

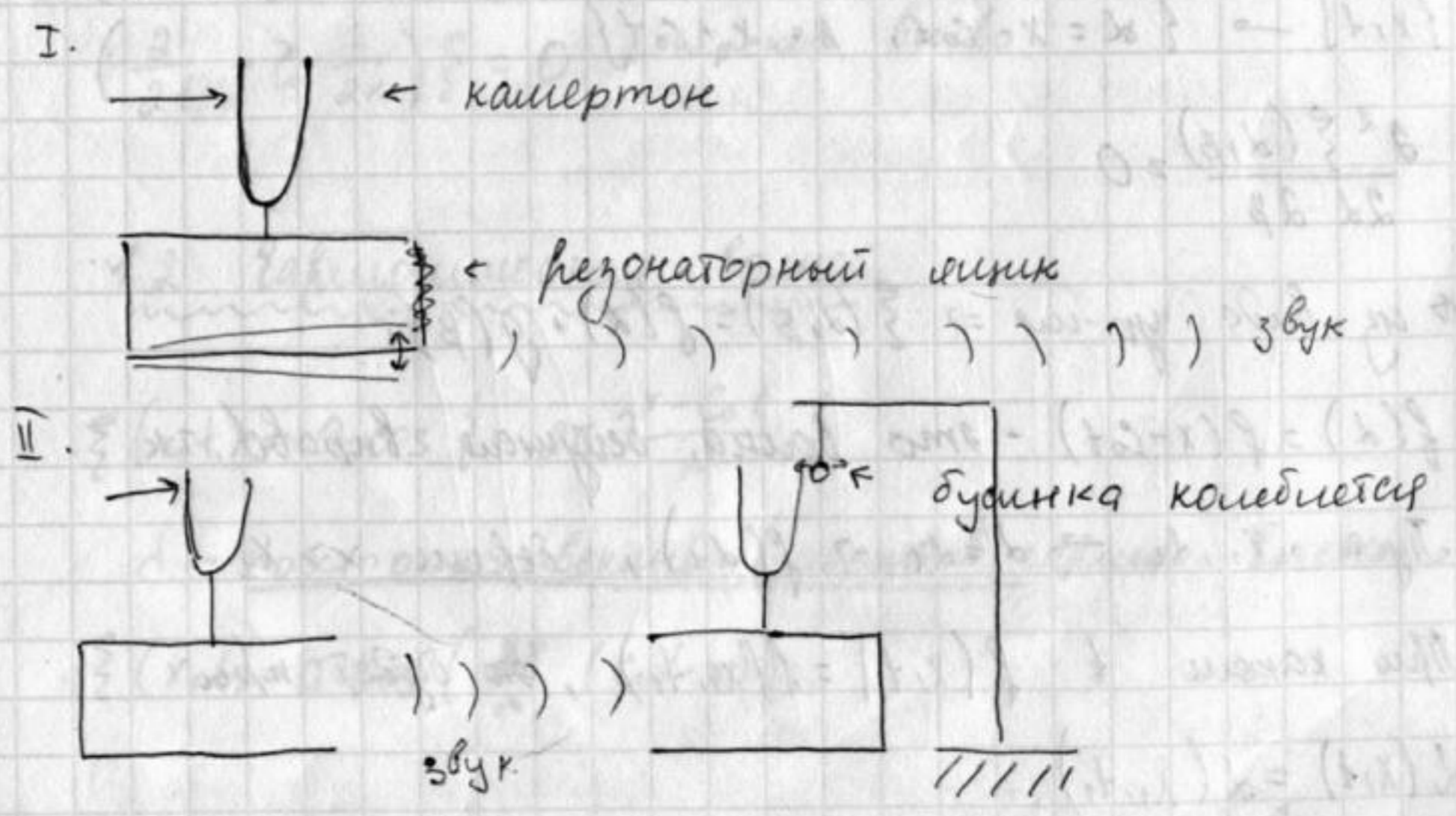
Дидов  
Сергей Стефанович

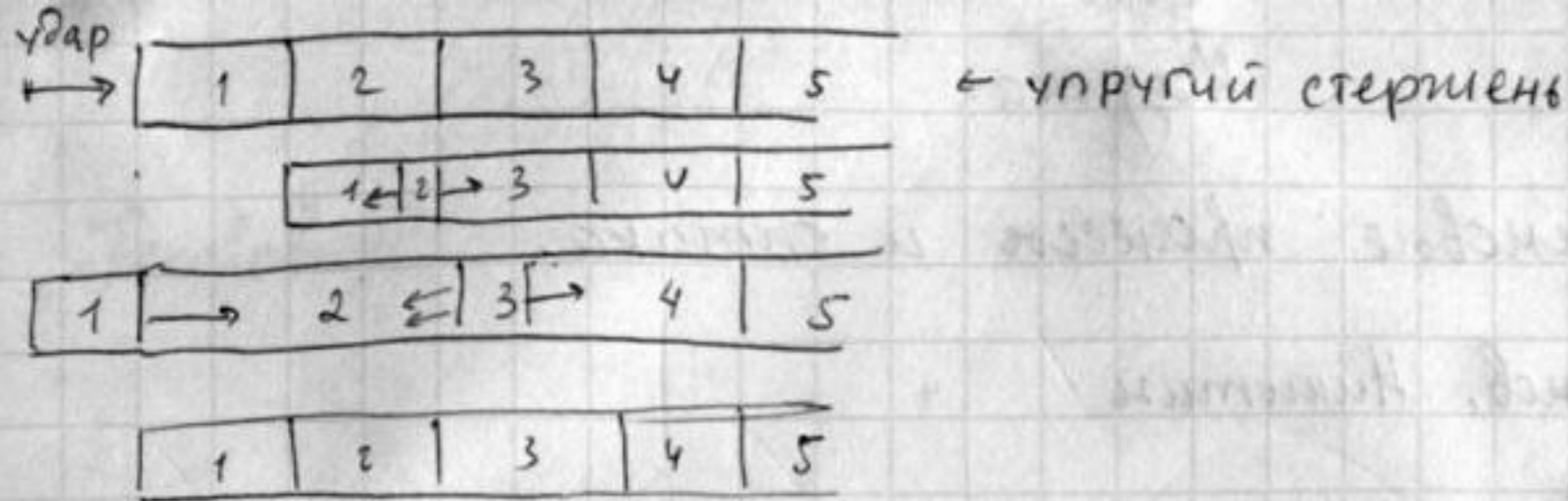
Волновые процессы и оптика.

1. Ахманов, Никитин  
"Физическая оптика"  
Матвеев "Оптика"  
Кингсен А.С. и др. "Основы физики", том 1.  
Каштеевский "Волновая оптика"  
Кашов "Физика элементов ЭВМ"
2. Крауфорд "Волны"  
Пейн "Физика колебаний и волн"

Звуковые волны.

- это статие и расттешение упруой среды.





Волна в упругой среде - это коллективное движение частиц. Сами частицы перемещаются на малое расстояние, а волна проходит далеко.

## Гл. I. Бегущие волны.

### §1. Описание волновых процессов.

#### 1.1. Одномерное волновое уравнение.

$\xi = \xi(x, t)$  - возмущение - ф-ия пространства и времени

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Волновое уравнение}$$

$$\{x, t\} \rightarrow \{\alpha = x - c_0 t, \beta = x + c_0 t\}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

из вида уравнения  $\Rightarrow \xi(\alpha, \beta) = f(\alpha) + g(\beta)$

$f(\alpha) = f(x - c_0 t)$  - это волна, бегущая вправо, т.к.

Пусть  $x_1, t_1 \rightarrow \alpha = \alpha_1 \rightarrow f(\alpha_1)$ , берем  $x > x_1$

При каком  $t$   $f(x, t) = f(x_1, t_1)$ , то будет при

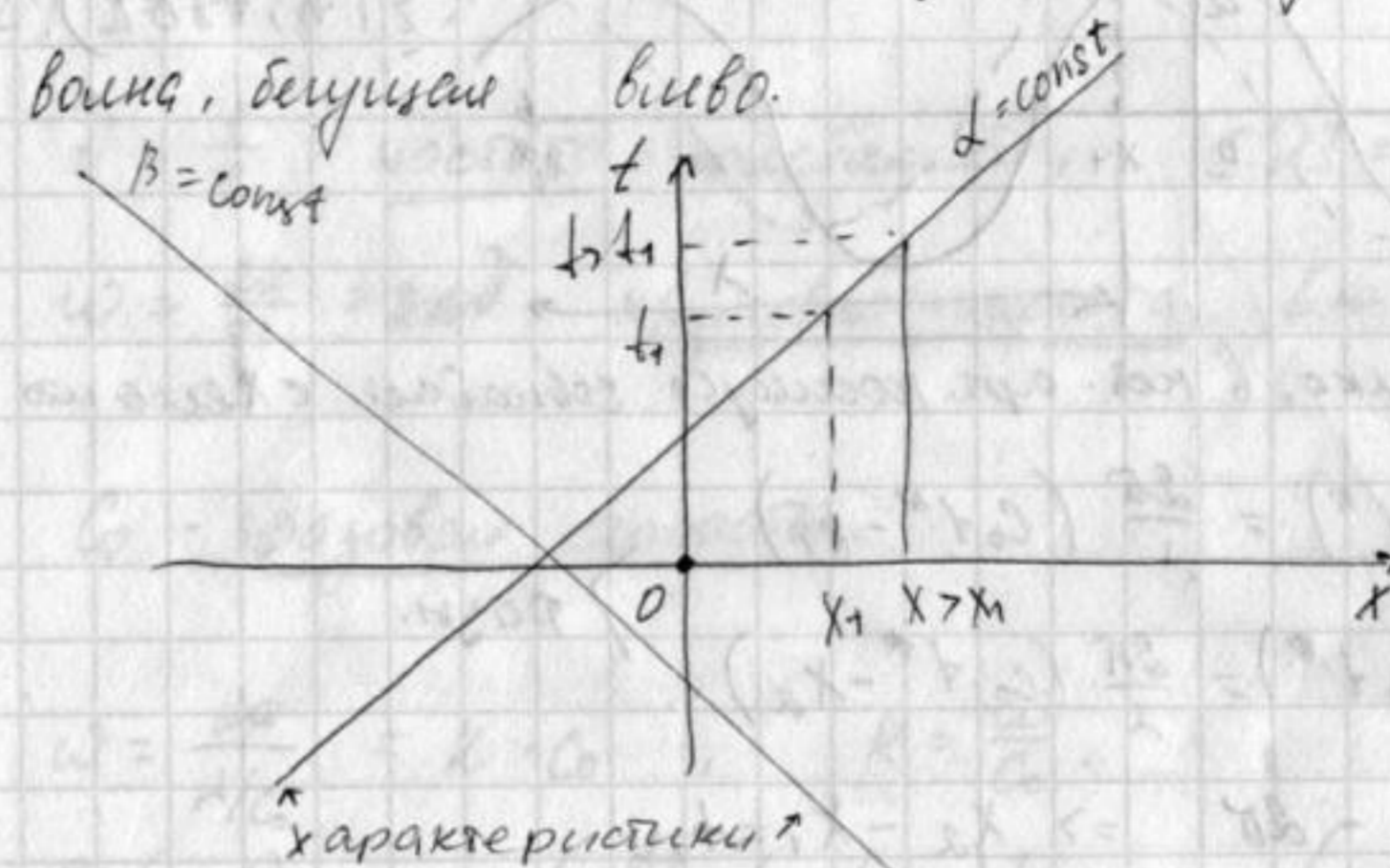
$$\alpha(x, t) = \alpha(x_1, t_1)$$

$$x - c_0 t = x_1 - c_0 t_1 \Rightarrow t = t_1 + \frac{x - x_1}{c_0}$$

т.к.  $x > x_1 \Rightarrow t > t_1 \Rightarrow$  волна бегит вправо по оси  $Ox$ .

Аналогично можно показать, что  $g(x + c_0 t)$  -

волна, бегущая влево.



$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \xi(x, t) = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi(x, t) = 0$$

произведение двух операторов возмущения

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi = 0 \quad \leftarrow \text{перенос вправо}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi = 0 \quad \leftarrow \text{перенос влево}$$

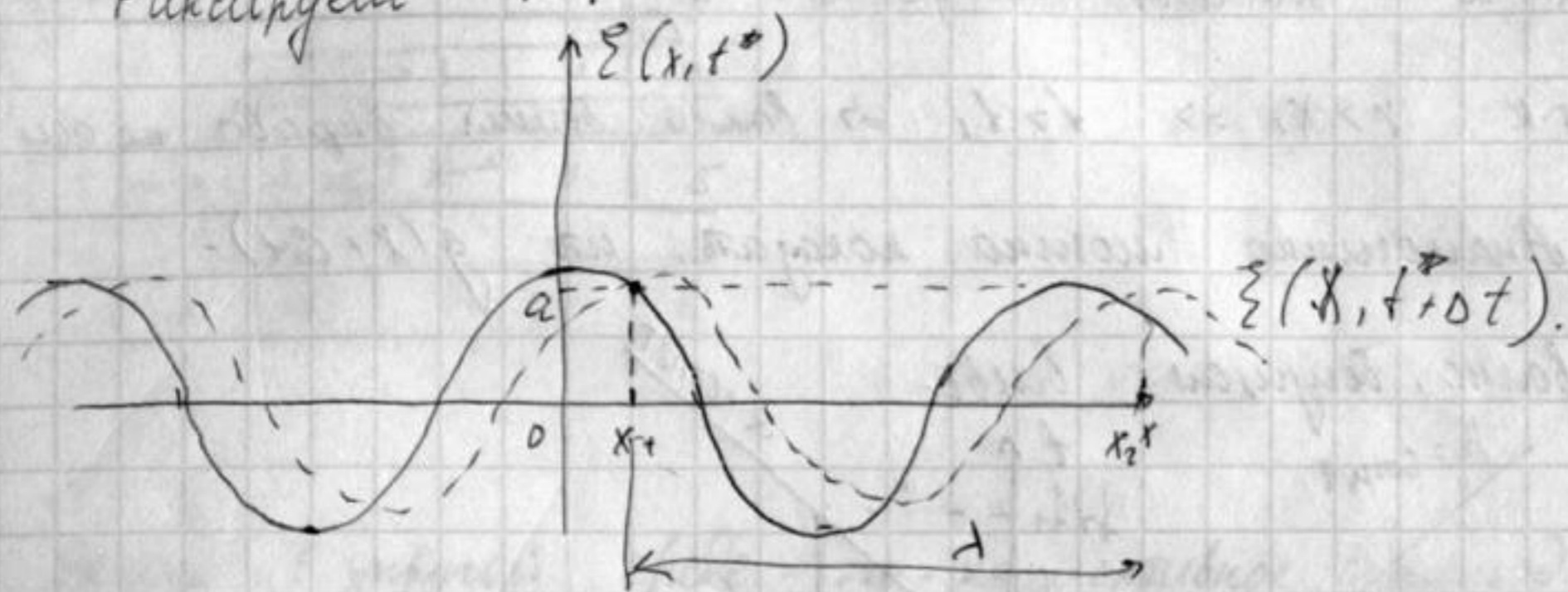
#### 1.2. Гармоническая волна.

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos \left\{ -2\pi \frac{x - c_0 t}{\lambda} \right\}$$

$\lambda$  - пространственный масштаб гармон. волны

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (c_0 t - x) \right)$$

Фиксируем  $t = t^*$



Точка  $x_2$  - точка, в кот. арг. косинуса совпадает с тем что в  $x_1$ .

$$\varphi_1 = \varphi(x_1, t^*) = \frac{2\pi}{\lambda} (c_0 t^* - x_1)$$

$$\varphi_2 = \varphi(x_2, t^*) = \frac{2\pi}{\lambda} (c_0 t^* - x_2)$$

разн.

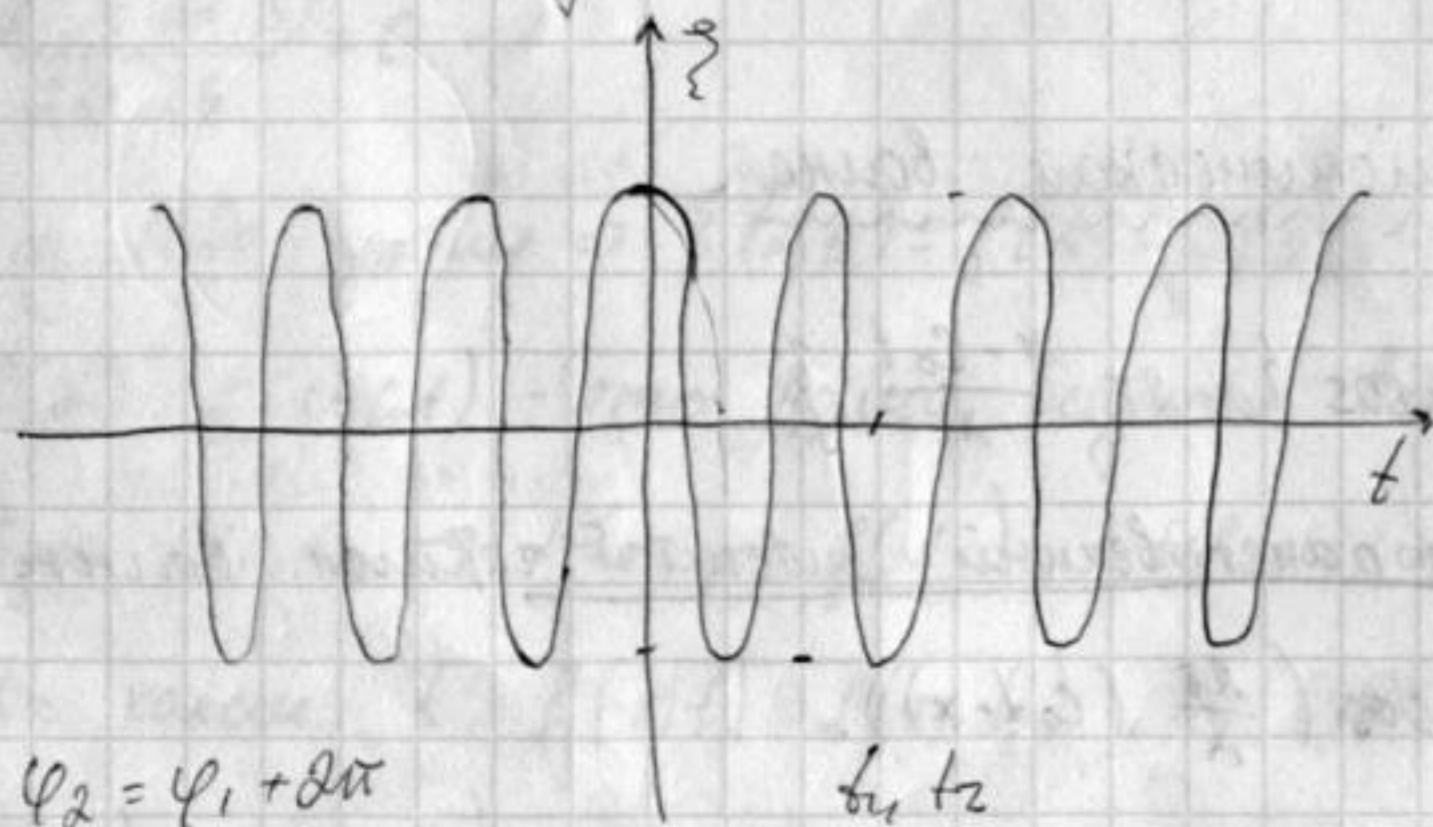
$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\pi \Rightarrow x_2 - x_1 = \lambda$$

$\lambda$  - длина волны - наименьшее расстояние, между точками, в которых аргумент отличается на  $2\pi$ , а значение совпадает.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} - \text{волновое число.}$$

$$[k] = \text{м}^{-1}, [\lambda] = \text{м.}$$

Для волны, бегущей вправо  $\xi(x, t + dt)$  правее



$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$$

$t_1, t_2$

$$\frac{2\pi}{\lambda} (c_0 t_1 - x) + 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} (c_0 t_2 - x)$$

$$t_2 - t_1 = T = \frac{\lambda}{c_0} - \text{период колебаний}$$

$$[T] = \text{с}$$

$$\nu = \frac{1}{T} - \text{частота колебаний, } [\nu] = \text{Гц}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu - \text{круговая частота, } [\omega] = \text{рад/с}$$

$c_0$  - фазовая скорость.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = k \cdot c_0, \quad k = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\xi(x, t) = a \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (c_0 t - x) \right\} = a \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

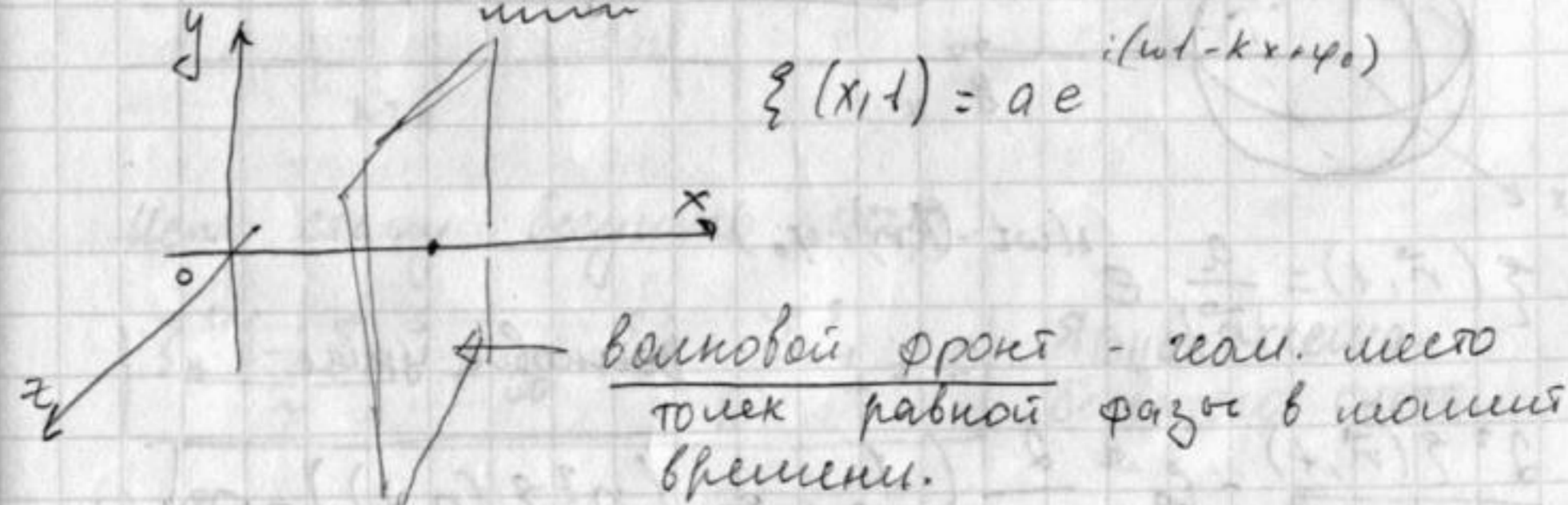
↑ начальная фаза гармонической

волны.

$$\xi(x, t) = a \text{Re} e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

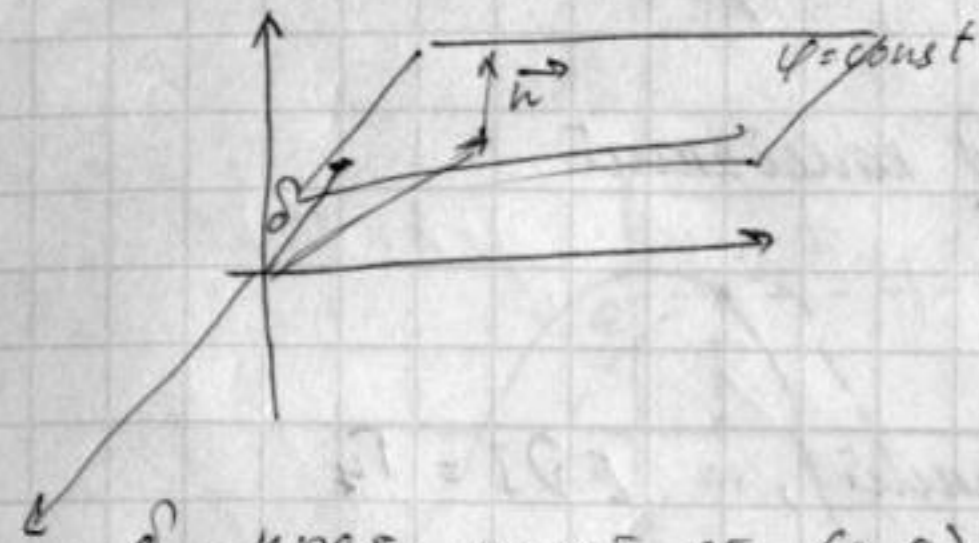
будем рассм.  $\xi(x, t) = a e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$

1.3 Плоская, сферическая и цилиндрическая волны.



Плоскость, перпендик оси Ox.

Но плоская волна не обязательно вдоль  $ox$ .



$\delta$  - крат. расст от  $(0,0)$  до плоскости

$$(\vec{n}, \vec{n}) = \delta$$

$$\varphi_{\text{на плоскости}} = -k \cdot \delta = -k(\vec{n}, \vec{n}) = -(\vec{k}, \vec{n})$$

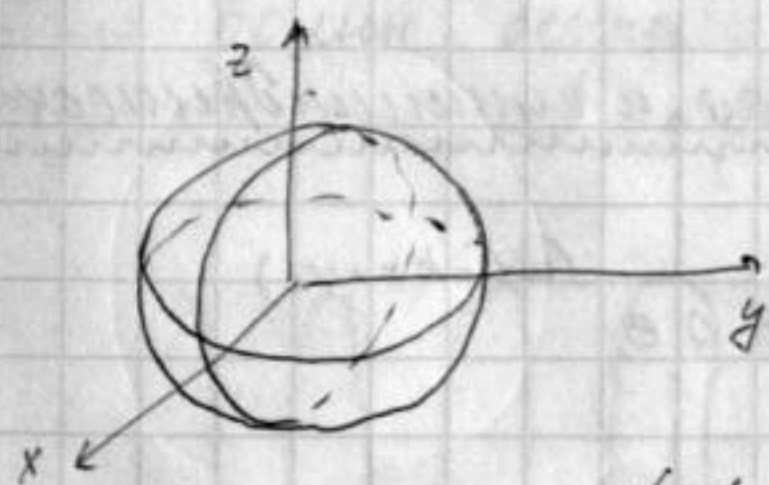
$\vec{k} = k \cdot \vec{n}$  - волновой вектор.

$$\xi(\vec{n}, t) = a e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{n}) + \varphi_0)}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \xi(\vec{n}, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \xi(\vec{n}, t) = 0 \right]$$

оператор Лапласа  
Волновое уравнение плоской волны  
в трехмерном пространстве.

Сферическая волна



Волновой фронт - поверхность  
равных фаз - сфера.

$$\xi(\vec{n}, t) = \frac{a}{|\vec{n}|} e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{n}) + \varphi_0)}$$

Волновое уравнение

$$\left[ \frac{\partial^2 \xi(\vec{n}, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi(r, t)) \right) = 0 \right]$$

источник - точка

Сферическая волна

источник - линия

1.4 Продольная и поперечная волна

Если  $\xi \parallel \vec{k}$  - продольная { звук  
сжатие, растяжение

$\xi \perp \vec{k}$  - поперечная { чиркает в струне  
эм волна

$\lambda \gg h$  - характеризующее число среды, т.е.  
расст между витками крутилки

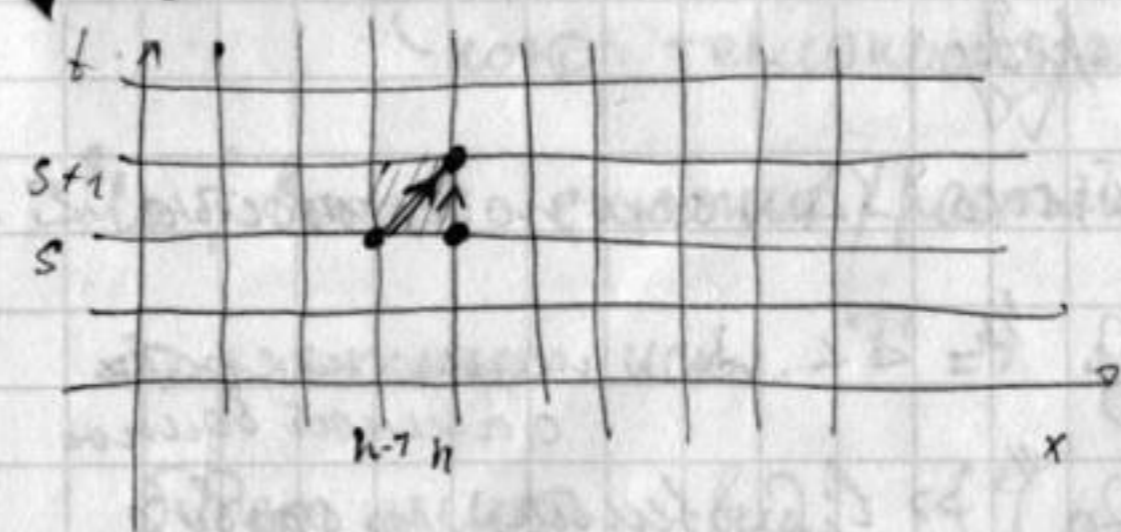
Если это не так, то УЧВ волны писать некорректно.

1.5. Об условиях устойчивости  
разностной схемы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\{x, t\} \Rightarrow \{x_n = h \cdot n, t_s = \tau \cdot s\}$$

переход к дискретным переменным



$$\xi_n^s = \xi(x_n, t_s)$$

Условие устойчивости бегущего света:

$$\left| \frac{\xi_{n+1}^s - \xi_n^s}{\tau} + c_0 \frac{\xi_n^s - \xi_{n-1}^s}{h} \right| = 0$$

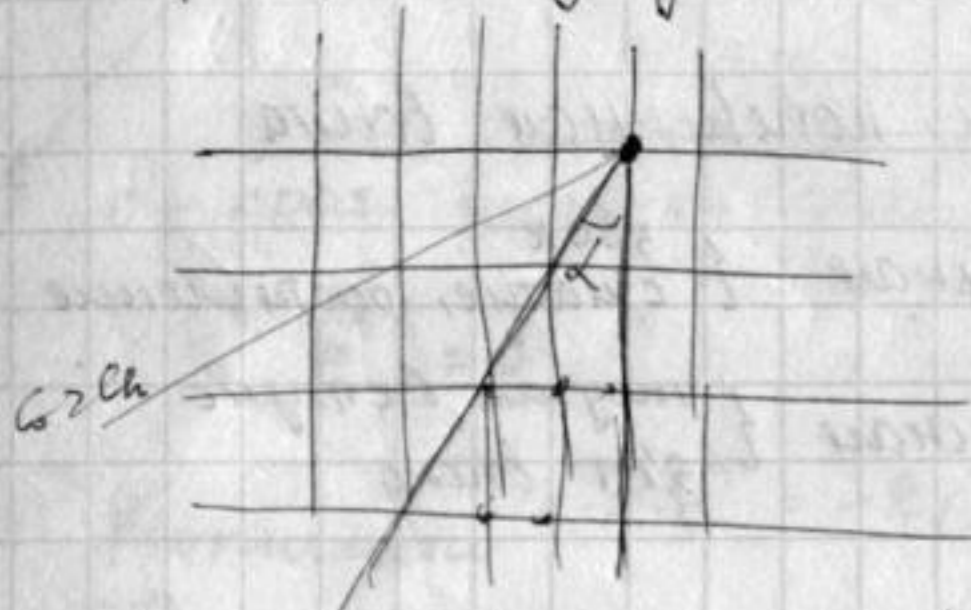
Явная схема  
бегущего света.

Схема условно устойчивая при волн  
условие Куранта:  $\tau < \frac{h}{c_0}$

Физ. интерпретация условия.

$C_0 < C_h$ ;  $C_h = \frac{h}{\tau}$  - хар-ка сетки

$C_h$  - макс. скорость, с которой может распр. возмущение на сетке



$\tau \Delta = \frac{h}{\tau} = C_h$

если  $C_0 < C_h$ , то возмущ. из узла

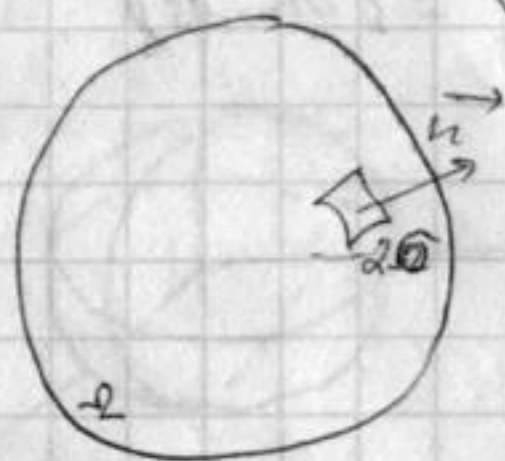
В сетке возмущ. в узле определяется возм. в узлах под прямой  $\tau \Delta = C_h$ .

Скорость распр. волны не должна быть больше той, которую позволяет сетка

§2. Звуковые волны

2.1 Гидродинамические ур-ия.

Рассм. сплошную среду:



Объем  $\Omega$ , огр. поверхностью  $\Sigma$ .

$\Omega^{1/3} \ll \lambda$ , мал по сравнению с длиной волны

$\Omega^{1/3} \gg l_{\text{час}} \Rightarrow$  велик по сравнению с расст. между частицами

$\Rightarrow$  Рассм. объем как тело в волновом процессе.

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega \frac{d\vec{v}(x,y,z,t)}{dt} = - \int_{\Sigma} p d\vec{\sigma} \quad (1)$$

↓  
давление

(1) - ур-ие движения.

по т. Остроградского - Гаусса:  $\int_{\Sigma} \rho \vec{v} d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \nabla p d\Omega$

1)  $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p$  - ур-ие движение в дивергентной форме.

2)  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\Sigma} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma})$  - ур-ие неразрывности

$$= \int_{\Omega} (\nabla(\rho \vec{v})) d\Omega \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla, (\rho \vec{v})) = -\text{div}(\rho \vec{v})$$

Ур-ие состояния:

3)  $f(\rho, p, T) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2 + \epsilon) = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} + \vec{w})$$

поток тепловой энергии

$$\vec{w} = -\chi \nabla T$$

коэф. теплопроводности

Но, волна сжатия / растяжения - адиабатический процесс

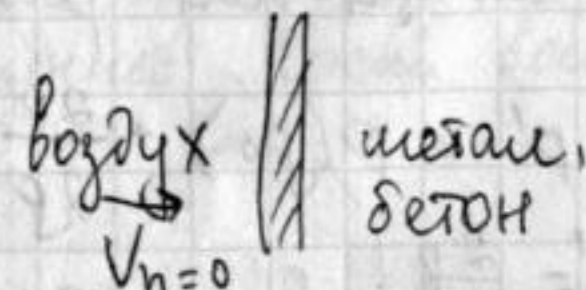
$\Rightarrow$  можно искать  $T \Rightarrow$  ур. сост.

будет иметь вид:  $f(\rho, p) = 0$ .

Граничные условия!

Адс жесткая граница:

$$V_n|_r = 0, \quad V_{tg}|_r \neq 0$$



Абс жесткая граница:

$p|_r = 0$ , воздух  $\nearrow$  металл  
 $\rightarrow p=0$

2.2. Приближение линейной акустики

$\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $p = p_0 + p'$

$\frac{\rho'}{\rho_0} \sim \frac{p'}{p_0} \ll 1$  - малые возмущения

$\vec{v}_0 = 0$  - среда неподвижна  $v = v(t, x, y, z) = 0$

1)  $(\rho_0 + \rho') \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z \right) + \vec{v} (\rho_0 + \rho') = 0$

$\omega_{\text{лок}}$  "  $\omega_{\text{конвективное}}$

$\omega_{\text{лок}} \sim \frac{V}{T}$ ,  $\omega_{\text{конв}} \sim \frac{V}{\lambda} \cdot V$

$\frac{\omega_{\text{конв}}}{\omega_{\text{лок}}} \sim \frac{TV}{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{V}{c_0} = M, \quad c_0 = \frac{\lambda}{T} \text{ - фаз. скорость } \\ \frac{a_0}{\lambda}, \quad a_0 = VT \text{ - амплитуда} \end{array} \right\} \ll 1$

M - мах,

$M \ll 1$  - звук. скорость

$M > 1$  - сверх-звуковая скорость

$\Rightarrow$  с соотв. упрощениями =

1')  $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = 0$

2')  $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 (\vec{\nabla}, \vec{v}) = 0$

3) Ур-ие состояния

р-е Тейлора для  $p \Rightarrow$

$p_0 + p' = p(\rho_0) + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 \rho' + \dots$

$\Rightarrow p' = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 \rho'$  - ур-ие сост.

Из 1) - 3) получим волновое ур-ие

1'')  $\rho_0 \frac{\partial (\vec{\nabla}, \vec{v})}{\partial t} + \Delta p' = 0$

2'')  $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial (\vec{\nabla}, \vec{v})}{\partial t} = 0$

исключаем  $v$  и  $p' \Rightarrow$

$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 \Delta \rho' = 0$

$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = 0$

Потенциал скорости  $\varphi(t, x, y, z)$ , тогда  $\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$

1''')  $\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p' = 0$

2''')  $\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 \Delta \varphi = 0$

$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 \Delta \varphi = 0$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = 0$

Что такое  $c_0$ ? фазовая скорость.

$\beta_0$  - сжимаемость среды;  $\beta_0 = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_0$

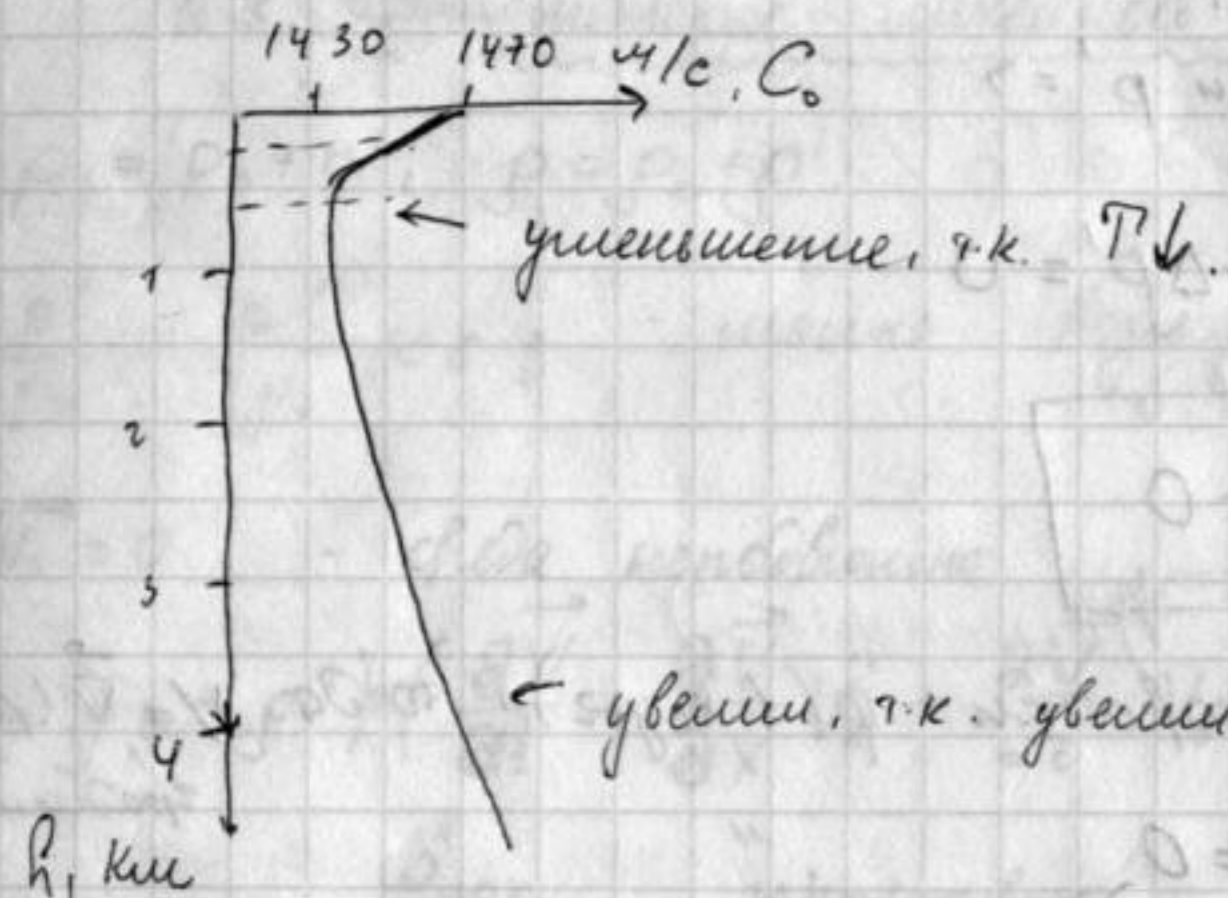
$c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0, \Rightarrow \beta_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \Rightarrow c_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \beta_0}$

чем больше плотность среды  $\rho_0$ , тем медленнее распространяется волна.

$$C_{\text{в воде}} = 1500 \text{ м/с}$$

С увеличением температуры  $T \uparrow \Rightarrow \rho_0 \downarrow \Rightarrow C_0 \uparrow$   
 С увеличением солености  $S \uparrow \Rightarrow \rho_0 \downarrow \Rightarrow C_0 \uparrow$

Лотосы в морях и океанах  $C_0$  изм. неравномерно:



$C_{\text{зв. в металле}} = 5000 \text{ м/с}$   
 $C_{\text{зв. в воздухе}} = ?$  посчитаем!

$$C_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0$$

статус 1935

допускаем, что процесс адiabатический (нет теплообмена) (т.к. быстро пр-ит)

$$p V^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \quad \gamma = \frac{C_p - C_v}{C_v} - \text{объем, } \gamma \text{ при адiabаты}$$

$$m = \rho V$$

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma - \text{изм. объем}$$

$$C_0^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

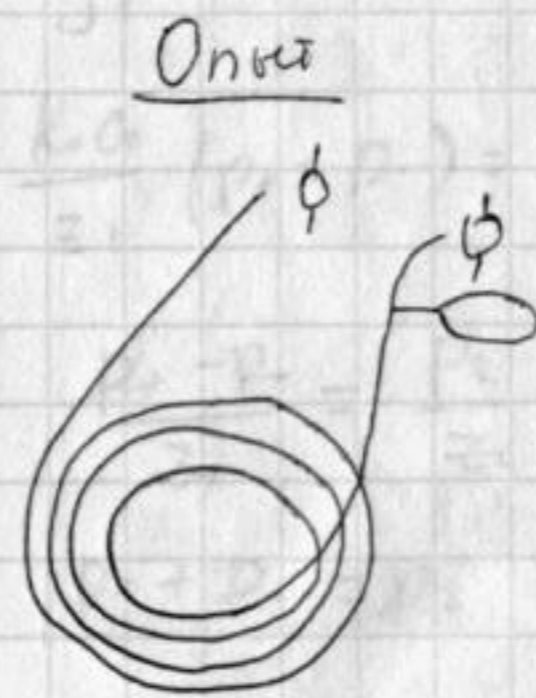
$$\gamma_{\text{в воздухе}} = \frac{C_p}{C_v} = \frac{R(i+2)}{Ri} \quad \text{при } p = \text{const}$$

$$\left. \begin{matrix} N_2 \\ O_2 \end{matrix} \right\} i=5 \quad \text{и } \text{и } \text{и}$$

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\Rightarrow C_0^2 = 1,4 \cdot \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}}{1,3 \text{ кг/м}^3} = 337 \text{ м/с}$$

$$C_0 = 300 \text{ м/с}$$



$$l = 80 \text{ м}$$

$$\text{время запаздывания: } \Delta t = \frac{l}{C} = 0,2 \text{ с}$$

Сух.

$$\lambda_{\text{min}} = 30 \text{ Гц}, \quad \lambda_{\text{max}} = 20 \text{ кГц}$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{C_0}{\nu_{\text{min}}} = 10 \text{ м}, \quad \lambda_{\text{min}} = 1,5 \text{ см}$$

наибольшая чувств.  $\nu \approx 2-3 \text{ кГц}$

$\nu < 16 \text{ Гц}$  - инфразвук

$\nu > 10^6 \text{ Гц}$  ультразвук

$\nu > 10^9$  гиперзвук

какова точность ЧЗЧ?

$$\lambda_{\nu} = 10^6 \text{ Гц}, \quad \lambda_{\nu} = \frac{C_0}{\nu} = \frac{300 \text{ м/с}}{10^6 \text{ 1/с}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,03 \text{ см}$$

спой! надо брать  $C_{\text{в воде}}$ !  $\lambda_{\nu} = \frac{1500}{10^6} = 1,5 \text{ мм}$

Можно ли считать воздух сплошной средой?

$$\rho_{\text{возд}} \ll \rho \ll \Omega^{1/3} \ll 1$$

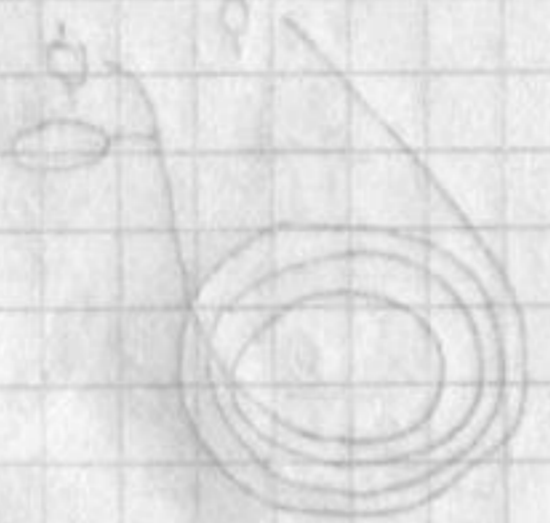
$$N_L \sim 2.7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \quad d_{\text{мин}} \sim 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\ell \sim \frac{1}{N_L^{1/3}} = \frac{10^{-8}}{3} \text{ м} = 0.3 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

$$0.3 \cdot 10^{-9} \text{ м} \ll \Omega \ll 1.5 \text{ см}$$

Диапазон возмущений.

$$\sin(\Omega) = \Omega$$



2.3 На границе раздела. Импеданс

$$v(x,t) = V e^{i(\omega t - kx)} \text{ - плоская волна}$$

$$p(x,t) = P e^{i(\omega t - kx)}$$

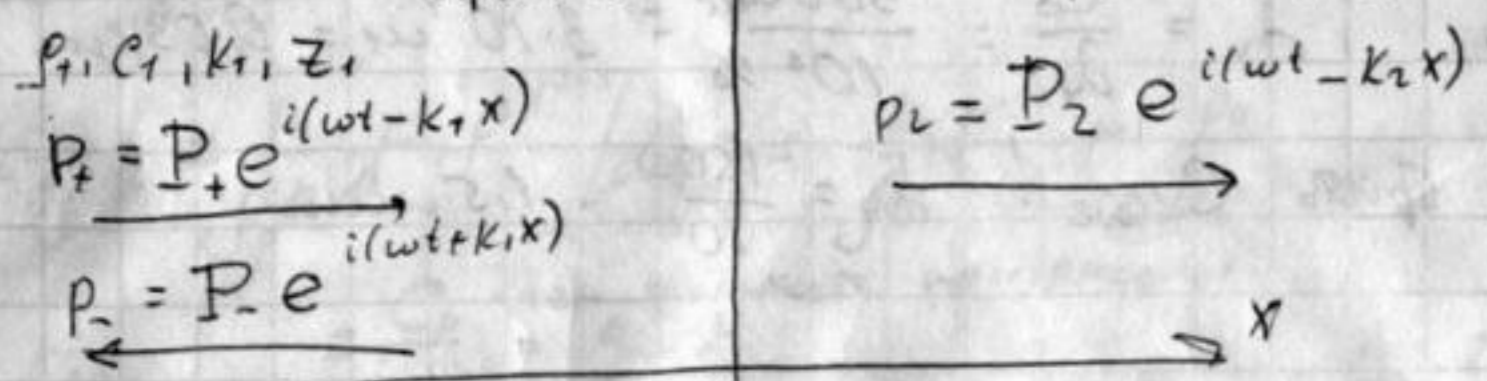
$$1) \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$i\rho\omega v + (-ik)p = 0$$

$$\frac{p}{v} = \frac{\rho_0 \omega}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c_0} \text{ - волн. число}$$

$$\frac{p}{v} = Z$$

$$Z = \rho_0 c_0 \text{ ИМПЕДАНС}$$



- при  $x=0$ :
- $p_+ + p_- = p_2$
  - $v_+ + v_- = v_2$

$$2) \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\partial p_+}{\partial x} + \frac{\partial p_-}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x}$$

$$\begin{cases} i\rho_0 \omega v + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ v = \frac{i}{\omega \rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{k_1}{\rho_1} (-p_+ + p_-) = \frac{k_2}{\rho_2} (-p_2)$$

$$\frac{k_1 c_1}{z_1} (p_+ - p_-) = \frac{k_2 c_2}{z_2} p_2$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \rho_2 c_2 \\ z_1 &= \rho_1 c_1 \\ \frac{1}{\rho_1} &= \frac{c_1}{z_1} \end{aligned}$$

$$\frac{p_+ - p_-}{z_1} = \frac{p_2}{z_2}$$

$$p_+ + p_- = p_2$$

$$R_p = \frac{p_-}{p_+} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \text{ - амплитудный коэф. отражения}$$

$$T_p = \frac{p_2}{p_+} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}$$

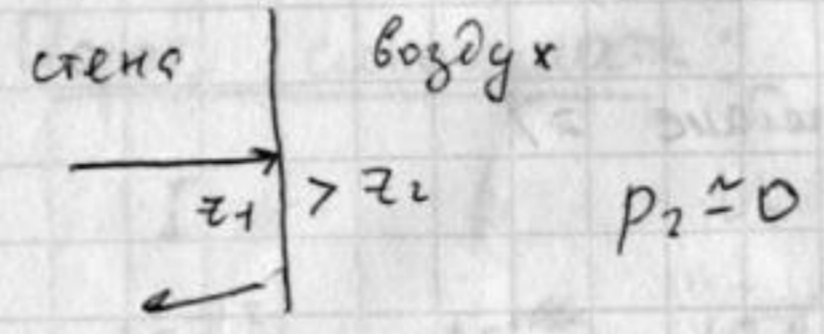
1) Пусть  $z_1 = z_2$  ( $\rho_2 \neq \rho_1, c_1 \neq c_2$ )

$\Rightarrow$  отражений нет.  $R_p = 0, p_- = 0$ .

2) Пусть  $z_2 > z_1 \Rightarrow R_p > 0 \Rightarrow p_+$  совпад по фазе с  $p_+$

отражение в фазе.

3)  $z_2 < z_1 \Rightarrow R_p < 0 \Rightarrow$  отраж. в противофазе.





2.4. Поток и объемная плотность энергии

1)  $\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0$  ;  $\vec{\nabla}$

2)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\vec{\nabla}, \vec{V}) = 0$  ;  $\frac{1}{\rho_0} p$

(\*)  $\rho_0 (\vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}) + (\vec{\nabla} p, \vec{V}) = 0$

$\frac{1}{\rho_0} p \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \vec{V}) p = 0$

т.к.  $p = p(t) = p(\rho(t)) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}$

то  $\frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho_0} = \beta_0 \Rightarrow$

(\*\*\*)  $\beta_0 p \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \vec{V}) p = 0$  ; (\*) + (\*\*\*)  $\Rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\rho_0 \frac{V^2}{2}}_{\omega} + \underbrace{\beta_0 \frac{p^2}{2}}_{S}) + (\vec{\nabla}, \underbrace{p \vec{V}}_{\vec{S}}) = 0$

$\omega$  - объемная плотность энергии ;  $\vec{S}$  - плотность потока энергии

Закон сохр. энергии:

$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \vec{S}) = 0$

$\omega = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \frac{1}{2} \beta_0 p^2$  ;  $[\omega] = \text{Дж}/\text{м}^3$

т.к.  $p = zV$  ;  $z = \rho_0 c_0$  - импеданс  $\Rightarrow$

$\omega = \rho_0 V^2 = \beta_0 p^2$

$|\vec{S}| = pV = zV^2 = \rho_0 c_0 V^2 = c_0 \omega$

$S = c_0 \omega$

$[S] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$

2.5. Интенсивность.

$I = \langle S \rangle$  - ср. знач. за  $T$  плотности потока  $S$

$S = pV = zV^2$

$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T zV^2(t) dt$  ;  $V = V \cos \omega t$

$I = \frac{1}{2} z V^2$

$I_0 = 10^{-12} \text{ Вт}/\text{м}^2$  - порог слышимости

$\beta_I = 10 \lg \frac{I}{I_0}$  ;  $[\beta_I] = \text{дБ}$

Порог слышимости:  $I = I_0 = 10^{-12} \text{ Вт}/\text{м}^2$

$V_0 = \sqrt{\frac{2I_0}{z}} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ м}$

$\xi = a \cos \omega t$  ;  $\dot{\xi} = V = a\omega \sin \omega t$

$a_0 = \frac{V_0}{\omega}$  ;  $\omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 / \text{с}$

$a_0 \sim 10^{-12} \text{ м}$  ;  $\lambda \text{ звуков} \sim 10^{-14} \text{ м}$  - Фрэнк.

амплитуда колебаний барабана перепонки

$P_0 \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$  - давление на пороге слышимости

Порог слышимости:  $\beta_{I_0} = 0$

	$I$	$\beta$	$V_0$	$a_0$	$P_0$
порог	$10^{-12} \text{ Вт}/\text{м}^2$	$0 \text{ дБ}$	$10^{-8} \text{ м}/\text{с}$	$10^{-12} \text{ м}$	$10^{-5} \text{ Па}$
громкая речь	$10^{-5} \text{ Вт}/\text{м}^2$	$70 \text{ дБ}$	$3 \cdot 10^{-5} \text{ м}/\text{с}$	...	
популярный концерт	$10^{-2} \text{ Вт}/\text{м}^2$	$100 \text{ дБ}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$1 \text{ Па}$
дискотека	$1 \text{ Вт}/\text{м}^2$	$120 \text{ дБ}$			

Боковой порог 140 дБ

Турбин самолета 150 дБ

2.6 Нелинейные волны

1)  $\rho \frac{dV}{dt} + \vec{\nabla} p = 0$

Плоская волна:  $V = V(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$

(\*)  $\rho_0 \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} V \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$\rho = \rho_0 c_0 v \Rightarrow \rho = \rho c(v) \cdot v \Rightarrow$

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho c(v) \cdot v) \approx \rho c(v) \frac{\partial v}{\partial x}$

$c(v) - ? \quad c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_0 \# ; \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} r$

$\Rightarrow \rho = \rho_0 \cdot \frac{p_0}{\rho_0 r}, \quad c(v)^2 = \frac{p_0}{\rho_0 r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \frac{p_0}{\rho_0 r} \cdot r (\rho_0^{-1} r^{-1}) =$

$= r \frac{p_0}{\rho_0 r} (\rho_0 + \rho') r^{-1} = \left( r \frac{p_0}{\rho_0} \rho_0 r^{-1} \right) (1 + \frac{\rho'}{\rho_0}) r^{-1}$

$c^2(v) = c_0^2 (1 + \frac{\rho'}{\rho_0}) r^{-1}$

$\frac{\rho'}{\rho_0} \sim \frac{v}{c_0} < 1$

$\Rightarrow c(v) = c_0 (1 + \frac{\rho'}{\rho_0})^{\frac{1}{2}} \approx c_0 (1 + \frac{v}{c_0})^{\frac{1}{2}} \approx$

$c(v) \approx c_0 (1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c_0})$

(\*)  $\Rightarrow \rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \rho c_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c_0} \right) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0$

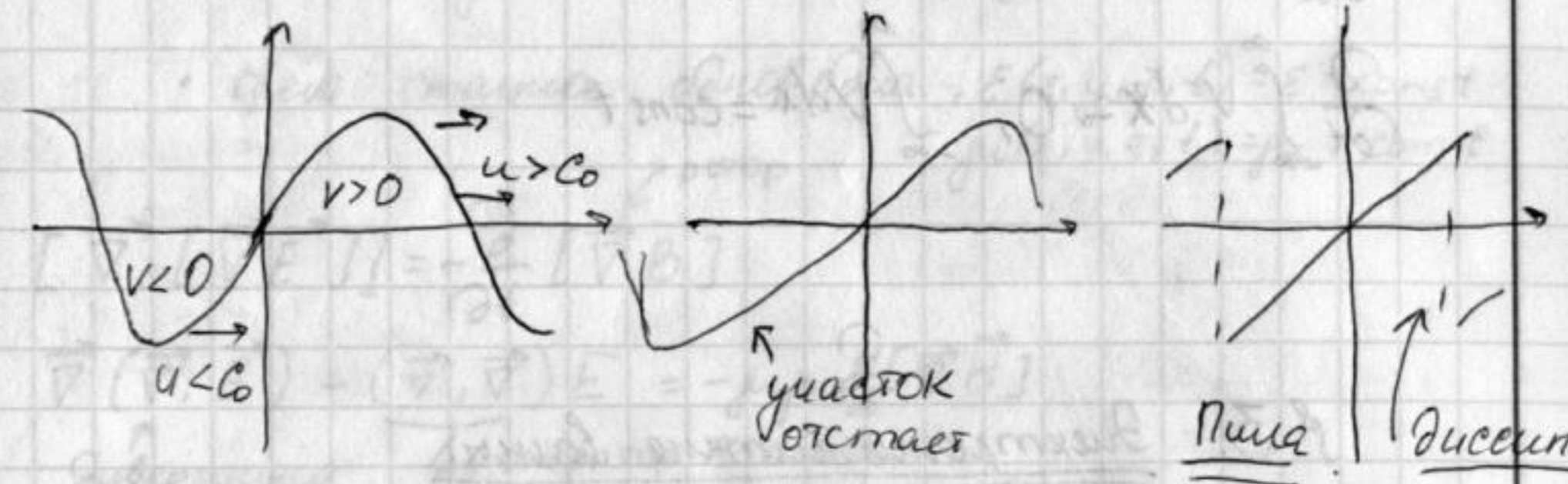
$\Rightarrow \left| \frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{\left( c_0 + \frac{1}{2} v \right)}_{u(v)} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \right| \quad (**)$

$u(v)$  - скорость переноса возмущения.

$\frac{\partial V}{\partial t} + u(v) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0$  - нелинейное ур-ие переноса.

$u(v)$  зависит от  $v$ -скорости частиц

$V(x, t) = f(x - u(v)t)$  - решение ур-ия (\*\*)



Происходит укрепление фронта волны за счет нелинейности

Ур-ие плоских волн.

$(x, t) \rightarrow [x' = x - c_0 t, t' = t]$  - движущаяся сис коор.

$\frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} = 0$  или  $\frac{\partial V}{\partial t} + \epsilon v \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \epsilon < 1$

Ур-ие Бюргера.

нелинейность малая

$\frac{\partial V}{\partial t} + \epsilon v \frac{\partial V}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$

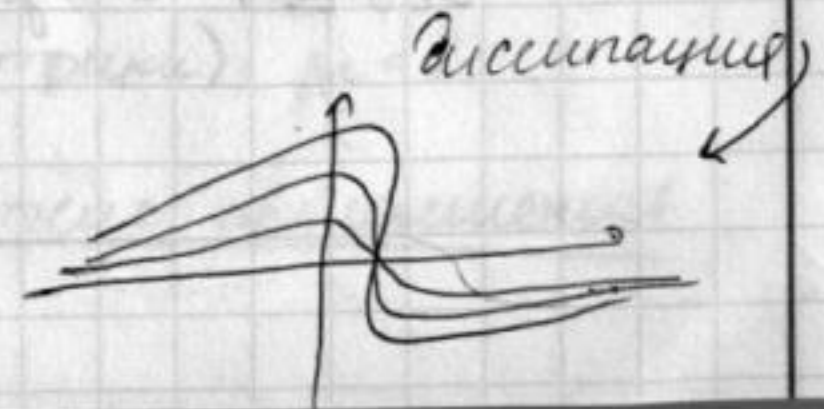
↑ разрыв ↑ диссипация

$x=0 \quad V(x, t) = V_0 e^{i(\omega t - kx)}, \text{ диссипация мала.}$

$\frac{\partial V}{\partial t} + \epsilon v \frac{\partial V}{\partial x} = 0$

$x > 0$  - наше укрепление

$\frac{\partial V}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$



Но! Как ни странно, индукция состоит

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon \frac{V^2}{2} - \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} V dx = - \left[ \epsilon \frac{V^2}{2} - \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int V dx = 0; \quad \int V dx = \text{const}$$

### § 3. Электromagnитные волны.

- быстро меняются во времени электрические и магнитные поля.

Ур. Максвелла:

$$1) [\nabla \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{— индукция}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$2) [\nabla \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$3) (\nabla, \vec{D}) = \rho \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}}$$

$$4) (\nabla, \vec{H}) = 0 \quad \mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$$

$$1) \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \Lambda \vec{E}$$

### § 1. Волновое уравнение

Приближения:

• нет свобод. зарядов,  $\rho = 0$

• нет <sup>тока проводимости</sup> индукции тока  $\Lambda = 0 \Rightarrow \vec{j} = 0$

• среда статична, однородна,  $\epsilon(x, y, z, t) = \epsilon = \text{const}$   
 $\mu(x, y, z, t) = \mu = \text{const}$

$$[\nabla (\nabla \vec{E})] = - \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \vec{B}]$$

$$\nabla (\nabla, \vec{E}) - (\nabla, \nabla) \vec{E} = - \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \vec{H}]$$

Дивергенция  $\Delta$  - оператор Лапласа.

$$\text{Поск. } \rho = 0 \text{ и } (\nabla, \vec{D}) = \rho \Rightarrow \epsilon \epsilon_0 (\nabla, \vec{E}) = 0$$

$$+ \Delta \vec{E} = \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \vec{H}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \vec{H}] = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{из 2)}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \Delta \vec{E} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = 0}, \quad \text{где } c^2 = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$c$  - фазовая скорость

Волновое уравнение

В вакууме:  $\epsilon = 1, \mu = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

В среде:  $c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ ,  $\sqrt{\epsilon \mu}$  - показатель преломления

и нематричные среды (диэлектрики)  $\mu = 1$ .

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \sqrt{\epsilon} = n - \text{показатель преломления}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow c \leq c_0$$

32 Поперечность этих волн

$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \{ i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r})) \}$  - плоская гармоническая волна.

$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp \{ i(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r})) \}$

$\chi(\vec{\nabla}, \vec{E}) = (\vec{E}_0, \vec{\nabla} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})}) e^{i\omega t}$

$\vec{\nabla} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = \vec{\nabla} e^{-i(\vec{e}_1 k_x x + \vec{e}_2 k_y y + \vec{e}_3 k_z z)}$   $\vec{e}_i$  - единичный вектор осей.

$-i(\vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = -i \vec{k} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$   
 $\vec{k}$  - волновой вектор. ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$ )

$\vec{\nabla} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = -i \vec{k} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$

$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = (\vec{E}_0, -i \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i\omega t} = -i(\vec{E}, \vec{k}) = -i(\vec{k}, \vec{E})$

Итак, поперечность  $\vec{E}$  div  $\vec{E} = (\vec{\nabla}, \vec{E}) = -i(\vec{k}, \vec{E})$

Пл.к.  $(\vec{\nabla}, \vec{\Phi}) = \rho = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}, \vec{E}) = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}) = 0$

$\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$

Пл.к.  $(\vec{\nabla}, \vec{B}) = 0$ , то  $(\vec{\nabla}, \vec{H}) = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{H}) = 0$   
 $\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H}$



Расположение  $\vec{E}, \vec{H}$  в плоскости  $\{\vec{E}, \vec{H}\}$  - ?

$[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

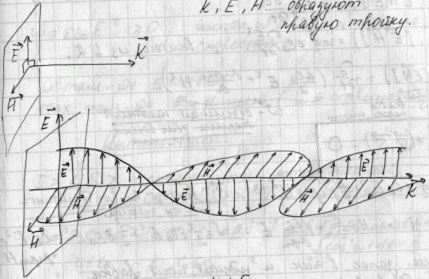
$-i[\vec{k} \vec{E}] = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ ,  $\kappa = e^{i\omega t}$

$i[\vec{k} \vec{E}] = i\omega \mu_0 \vec{H}$

$\Rightarrow [\vec{k} \vec{E}] \sim \vec{H}$

4.2)  $[\vec{\nabla} \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow -i[\vec{k} \vec{H}] = i\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow [\vec{k} \vec{H}] \sim -\vec{E}$

$\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$  образуют правую тройку.



$\kappa E = \omega \mu_0 H$  и  $\kappa E =$

$k = \frac{\omega}{c}$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}}$ ,  $\kappa E = \kappa \omega \mu_0 H$

$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} H$   $E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}$  - широта среды  
 волнового сопротивления  $[\epsilon] = 1 \text{ Ом}$

$E = Z \cdot H$  - соотношение для модулей

Воздуши  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом}$ .

3.3 Энергия элм волн.

(1),  $\vec{K}$

$$(\vec{K}, [\vec{\nabla} \vec{E}]) = - \text{диво} \left( \vec{K}, \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \right).$$

$$(2), \vec{E} \Rightarrow (\vec{E}, [\vec{\nabla} \vec{K}]) = \varepsilon \varepsilon_0 (\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}).$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\vec{\nabla}_E, [\vec{E} \vec{H}]) &= -\frac{1}{2} \text{диво} \frac{\partial \kappa^2}{\partial t} \\ (\vec{\nabla}_H, [\vec{H} \vec{E}]) &= \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

$$(\vec{\nabla}_H, [\vec{E} \vec{H}]) = -\frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}, \text{ вытекает из 1 \& 2.}$$

$$(\vec{\nabla}, [\vec{E} \vec{H}]) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\text{диво} H^2}{2} \right).$$

$\vec{S}^2$  - плотность энергии  
 $w$  - объемная плотность энергии элм волн

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \vec{S}) = 0$$

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \text{диво} H^2, \quad \vec{S} - \text{вектор Пойнтинга}$$

$$E = z \cdot H \Rightarrow H = \frac{E}{z} = \frac{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0}}{\mu_0} E \Rightarrow w = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon \varepsilon_0 E^2$$

Энерг. запас в элм и магн. поле равны!

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}], \text{ из } [\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\text{диво}} [\vec{K} \vec{E}]$$

$$\vec{S} = [\vec{E} [\vec{K} \vec{E}]] \text{ диво} = \frac{1}{\text{диво}} \{ \vec{K} (\vec{E}, \vec{E}) - \vec{E} (\vec{E}, \vec{K}) \}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\text{диво}} \cdot \frac{w}{c} \vec{e}_k (\vec{E}, \vec{E}) = \frac{c}{\text{диво}} \left( \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\vec{e}_k}{\mu} w \vec{e}_k \right)$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{e}_k \cdot c \cdot w$$

$\vec{S} \parallel \vec{K}$  в изотропных средах,  
 (т.е. где  $\varepsilon, \mu$  - скаляры)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \vec{S}) = 0 \quad \text{при } \vec{J} = 0$$

Если помножим и действии стокровских ссл  $E_{\text{ср}}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \vec{S}) = \underbrace{(\vec{j}, \vec{E})}_{\text{потери энергии}} + \underbrace{(\vec{j}, \vec{E}_{\text{ср}})}_{\text{деств. сторонних ссл.}}$$

$$\vec{S} = c \cdot w,$$

$w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \geq 0$ , частота  $\omega$  в 2 раза больше, скорость та же.

0 там, где  $E = H = 0$ ,

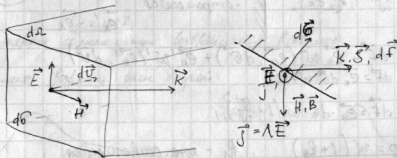
max там, где  $E$  и  $H$  макс (и.д. отрицательны)

Интенсивность.

$\Gamma = \langle S \rangle_t$  - среднее знач. потока энергии,  
 $[\Gamma] = [S] = \text{Вт/м}^2 = \text{Дж/с} \cdot \text{м}^2$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \langle c \cdot w \rangle_t = c \cdot \varepsilon \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_t = \left\{ \int_{\vec{r}} \vec{E} \cdot \vec{E}_0 \cos \omega t \right\} = \\ &= \frac{c \varepsilon \varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{c \varepsilon \varepsilon_0}{n^2} E_0^2 = \\ &= \frac{c_0 \mu_0 \varepsilon_0}{2} E_0^2, \quad [E] = \frac{B}{\mu}, \quad [H] = \frac{A}{c}. \end{aligned}$$

3.4 Равнение элм волн.



$$d\vec{F} = [j, \vec{B}] d\Omega; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \left[ \vec{H} = \frac{1}{4\pi r^2} [\vec{k}, \vec{E}] \right];$$

$$B = \frac{\mu_0}{c} E = \frac{E}{c}; \quad d\vec{F} = \vec{e}_k \int j B d\Omega = \vec{e}_k \int j E \frac{d\Omega}{c}$$

$dQ = j E d\Omega$  - кол-во энергии, кол. помещается в эл. объеме.

$$d\vec{F} = \vec{e}_k \frac{dQ}{c}$$

Пусть на радиационную энергию помещается.

$$\Rightarrow dQ = (S, d\vec{\sigma}) = \omega c (\vec{e}_k, d\vec{\sigma})$$

$$d\vec{F} = \vec{e}_k \cdot \omega c \frac{1}{c} (\vec{e}_k, d\vec{\sigma}) = \vec{e}_k \omega d\sigma \cos(\vec{e}_k, d\vec{\sigma})$$

или выведем из эл. потока.

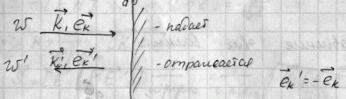
$$P = \frac{dF}{d\sigma} \quad P = \omega \cos(\vec{e}_k, d\vec{\sigma})$$

при нормальном падении на полностью поглощающую среду  $P = \omega$ !

$$[Pa] = [Dy/m^2], \quad Pa = \frac{H}{m^2} = \frac{H \cdot m}{m^3} = \frac{Dy}{m^2}$$

$$d\vec{F} = \vec{e}_k \cdot \omega (\vec{e}_k, d\vec{\sigma})$$

Нормальное падение с част. отражением.

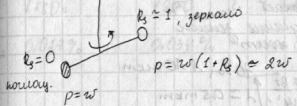


$$d\vec{F} = \vec{e}_k \omega (\vec{e}_k, d\vec{\sigma}) + \vec{e}_k' \omega' (\vec{e}_k', d\vec{\sigma})$$

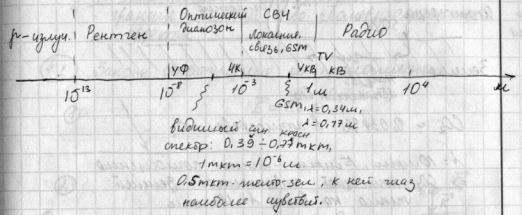
$$d\vec{F} = \vec{e}_k d\sigma (\omega + \omega')$$

$$d\vec{F} = \vec{e}_k \cdot d\sigma \cdot \omega \left(1 + \frac{\omega'}{\omega}\right)$$

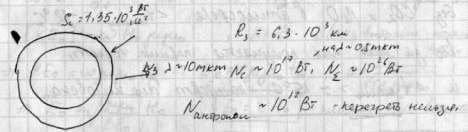
$$P = \omega (1 + R_3), \quad R_3 - \text{коэф. отражения.}$$



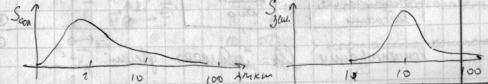
### 35 Шкала э/м волн



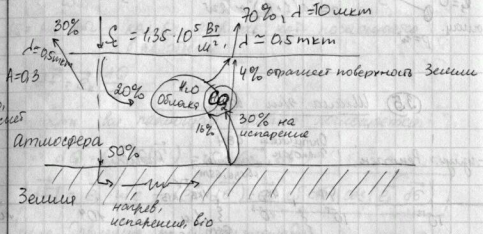
### 36 Оценки



1. Вся энергия антенны излучается в космос.
2. Но спектр излучения вращается вокруг:



3. Атмосфера прозрачна Солнцу и преобразовывает излучение Земли  
 ⇒ "парниковый эффект"

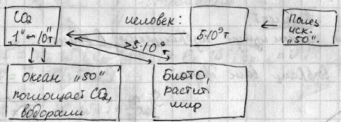


$\text{CO}_2 \sim 0,034\%$  в атмосфере,  $\text{H}_2\text{O}$

$d = 10 \text{ мкм}$ ,  $\lambda$  микроволны - длинны поглощения  
 ⇒  $\text{CO}_2$  поглощает отражаемое землей тепло на длине  $d = 10 \text{ мкм}$

$d_{\text{H}_2\text{O}} \sim 3 \text{ мкм}$ ,  $6,8 \Rightarrow$  тоже поглощает.

Без  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  в атмосфере.  $\langle t_{\text{земли}} \rangle = -18^\circ\text{C}$   
 Но за счет них получается парник. эффект,  
 и  $\langle t_{\text{земли}} \rangle \approx 15^\circ\text{C}$  - комфорт для человека.



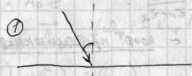
Концентрация  $\text{CO}_2$  медленно растет.

1880:  $\text{CO}_2$  0,027%    1980 0,034%    2030 0,045%  
 → повышение  $t$  на  $+1,5^\circ\text{C}$

§4 Электромагнитные волны на границе раздела сред. Поляризация и эффекты.

26.0

4.1 Законы отражения и преломления



$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

1

2

Расси случай нормального падения:



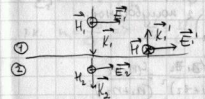
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ;  $\text{rot } [\nabla \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{B} = \text{rot } \vec{H}]$

▼  $[\vec{k} \vec{E}_0] = \omega \mu_0 \text{rot } \vec{H}_0$ ;  $k = \frac{\omega}{c}$ ;  $\vec{H}_0$  направл. паралл. паден.

$\Rightarrow k E_0 = \omega \mu_0 H_0 \Rightarrow E_0 = c \mu_0 H_0$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0 \mu_0}}$   
 $\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} H_0$ ,  $E_0 = \epsilon H_0$  - т.к.  $\epsilon$  и  $\mu_0$  постоянны

$Z_{\text{волны}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом}$

Граничные условия:



$E_{1t} = E_{2t}$  - тангенциальные компоненты  
 $H_{1n} = H_{2n}$  - нормальные компоненты  
 $B_{1n} = B_{2n}$

$$\begin{cases} E_1 + E_1' = E_2 \\ H_1 - H_1' = H_2 \end{cases} \text{ граничные условия}$$

↓

$$\begin{cases} E_1 + E_1' = E_2 \\ \frac{E_1}{z_1} - \frac{E_1'}{z_1} = \frac{E_2}{z_2} \end{cases}$$

введем: коэф. отражения  $R = \frac{E_1'}{E_1}$   
 — пропускания  $T = \frac{E_2}{E_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{1}{z_1} - \frac{R}{z_1} = \frac{T}{z_2} \end{cases}$$

решение:  $R = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$ ,  $T = \frac{2z_2}{z_1 + z_2}$

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \leftarrow \text{коэф. преломления.}$$

Если среда — диэлектрик (как чаще всего бывает),  
 то  $n = \sqrt{\epsilon}$ ,  $z \sim \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow R = \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Пример

Раздел: воздух ↔ стекло.

$$n_1 \approx 1, \quad n_2 = 1,5, \quad R = \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} = -\frac{1}{5} \leftarrow \text{минус означает, что при отражении меняется знак!}$$

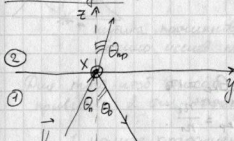
Вопрос: как проходит луч?

$$I = \frac{1}{2z} E^2, \quad R^2 = \frac{I_1'}{I_1} = \left(\frac{E_1'}{E_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \text{ коэф. волны}$$

$$T^2 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{2z_2} E_2^2}{\frac{1}{2z_1} E_1^2} = \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$R^2 + T^2 = 1$$

общий случай:



выберем  $Oxy$ :  $\vec{k}_n = (0, k_{ny}, k_n)$

$$\vec{E}_n = \vec{A}_n e^{i(\omega_n t - k_n \cos \theta_n z - k_n \sin \theta_n y)}$$

$$\vec{E}_0 = \vec{A}_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 \vec{r})}$$

$$\vec{E}_{np} = \vec{A}_{np} e^{i(\omega_{np} t - \vec{k}_{np} \vec{r})}$$

$$(\vec{E}_n)_y + (\vec{E}_0)_y = (\vec{E}_{np})_y \text{ — граничные условия}$$

$\alpha e^{i(\vec{r}, \vec{r})} + \beta e^{i(\vec{r}, \vec{r})} = \gamma e^{i(\vec{r}, \vec{r})}$  — для всех  $\vec{r}$   $\Rightarrow$  коэффициенты экспонент равны.

$$\Rightarrow \omega_n = \omega_0 = \omega_{np}$$

$\Rightarrow (k_0)_x = (k_{np})_x = 0 \Rightarrow$  все три волны лежат в одной плоскости  $Ox(yz)$ .

$(k_n)_y \sin \theta_n = (k_0)_y \sin \theta_0 = (k_{np})_y \sin \theta_{np} \leftarrow$  из того, что границы — это был произвольный угол в произвольной точке границы.  
 $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $k_n = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $k_{np} = \frac{\omega}{c_2}$

$$\Rightarrow \sin \theta_n = \sin \theta_0 \Rightarrow \theta_n = \theta_0 \text{ (угол падения равен углу отражения)}$$

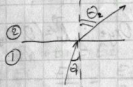
$$\frac{\omega}{c_1} \sin \theta_0 = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta_{np}$$

$$\text{т.к. } n_1 = \frac{c_0}{c_1} \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{n_1}{c_0} \Rightarrow \boxed{n_1 \sin \theta_0 = n_2 \sin \theta_{np}}$$

3-й Снеллуса



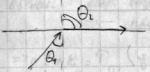
4.2 Полное внутреннее отражение.



условие:  $n_1 > n_2$

$$n_1 \sin \theta_{cp} = n_2$$

$$\Rightarrow \sin \theta_{cp} = \frac{n_2}{n_1}$$



Например, в системе стекло-воздух.  $\theta_{cp} = 41^\circ$ .

вода:  $n_1 = 1.33$ ,  $\theta_{cp} = 48^\circ$ .

$$k_2^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2$$

$$k_{2z}^2 = k_2^2 - k_{2y}^2 = \frac{\omega^4}{c^2} - k_{1y}^2 = \frac{\omega^4}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_1 =$$

$$= \frac{\omega^2}{c_0^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1)$$

$$n_2^2 = n_1^2 \sin^2 \theta_1, \quad \sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

что если  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 < 0$ ?  
тогда  $k_{2z}$  будет принимать мнимые значения.

$$e^{ik_z z} \Rightarrow e^{-\alpha z}; \quad \alpha = \frac{\omega}{c_0} (n_1^2 \sin^2 \theta_1 - 1)^{1/2}$$

затухание, можно определить угол, свет попадает во вторую среду.

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{c_0}{\omega} \cdot \frac{1}{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - 1)^{1/2}}, \quad z_0 \ll \lambda$$



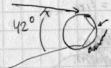
лучи преломления криволинейно, можно использовать поверхность сфер.

Для того, чтоб описать радугу нужно применить 2 физ. эффекта:

1. полное отражение: объясняет геометрию, локализованность
2. другое явление, объясняет цвет (дисперсия!)

Итак, радуга:

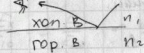
капли воды в атмосфере:



здесь полное внутреннее отражение

солнце должно быть низко, и у наблюдателя за спиной

Радуга всегда как минимум двойная (вторая - после двойного внутреннего отражения, в ней цвета инвертированы) между двумя радугами есть оптический минимум пояса.



$n_1 > n_2$

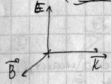
ширина в пустыне

$n_1 > n_2$



← оптическое волокно.

4.4. Интерференция



$$(\vec{k}, \vec{E}) = 0$$

$$(\vec{k}, \vec{B}) = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$E_{1x} = E_{10} \sin(\omega t - kx), \quad E_{1y} = E_{1z} = 0$$

$$E_{2y} = E_{20} \sin(\omega t - kx + \delta), \quad E_{2x} = E_{2z} = 0, \quad \delta - \text{совый фаз.}$$

$$E_y = E_{20} \sin(\omega t - kx) \cos \delta + E_{20} \cos(\omega t - kx) \sin \delta$$

$$\frac{E_{1x}}{E_{10}} = \sin(\omega t - kx)$$

$$E_y = E_{20} \frac{E_{1x}}{E_{10}} \cos \delta + E_{20} \sqrt{1 - \frac{E_{1x}^2}{E_{10}^2}} \sin \delta$$

в итоге выведем для упрощения  $E_x = E_{1x}$

$$\frac{E_y}{E_{20}} - \frac{E_x}{E_{10}} \cos \delta = \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{10}^2}} \sin \delta \quad / \text{ возведем в квадрат}$$

$$\frac{E_y^2}{E_{20}^2} - 2 \frac{E_y E_x}{E_{10} E_{20}} \cos \delta + \frac{E_x^2}{E_{10}^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \frac{E_x^2}{E_{10}^2} \sin^2 \delta$$

$$\frac{E_y^2}{E_{20}^2} - 2 \frac{E_y E_x}{E_{10} E_{20}} \cos \delta + \frac{E_x^2}{E_{10}^2} = \sin^2 \delta$$

Рассмотрим частные случаи

1)  $\cos \delta = 0, \sin \delta = \pm 1, \sin^2 \delta = 1$

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$k d = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4} \leftarrow \text{совый на четверть волны}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y^2}{E_{20}^2} + \frac{E_x^2}{E_{10}^2} = 1 \quad \text{— уравнение эллипса}$$

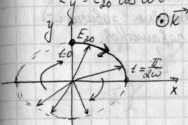
Но!  $E_x = E_{10} \sin(\omega t - kx), \quad E_y = E_{20} \cos(\omega t - kx) (-1)^{n+1}$

$n=1, \delta = \frac{\pi}{2} + \pi$ . Как изменится  $\vec{E}$  во времени в т.  $x=0$ ?

$$E_x = E_{10} \sin \omega t$$

$$E_y = E_{20} \cos \omega t$$

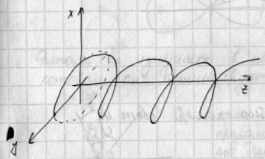
— эллиптическая поляризация



такую волну наз. правой поляризованной, т.к. вращение  $\vec{E}$  по часовой стрелке (если волна идет + на нас).

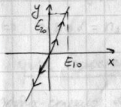
Если  $E_{10} = E_{20}$ , то получаем окружность, тогда поляризация наз. круговой (циркулярной)

В пространстве —  $\vec{E}$  или по винтовой линии по поверхности эллиптического цилиндра



2)  $\cos \delta = \pm 1, \sin \delta = 0 \Rightarrow$

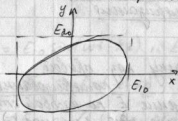
$$\frac{E_x}{E_{10}} = \pm \frac{E_y}{E_{20}} \quad \leftarrow \text{линейная поляризация}$$



3). общий случай.

это все равно эллиптическая поляризация.

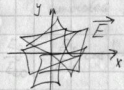
эллипсе вписан в прямоугольник  $2E_{10} \times 2E_{20}$ ,



но ориентация зависит от всех параметров.

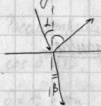
5). практически весь свет, кот. окружает нас в эту (вообще, свети, лампы, кроме излуча) - естественная поляризация.

$\vec{E}$  описывает хаотическую траекторию



Как получить линейно-поляризованный свет из естественного?

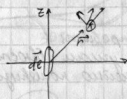
- использовать отражение.



(45) Отражение и преломление поляризованных волн.

4 поле диполя.

изменяется расстояние между '+' и '-' зарядами. асимметричный диполь.



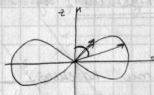
$$\vec{B} \sim [\dot{d} \vec{e} \cdot \vec{r}]$$

$$S \sim [\vec{E}, \vec{H}]$$

'энергия'

вектр поле есть всегда, но магнитное поле, напр, вдали от z не  $\Rightarrow$  не  $\Rightarrow$  потока энергии

$$S \sim \sin^2 \theta$$



диполь не излучает в направлении, в котором он колеблется ("в торцах").



если между направл и направлением излучения угол  $90^\circ$ , то диполь излучает в торцах.

$$d + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \sin \beta = \cos \alpha$$

3-н Сферическая:  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ .

$\Rightarrow n_1 \sin \alpha = n_2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{n_2}{n_1}$ , ← при падении под этим углом, волна не отражается, все энергия проходит.

угол Брюстера.

воздух-стекло:  $\alpha_B \approx 57^\circ$ .

не лучшая, что реально мы видим от нас, троего, в основном, мы не там, где мы его видим.

Все эти расщепления приводятся к тому, что  $\vec{E}$  или ориентирован как на рис, или ориентирован в плоскости падения.

Если  $\vec{E}$  направлен "на нас", то эти расщепления не проявятся, т.к.  $\vec{E}$  раскачивается вправо и влево в циркулярной в каждой стороне.

Итак, если свет направлен на границу раздела сред под углом Брюстера, тогда отражится только линейно поляризованный свет.

### Формулы Френеля (без вывода)

Случай 1 ||

$\vec{E}$  лежит в плоскости падения.



$$\frac{E_{отр}}{E_{пад}} = R_{||}^E = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}$$

$$\frac{E_{прод}}{E_{пад}} = T_{||}^E = \frac{2 \frac{n_2}{n_1} \cos \theta}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}$$

Угол Брюстера можно выводить из Ф. Френеля.

Случай 2  $\perp$

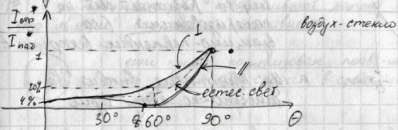
$\vec{E} \perp$  плоскости падения



$$R_{\perp}^E = \frac{\cos \theta - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}$$

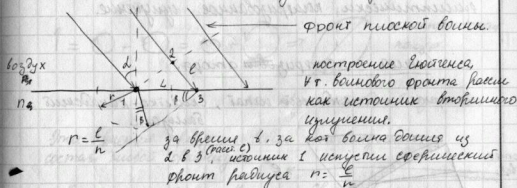
$$T_{\perp}^E = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta}}$$

Если  $\vec{E}$  направ. иначе, то нужно использовать две компоненты, а потом сложить полученные потоки.



### 4.8 Вдущепреломление.

В 1670 Э. Бартолин наблю. раздвоение луча в кристалле.



Фронт плоской волны.

построение Эвогенса, фронт волновой плоскости как источник вторичных волн.

за время t, за это время фронт радиуса r = ct

$$\sin \beta = \frac{c}{n_1 t}, \quad \sin \alpha = \frac{c}{n_2 t} \Rightarrow \sin \alpha = n_1 \sin \beta \quad \leftarrow \text{закн Снеллиуса}$$

в кристалле:



в кристалле свет под разными углами распр. с разными скоростями  $\Rightarrow$  анизотропия

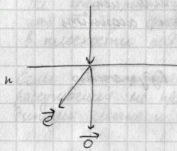
преломление в др. сторону, двущепреломление, ординарную и экстраординарную лучи

обыкновенный луч

аномальный луч

обыкновенный луч

Нормальное падение



Важно двумерно-анизотропное вещ-во разделяет свет на поляризованный (со скоростью перпенд. вектору  $\vec{E}$ )

из кристалла выводит два линейно-поляризов. луча

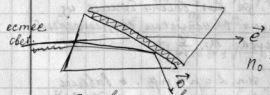
П.к. скорости у лучей разные, то можно подобрать так, что  $\vec{E} \perp \vec{D}$  — уникальная ситуация, у которой линии фазовые набеги (скорости равны)

$\Rightarrow$  „маслянка  $\frac{1}{4}$ “, налет  $d = \frac{d}{4} \Rightarrow$

циркулярно-поляризованное излучение

Схема поляризатора.

материал — исландский шпат, смеситка-канадский бандаж



неотклоненная волна проходит поперек, а отклоненная выводит наружу.

Если есть линейно-поляризованный свет, то можно пропустить его через поляризатор и понять, в каком направлении поляризован свет.

Тригонометрия — средн. в кот. под разными углами фазы света поворачиваются.

Оптическая активность и круговая дихроизм (вдвухветная).

∃ вещества, которые поворачивают направ. поляризации. это явление оптической активности.



если лучок поляризован право-циркулярно то у него слева скорость в среде, если лево-, то кругая.

Можно показать, что линейно-поляризованный свет можно представить как сумму двух циркулярных.

$\uparrow = \odot + \ominus \Rightarrow$  ~~↗~~

это оптическая активность

линейно

$\uparrow = \odot + \ominus = \odot + \ominus \Rightarrow$

линейно-поляризованный свет

это круговой дихроизм

Эти явления кричат всем молекулам, состав. живой организмы

„Хиральные объекты“ — напр. две руки, они зеркальное изображение друг друга но их совмещать нельзя.

Все молекулы ∃ либо в одной зеркальной конфигурации, либо в другой.



их нельзя совмещать в пространстве.

с точки зрения химии они одинаковы.

У человека все аминокислоты „левые“.

Задача: синтезировать аминокислоту, ассимилируем ее, в растворе левых и правых молекул 50% на 50%, но наши организмы проводят эту же реакцию, но на 10 000 лев. аминокислот всего 3 правых.

это "хиральная мистота" природы.

вещество миллионы,

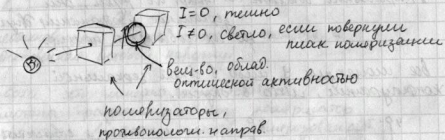
правый миллионы - запах шиповника  
левый - апельсинка.

и много др. веществ. в разных конфигурациях - разные вкусы и запахи (также, сахароза и фруктоза).

методы оптической активности позволяют определить конфигурацию молекулы вещества.

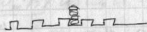
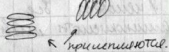
### Принцип работы ЖК дисплея,

Оптическая активность.



Жидкие кристаллы - лет удовольствие, но есть элементя порядка,

TV - скрученные - нематические:



кладут одну пластинку на другую, но повернутую на  $90^\circ$   
 $\Rightarrow$  ж.к. вводят спиральную структуру  $\Rightarrow$  поворачивают поляризатор  $\Rightarrow$  свет.

еще ж.к. чувствительны к электро полю!



поле разрушает спираль  $\Rightarrow$  поляризация свободна.  
еще в ячейку добавили на 3 световых микрона  $\Rightarrow$  свет.

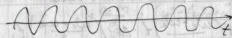
### I. Спектры.

§5. Модулированные волны:

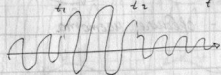
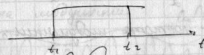
5.1. Теорема информации

$$\xi(x, t) = A_0 \cos(\omega_0 t - kx + \varphi_0), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

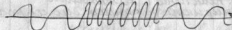
$x = x'$



1)



амплитудная модуляция

2)  частотная модуляция

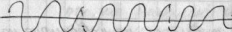
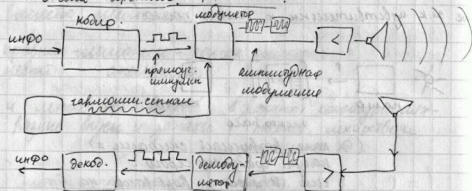
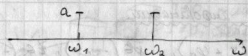
3)  фазовая модуляция

Схема передачи информации.



5.2 Бесселе А.М. - сигнал

сигнал  $\xi(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t$  - две частоты,  
условие  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$ .



сигнал можно представить в виде

$$\xi(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_m$  - частота модуляции,  $\omega_m \ll \omega_1$

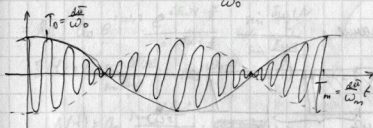
$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0$  - средняя частота

амплитудно-модулированный сигнал:

$$\xi(t) = \underbrace{2a \cos \omega_m t}_{A(t)} \cos \omega_0 t = A(t) \cos \omega_0 t,$$

где  $A(t)$  имеется по формул. 3-му

$$\frac{\partial A}{\partial t} \frac{1}{\omega_0} \ll A \leftarrow \text{интервалы измерения за } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



это Бесселе. Амплитуда определяется в 0, и в max.

$$\xi(t) = 2a \cos \omega_m t \cdot \cos \omega_0 t \leftrightarrow a(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

↑  
Фурье

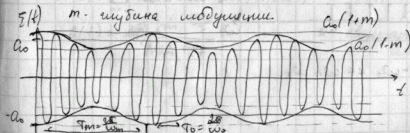
Пусть есть  $\xi(t) = a_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$ .

$\xi(t) \leftrightarrow S(\omega)$  - ? - каков образ Фурье  $\xi(t)$ ,  
т.е. каков спектр?

$$\xi(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{a_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{a_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

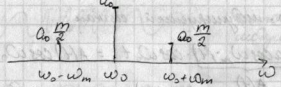
сумма трех гармоник Фурье

$$S(\omega) - \text{спектр: } S(\omega) = a_0 \delta(\omega_0 - \omega_0) + \frac{a_0 m}{2} \delta(\omega - (\omega_0 - \omega_m)) + \frac{a_0 m}{2} \delta(\omega - (\omega_0 + \omega_m))$$



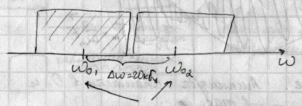
Амплитудно-модулированный сигнал

Спектр:



Мно гармонички Фунге описујуат сигнал с гармонической модулирацией амплитуде

Радиовещание



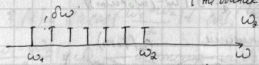
Две радиостанции

ампл.  $\omega_0 \leq \max \omega_{en}$  ← величина спектра  
200 kHz виденна полоса

$\lambda = 100 \text{ m} \div 600 \text{ m}$ ,  $\Rightarrow$  всего 100 станции на коротко-волновом диапазоне длины

GSM 1) 880  $\div$  960 МГц  $\Rightarrow$  кол-во станций:  $8 \cdot 10^7$   
2) 1710  $\div$  1880 МГц

5.3 Суперпозиция независимых гармоник (но одинак раск от другого по  $\omega$ )



$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1, \omega_2$

$\xi(t) = \text{Re} \sum_{n=0}^{N-1} a_0 e^{i(\omega_0 + n\Delta\omega)t} = \text{суперпозиция}$

$\xi(t) = A(t) \cos \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

$\frac{\partial A(t)}{\partial t} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \ll A$

$\xi(t) = \text{Re} \left\{ a_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i n \Delta\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ a_0 e^{i\omega_0 t} \frac{e^{i\omega_0 t} - 1}{e^{i\Delta\omega t} - 1} \right\}$

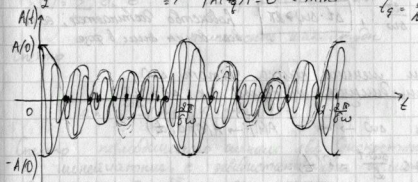
$= \text{Re} \left\{ a_0 e^{i\omega_0 t} \frac{e^{i\omega_0 t} \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\Delta\omega t N}{2}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}}{e^{i\Delta\omega t} \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\Delta\omega t N}{2}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}} \right\}$   
 $\xi(t) = a_0 \frac{\sin \frac{N\Delta\omega t}{2}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos \omega_0 t = A(t) \cos \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \omega_1 + \frac{N-1}{2} \Delta\omega$

$A(t) = a_0 \frac{\sin \frac{N\Delta\omega t}{2}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}$

$A(t) \rightarrow A(0) = N a_0 = \max$ ,  $\frac{\Delta\omega \cdot t_s}{2} = \pi s$

$t_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} s$ ,  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $|A(t_s)| = N a_0 = \max$

$N \frac{\Delta\omega}{2} t_q = \pi q$ ,  $q = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)$ ,  $q \neq 0, N$  - не кратное  
 $\Rightarrow |A(t_q)| = 0 \leftarrow \min$   $t_q = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} q = \frac{2\pi}{N\Delta\omega} q$



$S(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a_0 \delta(\omega - (\omega_0 + n\Delta\omega)) \leftrightarrow \xi(t) = A(t) \cos \omega_0 t$

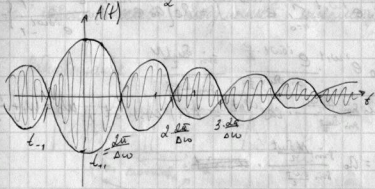
$A(t) = A(0) \frac{\sin \frac{N\Delta\omega t}{2}}{N \sin \frac{\Delta\omega t}{2}}$  Квазигармонический сигнал



Пределный переход.

$N \rightarrow \infty$ , но  $\Delta\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\omega = \Delta\omega(N-1) = \text{const.}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A(t) = A(t) \frac{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}}{\frac{\Delta\omega t}{2}} = A(t) \text{Sinc} \frac{\Delta\omega t}{2}$$



5.4 Теорема о ширине частотной полосы.

Длительность:  $\Delta t = \frac{t}{2}(t_1 - t_2)$

$\Delta t = \frac{\Delta t}{\Delta\omega}$ ;  $\Delta t \cdot \Delta\omega \approx \Delta t$  равенство достигается, если все волны были в фазе

Чем меньше полоса частот  $\Delta\omega$ , тем длиннее импульс, т.к.  $\Delta t = \frac{\Delta t}{\Delta\omega}$ .

Лимит  $\Delta\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A(t) \rightarrow A(t) \delta(t)$

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow \infty} \text{Sinc} \frac{\Delta\omega t}{2} = \delta(t)$$

Аналогичная τ ось в квант механике

§6. Спектральный анализ.

6.1 Периодический сигнал.

$$\xi(t) = \xi(t + nT), \quad T - \text{период,}$$

$\xi(t)$  - о.р. к-е-н-е.р., имеет конечное число корней на T

Можно разложить  $\xi(t)$  в ряд Фурье:

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t),$$

$a_n, b_n$  - амплитуды гармоник Фурье,

$$\omega_n = \Omega \cdot n, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

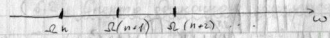
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \xi(t) \cos \omega_n t dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \xi(t) \sin \omega_n t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t}, \quad d_n = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

( $d_n$  - комплексные амплитуды)

Спектр



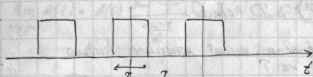
Спектр периодического сигнала - это дискретный и линейчатый, с эквидистантными гармониками с шагом  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  по оси частот.

$$e^{i\omega_n t} = \cos \omega_n t + i \sin \omega_n t. \Rightarrow a_n = d_n + d_{-n}, \quad b_n = d_n - d_{-n}$$

$$\text{Если } \xi(t) \in \text{Re} \Rightarrow a_n = 2 \text{Re} d_n, \quad b_n = -2 \text{Im} d_n$$

если сигнал четный, то  $b_n = 0$ ,

Пример.



$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n,$$

$$\text{ибо } \xi(t) = \xi(t \pm T).$$

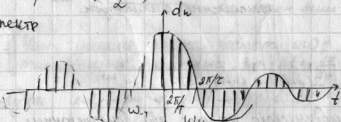
$$\xi(t) \Big|_{t \in [-\tau/2, \tau/2]} = \begin{cases} a, & t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ 0, & t \notin [-\tau/2, \tau/2] \end{cases}$$

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{T} a \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega_n t} dt =$$

$$= \frac{a}{T} \frac{1}{-i\omega_n} \left( e^{-i\omega_n \tau/2} - e^{+i\omega_n \tau/2} \right) = \frac{2a}{T\omega_n} \sin \omega_n \tau/2 =$$

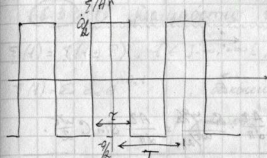
$$= \frac{a\tau}{T} \text{sinc} \left( \frac{\omega_n \tau}{2} \right).$$

спектр



$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_{-1}) = \frac{2\pi}{\tau}.$$

$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$  - теорема о ширине спектра.



$$] T = 2\tau.$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n.$$

$$d_n = a \text{sinc} \frac{\omega_n \tau}{2}.$$

$$\frac{\omega_n \tau}{2} = \frac{2\pi}{T} n \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{\pi n}{2} \Rightarrow d_n = a \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi n}{2}} = \begin{cases} a, & n = 2k \\ \frac{2a}{\pi} (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$A_n = 2d_n;$$

$$\xi(t) = a \left( \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{T} t\right) - \frac{2a}{3\pi} \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{T} t\right) + \frac{1}{5\pi} \cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{T} t\right) - \dots \right)$$

$$\xi(t) = \xi(t \pm T)$$

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}, \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

$$\omega_n = \Omega n, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Спектр дискретный - множатный.

### 6.2 Спектр одиночного импульса

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \xi(t') e^{-i\omega_1 t'} dt' \right) e^{i\omega_n t}$$

$$T \rightarrow \infty, \text{ при } \omega_n = \Omega n \rightarrow \omega, \quad \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi}, \text{ при } T \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{T} \rightarrow \frac{1}{2\pi} d\omega.$$

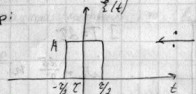
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' \xi(t') e^{-i\omega t'} \right) e^{i\omega t}.$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{ - ш. Фурье}$$

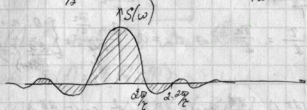
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \text{ - спектр}$$

$\xi(t) \div S(\omega)$  - спектр непрерывный, сплошной.

График:



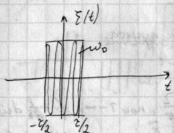
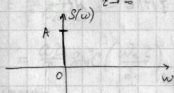
$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = \frac{A\tau}{\omega\tau/2} \cdot \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = \frac{A\tau}{\omega\tau/2} \text{ sinc } \frac{\omega\tau}{2}$$



Ширина спектра  $\Delta\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\tau} - \left( -\frac{2\pi}{\tau} \right) \right) = \frac{\Delta f}{\tau}$

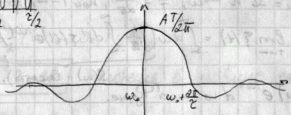
$\tau \cdot \Delta\omega = \Delta f$  — о ширине частотной полосы

$\tau \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} S(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \left( \frac{\tau}{2\pi} \text{ sinc } \frac{\omega\tau}{2} \right) = A\delta(\omega)$



$$\xi(t) = \begin{cases} A e^{i\omega_0 t}, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$S(\omega) = \frac{A\tau}{2\pi} \text{ sinc } \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}$$

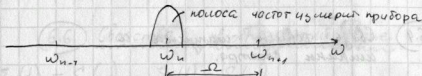


$\omega_0 \gg \frac{\Delta f}{\tau}$ ;  $T_0 \ll \tau$

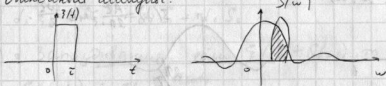
(6.3) О реальностиности гармоник Фурье.

$$\xi(t) = \xi(t \pm T), \quad t \in ]-\infty, +\infty[$$

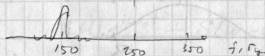
$$\xi(t) = \sum d_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{бесконечно долгий сигнал}$$



Ограниченный импульс:

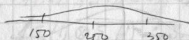


1)  $\tau \sim 1 \text{ сек}$   $T = 1 \text{ сек}, \Delta f = 1 \text{ Гц}$



2) короткий импульс,  $\tau \approx 0,01 \text{ сек}$ .

$$S(\omega) \sim \frac{A\tau}{2\pi}$$



3) Амплитудно модулированный сигнал  
 $f = S_0 = 250 \text{ Гц}$ ,  $\Delta f \approx 10 \text{ Гц}$  — отклик в 1  
 $\Delta f = 300 \text{ Гц}$  — отклик во всех трех.

$S(\omega) d\omega$  — амплитуда гармоник в полосе  $[\omega, \omega + d\omega]$

$|S(\omega) d\omega|^2$  — мгновенная мощность

$\tau = \frac{\Delta f}{d\omega}$  — длительность сигнала, соотв. полосе  $d\omega$ .

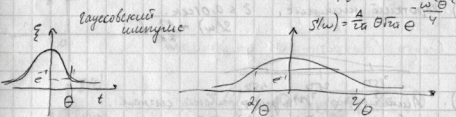
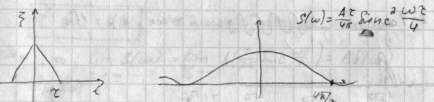
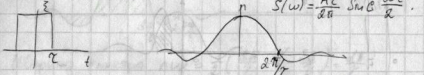
$dG(\omega) = |S(\omega) d\omega|^2 \tau = \Delta f |S(\omega)|^2 d\omega$  — мощность в полосе  $[\omega, \omega + d\omega]$

$G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2$  - спектральная плотность мощности

$[G(\omega)] = \text{Вт/Гц}$

6.4 Связь формы сигнала и ширины спектра.

$\xi(t) \div S(\omega)$



$W_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt$  - энергия

$W_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$  - энергия

$W_{\omega} = W_{\xi}$  - теорема Парсеваля

$W_{\omega} = \int_{-\omega/2}^{\omega/2} |\xi(t)|^2 dt = \sigma \cdot W_{\xi}, \quad \epsilon \leq 1, \quad \epsilon = 0,9$

энергетическая ширина сигнала  $\Delta\omega_{\omega}$

$W_{\omega_{\omega}} = \int_{-\Delta\omega_{\omega}}^{\Delta\omega_{\omega}} G(\omega) d\omega = \epsilon W_{\omega}$ , содержащий 90% энергии сигнала

6.6 Свойства преобразования Фурье.

$\xi_1(t) \div S_1(\omega), \quad \xi_2(t) \div S_2(\omega)$

1) л. ξ, л. ξ<sub>1</sub> + л. ξ<sub>2</sub> ÷ л. S<sub>1</sub> + л. S<sub>2</sub>

2) л. Загуживание: если ξ(t) ÷ S(ω), то ξ(t-t<sub>0</sub>) ÷ S(ω) e<sup>iωt<sub>0</sub></sup>

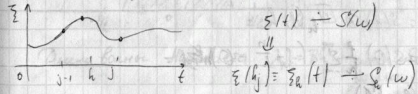
3) л. Сдвиги: если ξ(t) ÷ S(ω), то ξ(t) e<sup>iω<sub>0</sub>t</sup> ÷ S(ω - ω<sub>0</sub>).

4) л. о свертке: ξ<sub>1</sub> ÷ S<sub>1</sub>, ξ<sub>2</sub> ÷ S<sub>2</sub> ⇒

$\xi_1(t) \otimes \xi_2(t) \div S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta) S_2(\omega - \theta) d\theta$   
 $\int \xi_1(t) \otimes \xi_2(t) \div S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$

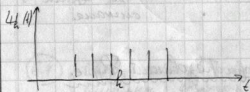
6.7 Дискретное преобразование Фурье.

$\xi(t) \rightarrow \xi(hj) \equiv \xi_j(t) \equiv \xi(j)$



$$\xi_q(t) = \xi(k_j) = \xi(t) \cdot \Delta_k(t) h$$

$$\Delta_k(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - k_j) \quad \text{— средние функции Оверса}$$



$$\int_{-h/2}^{h/2} \xi_q(t) dt = \xi(t = j) h \quad \text{— дискретизируем } \xi$$

$\xi_q(t)$  — ф-ия дискретного аргумента

т.е.  $\xi_q(t) = \xi(t) \cdot \Delta_k(t) h$ , то

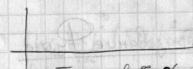
$$S_q(f) = S(f) \otimes \overline{\Delta_k(f)} h$$

спектр ф-ии Оверса

$$\overline{\Delta_k(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t} \quad \text{— ряд Фурье, } \omega_n = \frac{2\pi}{h} n$$

$$\overline{\Delta_k(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i2\pi f n} \quad f_n = \frac{1}{h} n$$

$d_n = \dots$



$$\overline{\Delta_k(f)} = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/h)$$

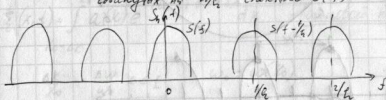
$$S_q(f) = S(f) \otimes \overline{\Delta_k(f)} h =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d \cdot S(\theta) \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{h} - \theta) h d\theta =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - n/h)$$

$$S_q(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - n/h)$$

Свойства: 1)  $S_q(f)$  — суммарный спектр — сумма спектров  $S(f)$  сдвинутых на  $n/h$ .



↑ Густота ф-ии дискретного аргумента, приближенно с периодом  $1/h$ .

2)  $S_q(f)$  — периодический с периодом  $1/h$ .

3) Частота Найквиста

$$f_N = \frac{1}{2h}, \quad \text{Если } f_{\max} \leq f_N, \text{ то ошибки нет!}$$

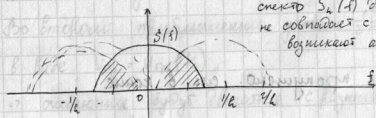
$$S(f) = \begin{cases} f \neq 0, & |A| < f_{\max} \\ 0, & |A| > f_{\max} \end{cases}$$

т.е. нет перекрестие спектров

$$S_q(f) \cdot \Pi(f) \equiv S(f), \quad \Pi(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_N \\ 0, & |f| > f_N \end{cases}$$

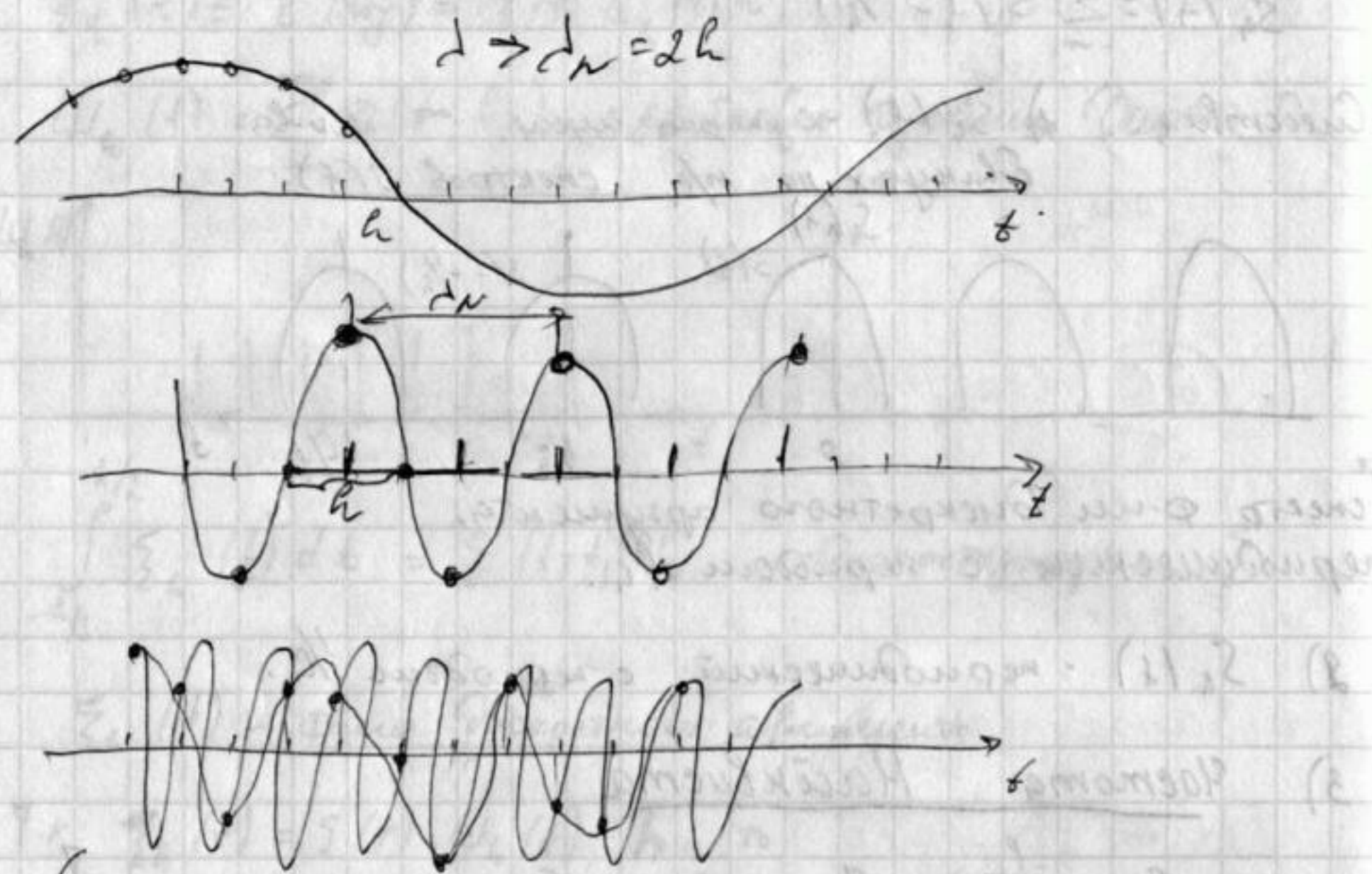
Если  $f_{\max} > f_N$ , то  $S_q(f) \cdot \Pi(f) \neq S(f)$ , возникает

наложение спектров.



спектр  $S_q(f)$  равен, не совпадает с  $S(f)$ , возникает асимптотический гиббс.

Важно частота Найквиста  $f_N = 1/(2h)$  — минимальная частота, которую можно воспринять с  $h$ .



пошине частота воспринимаются как  
конец (несуществующие) низкие частоты

пропущено. см. в конце

### 8.5 Второе приближение.

Скорость передачи информации

$$\xi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk \quad \text{- волновой пакет.}$$

$$\frac{\Delta k}{k_0} \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \ll 1, \quad \omega_0 = \omega(k_0)$$

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \dots$$

$$\text{При } \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 \ll \omega_0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0),$$

пренебрегаем этими слагаемыми, и

$$\xi(x, t) = A(x, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)},$$

$$A(x, t) = \int a(k) e^{i(k - k_0)(V_{gr} t - x)} dk$$

$$V_{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} \quad \text{- групповая скорость. (скорость огибающей)}$$

$$C_{\phi} = \frac{\omega}{k} \quad \text{- фазовая скорость.}$$

Но что если нужно учесть следующие  
мелкие разности?

Во втором приближении учтем  $\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2$

$$\text{в виде } V_{gr} = V_{gr}(k).$$

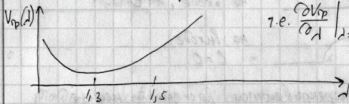
=> огибающие будут двигаться с разными  
скоростями

=> изменение огибающей при распространении

$$P(x) = P(0) e^{-\lambda x} \text{ - потери на } L \text{ км}$$

Статистично исп.  $\lambda = 1,55$

Но на графике дисперсионной кривой:



$$\text{т.е. } \left. \frac{\partial V_{np}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1,55 \text{ км}} = 0$$

при  $\lambda = 1,5$  нет расширения, но есть потери

Если исп  $\lambda = 1,55 \text{ км}$  - мин потери  
 $\Rightarrow S = 100 \text{ Мбит/с}$ ,  $v = 50 \text{ км/ч}$   
 ограничение из-за дисперсии

$\lambda = 1,5 \text{ км}$ ,  $v = 50 \text{ км/ч}$   
 $S = 8 \text{ Гбит/с}$   
 ограничение за счет потерь

$\lambda = 1,5 \text{ км}$  более предпочтительный, т.к можно поставить усилитель.

Лабораторное упр-е для анализа вишювого пакета

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{V_{np}} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{j}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \left. \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right|_{\omega_0} = 0$$

Перейдем к движущим координатам:

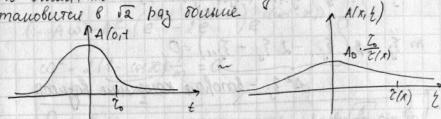
$$\{x, t\} \rightarrow \{x' = x, t' = t - \frac{x}{V_{np}}\}$$

$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x'} - \frac{\partial^2 K}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \omega^2} = 0$  - упр-е типа диффузии, теплопроводности, но с иными коэффициентами

Решение:  $A(x,t) = A_0 \frac{I_0}{I(x)} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2(x)}}$  - гауссов импульс,  
 $I(x) = I_0 \left(1 + \left(\frac{x}{L_{diff}}\right)^2\right)^{1/2}$ ,

$L_{diff}$  - дисперсионная длина,  $L_{diff} = \frac{I_0^2}{\sigma^2 K I_0 \omega^2} = 1$

(это длина, на кот ширит импульс становится в  $\sqrt{2}$  раз больше)



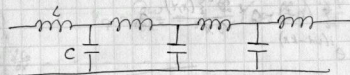
это аналитическое решение

### §9. Пространственная дисперсия

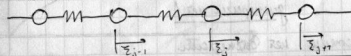
#### 9.1 Волны в цепочке

Цепочка - произвол. послед из повторяющихся элементов.

Электр. цепочка:



механич. цепочка



Кинетическая энергия:  $T[\xi_j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} \dot{\xi}_j^2$

Потенциальная энергия:  $V[\xi_j] = \sum_j \frac{\beta}{2} (\xi_j - \xi_{j-1})^2$

квадратичные формы.

Ур-ие Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j} + \frac{\partial V}{\partial \xi_j} = 0, \quad j = -\infty, \dots, \infty$$

$$m \ddot{\xi}_j + \beta [(\xi_j - \xi_{j+1}) + (\xi_{j-1} - \xi_j) \cdot (-1)] = 0$$

$$m \ddot{\xi}_j - \beta (\xi_{j-1} - 2\xi_j + \xi_{j+1}) = 0$$

$\Delta^2 \xi_j$  - вторая конечная разность

$$m = \rho \cdot S \cdot \Delta x$$

$$\beta = \frac{E \cdot S}{\Delta x}, \quad E - \text{модуль Юнга, } \rho - \text{плотность пружины}$$

⇒ переход к непрерывной системе (непр. стержню) при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\ddot{\xi}_j - \frac{E \cdot S}{\rho S \Delta x^2} \cdot \frac{\Delta^2 \xi_j}{\Delta x^2} = 0, \quad \frac{E \cdot S}{\rho} = C_0^2 - \text{квадрат фазовой скорости в непр. системе}$$

$$\left\{ \ddot{\xi}_j - C_0^2 \frac{\Delta^2 \xi_j}{\Delta x^2} = 0 \right. \left. \leftarrow \text{дифференциально-разностная система.} \right.$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \ddot{\xi}(x,t) - C_0^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\xi(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)}$$

$$C_0 = \frac{\omega}{k}, = \text{const}, \quad \omega = C_0 k, \quad \text{где } C_0 = \text{const} \Rightarrow \text{дисперсия нет!}$$

⇒ непр. системе нет дисперсии

Но что такое  $k$ ?  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$k$  - падает фазы на единицу длины (разность фаз в точках на расстоянии  $x$  друг от друга)

Нужно измерять фазу на единицу  $j$ !

Дискретный аналог  $kx \rightarrow \omega = k \cdot \Delta x$

$\omega$  - падает фазы на единицу  $j$  на  $t$ .

$$\Rightarrow \xi(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad \text{в систему} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-A\omega^2 - A \frac{\beta}{m} (e^{i\omega} - 2e^{-i\omega})) e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

$$\omega^2 - 2 \frac{\beta}{m} \frac{1 - \cos \omega \Delta x}{2 \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Дисперсионное соотношение: } \omega = 2 \sqrt{\frac{\beta}{m}} \sin \frac{\omega \Delta x}{2}$$

Для непр. системы имеем  $\omega = C_0 k$

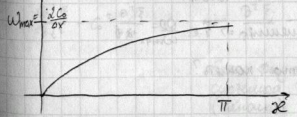
$$\text{Но } \frac{\beta}{m} = \frac{C_0^2}{\Delta x^2}, \quad \Rightarrow \left[ \omega = 2 \frac{C_0}{\Delta x} \sin \frac{\omega \Delta x}{2} \right], \quad \omega = \frac{k}{\Delta x}$$

$$\text{Фазовая скорость } C_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = 2 \frac{C_0 \sin \frac{\omega \Delta x}{2}}{\frac{\omega \Delta x}{2}} \neq \text{const!}$$

Дисперсия есть!

Групповая скорость

$$V_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \frac{C_0}{\Delta x} \left( \cos \frac{\omega \Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} = C_0 \cdot \cos \frac{\omega \Delta x}{2}$$





Винтовое приближение:

$$\omega < \omega_0, \quad \frac{d\pi}{d\omega} \Delta\omega < \pi, \quad |\Delta\omega| < \Delta\omega_0$$

$$\omega(\omega) = \omega \frac{L_0}{\Delta X} \frac{\Delta X}{L} = C_0 L, \quad \text{как в цеп. системе,}$$

$$C_0 = C_0, \quad V_p = C_0.$$

При  $\omega \lesssim \pi$ -дисперсия,

$$C_0 \neq C_0, \quad V_p \neq C_0.$$

Что происходит с системой, если ее раскачивать на макс. частоте

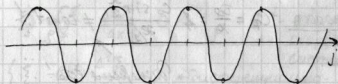
$$\omega = \omega_{\max} \Rightarrow \omega_{\max} = \pi; \quad \frac{d\pi}{d\omega} \Delta\omega = \pi \Rightarrow$$

$$\Delta\omega_{\min} = \Delta\omega. \quad \text{— но это не } \omega_N \text{ (Райквиста)!}$$

качимся лишь воле  
выполнел

$$\Rightarrow \omega_{\max} = \omega_N \text{ (частота Райквиста)}$$

$$\Rightarrow V_{rp} = 0!$$



$$\omega \in [0, \omega_{\max} = \frac{dC_0}{dX}]$$

Пусть  $\omega > \omega_{\max}$ , что тогда?

$$\Rightarrow \text{чз дисперс. соотношения} \Rightarrow \text{т.к. } \frac{d\omega}{d\omega_{\max}} > 1$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\omega L}{2} > 1. \quad \text{Как это понять?}$$

Если  $\omega \in \mathbb{R}$ , то этого не может быть!  $\Rightarrow$

$$\omega = \omega_0 + \omega_0 \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\omega \pm \omega_0}{2} = \pm i \operatorname{Sh} \frac{d_0}{2} \cos \frac{\omega_0}{2} + C_h \frac{d_0}{2} \sin \frac{\omega_0}{2}$$

внимно  $\sin = 0$

$$\cos \frac{\omega_0}{2} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \pi.$$

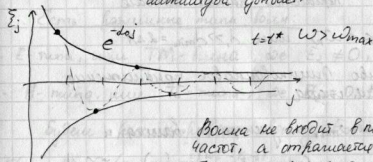
$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_{\max}} = \operatorname{ch} \frac{d_0}{2} \Rightarrow d_0 \neq 0.$$

$$\Rightarrow \xi_j(t) = A e^{i(\omega t - \omega_0 j)} = A e^{\mp \omega_0 j} e^{i(\omega t - \pi j)}$$

теперь выберем знак при  $d_0$ , +.

$$\Rightarrow \xi_j(t) = A e^{-\omega_0 j} e^{i(\omega t - \pi j)}$$

амплитуда убывает.



Волна не входит в полосу частот, а отражается обратно  $\Rightarrow$  система не пропускает эти возмущения; (это как. вне полосы прозрачность)

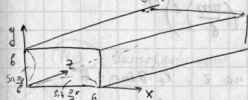
9.2 Дисперсия разностной схемы

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\Delta_j^2 \xi}{\Delta x^2} = 0$$

Есть Физ. система, описываемая системой диф-разн. ур-ий (цепочка)

### (9.3) Вывод

Полая труба прямоугольного сечения, передает эти излучение, медный.



$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{Co} \Delta \vec{E}(x, y, z, t) = 0$$

Волна, текущая по z.  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k_z z)}$   
 (конкретная - в векторном анализе пространств)  
 Но здесь эти не конкретная,  $\vec{E}$  не имеет в  $x, y$ .

Есть различные типы волн:

- E-типа, или ТМ-волна, где  $E_z \neq 0, H_z = 0$
- H-типа, или ТЕ-типа, где  $E_z = 0, H_z \neq 0$ .

Будем рассматривать волну E-типа.

$$E(x, y, z, t) = E_0(x, y, z) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

т.к. проводимость  $\Lambda = \infty$  (идеальна), то  $E_y = 0$ .

Ф-ия должна быть = 0 на стенках.

$$E(x, y, z, t) = A \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

$\Rightarrow$  максимальное поле в середине волновода (по x и по y).

подставим в ур-е:

$$\left(-\omega^2 - \text{Co}^2 \left(-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - (k_z)^2\right)\right) E(x, y, z, t) = 0$$

$\Rightarrow$  св-ва волны в полой трубе системы

применим диф-раз ур-ие

$$\Rightarrow \xi_j(t) = A e^{i(\omega t - k_z z)} \quad \text{- это дискретный}$$

аналог решения  $\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)}$

$$\omega = \text{Co} k \Leftrightarrow \omega = \text{Co} \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}$$

дисперсионное соотношение для коаксиально-разд. системы

$$f \lambda_N = \lambda \frac{\text{Co}}{\Delta x} \quad \text{- частота Найквиста, верхняя граница полосы пропускания системы}$$

$$\lambda_N = \lambda \cdot \Delta x \quad \text{- min длина волны, которая передается нашей системой}$$

$$\text{При } \omega \ll \omega_N \text{ или } \lambda \gg \lambda_{\text{min}} = \lambda \Delta x$$

справедливо длинноволновое приближение, и дисперсия мала

А при  $\omega \sim \omega_{\text{max}}$  дисперсия велика, и

$$\xi_j(t) \text{ далеко (сильно отличается) от } \xi(\omega t).$$

Почему возникает дисперсия - при дискретизации пространственной координаты.

$$\text{Переход от } \frac{\partial}{\partial x} \text{ к } \frac{\Delta}{\Delta x}.$$

→ дисперсионное уравн для волновода:

$$\omega^2 - c_0^2 \left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 - c_0^2 \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - c_0^2 k_z^2 = 0$$

$$k_z = \left( \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \right)^{1/2}$$

Чтобы волна распространялась по z,  $k_z$  должна быть  $\in \mathbb{R}$ .

т.е. волна распространяется по волноводу, если

$$\omega \gg c_0 \sqrt{\left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}$$

→ минимальная частота волновода

$$\omega_{n,m} = c_0 \sqrt{\left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Если дисперсия мала, т.к.

$$\omega = \omega(k_z) = c_0 \sqrt{\left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + k_z^2}$$

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k_z} = c_0 \sqrt{\left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} / \sqrt{k_z^2 + 1} > c_0$$

$$V_{gp} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_0 \frac{2k_z}{2\sqrt{\dots}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi n_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} / k_z^2} < c_0$$

$$\Rightarrow V_{gp} \cdot V_\varphi = c_0^2$$

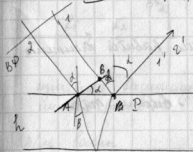
если  $d_2 \ll a, b$ , то дисперсия мала, и  $V_\varphi \approx c_0$ ,  $V_{gp} \approx c_0$ .

По оси x и y стоячая волна,

онд движется по z, дисперсия мала.

Если  $d_2 \sim a, b$ , то имеем пространственную дисперсию.

### 11.3 Интерференция в тонких пленках.



$$n_1 \rightarrow \Sigma_{1B} = \Sigma_{2A} = a e^{i\omega t}$$

$$\Sigma_{1D} = \Sigma_{1B} \cdot e^{-ik_1 BD} = a e^{i(\omega t - k_1 BD)}$$

$$\Sigma_{2P} = \Sigma_{2A} \cdot e^{-ik_2(AD+DB)}$$

$- a e^{i(\omega t - k_2(AD+DB))}$  - отражение в т. D в фазе.

$$k_2 = \frac{\omega}{c} n_2 = k \cdot n_2, \quad k_1 = k \cdot n_1$$

$$\Sigma_{1P} = a e^{i\omega t} \cdot e^{-ik(n_1 BD + \frac{1}{2})}$$

$$\Sigma_{2P} = a e^{i\omega t} \cdot e^{-ik n_2 (AC+CD)}$$

$\Delta AOD$ :  $AD = \frac{d}{\cos \beta}$ ,  $\Delta ABD$ :  $BD = 2d \tan \beta \cdot \sin \alpha$

Разность фаз

$$\Delta \varphi = [k n_2 (AC+CD) - k(n_1 BD + \frac{1}{2})] =$$

$$= k [2d n_2 \cos \beta - 2d n_1 \tan \beta \sin \alpha - \frac{1}{2}] = \{ n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \}$$

$$= k (2d n_2 \cos \beta - \frac{1}{2})$$

$$\frac{\epsilon_{\text{eff}}}{\epsilon_{\text{avg}}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} < 0$$

$BP = AD \sin \alpha$   
отражение в противофазе

ко  $\Delta\varphi = k\delta$

разность хода  $\delta = 2h n_2 \cos\beta - \frac{d}{2}$ .

$I_p$  - максимум, если  $\Delta\varphi = 2m\pi$ ,

$$\delta = 2m \frac{\lambda}{2}$$

$I_p$  - min, если  $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ ,

$$\delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$$

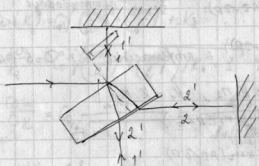
$$\delta = f(h, \beta(\lambda)) | n_2, n_1$$

при  $\lambda = \text{const}$ .  $\delta = f(h)$  - миним равной толщины

we  $h = \text{const}$  и  $\delta = f(\lambda) = \text{const}$ ,  
 $\delta = 2m \frac{\lambda}{2}$ , то там, we  $h = \text{const}$  - видиме max.

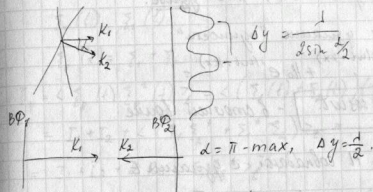
видиме максимумы пленки,  
 т.к. толщина пленки равна.

11.4 Интерференция Майкельсона.



В итоге разность хода нулевая = 0,  
 тогда видиме интерф. max

11.5 Стоячие волны



измерить величину  $< \frac{\lambda}{2}$  с помощью интерферометра.

или волны.  
 $n_1 < n_2$



$$\vec{E}_{\text{наг}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$|k_{\text{наг}}| = |k_{\text{отр}}|$$

$$\vec{E}_{\text{отр}} = -\vec{E}_0 e^{i(\omega t + kx)}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_z &= \vec{E}_{\text{наг}} + \vec{E}_{\text{отр}} = \\ &= E_0 e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = \end{aligned}$$

$$= 2E_0 \sin kx \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\boxed{E_z = 2E_0 \sin kx \sin \omega t} \text{ - стоячие волны}$$

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx) \text{ - бегущая волна}$$

- В стоячей волне нет запаздывания по фазе с коорд. x. (все точки x одновременно достигают своего max).

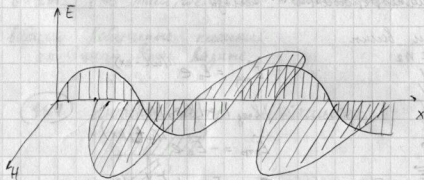
- o В стоячей волне есть точки  $x$ , в к-х амплитуда = 0, это узлы.

Между узлами "нулюности"

$$H_{\Sigma} = H_0 e^{i(\omega t - kx)} + H_0 e^{i(\omega t + kx)} =$$

$$= 2H_0 \cos kx \cos \omega t. \quad - \text{ в стоячей волне}$$

- o нулюности  $H$  совпадают с узлами  $E$
- o колебания  $H$  сдвигаются на  $\frac{T}{4}$  от  $E$



### § 12. Когерентность

1)  $I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$  - максимум когерентные волны

2)  $I_p = I_1 + I_2 + 2\text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t$

3)

4)

5)

(11.1) Условно обозначим ит-ит.

$$\xi_1(t), \xi_2(t)$$

$$\xi_p(t) = \xi_1 + \xi_2$$

$$I_p = \langle \xi_p(t) \xi_p^*(t) \rangle_t = \langle (\xi_1(t) + \xi_2(t)) (\xi_1^*(t) + \xi_2^*(t)) \rangle_t$$

$$= I_1 + I_2 + \langle (\xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^*) \rangle_t =$$

$$= I_1 + I_2 + 2 \text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t$$

ит-ит есть, если  $\text{Re} \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t \neq 0$ , т.е. волны когерентные

$$\xi_1 = a_1 e^{i\tilde{\varphi}_1(t)} e^{i\omega t}$$

$$\xi_2 = a_2 e^{i\tilde{\varphi}_2(t)} e^{i\omega t}$$

Квохроматические волны

$$\text{Re} \langle \xi_1(t) \xi_2^*(t) \rangle_t = \text{Re} \{ a_1 a_2 \langle e^{i\tilde{\varphi}_1} e^{-i\tilde{\varphi}_2} \rangle_t =$$

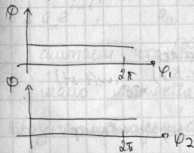
$$= a_1 a_2 \langle \text{Re} e^{i(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)} \rangle_t = a_1 a_2 \langle \cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) \rangle_t =$$

$$= a_1 a_2 \iint d\varphi_1 d\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \Phi(\varphi_1 \varphi_2)$$

Пусть  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$  - статистически независимы,

т.е.  $\Phi(\varphi_1 \varphi_2) = \Phi(\varphi_1) \cdot \Phi(\varphi_2)$  - ф-ии распределения.

$$\text{Пусть } \Phi(\varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(\varphi - \varphi_1) \Phi(\varphi_2) = \frac{1}{2\pi}$$



но значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  статистически никак не связаны.

$$\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2^* \rangle_t = a_1 a_2 \iint d\varphi_1 d\varphi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} = 0$$

$$\text{т.к. } \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1) \Phi(\varphi_2), \text{ то}$$

фазы стат. независимы, или  
важны не координаты, т.е. инт-ши не!

$$I_P = I_1 + I_2$$

Если  $\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2^* \rangle_t \neq 0$ , то

$$I_P = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2^* \rangle_t \neq I_1 + I_2$$

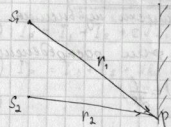
т.е. есть интерференция

Полная когерентность, если

$$\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2^* \rangle_t = \sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi.$$

12.2 Когерентность и видимость  
интерфер-ой картины

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \varphi \rangle_t$$



$$\xi_{S_1} = a e^{i\omega t} - \text{источник носитель}$$

$$\xi_P = a e^{i(\omega t - kr)} = a e^{i\omega(t - \frac{kr}{\omega})} = a e^{i\omega(t - \frac{r}{v})}$$

$$\frac{\omega}{k} = v; \text{ т.к. } \frac{r}{v} = \Delta t - \text{запаздывание}$$

12.2 Ко

$$\Rightarrow \xi_P = \xi_S |_{t_1 = t - \Delta t_1}$$

$$\xi_{1P} = \xi_{1S}(t - \Delta t_1) \quad \Delta t_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{c}$$

$$\xi_{2P} = \xi_{2S}(t - \Delta t_2)$$

$$t \rightarrow t' = t - \Delta t_2$$

$$\Rightarrow \xi_{1P} = \xi_{1S}(t' + \tau), \quad \tau = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{\Delta r}{c}$$

$$\xi_{2P} = \xi_{2S}(t')$$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \langle \xi_{1P} \xi_{2P}^* \rangle_t \quad \text{+ сопряжение}$$

$$\Gamma_{12}(t) = \langle \xi_{1P} \xi_{2P}^* \rangle_t - \text{Фин. взаимной когерентности}$$

Если  $\Gamma_{12}$  зависит

только от  $\tau$ , но не от  $t$ , то

процессы каз. статистически стационарными

В этом случае  $\Gamma_{12}(\tau) = \langle \xi_{1P}(t' + \tau) \xi_{2P}^*(t') \rangle_{t'}$   
усреднение по ансамблю

$$I_P = \langle \xi_{1P} \xi_{1P}^* \rangle_{\text{анс}} = I - \text{const (по времени)}$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \xi_{1S}(t' + \tau) \xi_{2S}^*(t') \rangle_{t'} =$$

$$\sum_{n_1} a_{n_1} e^{i\omega t'}, \quad a_{n_1} = a_{n_1}(t')$$

$$\text{считаем, что } \frac{\partial a_{n_1}(t)}{\partial t} \ll a_{n_1}(t),$$

тогда можно считать амплитуды -

квазигармонический процесс

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(z) &= \langle a_1(t'+z) a_2(t') \rangle e^{i\omega z} = \\ &= \langle a_1(t'+z) a_2(t') \rangle_{\text{свал.}} e^{i\omega z} = \\ &= \sqrt{\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}} \gamma(z) = \Gamma_{12}(z), \end{aligned}$$

$\Gamma_{12}(z)$  - нормированная корреляционная функция

$$\Gamma_{12}(z) = \langle a_1(t'+z) a_2(t') \rangle \cdot \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

$$\gamma(z) = |\gamma(z)| e^{i\omega z}$$

$$\Rightarrow I_p = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(z),$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} |\gamma(z)| \operatorname{Re} e^{i\omega z} =$$

$$= I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} |\gamma(z)| \cos \omega z$$

$$\cos \delta \varphi$$

$$\cos \delta \varphi$$

$I_p$  - макс или мин.  
зависит от  $e^{i\omega z} = e^{i\omega \varphi}$ ,

а величина  $I_0$  в макс или в min  
зависит от  $|\gamma(z)|$

Пусть  $e^{i\omega z} = +1$ ,  $\omega z = \delta \varphi = \delta \varphi = 2\pi \cdot m$

$$I_{p \max} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} |\gamma|$$

т.е.  $e^{i\omega z} = -1$ ,  $\omega z = (2m+1)\pi$

$$I_{p \min} = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2} |\gamma(z)|$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma(z)|$$

- величина  
близкая  
к 1 - картинка

$|\gamma(z)| =$  модуль степени  
когерентности.

Пусть  $a_1 = a_2$ ,  $I_1 = I_2 = I_0$

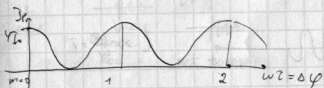
$$\Rightarrow I_{\max} = 2I_0 (1 + |\gamma(z)|)$$

$$I_{\min} = 2I_0 (1 - |\gamma(z)|) \neq 0, \text{ если } |\gamma(z)| \neq 1.$$

Пусть  $|\gamma(z)| = 1$  или  $I_1 = I_2$

$\Rightarrow V = 1$  полная когерентность.

$$I_{\max} = 4I_0, I_{\min} = 0.$$

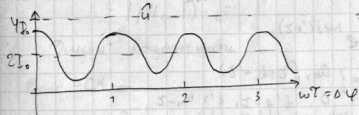


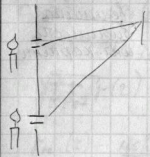
Пусть  $|\gamma(z)| = 0$ ,  $V = 0$ ,  $I_{\max} = I_{\min} = 2I_0$

не когерентные полностью.

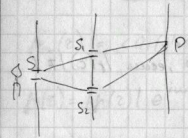
Пусть  $0 < |\gamma(z)| < 1$ ,  $0 < V < 1$ ,  $V = |\gamma(z)|$ .

$$I_{\max} = 2I_0 (1 + |\gamma(z)|), I_{\min} = 2I_0 (1 - |\gamma(z)|).$$



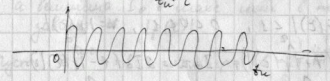
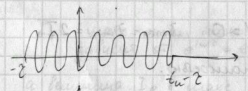
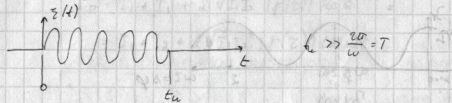


$|f(z)| = 0$   
некорректные  
источники



$|f(z)| \neq 0$

12.3 Времене когерентности



$$\xi_{ip} = a_{ip} e^{i\omega(t'+\tau)}$$

$$a_{ip} = \begin{cases} a_0, & [t', t_0 - \tau] \\ 0, & t' < -\tau, t' > t_0 - \tau \end{cases}$$

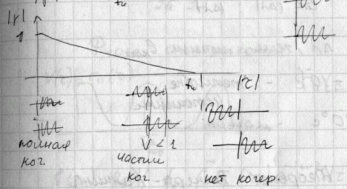
$$\xi_{ip} = a_{ip} e^{i\omega t'}, \quad a_{ip} = \begin{cases} a_0, & [0, t_0] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$I_{ip} = I_{ip} = a_0^2$$

$$f(z) = \frac{\langle \xi_{ip} \xi_{ip}^* \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\int_{-\tau}^{\tau} a_{ip} a_{ip} e^{i\omega t'} dt'}{a_0^2} = \frac{\int_{-\tau}^{\tau} a_0^2 (t_0 - t') dt'}{a_0^2}$$

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{t_0}\right) e^{i\omega z}$$

$$|f| = 1 - \frac{|z|}{t_0}$$



$l_k = \max z$ , при котором  $z \neq 0$ ,  
 $t_k = t_0$

$$t_0, \langle t_0 \rangle$$

$$|f(z)| = e^{-\frac{|z|}{\langle t_0 \rangle}}$$

$$l_{кор} = \begin{cases} |f(l_{кор})| = 0,5 \\ |f(l_{кор})| = e^{-1} \end{cases}$$

Длина когерентности

$$l_{кор} = C t_{кор}$$

$$l_{кор} = \max \delta = \max (|r_1 - r_2|), \text{ при ког. } |f| = \begin{cases} 0,5 \\ e^{-1} \end{cases}$$



Т.к.  $t_{кор} \approx t_{ш}$ ,  $u \approx t_{ш} \Delta \omega = 2\pi$ , то

$$l_{кор} = C \frac{2\pi}{\Delta \omega}$$

$$\lambda = CT = C \cdot \frac{2\pi}{\omega}$$

$$|\Delta \lambda| = \frac{2\pi C}{\omega^2} |\Delta \omega|$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad |\Delta \omega| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} |\Delta \lambda|$$

$$l_{кор} \approx \frac{2\pi c}{\Delta \omega} = \frac{2\pi c}{\frac{2\pi c}{\lambda^2} |\Delta \lambda|} = \frac{\lambda^2}{|\Delta \lambda|}$$

чем шире  $\Delta \lambda$ , тем меньше  $l_{кор}$ .

$l_{кор} \sim 10^{-8} \text{ м} = 10^{-6} \text{ см}$  - типичные  
вещишки  
 $10^{-2} = 10^0 \text{ см}$  - иззерка

### 12.4 Теорема Винера-Хинчина

$\Gamma_{11}(z) = \langle \xi_1(t+z) \xi_1^*(t) \rangle_t$ ;  $\Gamma_{11}$  - функции взаимной корреляции.

$$\xi_1(t+z) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega(t+z)} d\omega$$

$$\xi_1^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega'$$

$$\Gamma_{11}(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' S(\omega) S^*(\omega') e^{i\omega z} \underbrace{e^{i(\omega - \omega')t}}_{=}$$

$$\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{i(\omega - \omega')t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T}{\pi} \frac{\sin(\omega - \omega')T}{(\omega - \omega')T} \right\} \cdot 2\pi$$

$$\delta(\omega - \omega')$$

$$\Gamma_{11}(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' S(\omega) S^*(\omega') \delta(\omega - \omega') e^{i\omega z}$$

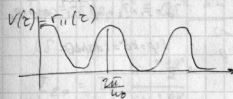
$$\Gamma_{11}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi |S(\omega)|^2}{\delta(\omega)} d\omega e^{i\omega z}$$

$\delta(\omega)$  - спектральная плотность мощности.

$$\Rightarrow \Gamma_{11}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega z} d\omega \text{ - образ Фурье}$$

$$\Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{11}(z) e^{-i\omega z} dz$$

Фурье - спектроскопия.

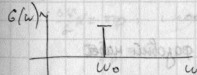


$$\Gamma_{11}(z) = I_0 \cos \omega_0 z$$

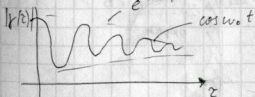
$$G(\omega) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{11}(z) e^{-i\omega z} dz \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\infty} \Gamma_{11}(z) \cos \omega z dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I_0 \cos \omega_0 z \cos \omega z dz = \frac{I_0}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0)$$

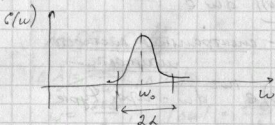


Пример 2.  $e^{-t\tau}$ ,  $\omega \ll \omega_0$



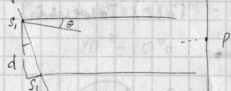
$$I_{II}(\xi) = I_0 e^{-\xi^2} \cos \omega_0 \xi.$$

$$\Rightarrow G(\omega) = \text{амплитуда}$$



### § 13. Многочисловая интерференция.

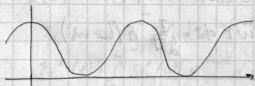
$$|k| \leq 1.$$



$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi,$$

$$\Delta \varphi = k\delta = kd \sin \theta$$

$$\text{Если } I_1 = I_2 = I_0 \Rightarrow I_p = 2I_0 (1 + \cos \Delta \varphi) = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta \varphi}{2}.$$



$$\Delta \varphi = 2\pi m, \quad k\delta = 2\pi m. \quad - \text{Фазовый набег}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2\pi m, \quad d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, \dots$$



$$\xi_{0p} = a_0 e^{i(\omega t - kx_0 - k\delta)}$$

$$\xi_{1p} = a_0 e^{i(\omega t - kx_0 - k\delta)}$$

$$\xi_{np} = a_0 e^{i(\omega t - kx_0 - k\delta \cdot n)}$$

$$\xi_{\Sigma p} = a_0 e^{i(\omega t - kx)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik\delta n}$$

$$\frac{1 - e^{-ik\delta N}}{1 - e^{-ik\delta}} = e^{ik\delta \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{k\delta N}{2}}{\sin \frac{k\delta}{2}}$$

$$I_{\Sigma p} = |\xi_{\Sigma p}|^2 = a_0^2 \frac{\sin^2 \frac{k\delta N}{2}}{\sin^2 \frac{k\delta}{2}}$$

$$k\delta = \Delta \varphi$$

$$I_{\Sigma p} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2} N}{\sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2}}$$

$$\text{при } \frac{\Delta \varphi}{2} = \pi m; \quad \Delta \varphi = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$I_{\Sigma p} = N^2 I_0 - \text{интер макс.}$$

$$kd \sin \theta = 2\pi m$$

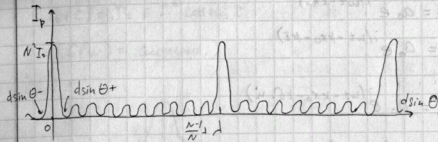
при

$$\frac{\Delta \varphi}{2} N = \pi p, \quad \text{но } p \neq q \cdot m$$

$$I_{\Sigma p} = 0 - \text{мин}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \pm(N+1)$$

$$Nd \sin \theta = p\lambda;$$

$$d \sin \theta = \left[ \frac{p}{N}, \frac{2p}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \lambda, \frac{N+1}{N} \lambda, \dots \right]$$



распред интенсивности эквидистантно раси источников.

$$d \sin \theta^+ = m \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin \theta^- = m \lambda - \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin (\theta^+ - \theta^-) = 2 \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin \frac{\theta^+ - \theta^-}{2} \cos \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} = 2 \frac{\lambda}{N}$$

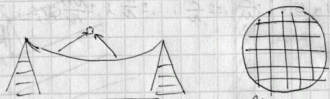
$\theta \approx 0$

$$d \sin \frac{\theta^+ - \theta^-}{2} = 2 \frac{\lambda}{N}$$

$$\Delta \theta = 2 \frac{\lambda}{N d}, \quad N=2 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{\lambda}{d} \text{ - верно.}$$

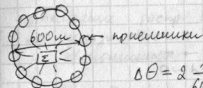
ширина интерференционного максимума

### 13.2 Антенные решетки



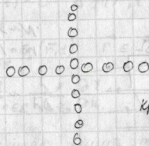
$$\Delta \theta = \frac{2 \lambda}{d} = 0$$

### РАТАН - 600 - телескоп



$$\Delta \theta = 2 \frac{\lambda}{600 \text{ м}} \text{ - условия направленного приема.}$$

в линиях:

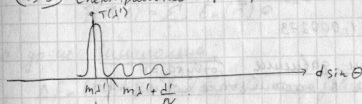


256 x 256 штук.

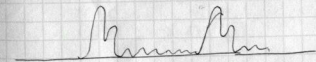
2<sup>8</sup> - удобно для быстрого преобразования Фурье.

кестообразный приемник

### 13.3 Спектральные приборы



Результат



$$m \lambda + \frac{\lambda}{N} = d \sin \theta' \text{ - min } \theta' = \theta''$$

$$m \lambda = d \sin \theta''$$

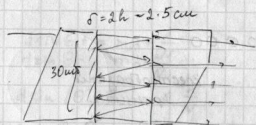
$$m\lambda' + \frac{\lambda'}{N} = m\lambda''$$

$$\text{или } \frac{\lambda'}{N} = m(\lambda'' - \lambda')$$

$$\frac{\lambda'}{\Delta\lambda} = mN$$

$$m \rightarrow \infty, \\ \Delta\lambda \rightarrow 0.$$

$$m \approx 10000$$



$$N \approx 30 \\ m \approx 10^4$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 3 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{3 \cdot 10^5}, \text{ если } \lambda = 0,5 \text{ мкм, то } \\ \Delta\lambda \approx 10^{-6} \text{ мкм}$$

$$h \approx 1,000273$$

увеличим давление воздуха  $\Rightarrow$   
изм. и в первом значке после зап.

## 5. Дифракция волн.

(14.1) D - отклонение распр. волн от прямолинейного, кот. можно объяснить с помощью граничных и прямолинейных

D на малых объектах (камера) - рассеивание

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) - c^2 \Delta \xi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\xi(\vec{r}, t) \Big|_{r \in \Sigma_0} = \xi_0(\vec{r}, t) \quad \vec{r} \in \Omega - \text{объем.} \\ \Sigma_0 = \partial\Omega_0$$

$$\frac{1}{kz} \frac{\partial \xi}{\partial n} \Big|_{r \in \Sigma} = \frac{e}{kz_0} \frac{\partial \xi}{\partial n}$$

В общем случае решить такую задачу аналитически не удается.

Уравнение: установившееся волна:

$$\xi(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}_n(\vec{r}) e^{i\omega_n t}$$

$\Rightarrow$  ур-ие Гельмгольца:

$$\Delta E_n(\vec{r}) + k_n^2 E_n(\vec{r}) = 0 \text{ - нет завис. от } t.$$

$$k_n - \text{волновое число, } k_n = \frac{\omega_n}{c}$$

В дальнейшем анализе и поисках, считаем, что рассматриваем одну гармонику.

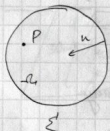
14.2 Итерация Еллиманга-Кирхгофа:

$$\Delta E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0.$$

$$G = \frac{e^{-ikr}}{r} - \text{Ф.инт. Грина.}$$

$$\int_{\Sigma} (E \Delta G - G \Delta E) d\Omega = - \int_{\Sigma} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Omega$$

↑ вторая Ф.инт. Грина, интегральное уравнение, ищем поле E.



n - внутренняя нормаль.

ищем решение в точке P.

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Sigma$$

↑ это тоже интегр. уравнение, это интеграл Еллиманга-Кир.

Формулы теор. дифракции.

①  $E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Sigma$  инт. Г-К.

②  $E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{откр.}} + \Sigma_{\text{зат.}}} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Sigma$  - при упр. Зоммерфельда

③  $E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{откр.}}} (E_S(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_S(M)}{\partial n}) d\Sigma$  - при упр. Кирхгофа

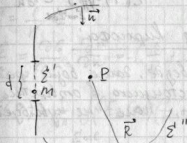
④  $E(P) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{откр.}}} E_S(M) \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \alpha - \cos \beta) d\Sigma$  - при опт. приближ.

⑤  $E(P) = \sum_{n=1}^N E_n(P)$ ;  $E_n(P) = A \frac{e^{-ik(r_0+P)}}{r_0+P} \chi_n(-1)^{n-1}$

⑥  $A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi} \int A(x', y', z=0) e^{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'$  Френель.

рассм. приближенную теорию дифракции

14.3 Условие излучения Зоммерфельда. Приближение Кирхгофа.



рассм. сферу вокруг P

$\Sigma'$  - отверстие + экран  
 $\Sigma''$  - сфера

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma'} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Sigma' + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma''} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Sigma''}_{J''}$$

$$G = \frac{1}{R} e^{-ikR}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\left(\frac{1}{R} - \frac{ik}{R}\right) e^{-ikR} = \left(\frac{1}{R} + ik\right) \frac{e^{-ikR}}{R}$$

$$J'' = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma''} R^2 d\omega \left( E \left( \frac{1}{R} + ik \right) - \frac{\partial E}{\partial n} \right) \frac{e^{-ikR}}{R}$$

Условие Зоммерфельда:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ R \left( E \left( \frac{1}{R} + ik \right) - \frac{\partial E}{\partial n} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} \right] = 0$$

т.е. поле E, прошедшее через отверстие из S в P - это при  $R \rightarrow \infty$  излучение точечного источника.

$$\Rightarrow E = E_0 \frac{e^{-ikR}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{R} + ik \right) \frac{e^{-ikR}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ R \left( \frac{1}{R} \circ \left( \frac{d}{R} \right) \right) \right] = 0$$

⇒ условие Гюйзенберга выполняется

призна: d-конечно,  $R \rightarrow \infty$ .  $E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{от}}} \left( E_s \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_s}{\partial n} \right) d\Sigma$

далее - приближения Кирхгофа:

1) поле в отверстии (езде, там, возле границы) совпадает с полем источника в отверстии в отсутствие экрана, поле "не существует" экрана.

2) везде на экране поле  $E|_{\Sigma_{\text{эк}}} = 0$ .  
(хотя на самом деле поле вблизи отверстия на экране не нуль, но оно мало).

⇒ с исп. приближений ⇒

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{от}}} \left( E_s(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_s(M)}{\partial n} \right) d\Sigma$$

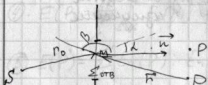
где M - текущая точка исп-ия по отверстию.

### 144) Оптическое приближение

$$r, r_0 \gg \lambda$$

$$\vec{r}_0 = (\vec{M} - \vec{S})$$

$$\vec{r} = \vec{M} - \vec{P}$$



$$E_s(M) = \frac{A_0}{r_0} e^{-ikr_0}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial n} = \frac{\partial E_s}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial n} = -\left(\frac{1}{r_0} + ik\right) E_s(M) \cos \alpha$$

G-поле Грина точ. источника, находящ. в P.

$$G = \frac{1}{r} e^{-ikr}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\left(\frac{1}{r} + ik\right) G \cos \beta$$

$$\Rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{от}}} \left( E_s(M) \left(\frac{1}{r} + ik\right) G \cos \beta + G \left(\frac{1}{r_0} + ik\right) E_s(M) \cos \alpha \right) d\Sigma$$

= { Оптическое приближение  $r_0, r \gg \lambda$ ,  
⇒  $\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r} \ll k$  }

$$E(P) \approx \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{от}}} E_s(M) \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \alpha - \cos \beta) d\Sigma_{\text{от}}$$

формула Френеля - Кирхгофа.

### 145) Принцип Гюйзенса - Френеля

Это способ приближенного вычисления вторичного излучения.

Принцип:

1). Если поверхность, охват. реальный точ. источник - это вторичные точечные источники - т.е.  $E|_{\Sigma_{\text{вторич}}}$  - вторич. исп. ↔  $E_s(M) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$

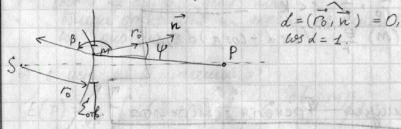
2). Излучение вторич. исп. когерентно, ⇒ суммирование возмущений.

3) Результир поле в P - результат (суперпозиция) интерференции волн втор. источ.  
 $\rightarrow$  у нас это интеграл.

4). Амплитуда возмущений от вторич. источников пропорциональна: амплитуде  
 • амплитуде реальной волны  $\rightarrow E_s(M)$   
 • площади элемента поверхности  $\rightarrow d\Sigma$   
 • некоему множителю  $K(\psi) \rightarrow \cos \alpha - \cos \beta$

направлении на источник.

$\Rightarrow$  все, что есть в принципе Волг-Френ., занисано в формуле Френеля-Киргофа



$$d = (\vec{r}_0, \vec{n}) = 0, \quad \cos \alpha = 1.$$

$$\psi = \pi - \beta; \quad \beta = \pi - \psi, \quad \cos \beta = -\cos \psi$$

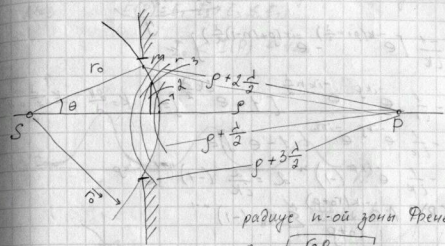
$$E(P) = \frac{ik}{4\pi} E_s(M) \int_{\Sigma_{об}} \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos \psi) d\Sigma K(\psi)$$

продолжим вычислять этот интеграл.

$\max K(\psi) = 2$ , медленно убывает до  $1 + \epsilon$ .

$\frac{e^{-ikr}}{r}$  - быстро уменьшается.

### Построение зон Френеля.



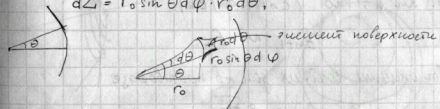
радиус n-ой зоны Френеля:

$$r_n = \sqrt{\frac{r_0 \rho}{r_0 + \rho}} \sqrt{2n}$$

$$E(P) = \frac{ik}{4\pi} E_s(M) \sum_n K(\psi_n) \int_{\Sigma_n} \frac{e^{-ikr}}{r} d\Sigma$$

$\Sigma_n$ ,  $\Sigma_n$  - n-ая зона Френеля

$$d\Sigma = r_0 \sin \theta d\varphi \cdot r_0 d\theta,$$



сделаем замену

$$\Delta SMP, \quad r^2 = r_0^2 + (r_0 + \rho)^2 - 2r_0(r_0 + \rho) \cos \theta$$

$$2r dr = -2r_0(r_0 + \rho)(-\sin \theta) d\theta,$$

$$r_0 \sin \theta d\theta = \frac{r dr}{r_0 + \rho}; \quad d\Sigma = \frac{r dr}{r_0 + \rho} r_0 d\varphi$$

$$E(P) = \frac{ik}{2} E_s(M) \sum_n K(\psi_n) \int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}} \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{r dr}{r_0 + \rho} r_0 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$E(P) = \frac{ik}{2} \frac{Ae^{-ikr}}{r_0} \int_0^r \frac{K_n \int_0^{2\pi} e^{-ikr} dr}{\rho_0 \cdot (n-1)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$J = \frac{-1}{ik} [e^{-ik(r+n\frac{\lambda}{2})} - e^{-ik(r+(n-1)\frac{\lambda}{2})}] =$$

$$= -\frac{1}{ik} e^{-ikr} \cdot e^{-ikn\frac{\lambda}{2}} [1 - e^{ik\frac{\lambda}{2}}] \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}, k\frac{\lambda}{2} = \pi$$

$$= -\frac{1}{ik} e^{-ikr} e^{-in\pi} [1 - e^{i\pi}] =$$

$$= -\frac{1}{ik} e^{-ikr} (-1)^n \cdot 2 = \frac{2}{ik} (-1)^{n+1} e^{-ikr}$$

$$E(P) = A \frac{e^{-ik(r_0+r)}}{r_0+r} \sum_{n=1}^N K_n (-1)^{n+1}$$

$$E(P) = \sum_{n=1}^N E_n(P) \text{ - сумма возмущений,}$$

созд. зонами Френеля

$$E_n(P) = A \frac{e^{-ik(r_0+r)}}{r_0+r} K_n (-1)^{n+1}$$

т.к.  $K_n \downarrow$ , то  $|E_{n+1}| < |E_n|$

$E_{n+1} \sim -E_n$

возмущения соседних зон в противофазе

$\Rightarrow$  знакочередующий ряд

$$E(P) = \frac{E_1}{2} \pm \frac{E_N}{2}$$

Пусть экран чет  $\Rightarrow N \rightarrow \infty \Rightarrow$

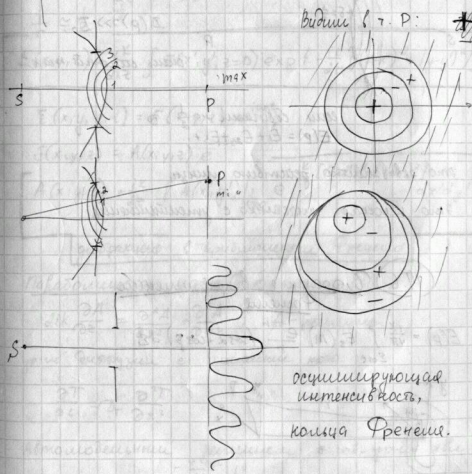
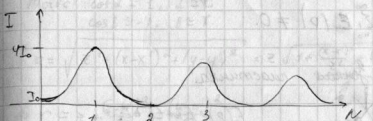
$$E(P) = \frac{E_1}{2}, I(P) = I_0$$

Пусть  $N=1$  - отверстие мало:

$$E(P) = E_1 \Rightarrow I(P) = 4I_0$$

$N=2 \quad E(P) = E_1 - E_2 \approx 0$ . т.к. члены ряда убывают медленно.

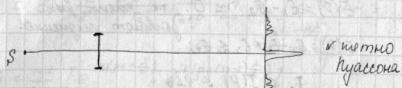
$N=3 \quad E(P) = E_1 - E_2 + E_3 \approx E_1$   
 $I_0 < I(P) < 4I_0$



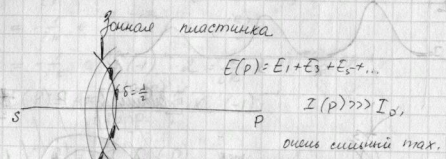
видим 1-й з.р.

осциллирующая интенсивность, кольца Френеля.





$$E(P) = \sum_{s_0}^{\infty} E_s(P) \neq 0.$$



$$E(P) = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

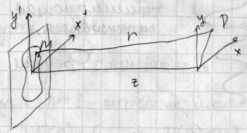
если совпадем на  $\frac{1}{2}$ , то  
 $E(P) = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$

это эквивалентно действию линзы

это плоская пластинка с утолщением

### 14.6 Дифракция в приближении Френеля

$$E(P) = \frac{ik}{\sqrt{\pi}} \int_{\Sigma_{\text{от}}} E_s(M) \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \alpha - \cos \beta) d\Sigma$$



Приближение: размер отверстия и расстояния P много по сравнению с z.

$$\max(\sqrt{x'^2 + y'^2}, \sqrt{x^2 + y^2}) \ll z.$$

тогда  $\cos \alpha \approx 1, \alpha \approx 0$   
 $\cos \beta \approx -1, \beta \approx \pi$ .

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x-x')^2}{z^2} + \frac{(y-y')^2}{z^2}} \approx z$$

$$\Rightarrow r \approx z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{z}$$

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int E(x', y', z=0) \exp\left\{-\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]\right\}$$

$$\bar{E}(x, y, z, t) = E(x, y, z) e^{i\omega t}$$

$$E(x, y, z) = A(x, y, z) e^{-ikz}$$

$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2z} \int A(x', y') \Big|_{z=0} e^{-\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'$$

### дифракция в приближении Френеля

Параболическое ур-е дифракции:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad A - \text{решение}$$

ур-е диффузии в мнимых коор.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Автоподельный решение параб. ур-е имеет

$$A(x, y, z) = A_0 e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma z}} \Big|_{z=0} - \text{Гауссов лучок}$$

А при  $kz$

$$A(x, y, z) = \frac{A}{a(x)} \omega_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2(x)}} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2R(x)}}$$

$$a^2(x) = \omega_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{L_g}\right)^2\right)$$

лучок становится шире

$$L_g = ka_0^2$$

⇒ создаст параболы луча света, который имеет дифракцию расходимости, киньце!

в приближении Френеля  $\sqrt{x^2+y^2} \ll z$   
 $\sqrt{x^2+y^2} \ll z$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (ik \frac{\partial A_n}{\partial z} + k_n^2 A_n) e^{ik_n x} = 0$$

$$ik \frac{\partial A_n}{\partial z} + k_n^2 A_n = 0$$

$$A_n(z) = A_n(0) e^{i \frac{k_n^2}{2k} z} = A_n(0) e^{i \varphi_n(z)}, \quad \omega_0 z$$

$$\varphi_n(z) = \frac{k_n^2}{2k} z$$


распространение каждой из гармоник - со своим разовым набегом

$$A(x, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(0) e^{i \varphi_n(z)} e^{ik_n x}$$

$$A(x, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(0) e^{i \varphi_n(z)} e^{i(\omega t - kx + k_n x)}$$

$$\omega t - (\vec{k} \vec{r}) = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$$

поставили решетку с периодич. структурой, следствием дифракции свч. появились  $\infty$  квант плоских волн, каждая из которых направ. в своем направлении.

Как найти это направление?   $k \uparrow \uparrow O z$

$k_n$  - у  $\forall$  гармоник свое, а итоговое направ. - сумма  $k_n$  и  $k$ .

появляется "вер" плоских волн.

$\forall$  из этих компонентов (плоских волн) имеет свой набор фазы, т.е. они не синфазны.

5.12

### 14.7. Эффект Мишля

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$A(\vec{r}) = A(x, z)$$

$$ik \frac{\partial A(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 A(x, z)}{\partial x^2}, \quad \leftarrow \text{ур-е дифракции}$$

$$z=0. \quad A(x \pm s \cdot a, 0) = A(x, 0), \quad s=1, 2, 3, \dots$$

$$A(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z) e^{i \frac{2\pi}{a} n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z) e^{ik_n x}$$

$k_n$  - это не то же самое волновое число

$$k_n = \frac{2\pi}{a} n$$

$$A(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(0) e^{-ik_n x}$$

если  $\varphi_n = 2\pi \cdot q_n$ , то

$$e^{i\varphi_n} = 1 \Rightarrow A(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n(0) e^{ik_n(x)} \equiv A(x, 0)$$

### Эффект Машбо

Если есть дифракция света на периодической структуре, то с определенной периодичностью в пространстве повторяется (воспроизводится) начальное распределение полей.

$$\varphi_n(z) = \frac{p}{2k} \cdot \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cdot n^2 \cdot z$$

хотим, чтобы  $\varphi_n(z) = 2\pi \cdot q_n$ ,  $q_n \in \mathbb{Z}$ .

$$\varphi_n(z) = n^2 \varphi_1(z), \text{ где } n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

достаточно потребовать  $\varphi_1(z) = 2\pi \cdot q_1$ .

$\Rightarrow$   ~~$\varphi_1(z) = 1$~~  потребуем  $\varphi_1 = 2\pi \Rightarrow$  надем так расстояние до воспроизведения.

$$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{z_1}{2k} = 2\pi \quad , \quad z_1 - \text{расстояние Тальдо}$$

$$z_1 = \frac{2\pi \cdot 2k a^2}{4\pi^2} = \frac{2\pi \cdot 4\pi a^2}{4\pi^2} = \boxed{\frac{2a^2}{\lambda}} \quad \text{расстояние Тальдо.}$$

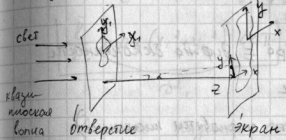
расстояние до ближайшего воспроизведения волнового фронта.

### 15.1 Дифракция Фраунгофера.

Еще один способ упростить интеграл Френеля - Кирхгофа.

$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int A(x_1, y_1) e^{-\frac{ik}{2z} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} dx_1 dy_1$$

Упростим Френеля для случая:



$A(x, y, z)$  - интенсивность света на расстоянии  $z$  от щели

Пойдем дальше к дальнейшему упрощению

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = (x^2 + y^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2(xx_1 + yy_1)$$

т.к. интегрируем по  $x_1, y_1$ , то под интегралом

$$\begin{aligned} & \text{останутся } e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \cdot e^{-\frac{ik}{2z}(-2(xx_1+yy_1))} = \\ & = e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{ik}{z}(xx_1+yy_1)} = e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \approx 1. \end{aligned}$$

Примечание: когда это возможно? Размер отверстия мал по сравнению с расстоянием  $z$ .

$$\Rightarrow \int A(x, y) e^{i\frac{k}{z}(x, x+y, y)} dx, dy, z$$

это фактически преобразование Фурье!

$\Rightarrow$  решение задачи дифракции равносильно преобразованию Фурье от начального распределения поля.

$\Rightarrow$  дифракция "как бы" осуществилась преобразованием Фурье

дифракция Фраунгофера  $\equiv$  дифр. на бесконечности

$\equiv$  дифр. плоских волн

(т.к. на  $\infty$  все волны становятся плоскими).

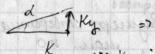
$$\text{Рассеи } \frac{ikx_1}{z} = ikx_1 \frac{x}{z}$$

$$\frac{iky_1}{z} = iky_1 \frac{y}{z}$$

d-угол дифракции, угол из т.О до точки наблюдения.

$$\frac{y}{z} = \tan d \approx \sin d \approx d \quad \text{где малых } d, \text{ т.е. при } z \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow iky_1 \sin d = iy, \quad k \sin d = iy, \quad k_y$$



$$\int A(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx, dy = A(k_x, k_y)$$

всегда угол дифракции, перенесли к новым перенесли

это условий спектр при дифр. Фраунгофера:

$$\int A(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx, dy,$$

получили условие на приямки Фраунгофера.

$$e^{-i\frac{k}{z}(x, x+y, y)} = 1, \text{ либо очень медленно уменьшается (не осциллирует)}$$

$$\left[ \frac{k}{2z} \max(x, x+y, y)^2 \right] \ll \pi \leftarrow \text{запрещаем осциллировать.}$$

D-шаге размер отверстия.

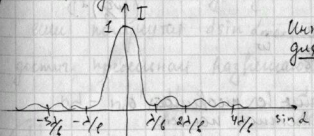
$$\frac{\Delta I}{I} \frac{1}{D^2} \ll \pi, \quad \frac{D^2}{\lambda^2} \ll 1 \leftarrow \text{условие на дифракцию Фраунгофера.}$$

т.е. z очень велико относительно D.

если задано D, то

$$z \gg \frac{D^2}{\lambda} \leftarrow \text{на таком расстоянии наблюд. дифр. Фраунгофера.}$$

либо, наоборот, фикс z, и уменьшаем D.



Интенсивность при дифракции на щели.

ширина щели

$$I \sim \frac{\sin^2 \frac{k b \sin d}{2}}{\left(\frac{k b \sin d}{2}\right)^2} \quad \text{нули в } \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

если  $I_{max} = I_0$ , то

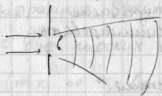
$$I\left(\frac{\Delta}{\delta}\right) \approx \frac{I_0}{20}$$

$$I\left(\frac{\Delta}{\delta}\right) = \frac{I_0}{50}$$

интенс. очень быстро убывает.

почти все энергии внутри  $[-\frac{\Delta}{\delta}, \frac{\Delta}{\delta}]$ .

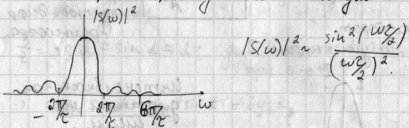
важно: дифрагирующее излучение  
куда расходится, фронт  
перестает быть плоским,



чем больше размер  
щели, тем меньше  
дифрак расходится.

### 15.3. Пространственно-временная аналогия.

картина дифракции на щели совпадает  
со спектром прямоугольного импульса

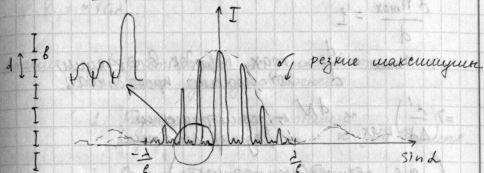


важно, аналогия с теоремой о  
ширине частотной полосы.

чем больше импульс, тем шире спектр

⇔ чем уже щель, тем шире дифракция  
расходится, дифр. угол

### 15.5 Дифракционная решетка.



$N$  точек щелей, с периодом  $d$ , размер щели  $b$ .

Разрешающая способность диф. решетки:

картина зависит от длины волны.

условие максимума:  $d \sin \delta_{max} = n d, n \in \mathbb{N}$

условие минимума:  $d \sin \delta_{min} = n d' + n \frac{d}{N}$

$$d \sin \delta_{min} = n d' + \frac{d}{N}$$

если увеличим разницу между  $d$  и  $d'$ ,

если получим  $d \sin \delta_{max} = d \sin \delta_{min}$ , то

достиг. предельная разрешающая способность,

$$n d = n d' + \frac{d}{N}, \quad n \Delta d = \frac{d}{N} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d}{\Delta d}\right) = n N$$

разрешающая способность дифр. решетки

чем больше  $N$  и  $n$ , тем больше  
разрешающая способность.

Пределная разрешающая способность  
решетки.

$$\frac{d N_{\max}}{d} = 1$$

$\Rightarrow N_{\max} = \frac{d}{\lambda}$  - макс порядок дифракции,  
кот. можно наблюдать.

$\Rightarrow \left(\frac{d'}{\Delta \lambda}\right)_{\max} \sim dN$  - геометрический  
размер решетки.

(т.е. ее засвеченной части).

### 15.4 Ближние и дальние зоны дифракции

1.  $z \gg \frac{D^2}{\lambda}$   $D^2 \ll \lambda z$   
Условие для  
и при фазовом  
вид.
  2.  $z \sim \frac{D^2}{\lambda}$   $D^2 \sim \lambda z$
  3.  $z \ll \frac{D^2}{\lambda}$   $D^2 \gg \lambda z$
- В этих областях действуют:

1. Дифр. Фраунгофера,  
дальняя зона дифракции.

2. Дифр. Френеля

ближняя зона дифракции

3. Геометрическая оптика.

$$R = \sqrt{\frac{r_0 r_1}{r_1 + r_0}} \quad - \text{ радиус первой зоны Френеля}$$

модели. ист. на расст  $r_0$ .

если  $r_0 \rightarrow \infty$ , т.е. фронт плоский  $\Rightarrow$

$$R = \sqrt{r_0 \lambda}$$

- знаешь.
1. В отверстие не укладывается  
даже одна зона Френеля.
  2. Размер отв. сопоставим с  
радиусом первой зоны  $\Rightarrow$  и зон Френеля.
  3. Огранич. число зон Френеля  
в пределах отверстия.

### 15.6 Фурье - оптика.

Запишем еще раз:

$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{ikz} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \int A(x_0, y_0) e^{-\frac{ik}{z}(x_0 x + y_0 y)} dx_0 dy_0$$

дифракционный интеграл Френеля.

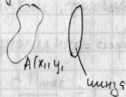
Пусть задано  $A(x, y)$ , хотим узнать  
физически Фурье-образ.

Вместо  $ikz$  удалим от множителя  $e^{-\frac{ik}{z}(x_0 x + y_0 y)}$

Вместо  $ikz$  введем под интеграл  $e^{\frac{ik}{z}(x_0 x + y_0 y)}$ .

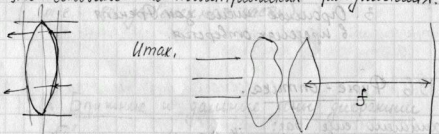
Это очень просто сделать! Тогда сразу  
сразу получим образ Фурье.

Пусть есть  $A(x, y)$ , поставим за этим объектом линзу (см. Шатлев, "Оптика").



Тогда свет, прошедший через линзу, приобретет фазовый набег  $e^{i\frac{k}{2s}(x^2+y^2)}$ , где  $f$  - фокусное расстояние линзы.

Это основано на геометрических рассуждениях.



$$\text{тогда } A(x, y, z) = \frac{i k}{2 \pi z} e^{i k z} e^{-i \frac{k}{2 z} (x^2 + y^2)} \int A(x_1, y_1) e^{i \frac{k}{z} (x x_1 + y y_1)} dx_1 dy_1$$

преобр. Фурье

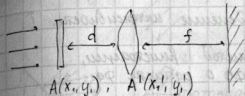
Линза работает как

Фурье-процессор!  $\rightarrow$

образ Фурье можно не считать - его

можно измерить (напр, спотографировать):)

Расширим этот прием:



хотим измерить по образ Фурье.

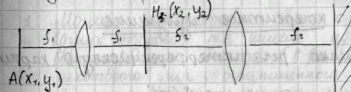
Если линза стоит не вплотную к объекту, то на линзу попадает уже дифрагированный свет.

Оказывается, если  $d = f$ , то и в этом случае итоговое распределение  $B(x, y)$  на экране будет

$$B(x, y) \sim \mathcal{F}(A(x, y)) - \text{образ Фурье}$$

с точностью до фазовых множителей, по модулю = 1.

Еще один эффект - Фурье Фильтрация.



два раза берем преобр. Фурье  $\Rightarrow$  получаем исходный.

Экран  
здесь видим  $\sim A(x, y)$

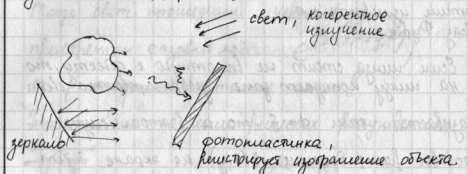
Поставим второй объект  $H(x, y) \leftarrow$  фильтр, тогда

видим, как, наблюдая ограничение на спектр, мы видим на сам объект.

это очень интересно:)

Регистрируем распределение интенсивности. I.

Нельзя ни придумать метод регистрации, кот. ~~лучше~~ сохраняет инфо о разности фаз - за счет интерференции



На ФП сходится два пучка:

1. Рассеивается объектом
2. Часть опорной волны т.е. волны, освещающей объект, не задевшей объект.

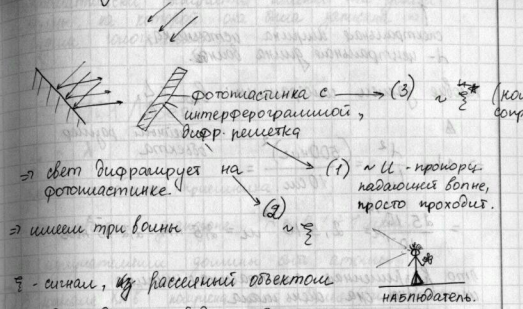
Используем когерентное излучение.

=> на пластинке рег. интерференционную картину.

Эту картину можно угодить дифракционной решетке система светлых и темных полос.

Это запись голограммы.

И.к. не связана напрямую с видом объекта, т.е. не копирует объект.



=> свет дифрагирует на фотопластинке.

=> имеем три волны

1 - сигнал, из рассеяний объектом

=> Наблюдатель видит  $\xi$ , т.е. как бы сам объект. (в идеальном случае).

Итак, отличие голограммы от фотоснимка:

1. Можно рассматривать объект с разных сторон! т.е. имеем идеальное воспроизведение объекта. (в рамках некоторого угла, ограниченного углом регистрации).

$\xi^*$  - действительное изображение объекта, стоящаясь волна, т.е. иде-то в пр-ве будет построено изображение объекта, его тоже можно сфотографировать.

Ограничения: Отец голограмм - Забр, 1947г.

не было лазер источников, а нужно когерентное излучение.



$$\lambda_{\text{кор}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

↑  
спектральная ширина источника,  
λ - центральная длина волны.

Условие записи голограммы:  $\lambda_{\text{кор}} \approx L$ ,

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{L} = \frac{(500 \text{ нм})^2}{10 \text{ см}} = \frac{25 \cdot 10^{-14}}{10^{-1}} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,5 \text{ пм} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ нм}$$

↑  
линейный размер объекта

Это разрешенная спектральная ширина источника, она очень мала.

Если исп. белую лампу, то можем исп. только  $\frac{2,5 \cdot 10^8}{300} \approx 10^{-5}$ , т.е.

только  $10^5$  часть излучения ⇒  
нужно снимать очень долго, десятки часов  
⇒ искажения!

Чтобы записать цветную голограмму, заменяют КСВ - три раза в разном свете на одной фотопластинке (они не совпадают, т.к. разные длины волн).

Но для воспроизведения голограммы нужен тоже лазерный источник. (когерентный)

Эта проблема была решена Денлисом,  
это трехмерная голограмма, используется  
такой способ, запись в объеме

и тогда при освещении белым светом автоматически выделяется именно та длина волны, на которой она была записана ⇒  
видим голограмму.

## 16.1 ЛАЗЕРЫ.

$$L \sim \lambda$$

↑  
длина источника / приемника.

В оптическом диапазоне  $\lambda \sim 0,1 \div 1 \text{ мкм}$ .

⇒ излучательными долями есть атомы.

① В начале XX в. получена Ф-ла Рэлея-Дингеса

$$J = cW$$

↑  
объемная плотность энергии  
ток

$$W_{\omega} = \frac{dW}{d\omega} - \text{распред. энергии по спектру,}$$

$$W = \int_{\omega}^{\infty} W_{\omega} d\omega,$$

$$W_{\omega} = \frac{\omega^2 k T}{\pi^2 c^3} - \text{Ф-ла Рэлея-Дингеса.}$$

хорошо работает в области низких частот ⇒ т.е. волн.

Но при  $\omega \rightarrow \infty$   $W_{\omega} \rightarrow \infty$ ,  $W \rightarrow \infty$ . ← ультрафиолетовая катастрофа.

②. Ф-ла Вина

Предположим, что распредел. энергии по  
модам неравномерное

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{E}{kT}} - \text{распред. Больцмана.}$$

Вид предположим, что  $\epsilon \sim \omega$ .

$$\Rightarrow \text{Ф-на Вина: } w_{\omega} = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{h\omega}{kT}}$$

Она хорошо работает при  $\omega \rightarrow \infty$ , но, наоборот, она плохо работает в обл. низких частот

### 3) Формула Планка.

$$W_{\omega} = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}$$

### 4) Атом Бора.

Бор запретил атому иметь произвольную энергию, т.е. имеет лишь только опред. энерг. уровни, состояния.

спонтанные и вынужденные переходы:

$$E_1 \text{ ————— } N_1$$

$$E_0 \text{ ————— } N_0$$

кол-во атомов.

$K_{\downarrow}^{\text{спонт}}$  - скорость спонтанного перехода системы вниз,

$K_{\downarrow}^{\text{спонт}} = N_1 A_{\downarrow}$ ,  $A_{\downarrow}$  - вероятность спонтан. переход.

Есть вынужденные переходы - под действием внешнего излучения.

$$K_{\downarrow}^{\text{вынуж}} = N_1 B_{\downarrow} W_{\omega}$$

Снизу вверх спонтанные переходы происходят не могут.

$$K_{\uparrow}^{\text{вынж}} = N_0 B_{\uparrow} W_{\omega}$$

Если система стационарна, т.е.

$$K_{\downarrow}^c + K_{\downarrow}^B = K_{\uparrow}^B - \text{ скорости переходов равны}$$

$$N_i \sim e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad i = 0, 1.$$

$$A_{\downarrow} e^{-\frac{E_1}{kT}} + w_{\omega} B_{\downarrow} e^{-\frac{E_1}{kT}} = w_{\omega} B_{\uparrow} e^{-\frac{E_0}{kT}} \quad / \cdot \frac{1}{w_{\omega}}, \text{ при } T \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow B_{\downarrow} = B_{\uparrow}.$$

это соотношение было получено Эйнштейном,

$$W_{\omega} = \frac{A_{\downarrow}}{B} \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} \quad ; \quad h\omega = E_1 - E_0$$

$\frac{h\omega}{kT} \ll 1 \Rightarrow$  (соотношение Эйнштейна - Планка)

$$\frac{A_{\downarrow}}{B} = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} \Rightarrow$$

получим Флу Планка (сам Планк ее угадал задолго до этого).

Рассм. вынужденные переходы.

$$\begin{matrix} E_1 & - & N_1 \\ E_0 & - & N_0 \end{matrix}$$

$$\text{ЗСЧ: } \frac{dN_1}{dt} = -h\omega N_1 B_{\downarrow} N_1 - h\omega N_0 B_{\uparrow} N_0$$

введем  $d = \frac{h\nu_0}{V} (N_1 - N_0) \frac{1}{V}$

$V_0$  групповая скорость в среде  
 $V_1$

$$\Rightarrow \frac{dW_0}{dt} = d \cdot V \cdot W_0$$

$S = V \cdot W_0$  - поток энергии в среде  $\Rightarrow$

$$\frac{dS}{dt} = dSV$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = V \frac{dS}{dz} \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{dz} = dS \Rightarrow S' = S_0 e^{dz}$$

т.к.  $d \sim (N_1 - N_0)$ , а они распр. Больц

$\Rightarrow d < 1$ , и  $S' \downarrow$ . при  $z \rightarrow \infty$ , поток энергии ослабевает.

если  $N_1 = N_0$ , то  $d = 0$ ,  $S = const \Rightarrow$  среда становится для волны прозрачной.

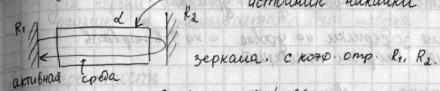
если  $N_1 > N_0$ , то  $S' \uparrow$ , поток усиливается!

Это основа исп. лазеров.

L	ight	Оптический
A	mplification	К. вынужденный
S	t. imulated	Генератор
E	mission	
R	adiation	(создан - Нейманы)

Усиление света при помощи вынужденного излучения

### Резонатор



$$S = S_0 R_1 R_2 e^{2dL} = S_0 e^{2dL - 2L}, \quad 2f = -\ln(R_1 R_2)$$

$\Rightarrow S > S_0$ , если  $dL > f$  ← условие генерации в лазере,  $d > 0$ .

Среда активная, если  $d > 1$ .

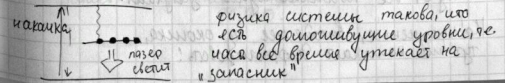
зеркала ацц обратную связь - усиливает все больше и больше усиливается.

$\Rightarrow$  эту энергию в систему нужно как-то вносить  $\Rightarrow$  нужен источник накачки:

- пробой в газе электрич. разрядом
- ионизм светового потока
- химическая реакция.

нужно отменить вынужденные переходы сверху вниз!  
т.к. при накачке мы можем водить только  $N_1 = N_0$ , среда прозрачна, но не активна.

Чтобы заработал лазер, нужна трехуровневая схема:



в идеале можно всю систему  
закачать на прошитый уровень.

Время задержки на уровне ~ на 5-6 порядков  
выше скорости коммутации.

Накачка и свечение лазера разнесены  
по уровням - по спектру.

Бывают 4-уровневые лазеры:



Твердотельный лазер:

1. Резонатор

2. Кристалл между двух мощных линз.  
~ 3000 Вт.

3. Охлаждение водой.

КПД большинства лазеров (за исключением полупроводниковых)  
меньше, чем у парового, 3-4%, до 0,1%.

Характерные свойства лазер излучения.

1) Направленность

т.к. усиление в резонаторе  
претерпевает только продольный  
луч, все поперечные лучи затухают.

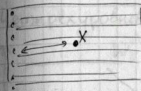
Коллимация, выходим из окошка,  
лучик как икает дифрагировать!

Откуда берется  $S_0$ , начальный шум:  
одни первый фотон - это спонтанный переход,  
далее он усиливается, идет навстречу.

2) Когерентность

обладает и простран. и временной когерентностью.

в шквал воюла на стадионе



в ряду все встает одновременно - простран. ког.

в X знает, что ему нужно встать через  
n секунд после начала - временн. ког.

3) Монохроматичность

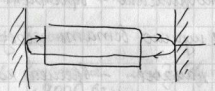
$\Delta E = \text{const}$ , одноцветность, в идеальном  
случае  $\omega = \text{const}$ .  
 $\tau_{\text{ли}}$  (на сколько длин какой узкий  
интервал)

Применение

- Звездные вояны - в космосе, нет рассеяния,  
тумана
- Записи и хранение инфо,  
CD, DVD.

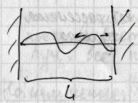
- медицина
- хранение информации

16.6 Типы лазеров

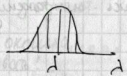


Свойства:

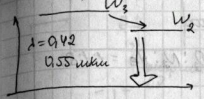
- направленность: угол излучения  $\approx 10^{-4}$  рад
- когерентность: выходящее излучение
- монохроматичность: спектральная селективность



$$L = n \frac{\lambda}{2}$$



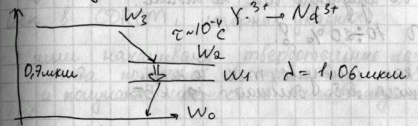
1. Твердотельные.



Рубиновый  $Al_2O_3$   
 1960: Нейман  
 $Al^{3+} \rightarrow Cr^{3+}$   
 $\lambda = 0,69 \mu m$

Трехуровневый:  
 $t_u \sim 10^{-3} \div 10^6 c$

Четырехуровневый:  $Y_3 Al_2 O_6$   
 $Y^{3+} \rightarrow Nd^{3+}$

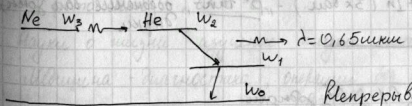


здесь вышка населенность.  
 $t_{sp} \sim 10^{-3} \div 10^{-6} c$   
 Это импульсные лазеры.  
 КПД 0,2%.

Сейчас эффективность - десятки процентов.

2. Газовый лазер.

Неон-гелий:

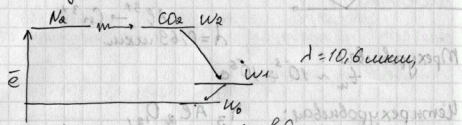


Непрерывный, стабильный.

На ионах  $Ag^+$   $\lambda = 0,5$  мкм

На парах  $Cu^+$   $\lambda = 0,45$  мкм

Молекулярные:  $CO_2$ ,  $CO_2:N_2:He = 1:1:8$



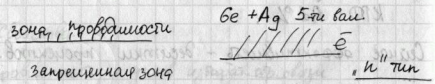
но излучение мкм не видно.

КПД  $10 \div 20\%$  ?

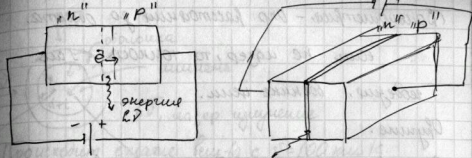
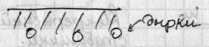
и.б. как лампы, так и кер, мощность и.б. большая,  $10$  кВт.

### 3. Полупроводниковый лазер.

Напр, Ge 4x ванетный.



Ge + In (3x ван.) - "p" тип, обводнение ван зон, дирки



исход. когерентное изл

$\eta = 80\%$ ,  $d = 0,7 \div 0,8$  мкм

Исп в CDROM, лазерных указках,

или накапливают твердотельные лазеры!  
тогда получают высокой КПД,  
и получают мощностью в кило ваттах.

Это надежные системы.

### Применение.

- $t_{изл} \sim 10^{-6}$  мкс
- $10^{-9}$  нс
- $10^{-12}$  пс
- $10^{-15}$  фс фемто
- $10^{-18}$  ас атта

если  $\lambda = 0,8$  мкм,  $\tau = 0,2 \cdot 10^8 = 2$  фс.

Это позволяет исслед.  
быстропротекающие процессы, напр,  
фотосинтез,  $t \sim 10^{-9}$  с.

Науки о жизни - изучение жизни клетки  
Медицина - диагностика, операции без внешних разрезов,  
коррекция зрения

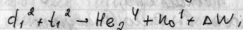
Вашингтонский - Опр. расстояния до объекта.

Если не иззер, то точность - 1 см  
ведущая, боковые цепи.

Оружие.

Для резки металла более эффективна, чем  
газовая резка, т.к. срез получается  
ровный и гладкий.

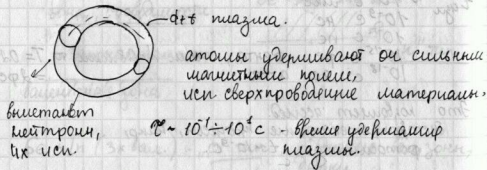
16.7 Уравнение термоядерной  
синтеза.



$$T \sim 60 \cdot 10^6 \text{ } ^\circ\text{K}, \quad 5 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

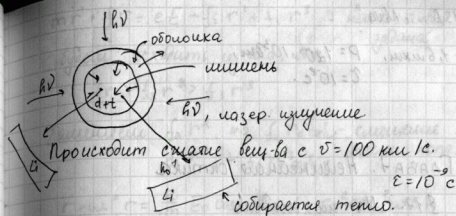
$$n \tau > 10^{20} \text{ } \text{см}^{-3} \text{ } \mu\text{с}$$

1) Система Токамак (СССР)



2) Лазерный УТС.

$$\tau \sim 10^{-9} - 10^{-10} \text{ с}, \quad n > 10^{30} \text{ } \text{1/м}^3 \text{ - компрессия вещества}$$

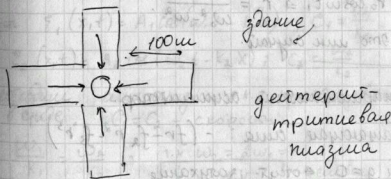


Такие системы были созданы,  
проблемы:

- Сжатие во времени без растекания оболочки, штырь импульс во времени
- Равномерное по кругу, много лазеров - 24 шт.
- Выбор длины волны излучения.  $\lambda = 0,35 \text{ мкм}$  и  $0,25 \text{ мкм}$   
Система „Искра-4“, Арзамас 16.

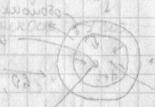
$$\lambda = 1,31 \text{ мкм}, \quad P = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Вт}, \quad \tau_{\text{из}} \sim 10^{-9} \text{ с}$$

выход нейтронов  $n \sim 10^7 - 10^9$  на встречу



USA, "Nova"

$d = 1,6 \text{ км}$ ,  $P = 120 \cdot 10^3 \text{ Вт}$ ,  
 $\tau = 10^8 \text{ с}$ .



ГЛАВА 7. Внешняя оптика

§ 17. Матем. модель

$E_d \sim 10^9 \text{ ВТ/см}$ ;  $I \sim 10^{17} \text{ Вт/см}^2$ .

$m\ddot{r} = -fr - gr + eE$

$D = \epsilon_0 E + P$   $P(t) = \text{Ner}(t)$

$E = E_0 \cos \omega t$ ,  $g = 0$

$m\ddot{r} + fr = eE$

$\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E$

$r(t) = r_0 \cos \omega t$ ,  $\Rightarrow r_0 = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

это или случай.

Антирелонический абциментор.

Возвращающая сила:  $-(fr - f_2 r^2 - f_3 r^3)$

$\Rightarrow$  при  $g=0$  ← отсут. затухание

$m\ddot{r} + fr = eE + f_2 r^2 + f_3 r^3$  - нелинейная задача  
 будем исходить из того, что

$fr > f_2 r^2 > f_3 r^3$

заменяем  $f_2 r^2$  на  $f_2 r_0^2 \cos^2 \omega t$  - заменили в отсут. нелинейность.  
 $f_3 r^3 \approx f_3 r_0^3 \cos^3 \omega t$

$\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t + d_2 r_0^2 \cos^2 \omega t + d_3 r_0^3 \cos^3 \omega t$   
 $\frac{1}{2} d_2 r_0^2 (1 + \cos 2\omega t)$   
 $\frac{1}{4} d_3 r_0^3 (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t)$

$E_0 \cos \omega t - P_n(\omega)$  - нуль.

$\frac{d_2 r_0^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) \rightarrow P_{нн}^{(1)}(0) + P_{нн}^{(2)}(2\omega)$  - квадратичная параболы

$\frac{d_3 r_0^3}{4} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t) \rightarrow P_{нн}^{(3)}(\omega) + P_{нн}^{(3)}(3\omega)$  - кубич. и. на частоте  $\omega$  и  $3\omega$

Чтобы генерир. вторая гармоника, нужна чтоб  $P_{нн}^{(2)}(2\omega) \neq 0$ .

Пусть  $\xi_1(x, t) = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ ,  $C_1 = \frac{\omega_1}{k_1}$

$\xi_2(x, t) = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ ;  $C_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$

Необходим синхронизм, т.к. преобразование в среде.  $C_1 = C_2$  - скорости

$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$ ,  $1 - k \omega_2 = 2\omega_1 \Rightarrow k_2 = 2k_1$  условие синхронизма.



$$C_1 = \frac{C_0}{n(u_1)} = C_2 = \frac{C_0}{n(u_2)}$$

слабая дисперсия,

лучики сильно вырезают или кристаллики.

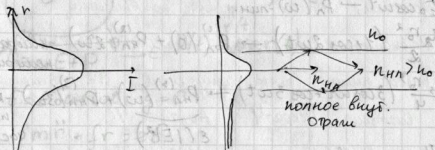
Кубическая среда:  $\epsilon = \epsilon_n + \epsilon_{nn} (|E|^2)$

$$n = n_n + \frac{n_{nn}}{2} (|E|^2)$$

$$\epsilon = (n_n (1 + \frac{n_{nn}}{n_n})^2)^2 \Rightarrow \epsilon_{nn} = 2 n_n$$

или  $n_{nn} \approx n_n^2 \cdot |E|^2 = n_n^2 I \Rightarrow$

$n$  больше там, где больше  $I$ .



$\Rightarrow$  лазер. пучок создает сам себе ваканод

$\Rightarrow$  эффект самофокусировки

$$\text{дик } \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{2k^2}{n_0} n_{nn} |A|^2 A$$

дифракция  $\rightarrow$  увеличивает размер пучка  
 самофокусировка  $\rightarrow$  сжимает пучок.

эффект Керровской самофокусировки

Внешнее уравнение Шредингера.

$$\frac{\partial}{\partial z} \int |A|^2 dx dy = 0 \quad \text{энергия сохраняется.}$$

24.10

§ 7.1. Формула

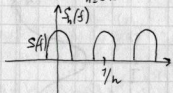
Котельникова - Шеннона.

$$\xi(t) \Rightarrow \xi_h(t) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi(h_j) \delta(t - h_j)$$

$$\xi_h(t) = \xi(t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - h_j) h$$

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) g(x) dx = g(a) \right]$$

$$S_h(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - \frac{n}{h}), \text{ где } S(f) \div \xi(t)$$



$$f_N = \frac{1}{2} h,$$

$$d_N = 2h$$

$$1 \text{ } f_{\max} \leq f_N, \text{ где } S(f) = \begin{cases} \neq 0 & |f| < f_N \\ 0 & |f| > f_N \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(f) = S_h(f) \overline{\Pi}(f), \text{ где } \overline{\Pi}(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_N \\ 0, & |f| > f_N \end{cases}$$

$$\xi(t) \div S_h(f) \overline{\Pi}(f)$$

$$\xi(t) = \xi_h(t) \overline{\Pi}(t), \quad \Pi(t) \div \overline{\Pi}(f)$$

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Pi}(f) e^{-2\pi i f t} df = \dots = \frac{1}{h} \text{sinc} \frac{\pi t}{h}$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\nu) \cdot \xi_h(t - \nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\sin \frac{\pi \nu}{2}}{\frac{\pi \nu}{2}} \xi(t - \nu) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - h_j - \nu) h d\nu$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi(t-h_j)}{h}}{\frac{\pi(t-h_j)}{h}} \cdot \xi(h_j)$$

30

из пропущенного.

$\xi(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi(h_j) \cdot \text{sinc}(\frac{t}{h} - \pi j)$  - формула Шеннона  
при  $f_{\max} \leq \frac{1}{2h} = f_N$ .

7.2 Связь функции и спектра при дискретизации.

$$\begin{array}{ccc} \xi(t) & \div & S(f) \\ \downarrow t - h_j & & \downarrow f - \Delta f \cdot n \\ \xi_h(t) & \xrightarrow[\text{спектра}]{\text{периодизация}} & S_h(n) \end{array}$$

периодизация функции

$$\xi(t) = \xi(t \pm T) \quad S_h(f) = S_h(f \pm \frac{1}{h}), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\xi_h(j) = \xi_h(j \pm N) \quad S_h(n) = S_h(n \pm \Phi)$$

$$N = T/h \quad \Phi = 1/h \cdot \frac{1}{\Delta f} = \frac{T}{h} = N$$

$$\xi_h(j) = \xi_h(j \pm N) \div S_h(n) = S_h(n \pm N)$$

7.4. Формулы дискретного преобразования Фурье.

$$\xi(j) \div S(n), \quad j, n = \overline{0, N-1}$$

КАФ:  $S(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi(j) W_N^{-nj}$ ,  $W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$

$\uparrow$   
n-ая гармоника в j-ой точке массива из N точек

$$S(n \pm N) = S(n)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{-nj} W_N^{mj} = \begin{cases} N, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \begin{array}{l} \text{ортогональность} \\ \text{гармоник} \end{array}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nj} W_N^{nk} = \begin{cases} N, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

кка:  $\xi(j) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) W_N^{nj}, j = \overline{0, N-1}$

$$\xi(j) \div S(n)$$

теор. запазд:  $\xi(j-k) \div S(n) W_N^{-kn}$

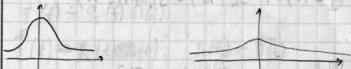
теор. шумы:  $\xi(j) W_N^{mj} \div S(n-m)$

$$\xi_1(j) \xi_2(j) \div S_1(n) * S_2(n)$$

$$S_1(n) * S_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} S_1(\ell) S_2(n-\ell)$$

### § 7.5 Практика ДПФ

$$\xi(t) = A e^{-t^2/\theta^2} \div S(f) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \theta e^{-\pi^2 \theta^2 f^2}$$



1)  $h \sim \theta, f_N \sim \frac{1}{\theta}$

$$\int S(f_N) = e^{-25} S(f=0)$$

м.е.  $\pi^2 \theta^2 f_N^2 = 25 \Rightarrow f_N = \frac{5}{\pi \theta}$

$$h = \frac{1}{2f_N} = \frac{\pi \theta}{10} \approx 0,3 \theta$$

2) T-?

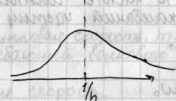
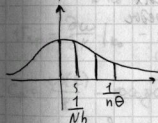
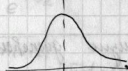
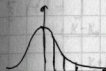
$$\int \xi(T) = e^{-25} \xi(t=0)$$

$$\frac{T^2}{\theta^2} = 25 \Rightarrow T = 5\theta$$

3) N-?

$$N = \frac{T}{h} = \frac{5\theta}{\pi \theta} \cdot 10 = \frac{50}{\pi} \approx 16 \text{ отсчетов}$$

$$N_\theta = \frac{\theta}{h} = \frac{\theta}{\pi \theta} \cdot 10 = \frac{10}{\pi} \approx 3$$



$$Q \sim N^2$$

БПФ:  $Q_{БПФ} \sim 2N \log_2 N$ , обычно  $N = 2^P$

## ГЛАВА 3. Дисперсия

### § 8.1 Концепция дисперсии

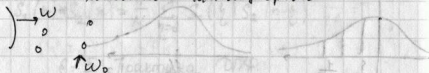
- Изменение формы импульсов при распространении в средах.

$$C_{\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} C(d) \\ C(\omega) \end{array} \right., \text{ т.е. не const}$$

$$C_{\varphi} = \frac{\omega}{k}, \quad \omega = \omega(k) = C(k) \cdot k$$

1) Внешний механизм дисперсии:

$\omega \approx \omega_0$  - частота колебаний бузика к частоте собственных колебаний частиц среды



2) Пространственный механизм дисперсии

$d \sim h$  - длина волны бузика к характерному размеру решетки

8.1. Первое приближение теории дисперсии

$$a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)}$$

$$k \in [k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k], \quad \omega \in [\omega_0 - \Delta \omega, \omega_0 + \Delta \omega]$$

$$\omega_0 = \omega(k_0)$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0}, \frac{\Delta k}{k_0} \ll 1$$

$$\text{волновой пакет: } \xi(t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk$$

$$\xi(t) = \underbrace{A(x,t)}_{\text{огибающая}} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \dots$$

$$\xi(t) = \int_{k-k_0}^{k+k_0} a(k) e^{i \left( \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k-k_0) - x \right)} dk \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

$$A(x,t) = \int_{k-k_0}^{k+k_0} a(k) e^{i(\nu_{gr} t - x)(k-k_0)} dk$$

$\nu_{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}$  - групповая скорость, т.е. скорость огибающей волнового пакета.

$$C_{\varphi} = \frac{\omega(k)}{k} - \text{фазовая скорость.}$$

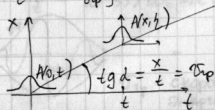
8.3 Уравнение переноса для  $f(x,t)$ .

$$f(x,t) = f(\nu_{gr} t - x)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu_{gr} \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x,t) = 0$$

$$\{x,t\} \rightarrow \{x' = x, \quad t' = t - \frac{x}{\nu_{gr}}\}$$

$$\frac{\partial A(x',t')}{\partial x'} = 0$$



### 8.4. Нормальная и аномальная дисперсия.

$\omega = \omega(k), c = c(d), n = n(\omega), n = n(d)$

$c = \frac{\omega(k)}{k}, \omega(k) = c(k) \cdot k$

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c(k) + k \frac{\partial c(k)}{\partial k} = c(d) + k \frac{\partial c}{\partial d} \frac{d}{k}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}, dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda, \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$

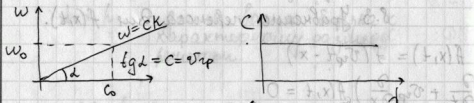
$v_{gr} = c(d) + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial c}{\partial d} \cdot \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)$

$v_{gr} = c(d) - d \frac{\partial c(d)}{\partial d}$

$n(d) = \frac{c_0}{c(d)}$

1) Нет дисперсии:

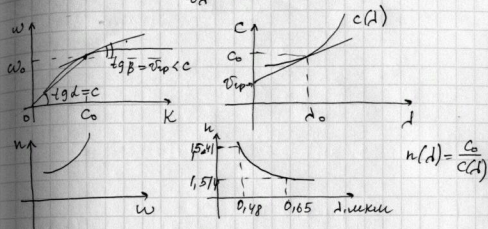
$c(d) = \text{const} \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}, \omega = ck$



Аномальная дисперсия:  $n(\omega), n(d)$

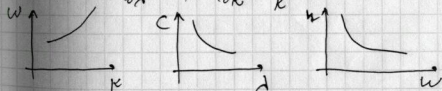
### 2) Нормальная дисперсия

$v_{gr} < c \left\{ \begin{array}{l} \text{или } \frac{\partial \omega}{\partial k} < \frac{\omega}{k} \\ \text{или } \frac{\partial c}{\partial d} > 0. \end{array} \right.$



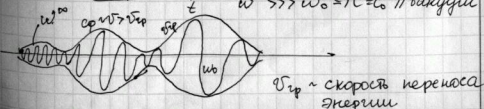
### 3) Аномальная дисперсия

$v_{gr} > c, \frac{\partial c}{\partial d} < 0, \frac{\partial \omega}{\partial k} > \frac{\omega}{k}$



Первое приближение работает, если  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (k - k_0)^2 \ll \frac{\partial \omega}{\partial k} (k - k_0)$

Пример.  $\xi(z)$  где  $\frac{\partial \omega}{\partial \omega} \sim 1$ , т.е. не мало  $\omega^\infty \gg \omega_0 \Rightarrow c = c_0$  // вакууму



если  $\lambda \ll a, b \Rightarrow$  дисперсия шаша

при  $\lambda \approx a, b$  возникает пространственная дисперсия

21.11.2006.

Лекция 10

§ 10. Временная дисперсия.

$\lambda = 0,36 \text{ мкм} \div 0,76 \text{ мкм} \approx 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$   
 фиолет      темно-крас.

$a = \{ \text{порядок структуры} \} = 10^{-8} \text{ см} = 10^{-10} \text{ м}$

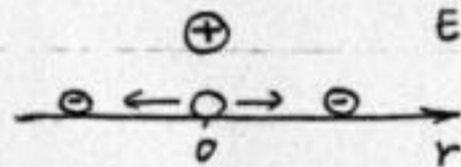
$\lambda \gg a$

$n(\lambda) = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$       Ф-ла Коши

10.1. Электронная теория дисперсии.

Приближения:

- атома неполярна, т.е. при  $E=0$   $p=0$  (дипольный момент)
- один электрон у атома  $\rightarrow$  оптический  $\pi$ -и яви. асиметрично
- смещается только электрон, а яон неподвижен



- атомы одинаковы, концентрации шаша и колебания электронов независимы

при  $E \neq 0$   $\downarrow$  дипольный момент  
 $p = q r \Rightarrow P = N p$ ,  $N$  - концентрация  
 средняя плотность поляризации,

$\begin{cases} D = \epsilon \epsilon_0 E \\ D = \epsilon_0 E + P \end{cases} \Rightarrow \epsilon = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} \Rightarrow \epsilon = 1 + \frac{N q r}{\epsilon_0 E}$

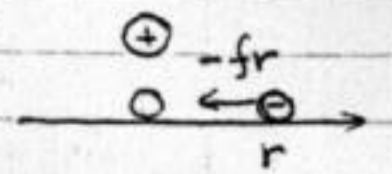
т.к.  $E = E_0 e^{i \omega t}$ , то и  $r = r_0(\omega) e^{i \omega t}$

отсюда  $\epsilon = \epsilon(\omega) = 1 + \frac{N q r(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}$ ;  $n^2 = \epsilon \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{N q r(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}$

$D$ -вектор электр. индукции  
 $E$ -ди электр. поле

$\Rightarrow$  временная зависимость

- $\exists$  возвращающая сила, пропорц смещению  $(-fr)$
- $\exists$  тормозящая сила  $(-gr\dot{r})$



$m \ddot{r} = -fr - gr\dot{r} + q E(t)$

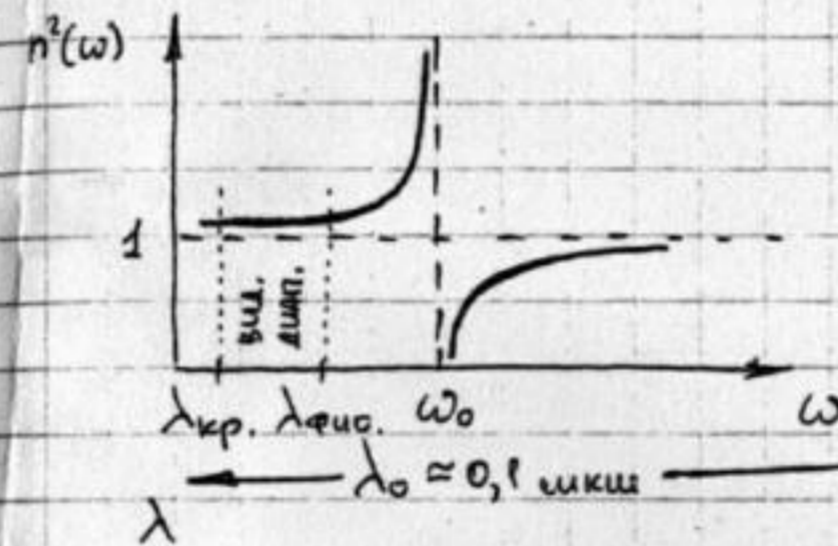
$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{q}{m} E(t)$ ;  $\gamma = \frac{g}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$ .

ищем  $r$  в виде  $r = r_0 e^{i \omega t}$

$(-\omega^2 + i \omega \gamma + \omega_0^2) r_0 e^{i \omega t} = \frac{q}{m} E_0 e^{i \omega t}$

$r_0 = \frac{E_0 q / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega \gamma} \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{N q^2 / (m \epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega \gamma}$

$\exists$  затухание нет, т.е.  $\gamma = 0$        $n^2 = 1 + \frac{N q^2 / (m \epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2}$



$\frac{dn}{d\omega} > 0 \Rightarrow$  нормальная дисперсия

$\omega_{\text{виг}} \ll \omega_0$

$n^2 = 1 + \frac{N q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = 1 + \frac{N q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = 1 + \frac{N q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2} \left( 1 + B \frac{1}{\lambda^2} \right)$   
 $\parallel \omega \sim \frac{1}{\lambda^2}$

$\Rightarrow$  Ф. Коши верна при  $\omega$  далеко от  $\omega_0$

10.2. Аномальная дисперсия.

$\gamma \neq 0$ ;  $n^2 = 1 + \frac{N q^2 / (m \epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega \gamma}$

$n \rightarrow n' = n(1 - i \alpha)$

$n^2(1 - \alpha^2) - 2i n \alpha = 1 + \frac{N q^2 / (m \epsilon_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \omega \gamma}$

$$E(x,t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} n \quad ; \quad k \rightarrow k' = \frac{\omega}{c_0} n' = \frac{\omega}{c_0} n - i \frac{\omega}{c_0} n \alpha = k - i \alpha, \quad \alpha = \frac{\omega}{c_0} n \alpha$$

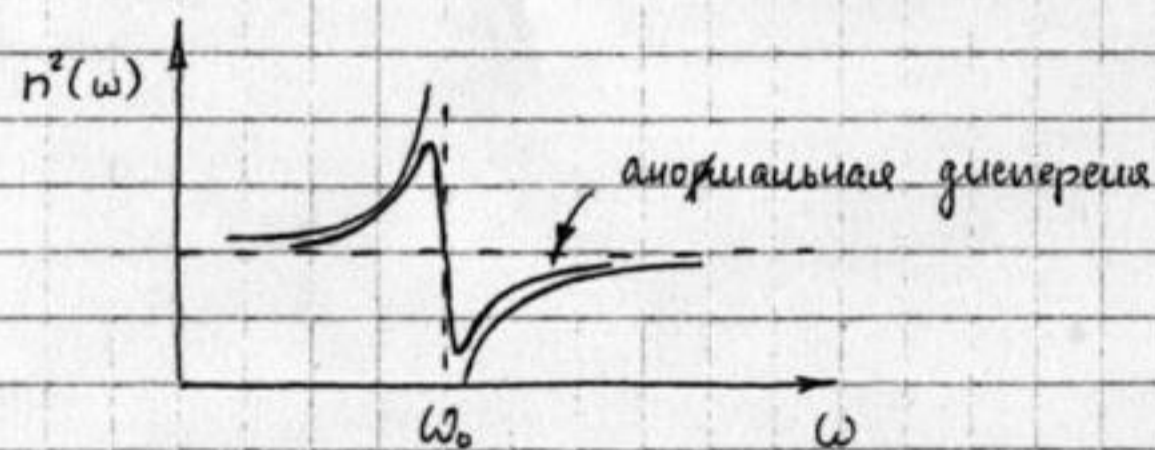
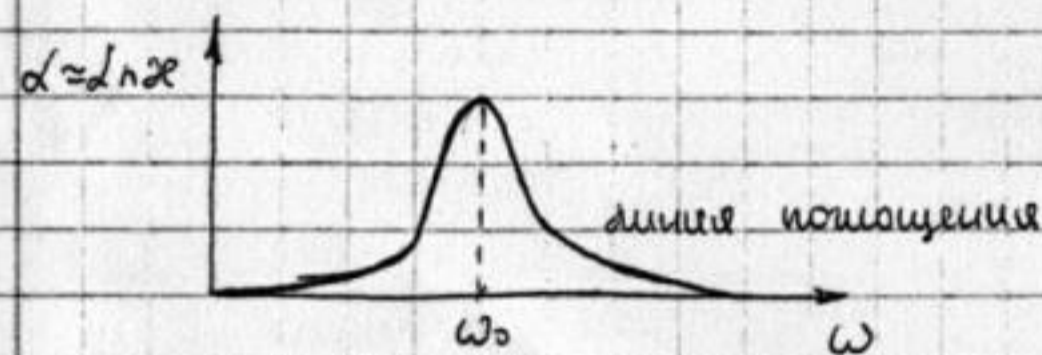
$$E_{k \rightarrow k'}(x,t) = E_0 e^{-i \alpha x} e^{i(\omega t - kx)}$$

$\alpha$  и  $n$  отпуг,  $n^2(1-\alpha^2)^2$ , ибо  $\alpha \ll 1$   
 $\alpha$  и  $\alpha \rightarrow -\alpha n \alpha$

$$2n\alpha = \frac{Nq^2/(m\epsilon_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2} \cdot \gamma \omega$$

$$n^2(1-\alpha^2) = 1 + \frac{Nq^2/(m\epsilon_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

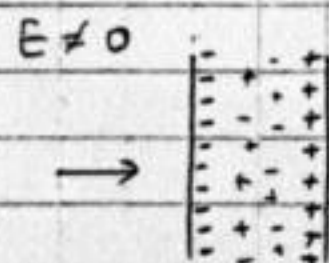
помощение имеет резонансный вид



### 10.3. Дисперсия в плазме.

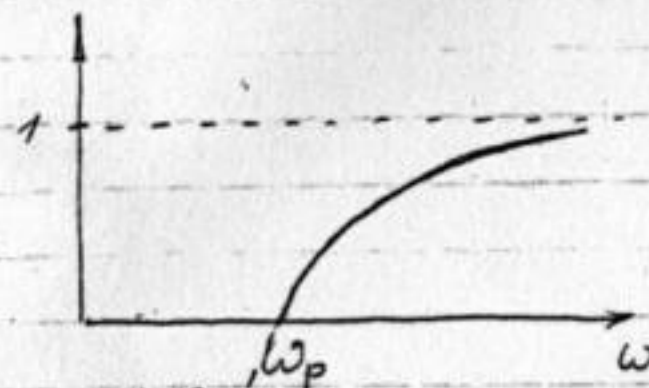
Эн. и свободен  $\rightarrow f=0, g=0 \Rightarrow \omega_0$

$$n^2 = 1 - \frac{Nq^2}{m\epsilon_0 \omega^2} \quad ; \quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad ; \quad \omega_p \text{ — пласм. частота} =$$



$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$= \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}$$



$n$ -индекс,  
плазма не  
прозрачна

$$n = \frac{c_0}{c_{\text{ф}}} \leftarrow \text{сх-ты в вакууме}$$

$$c_{\text{ф}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c_0$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad ; \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c_0^2$$

$$2\omega d\omega = 2c_0^2 k dk$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{c_0^2 k}{\omega} = c_0 \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$$

$\omega < \omega_p$  — попомение

$\omega > \omega_p$  — норм. дисперсия  $n < 1$

$\omega \gg \omega_p$  — дисперсия нем  $n = 1$

В ионосфере  $N \sim 10^6 \text{ см}^{-3}$  электронов, но там не менее это плазма на  $\lambda = 10 \div 50 \text{ м}$  имеет место попоме внутр. отраж.

В космосе  $N \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$ , но дисперсия все равно имеет место быть

## ГЛАВА 4. Интерференция волн.

Перераспределение интенсивности в пр-ве при наложении двух или более волн.

### § 11. Двухлучевая интерференция.

$$\xi_p(t) = \xi_{1p}(t) + \xi_{2p}(t)$$

$$I = \langle S \rangle_t \quad ; \quad S = \begin{cases} p v^2(t) \cdot c & \text{— звук} \\ \epsilon \epsilon_0 E^2(t) \cdot c & \text{— поток энергии} \\ & \text{— э/м} \end{cases}$$

объемная плотность

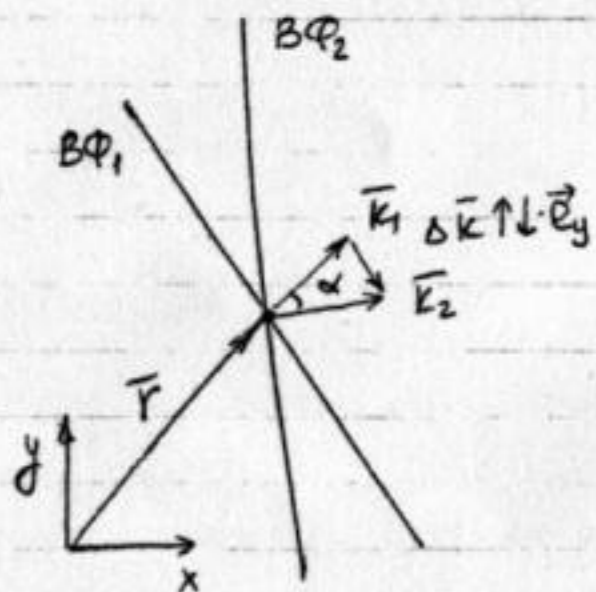
$$I \sim \langle |\xi|^2 \rangle_t \quad ; \quad I = \langle \xi_p(t) \xi_p^*(t) \rangle_t$$

11.1. Интерференция суперпозиции двух плоских волн.

$$\xi_1(\vec{r}, t) = a_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})}$$

$$\xi_2(\vec{r}, t) = a_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})}$$

- частоты совпадают -  $\omega$
- $|k_1| = |k_2|$
- $a_1 = a_2 = a$



$$I_p = \langle (a_1 e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}} + a_2 e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}})(a_1 e^{i\vec{k}_1 \vec{r}} + a_2 e^{i\vec{k}_2 \vec{r}}) \rangle$$

•  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  нал. фазы ичевые

$$I_{1p} = a_1^2 = \langle \xi_1 \xi_1^* \rangle_t, \quad I_{2p} = a_2^2$$

$$I_p = I_{1p} + I_{2p} + a_1 a_2 (e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}} + e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}})$$

$$\Delta \varphi = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} = (\Delta \vec{k}, \vec{r})$$

$$I_p = I_{1p} + I_{2p} + 2\sqrt{I_{1p} I_{2p}} \cos \Delta \varphi$$

Если  $\Delta \varphi = 2m\pi$ , то  $I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} > I_1 + I_2$   
 ⇒ интерференционный максимум

Если  $\Delta \varphi = (2m+1)\pi$ ,  $I_p = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < I_1 + I_2$   
 ⇒ минимум

$$\Delta \varphi = 2m\pi \quad ; \quad \begin{cases} \Delta k y_m = 2\pi m & - m\text{-ый максимум} \\ \Delta k y_{m-1} = 2\pi(m-1) \end{cases}$$

$$\Delta k (y_m - y_{m-1}) = 2\pi$$

$y_m - y_{m-1} = \Delta y$  - ширина интерференц. полосы ≡ расстояние между максимумами

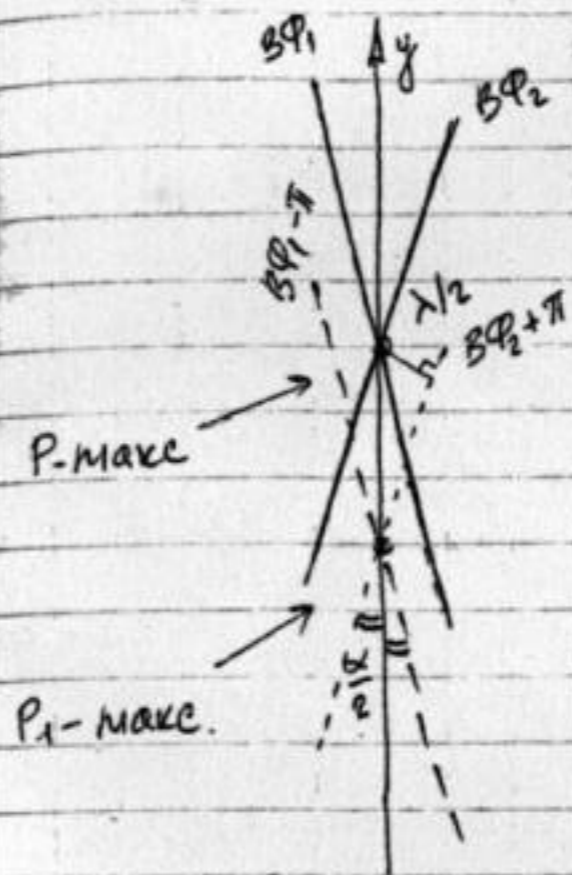
$$\Delta y = \frac{2\pi}{\Delta k} \quad ; \quad \Delta y = \frac{2\pi}{2k \sin \frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1, \quad |\Delta \vec{k}| = \frac{\Delta k}{2} = k \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta k = 2k \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \text{ - ширина интерф. полосы}$$

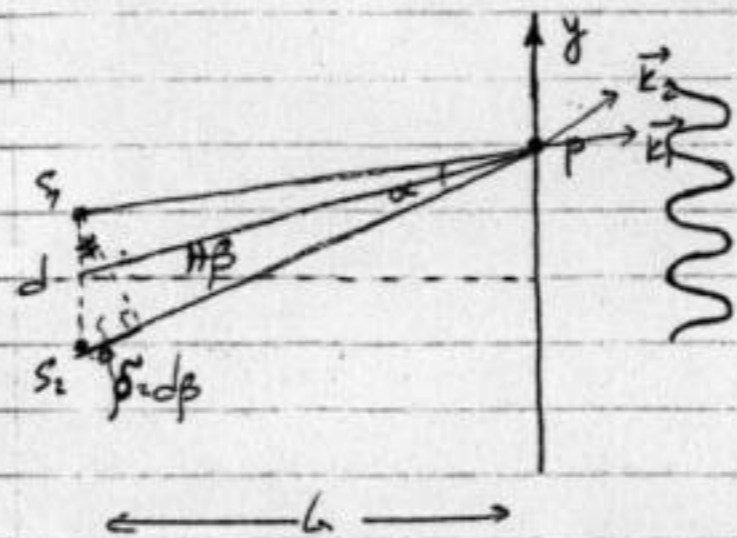
$$\text{при } \alpha < 1 \Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda}{\alpha}$$



$$P P_1 = \Delta y = \frac{\lambda/2}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

11.2. Угол зрения волн от точечного источника.



$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$L \gg d, y_p \gg \lambda$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

$$\Delta \varphi = k \cdot \Delta y, \quad \Delta = \frac{d}{L}$$

$$\Delta \varphi = \frac{k y d}{L} \quad ; \quad \beta = \frac{y}{L}$$

$$\Delta \varphi = k \cdot d \cdot \beta \approx k \cdot \delta; \quad \delta = (s_2 p - s_1 p)$$

разность хода

$$I_1 = I_2 = I$$

$$I_p = 2I(1 + \cos \Delta \varphi) = 2I(1 + \cos k\delta) = 2I(1 + \cos \frac{k d y}{L})$$

Макс:  $\Delta \varphi = 2m\pi$  или  $\delta = 2m \frac{\lambda}{2}$ ;  $\frac{k d y_{\max}}{L} = 2m\pi \Rightarrow y_{\max} = \frac{\lambda L}{d} m$   
 (челное число полуволн.)

