В литературе по приближённому анализу книга Л. В. Канторовича и В. И. Крылова занимает одно из виднейших мест, и выход в свет её третьего издания следует приветствовать.

С. Михлин

И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений. Гостехиздат, 1948, стр. 120, 10 000 экз., цена 2 р. 45 к.

Рецензируемая книга написана И. Г. Петровским на основе курса лекций, читанных им в Московском государственном университете в 1946 г. Книга состоит из трёх глав и добавления. В первой главе рассмотрены уравнения Фредгольма, во второй— уравнения Вольтерра и, наконец, в третьей—теория Гильберта-Шмидта.

«Лекции» И. Г. Петровского базируются на идеях функционального анализа, и это является существенным преимуществом «Лекций» по сравнению с широко распространёнными у нас курсами И. И. Привалова, Ловитта и др. Следует отметить, что по существующим университетским программам функциональный анализ не входит ни в один обязательный курс, и поэтому весьма ценно то, что «Лекции» знакомят студентов, хотя бы в некоторой мере, с новым для них кругом идей.

И. Г. Петровский строит теорию Фредгольма, исходя из возможности аппроксимации данного оператора Фредгольма конечномерным, или, что то же, аппроксимации данного ядра вырожденным. Автор ограничивается случаем, когда ядро равномерно непрерывно в некоторой конечной области d-мерного евклидова пространства; в этом случае аппроксимация возможна в силу теоремы Вейерштрасса.

В математической физике чаще приходится иметь дело с уравнениями, в которых интеграл берётся по замкнутой поверхности. Аппроксимация полиномом непрерывной функции, заданной на поверхности, требует предварительного непрерывного продолжения этой функции на некоторую область пространства; об этом, может быть, следовало бы как-то упомянуть.

Весьма важным моментом в изложении И. Г. Петровского является постоянно подчёркиваемая им аналогия между теорией интегральных уравнений и теорией линейных алгебраических систем.

В главе 1 рассмотрены также уравнения с ядром вида

$$K(P, Q) = \frac{K^*(P, Q)}{\overline{PQ}^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < d,$$

где $K^*(P, Q)$—равномерно-непрерывная функция обеих точек P и Q в рассматриваемой области. Теория этих уравнений дана И. Г. Петровским с большой простотой и изяществом.

Очень короткая глава 2 состоит из одного параграфа, содержащего обычную теорию уравнений Вольтерра с одной независимой переменной. В начале главы даётся общее определение уравнения Вольтерра в d-мерном пространстве. Согласно этому определению ядро $K(P, Q)$ уравнения Вольтерра отлично от нуля, только если Q лежит в параллелепипеде, образованном координатными плоскостями и плоскостями, им параллельными и проходящими через точку P. Определение И. Г. Петровского кажется мне недостаточным; под него не подходит, например, тот простейший случай, когда область интегрирования ограничена конусом с вершиной P и плоскостью, нормальной к его оси.

В главе 3 изложена теория Гильберта-Шмидта. Основная теорема о существовании характеристического числа доказывается, исходя из вполне-непрерывности оператора Фредгольма и экстремальных свойств соответствующего квадратичного функционала. Доказательства остальных теорем проводятся обычными способами.

Основная теорема о существовании характеристического числа доказывается для ядер вида

$$K(P, Q) = \frac{K^*(P,Q)}{\overline{PQ}^{\alpha}},$$

где $K^*(P, Q)$ — симметрично и равномерно-непрерывно в рассматриваемой области, и $0 \leqslant \alpha < \frac{d}{2}$. По поводу этих допущений следует заметить, что они не всегда достаточны для приложений; так, задача о собственных числах оператора Лапласа для конечной области d-мерного евклидова пространства приводит к интегральному уравнению, ядро которого не удовлетворяет условию И. Г. Петровского при $d \geqslant 4$. С другой стороны, если теорема о существовании характеристического числа доказана хотя бы для равномерно-непрерывных ядер, то нетрудно распространить её на ядра упомянутого выше типа при $0 < \alpha < d$.

Большой интерес для читателя, ещё не знакомого с понятием абстрактного пространства, представляет проведённое в § 11 сопоставление геометрических свойств конечномерного евклидова пространства и пространства квадратично-интегрируемых функций.

Добавление состоит из двух параграфов. В одном из них дано приведение квадратичной формы к каноническому виду посредством ортогонального преобразования, во втором намечена теория интегральных уравнений в классе функций, квадратично-суммируемых по Лебегу.

Большим достоинством «Лекций», как уже было отмечено, является использование идей функционального анализа в университетском курсе интегральных уравнений. Ясность и геометрическая наглядность изложения делает материал интересным и сравнительно легко доступным для студента. Хотя в книге совершенно не затронуты вопросы приложений, автор каждый раз пользуется случаем, чтобы указать на то, что тот или иной момент теории может быть использован для численного решения интегральных уравнений.

Известную незаконченность придаёт «Лекциям» отсутствие какого бы то ни было упоминания о системах интегральных уравнений.

В «Лекциях» иногда встречаются мелкие упущения редакционного характера, которые необходимо будет исправить в последующих изданиях. Здесь я отмечу одно из них: определение интегрального уравнения как уравнения вида

$$F\left(x,\ \varphi(x),\ \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds\right) = 0$$

—недостаточно полное. Под это определение не подходят, например, уравнения вида (ζ—неизвестная функция)

$$\sum_{m,\, n,\, j} \int \cdots \int K_{mnj}(x, x_1, \ldots, x_\rho)\, \zeta^{\alpha}(x)\, \zeta^{\alpha_1}(x_1) \ldots \zeta^{\alpha_\rho}(x_\rho) \times$$
$$\times\, v^{\beta}(x)\, v^{\beta_1}(x_1) \ldots v^{\beta_\rho}(x_\rho)\, dx_1 \ldots dx_\rho = 0,$$
$$\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\rho = m, \quad \beta + \beta_1 + \ldots + \beta_\rho = n,$$

изученные в известной книге Лихтенштейна, или «нагружённые» интегральные уравнения

$$\varphi(P) - \int_\Omega K_1(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\Omega - \int_S K_2(P, Q)\, \varphi(Q)\, dS = f(P),$$

где S—поверхность области Ω.

Богатые идеями и превосходно написанные «Лекции» И. Г. Петровского будут очень полезны студентам и молодым научным работникам.

С. Михлин