Список задач по функциональному анализу.

1) Пусть X - линейное нормированное пространство. Доказать, что для любых элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $||x|| \leq \max(||x+y||, ||x-y||)$.

2) Можно ли в пространстве $C^1[a, b]$ принять за норму элемента $x(t)$:

   $A) \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

   $B) \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

   $C) |x(b) - x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

   $D) |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

   $E) \int_a^b |x(t)|dt + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

3) Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$ A)открытым; B)замкнутым?

4) Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство.

5) Пусть X - линейное нормированное пространство. $L \subset X$ - линейное многообразие, $L \neq X$. Доказать, что L не содержит никакого шара.

6) Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространство следующие множества функций: A)монотонные функции; B)четные функции; C)многочлены; D)непрерывные кусочно-линейные функции?

7) Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространство следующие множества функций: A)многочлены степени $\leq k$; B)непрерывно дифференцируемые функции; C)непрерывные функции с ограниченной вариацией; D)функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$?

8) Пусть X - линейное нормированное пространство, множество $A \subset X$ - фиксировано. Доказать, что $f(x) = \rho(x, A)$ - непрерывное отображение X в $\mathbb{R}$.

9) Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

10) Доказать, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.

11) Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств?

12) Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место тождество Аполлония: $||z-x||^2 + ||z-y||^2 = \frac{1}{2}||x-y|| + 2||z - \frac{x+y}{2}||^2$.

13) Доказать, что для того, чтобы элемент x гильбертового пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $||x|| \leq ||x-y||$.

14) Доказать, что при фиксированном натуральном n множество $M = \{x \in l_2 : x = (x_1, x_2, ...) : \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ является подпространством пространства l_2. Описать такое пространство N, что $l_2 = M \bigoplus N$.

15) В пространстве l_2 рассмотрим последовательность $x_k = (1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}}, ...)$, $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.

16) Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными, и найти их нормы:

   $A) A : C^1[a, b] \to C[a, b], Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;

   $B) A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1], Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$;

17) Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$ - линейный оператор с областью изменения $R(A)$. A)Доказать, что $R(A)$ - линейное многообразие в Y. B)Всегда ли $R(A)$ - подпространство в Y?

18) Доказать, что в банаховом пространстве X для любого $A \in L(X \to X)$ определены операторы $\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$

19) Пусть X - банахово пространство, $A \in L(X \to X)$. Доказать, что $||e^A|| \le e^{||A||}$. Найти e^I, где I - тождественный оператор.

20) Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$. $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} - x(t)$ с областью определения $D(A)$ - линейное многообразие дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$. Найти A^{-1} и доказать, что он ограничен.

21) Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t e^{-|t-s|}x(s)ds$. Существует ли оператор A^{-1}?

22) Рассмотрим оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$. Пусть $N(A)$ - ядро оператора A. A) Доказать, что $N(A) = \{0\}$, так что при любом $y \in C[0,1]$ уравнение $Ax = y$ не может иметь более одного решения. B) Найти оператор A^{-1} и доказать, что он ограничен.

23) Доказать, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ имеет ограниченный обратный и найти A^{-1}.

24) Пусть X - комплексное линейное пространство, f - определенный на X и не равный тождественно нулю линейный функционал. Доказать, что область значений f есть все C.

25) Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

$A) f(x) = \langle x, f\rangle = 2[x(1) - x(0)]$;

$B) f(x) = \langle x, f\rangle = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt$

26) Доказать,что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

$A) f(x) = \langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k)$;

$B) f(x) = \langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 x(t)dt - x(0)$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_k \in [-1,1]$

27) Будут ли ограничены в пространстве $C[0,1]$ следующие линейные функционалы: A) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(t^2)dt$; B) $\langle x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)dt$?

28) Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найти их нормы: A) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt$, $x \in C^1[-1,1]$; B) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt$, $x \in L[-1,1]$.

29) Доказать, что функционал $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{k}$, $x = (x_1, x_2, ...) \in l_1$ является линейным непрерывным, и найти его норму.

30) Для $x(t) \in C[-1,1]$ положим $\langle x, f\rangle = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^1 tx(t)dt$. Доказать, что f - ограниченный линейный функционал.

31) Найти сопряженный к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если A) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$; B) $Ax(t) = \int_0^1 sx(s)ds$.

32) Найти сопряженный к оператору $A : l_2 \to l_2$, если A) $Ax = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$; B) $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$, при $x = (x_1, x_2, ...)$.

33) Найти сопряженный к оператору $A : l_2 \to l_2$ если A) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$, $\lambda_n \in \mathbb{R} : |\lambda_n| \le 1$; B) $Ax = (x_2, x_3, ...)$, при $x = (x_1, x_2, ...)$.

34) Какие из следующих операторов $A : C[0,1] \to C[0,1]$ являются вполне непрерывными:

A) $Ax(t) = tx(t)$;

B) $Ax(t) = \int_0^1 x(\tau)d\tau$;

C) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

D) $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts}x(s)ds$;

E) $Ax(t) = x(t^2)$?

35) Будет ли вполне непрерывным оператор $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$?

36) При каком условии на функцию $\varphi(t) \in C[0,1]$ оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?

37) Будет ли вполне непрерывным оператор $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$, если он рассматривается как действующий: A) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$; B) $A : C^2[0,1] \to C^1[0,1]$; C) $A : C^2[0,1] \to C[0,1]$?

38) Сформулировать критерий компактности в l_p. Какие из следующих операторов $A : l_2 \to l_2$ вполне непрерывны (при $x = (x_1, x_2, ...)$): A) $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$; B) $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$; C) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2})$?

39) Доказать, что оператор $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$ для $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\sup_k |\lambda_k| < \infty$, есть самосопряженный оператор. При каком условии на последовательность λ_k он будет неотрицательным?

40) Доказать, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ есть неотрицательный самосопряженный оператор.

41) Доказать, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t e^{s+t} x(s)ds$ является самосопряженным и неотрицательным.

42) Пусть $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ фиксировано. Доказать, что разностный оператор $A : L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty)$, $Ax(t) = \frac{1}{h}[x(t + \frac{h}{2}) - x(t - \frac{h}{2})]$ является самосопряженным.

43) Пусть A - самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, причем $A \neq 0$. Доказать, что если существует ограниченный оператор A^{-1}, то обратный оператор тоже самосопряжен.

44) Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im\lambda \neq 0$. Доказать, что оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует.

45) Рассмотрим оператор $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (0, 0, x_1, x_2, ...)$, для $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$. Доказать, что A самосопряжен в l_2 и $A \geq 0$. Найти оператор $\sqrt{A}$.

46) В вещественном линейном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора: A) $Ax(t) = x(-t)$; B) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$.

47) В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(0) + tx(1)$. Найти $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

48) Рассмотрим оператор $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$ для $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$, где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sup_n |\lambda_n| < +\infty$. Найти $\sigma(A)$.

49) Доказать, что оператор $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$ для $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ вполне непрерывен и найти его спектр.

50) Доказать, что оператор $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^{1} s^2 t x(t)dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.

51) Доказать, что оператор $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 st(1-st)x(t)dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.