеграл $a^2\int\limits_0^l w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx$ вычислим по частям:

$$a^2\int\limits_0^l w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx=$$

$$=a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}-a^2\int\limits_0^l w_{xx}(x,t)w_t(x,t)dx$$

Тогда получим

$$\frac{dE}{dt}=\int\limits_0^l\left(w_t\left(w_{tt}-a^2w_{xx}\right)\right)dx+a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Так как функция $w(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний, то

$$\frac{dE}{dt} = a^2 \left(w_x(x,t) w_t(x,t) \right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

В случае первой краевой задачи $w(0,t) = w(l,t) = 0$ во все моменты времени $t \ge 0$. Поэтому $w_t(0,t) = w_t(l,t) = 0$. Отсюда $\frac{dE}{dt} = 0$, $E(t) = const$. Но $E(0) = 0$, поэтому $E(t) \equiv 0$.

В случае второй краевой задачи $w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0$. Отсюда $\frac{dE}{dt} = 0$ и снова $E(t) \equiv 0$.

В третьей краевой задаче краевые условия имеют вид $w_x(0,t) - h_1 w(0,t) = 0$, $w_x(l,t) + h_2 w(l,t) = 0$, $h_1 = const \ge 0$, $h_2 = const \ge 0$. Поэтому

$$\frac{dE}{dt} = -a^2 \cdot h_2 \cdot w(l,t) \cdot w_t(l,t) - a^2 \cdot h_1 \cdot w(0,t) \cdot w_t(0,t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(E(t) + \frac{a^2 h_2}{2} w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2} w^2(0,t) \right) = 0,$$

$$E(t) + \frac{a^2 h_2}{2} w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2} w^2(0,t) = const.$$

Так как $E(0) = 0$ и $w(x,0) = 0$, то

$$E(t) + \frac{a^2 h_2}{2} w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2} w^2(0,t) = 0$$

при всех $t \ge 0$. Так как $E(t) \ge 0$, $a^2 > 0$, $h_1 \ge 0$, $h_2 \ge 0$, то $E(t) \equiv 0$.

Следовательно, $E(t) \equiv 0$ для всех трёх краевых задач. Отсюда получаем $w_t(x,t) = 0$ и $w_x(x,t) = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$. Поэтому $w(x,t) = const$. Так как $w(x,0) = 0$, то $w(x,t) \equiv 0$. Теорема доказана.

п. 3. Теоремы существования решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на отрезке.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке с граничными условиями I типа:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{5.5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Метод разделения переменных (этот метод подробно изучается на семинарских занятиях) даёт

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \omega_n t + \frac{B_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{5.8}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Теорема. Пусть начальные данные удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную третью производную, функция $\psi(x) \in C^1[0,l]$ и имеет на $[0,l]$ кусочно-непрерывную вторую производную, причём $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (5.5) – (5.7), представимое формулой (5.8).

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно доказать непрерывность функции $u(x,t)$ и её производной $u_t(x,t)$ в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и непрерывное примыкание функции $u(x,t)$ к заданным начальным и граничным условиям. Кроме того, нужно доказать существование вторых производных функции $u(x,t)$ и выполнение уравнения (5.5) в области $0 < x < l$, $t > 0$. Для доказательства непрерывности функции $u(x,t)$ и её производной $u_t(x,t)$ в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \cos\omega_n t + \frac{B_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (5.9)$$

и ряда, полученного формальным дифференцированием ряда (5.9) по t:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left\{-A_n \sin\omega_n t + \frac{B_n}{\omega_n}\cos\omega_n t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (5.10)$$

Мажорантным рядом для ряда (5.9) является числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{|A_n| + \frac{1}{\omega_n}|B_n|\right\}$, а для ряда (5.10) – числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\omega_n|A_n| + |B_n|\right\}$. Из теории рядов Фурье известно, что эти числовые ряды сходятся при условиях, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следовательно, ряды (5.9) и (5.10) сходятся равномерно и определяют непрерывные функции в области $0 < x < l$, $t > 0$. Из тех же условий, наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, следует, что ряды Фурье этих функций по системе

$\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся равномерно на $[0,l]$ к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому при $t = 0$ выполняются начальные условия. А так как все собственные функции $\sin\frac{\pi n}{l}x$ удовлетворяют однородным граничным условиям, то выполняются и граничные условия. Для доказательства существования вторых производных функции $u(x,t)$ в области $0 < x < l$, $t > 0$ продифференцируем (5.8) два раза по t и два раза по x. Тогда получим ряды, которые мажорируются числовым рядом $\max\left\{1, \frac{1}{a^2}\right\}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\left\{|A_n| + \frac{1}{\omega_n}|B_n|\right\}$, который сходится в силу свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке для **неоднородного** уравнения с однородными начальными и граничными условиями:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \qquad (5.11)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \qquad (5.12)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \qquad (5.13)$$

Предположим, что существует классическое решение этой задачи. Разложим функцию $u(x,t)$ при фиксированном $t \ge 0$ в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\frac{\pi n}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (5.14)$$

Коэффициенты разложения $u_n(t)$ рассчитываются по формуле $u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$. Поскольку функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи, то для интеграла, представляющего $u_n(t)$, выполнены условия дифференцируемости по параметру под знаком интеграла. Поэтому

$$u_n^{(k)}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi,\quad k=1,2.$$

Умножим уравнение (5.11) на $\frac{2}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x$ и проинтегрируем по x от 0 до l. В результате получим

$$\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=a^2\,\frac{2}{l}\int_0^l u_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx+$$
$$+\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Вычисляя интеграл $\int_0^l u_{xx}(x,t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ два раза по частям и учитывая граничные условия, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по t

$$u_n''(t)+\omega_n^2 u_n(t)=f_n(t),$$

где $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi$.

Из начальных условий (5.12) следует $u_n(0)=0$, $u_n'(0)=0$. Получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго

порядка на полупрямой $t>0$ с начальными условиями при $t=0$. Решение этой задачи можно построить методом вариации постоянных. Оно имеет вид

$$u_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau.$$

Решение задачи (5.11) – (5.13) построено в виде ряда (5.14), коэффициенты которого теперь известны:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau, \qquad (5.15)$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\omega_n(t-\tau). \qquad (5.16)$$

Можно доказать, что для непрерывной в области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ функции $f(x,t)$, удовлетворяющей нулевым начальным и граничным условиям, представление (5.15), (5.16) определяет классическое решение задачи (5.11) – (5.13).

Определение. Функция $G(x,\xi,t-\tau)$, определяемая формулой (5.16), называется функцией Грина или функцией влияния мгновенного точечного импульса на отрезке.

§ 6. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Характеристики.

Рассмотрим линейное относительно старших производных уравнение

$$a_{11}(x,y)\cdot u_{xx} + 2\cdot a_{12}(x,y)\cdot u_{xy} + a_{22}(x,y)\cdot u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \qquad (6.1)$$

$u = u(x,y)$. Предположим, что коэффициенты при старших производных непрерывны и нигде не обращаются в нуль одновременно. Выполним некоторую невырожденную замену независимых переменных $\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = \psi(x,y)\end{cases}$. Тогда искомая функция примет вид $u = u_1(\xi(x,y),\eta(x,y))$. Выразим частные производные $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ в новых переменных:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2\right) + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y\right) + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_{yy}^2\right) + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Найдём зависимость переменных x, y от новых независимых переменных ξ, η и подставим найденные выражения для функции u и её производных в уравнение (6.1). Тогда (6.1) будет иметь вид

$$\overline{a}_{11}(\xi,\eta)\cdot u_{\xi\xi} + 2\cdot\overline{a}_{12}(\xi,\eta)\cdot u_{\xi\eta} + \overline{a}_{22}(\xi,\eta)\cdot u_{\eta\eta} + \overline{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0,$$

где коэффициенты при старших производных

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\overline{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\overline{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

и функция $\overline{F}$ выражены в переменных ξ, η.

Подберём такую замену независимых переменных, при которой уравнение (6.1) будет приведено к наиболее простому виду. Под этим подразумевается, что уравнение (6.1) с **переменными** коэффициентами при старших производных мы постараемся преобразовать в уравнение с **постоянными** коэффициентами при старших производных. При этом нас не будет интересовать, станет ли $\overline{F}$ более сложным выражением, чем F. Зафиксируем точку (x,y) и поставим в соответствие уравнению (6.1) квадратичную форму

$$Q = a_{11}(x,y)\cdot q_1^2 + 2\cdot a_{12}(x,y)\cdot q_1\cdot q_2 + a_{22}(x,y)\cdot q_2^2$$

от независимых переменных q_1, q_2. Симметричную матрицу коэффициентов квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$, приведём невырожденным линейным преобразованием B к диагональному виду. Это значит, что после преобразования переменных $\vec{q} = B\vec{p}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1\\ q_2\end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1\\ p_2\end{pmatrix}$, квадратичная форма примет канонический вид $Q = \alpha_1\cdot p_1^2 + \alpha_2\cdot p_2^2$ в новых независимых переменных p_1, p_2. Можно выбрать такое преобразование B, что коэффициенты α_1 и α_2 будут равны по модулю единице или нулю (такой вид квадратичной формы называется нормальным). Закон инерции квадратичных форм утверждает, что число положительных и число отрицательных членов в каноническом виде не зависит от способа приведения. Это позволяет провести классификацию уравнений вида (6.1) и подобрать требуемую замену переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$.

Уравнение (6.1) называется уравнением параболического типа в точке (x,y), если один из коэффициентов α_1, α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q равен нулю. Тогда другой коэффициент можно выбрать по модулю равным единице. Для уравнения параболического типа в точке (x,y) выражение $D(x,y)=a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}=0$.

Уравнение (6.1) называется уравнением эллиптического типа в точке (x,y), если коэффициенты α_1 и α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q имеют одинаковые знаки. Их можно выбрать одновременно равными либо $+1$, либо -1. Для уравнения эллиптического типа в точке (x,y) $D(x,y)=a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}<0$.

Уравнение (6.1) называется уравнением гиперболического типа в точке (x,y), если α_1 и α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q имеют разные знаки. Их можно выбрать равными $+1$ и -1. Для уравнения гиперболического типа в точке (x,y) $D(x,y)=a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}>0$.

Теорема. Пусть новые независимые переменные ξ, η выбраны так, что $\xi_x=b_{11}$, $\xi_y=b_{21}$, $\eta_x=b_{12}$, $\eta_y=b_{22}$, где b_{ij} – элементы матрицы B, с помощью которой квадратичная форма Q была приведена к

каноническому виду. Тогда коэффициенты при вторых производных функции $u(x,y)$ в уравнении (6.1) будут преобразованы при замене $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ так же, как коэффициенты квадратичной формы Q при замене $\vec{p}=B^{-1}\vec{q}$.

Доказательство. Если в переменных q_1,q_2 квадратичная форма Q имеет матрицу коэффициентов A, а в переменных p_1,p_2 – матрицу коэффициентов $\overline{A}$, причём $\vec{q}=B\vec{p}$, то $\overline{A}=B^TAB$. Теорема доказана.

Замечание 1. Приведением к каноническому виду отвечающей уравнению квадратичной формы можно классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных с произвольным числом независимых переменных.

Замечание 2. Приведение к каноническому виду квадратичной формы Q, отвечающей уравнению (6.1), позволяет записать это уравнение в наиболее простой – канонической – форме в каждой фиксированной точке (x,y). Но оно не даёт способа нахождения замены переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ сразу в некоторой области изменения x, y. Для уравнений с двумя независимыми переменными (и только для них) такой способ существует. В его основе лежит понятие характеристик уравнения (6.1).

Определение. Пусть кривая γ на плоскости x, y задана уравнением $\omega(x,y)=0$, где ω – непрерывно дифференцируемая функция, причём во всех точках этой кривой $\omega_x^2+\omega_y^2\neq 0$. Кривая γ называется характеристикой уравнения (6.1), если функция $\omega(x,y)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$a_{11}(x,y)\cdot\omega_x^2+2\cdot a_{12}(x,y)\cdot\omega_x\cdot\omega_y+a_{22}(x,y)\cdot\omega_y^2=0. \quad (6.2)$$

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений доказана следующая

Теорема. Функция $\omega(x,y)$ является частным решением уравнения (6.2) тогда и только тогда, когда равенство $\omega(x,y)=const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\cdot(dy)^2-2\cdot a_{12}\cdot dx\cdot dy+a_{22}\cdot(dx)^2=0. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) называется дифференциальным уравнением характеристик. Знание характеристик уравнения (6.1) позволяет привести его к канонической форме сразу для всех точек x, y в области, в которой (6.1) имеет один и тот же тип. При этом единая для указанной области замена переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ может быть построена в явном виде для уравнений каждого из трёх типов. Задача нахождения такой замены подробно решается на семинарах.

Пример. Уравнение теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}$ является уравнением параболического типа. Поскольку это уравнение с постоянными коэффициентами при старших производных, оно имеет один и тот же тип для всех точек (x,t). Единственным его семейством характеристик является семейство прямых $t=const$. (Заметьте, что начальные данные в задачах для этого уравнения ставились на характеристике $t=0$.)

Пример. Уравнение Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ является уравнением эллиптического типа. Оно не имеет действительных характеристик.

Пример. Уравнение $u_{tt}=a^2u_{xx}$ называется волновым уравнением или уравнением колебаний. Это уравнение гиперболического типа. Дифференциальное уравнение его характеристик имеет вид $(dx)^2-a^2(dt)^2=0$. Поэтому уравнение колебаний имеет два семейства характеристик: прямые $x-at=const$ и прямые $x+at=const$.

Глава 3 посвящена изучению некоторых задач для уравнений гиперболического типа. Простейшим из них является уравнение колебаний с одной пространственной переменной x и временем t. Характеристики этого уравнения играют важную роль при построении его решений. Это объясняется тем, что значения решения уравнения колебаний $u_{tt}=a^2u_{xx}$ вида $u=U(x-at)$ сохраняются постоянными вдоль любой характеристики $x-at=const$, а значения решения вида $u=U(x+at)$ сохраняются постоянными вдоль любой характеристики $x+at=const$. Такие решения называются волнами, распространяющимися вдоль оси Ox со скоростью a соответственно вправо и влево.