ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

ЛЕКЦИЯ #01

Шестаков Олег Владимирович.

Книжки:
1. Королев В.Ю. ТВ и МС. 2006
2. Королев В.Ю. Бенинг В.Б. Шоргин С.Я. Мат. основы теории риска. 2007
3. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотич. процессов...
4. Феллер. В. ТВ и её приложения (1984)

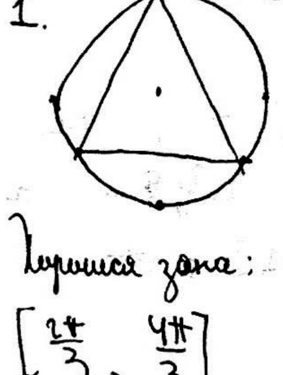
<u>Опр.</u> Вер. модель – мат. модель реального явления, содержащая элементы случайного.

↳ информация недоступна (измерения дороги) или носит природный характер (квант. физика)

Условия адекватности [модели]:
1. Непредсказуемость исхода.
2. Воспроизводимость [макро]условий.
3. Устойчивость частот. $\left(\frac{n(A)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P \right)$

<u>Парадокс Бертрана.</u> С какой вер-ю длина <u>наудачу</u> (некорректно) выбранной хорды в окр-ти будет больше длины стороны вписанного тр-ка?

1.



Хорошая зона: от $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

$P = \frac{1}{3}$

Ω – дуга

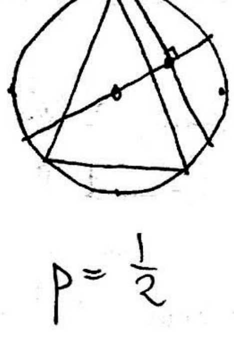
2.

((Сущ. ровно одна хорда, что т. – середина)

$P = \frac{1}{4}$

Ω – круг

3.



Наудачу – точку на диаметре. Наша хорда $\perp$ ей.

$P = \frac{1}{2}$

Ω – диаметр.

Формализация модели - построение вер-го пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- Ω - мн-во элементарных исходов
- $\mathcal{A}$ - сигма-алгебра подмн-в Ω:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

- $\mathbb{P}$ - вер-я мера:

1) $\mathbb{P}(A) \geqslant 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$
2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

- Хотим определить вер-ть на $[0, 1]$.

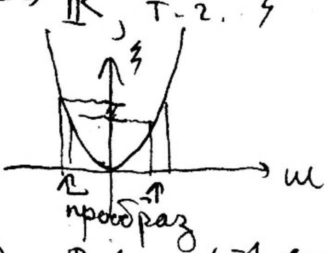
Положим $\mathbb{P}([a, b)) = b - a$. Но мы хотим получить вер-ть на всех "вменяемых" подмн-х. Мн-во всех $[a, b)$ - полуалгебра. Минимальная сигма-алгебра, содержащая все $[a, b)$, назовем (обозначим) $\mathcal{B}([a, b])$. - борелевская сигма-алгебра.

<u>Теорема.</u> (о прод. меры) $\exists!$ мера μ на ~~[0, 1]~~ б-алгебре $\mathcal{B}([a, b])$ на $[0, 1]$ такая, что $\mu([a, b]) = b - a$

$\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ - борелевская сигма-алгебра на прямой

<u>Опр.</u> Случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, т.ч. $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ (измеримость)

$\xi^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\}$



Таким образом, $\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}$ $\mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\omega : \xi^{-1}(B))$ - корректно.

- Рассмотрим $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$; $\mathbb{P}$-мера.

$\xi(\omega) = \omega$ - это с.в? Нет; $\xi^{-1}([\frac{1}{3}, 1]) = [\frac{1}{3}, 1] \notin \mathcal{A}$.

$\xi(\omega) \equiv 10$ - это с.в.! (Очевидно.)

А если $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{B}}([0, 1])$?

$\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}(\xi \in B)$ - распределение сл. величины.

$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ – функция распределения.

(Как мы помним, $F_\xi(x) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\xi \in B)$.)

1) $F_\xi(x)$ монотонно не убывает.

2) $F_\xi(x)$ принимает значения от 0 до 1.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$.

4) $F_\xi(x)$ непрерывна слева

Виды ф. р.: 1. Дискретные (число скачков не более чем счетно)

2. Абсолютно-непрерывные $\exists$ и п. в. единственна $f_\xi(x) \geq 0$, т. ч. $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\,dx$.

↑ плотность.

3. Сингулярные. Непрерывные, мн-во точек роста имеет меру нуль.

• $\mathbb{P}(\xi \in [a, b]) = ?$ Отметим, что $(-\infty, b) = (-\infty, a) \cup [a, b]$

$$\mathbb{P}(\xi \in (-\infty, b)) = \mathbb{P}(\xi \in (-\infty, a)) + \mathbb{P}(\xi \in [a, b])$$

$$F(b) = F(a) + \mathbb{P}(\xi \in [a, b])$$

Значит, $\mathbb{P}(\xi \in [a, b]) = F(b) - F(a)$

а) Абс.-непр. случай: $\mathbb{P}(\xi \in [a, b]) = \int\limits_a^b f_\xi(v)\,dv$

И вообще, $\mathbb{P}(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(v)\,dv$

б) Дискрет. случай: $\mathbb{P}(\xi \in [a, b]) = \sum\limits_{x_k:\, a \leq x_k \leq b} \mathbb{P}(\xi = x_k)$

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \sum_{x_k \in B} \mathbb{P}(\xi = x_k)$$

В совсем общем случае, $\mathbb{P}(\xi \in B) = \int\limits_B dF_\xi(v)$

Числовые характеристики с. в.

• Модели центра с. в.

1. Математическое ожидание

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x) = \int_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$$

↑ замена переменной

1. Дискр. случай: $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k} x_k \mathbb{P}(\xi = x_k)$ (Ряд сходится абсолютно!)

2. Абс. непр. случай: $\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$

• $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$ и прочие св-ва интеграла

② Медиана с. в.

q-квантиль $F_\xi(x)$ – такое число x_q, что $\mathbb{P}(\xi \leq x_q) \geq q$,
$\mathbb{P}(\xi > x_q) \leq q$.

• Для непр. случая – это решение $F_\xi(x_q) = q$.

• Медиана – квантиль порядка 1/2. Непр. случай: $F_\xi(\operatorname{med}\xi) = \frac{1}{2}$

Медиана сущ. всегда, но не всегда единственна...

$\xi = \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2} \\ 0, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$. $\mathbb{E}\xi = 1/2$, $\operatorname{med}\xi = x \ \forall x \in [0, 1]$

③ Мода с. в.

• Дискр. случай: $\operatorname{mod}\xi = x_k$, т.ч. $\mathbb{P}(\xi = x_k) \geq \mathbb{P}(\xi = x_n) \ \forall n \neq k$.

• Абс. непр. случай: Если $f_\xi(x)$ – кус. непр. ф-я, то $f_\xi(\operatorname{mod}\xi) \geq f_\xi(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 02}}$

Мы живем в т. a, хотим попасть в b: $\overset{a}{\bullet} \quad \overset{b}{\bullet}$

Усредним ф-ю потерь (b – это случ. величина!) $\mathbb{E}(b-a)^2$. Где жить, что бы ф-я потерь была минимальна?

$\mathbb{E}\xi^2 - 2a\mathbb{E}\xi + a^2$; min достигается в т. $\frac{+2\mathbb{E}\xi}{2} = \mathbb{E}\xi$.

А если ф-я потерь имеет вид $|b-a|$? Минимизируем $\mathbb{E}|b-a|$. Покажем, что $\mathbb{E}|\xi - \operatorname{med}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi - a| \ \forall a$.

a) Пусть $\operatorname{med}\xi < a$; $|\xi - a| - |\xi - \operatorname{med}\xi| = \begin{cases} \operatorname{med}\xi - a, & \xi \in [a, +\infty) \\ a - 2\xi + \operatorname{med}\xi, & \xi \in (\operatorname{med}\xi, a) \\ a - \operatorname{med}\xi, & \xi \in (-\infty, \operatorname{med}\xi] \end{cases}$

Во втором случае, $a - 2\xi + \operatorname{med}\xi \geq \operatorname{med}\xi - a$.

$$\mathbb{E}\Big[|\xi - a|\Big] - \mathbb{E}|\xi - \operatorname{med}\xi| \geq \mathbb{E}\Big[|\xi - a| - |\xi - \operatorname{med}\xi|\Big] \geq (\operatorname{med}\xi - a)\,\mathbb{E}\mathbb{1}(\xi \in [a, +\infty)) + (\operatorname{med}\xi - a)\,\mathbb{E}\mathbb{1}(\xi \in (\operatorname{mod}\xi, a)) + (a - \operatorname{med}\xi)\,\mathbb{E}\mathbb{1}(\xi \in (-\infty, \operatorname{med}\xi]) = (\operatorname{med}\xi - a)\big(\mathbb{P}(\xi \geq a) + \mathbb{P}(\operatorname{med}\xi < \xi < a)\big) + (a - \operatorname{med}\xi)\,\mathbb{P}(\xi \leq \operatorname{med}\xi) \overset{0S}{=} (a - \operatorname{med}\xi)\big(\mathbb{P}(\xi \leq \operatorname{med}\xi) - \mathbb{P}(\xi > \operatorname{med}\xi)\big)_{\geq 0}$$ по опр. медианы.

б) $\mathrm{med}\,\xi > a$ — аналогично.

Таким образом, $\mathrm{med}\,\xi$ — решение $\min\limits_a \mathbb{E}|\xi - a|$.

Пример. Пусть ξ — вел. дохода; $\mathbb{P}(\xi \geq x) = e^{-x}$, а мы — аналитики.

а) Мы — проправительственная организация. $E\xi = \int\limits_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1$

б) Мы — умеренная оппозиция. Медиана: $1 - e^{-x} = \frac{1}{2} = \ln 2 \approx 0{,}7\ldots$

в) Мы — революционеры: $\mathrm{mod}\,\xi = 0$.

Мода: выяснение оптимальной длины одежды.

- Модели разброса с. в.

① $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ дисперсия: хорошие аналитические свойства.

$\sqrt{\mathbb{D}\xi}$ — корень из дисперсии (размерность совпадает с ξ — м, кг, л...)

- $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$; $\mathbb{D}\xi \geq 0$, $= 0 \iff \xi \overset{\text{п.в}}{=} \mathrm{const}$; $\mathbb{D}(a\xi) = a^2 \mathbb{D}\xi$

② $\mathbb{E}|\xi - \mathrm{med}\,\xi|$ (в социологии — линейное отклонение от медианы)

③ $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|$ — L_1-метрика (инженерная метрика)

В ②, ③ есть модуль $\Rightarrow$ аналит. св-ва хуже; но они устойчивее к загрязнению, выбросов.

④ Интерквантильный размах. X_q — квантиль порядка q;

$\mathbb{L}\; X_{3/4} - X_{1/4}$

⑤ $\mathrm{med}(|\xi - \mathrm{med}\,\xi|)$ MAD — median absolute deviation

Работает даже тогда, когда моментов нет.

Насколько большая разница $|\mathbb{E}\xi - \mathrm{med}\,\xi| \leq E|\xi - \mathrm{med}\,\xi| \underset{}{\overset{\text{ибо med минимиз.}}{\leq}} \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2} \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

нер. Ляпунова

Независимость

- Незав. событий: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $A, B \in \mathcal{A}$ (стохастическая независимость)

Пример Пусть у нас есть колода из 52 карт; $\mathbb{P}(\text{"достали туз пик"}) \overset{?}{=} \mathbb{P}(\text{"туз"})\,\mathbb{P}(\text{"пик"})$; $\frac{1}{52} = \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{4}$ Независ. есть!

Добавим в колоду джокер: 53 карты; $\frac{1}{53} \neq \frac{4}{53}\cdot\frac{13}{53}$

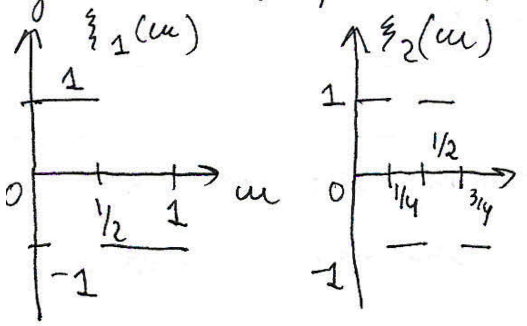
Опр. $A_1, \dots, A_n$ незав. в совокуп-ти, если $\forall\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$

$$\mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n}) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

Из попарной нез-ти нез-ть в совокупности не следует.

Опр. С.в. ξ, η независимы, если $\forall A, B \in \widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}(\xi \in A, \eta \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\eta \in B)$

Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}[0,1]$, $\mathbb{P} = \mu$ (Лебега. Мера Лебега.)



; $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 2$ $(\forall \omega \in \Omega)$

Независимы ли ξ_1 и ξ_2?

$\mathbb{P}(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\xi_1 = 1)\mathbb{P}(\xi_2 = 1)$

$\mathbb{P}(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\xi_1 = 1)\mathbb{P}(\xi_2 = -1)$

$\mathbb{P}(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\xi_1 = -1)\mathbb{P}(\xi_2 = 1)$

$\mathbb{P}(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\xi_1 = -1)\mathbb{P}(\xi_2 = -1)$

Т.е. они независимы.

• Вспомним: $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$. Она линейна по каждому аргументу

$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$.

Если с.в. независимы, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. $\eta \sim R[0, 2\pi]$; $\xi_1 = \cos\eta$, $\xi_2 = \sin\eta$; $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, но $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, но ξ_1 и ξ_2 зависимы. Убедиться в этом.

• Вспомним коэф. корреляции: $\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}}$. Отметим, что $|\rho(\xi, \eta)| \le 1$, и $= 1 \iff \mathbb{P}(\eta = a\xi + b) = 1$

$0 \le \mathbb{E}(x\xi + y\eta)^2 = \mathbb{E}x^2\xi^2 + 2\mathbb{E}xy\xi\eta + \mathbb{E}y^2\eta^2$ $\quad D \le 0$, ч.т.д.

Если в каком-то районе часты пожары, есть много пожарных частей. Из этого не следует, вообще говоря, что чем больше пож. частей, тем больше пожаров :)

ЛЕКЦИЯ № 03

Предельные теоремы теории вероятностей.

Виды сходимостей: 1. Сходимость п. в.: $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, определенные на одном вер. пр-ве, сх-ся п.в, если $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi) = 1$

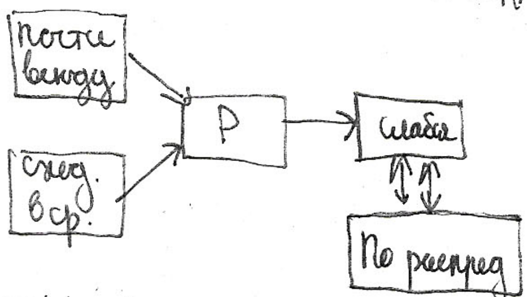
т.е. $\mathbb{P}\left(\omega: \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$.

2. Сходимость по вероятности: $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, опр. на одном вер. пр-ве, сх-ся по вер.: $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

3. Сходимость в среднем порядка $p > 0$: $\lim \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0$. (опред. на одном вер. пр-ве) (Такую сходимость любят инженеры.)

4. Сходимость слабая: $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$, если $\forall$ непр. и огр. ф-ции $\varphi(x)$ имеет место $\int \varphi(x)\, d\mathbb{P}_n \to \int \varphi(x)\, d\mathbb{P}$.

5. По распределению: $F_n(x) \to F(x)$ для $\forall x$, т.ч. $F(x)$ непрерывна в т. x



И, как это не удивительно, стрелок больше нет.

УЗБЧ (в ф. Колмогорова) $X_1, \ldots, X_n$ — норсв, сущ. $\mathbb{E}X_i$; Тогда $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{\infty} X_i \xrightarrow{п.в} a$

Ц.П.Т. $X_1, \ldots, X_n$ — норсв; сущ. $\mathbb{E}X_i = a$, $\mathbb{D}X_i = \sigma^2$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \quad (\text{по } x)$$

То бишь, $\mathbb{P}\left(\sum X_i < x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - na}{\sigma\sqrt{n}}\right)$

Заинтересуемся: с какой скоростью $\varphi(n)$ $z_n = |\overline{X} - a|$?

(Скорость в том смысле, что $\frac{Z_n}{\tau(n)}$ имеет нетрив. предел)

Из ЦПТ видно, что логично взять $\tau(n) = 1/\sqrt{n}$. Посмотрим:

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}|\overline{X}-a|<\varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon<\sqrt{n}(\overline{X}-a)<\varepsilon) = \mathbb{P}\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} < \frac{\sum X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\text{примерно}} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1$$ — действительно, предел нетривиальный.

А какова скорость сходимости в ЦПТ? Пусть $\mu^3 = \mathbb{E}|X_i - a|^3$; Тогда $\left|\mathbb{P}\left(\sum X_i < x\right) - \Phi\left(\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{C_0\mu^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$. Известно, что $0{,}4 < C_0 < 0.7003$ (Неравенство Берри-Эссена). А если не требовать ~~сход-ти~~ суш. μ^3, то сход-ть может быть сколь угодно медленной.

Плотность $\mathcal{N}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$, хвосты очень легкие. При расчете плазмы в стеллараторе нормальным распределением пользоваться! К тому же, нельзя менять частичную сумму на нормальное: мы хотим сделать распределение таким, каким оно по сути, по природе быть не может.

Еще один миф о норм. распределении: $\mathbb{P}(|X-a|<3\sigma) \approx 0.997$. Почти всегда так: $a-3\sigma < X < a+3\sigma$. Другие распределения, вообще-то говоря, не такие: $\mathbb{P}(|X-a|<3\sigma) \approx 0.887$ (есть дисперсия + нер-во Чебышёва: $\mathbb{P}(|X-a|>\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}X}{\varepsilon^2}$, $\mathbb{P}(|X-a|>3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$. Т.е. $\mathbb{P}(|X-a|<\varepsilon) \geq \frac{8}{9}$

Попробуем обобщить ЦПТ. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — н.с.в; $\mathbb{E}X_i = a_i$; $\mathbb{D}X_i = \sigma_i^2$; $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$; $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$; $F_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum X_i - A_n}{B_n} < x\right)$. Пусть выполнено условие: $\forall t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i|>tB_n} |x-a_i|^2\, dF_i(x) = 0$$ (условие Линдеберга)

<u>ЦПТ</u> (Линдеберг-Феллер) Если есть У. Л., то $|F_n(x) - \Phi(x)| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$$ (условие равномерной предельной малости.

Рассмотрим $\frac{b_k^2}{B_n^2}$, $\int\limits_{|x-a_k|>tB_n} |x-a_k|^2\, dF_n(x) + \int\limits_{|x-a_n|\leq tB_n} |x-a_n|^2 dF_k(x)$

$\int\limits_{|x-a_k|>tB_n} \leq \sum_k \int$ ↓ только нер.; $\int\limits_{|x-a_n|\leq tB_n} \leq t B_n^2$

$$\frac{b_k^2}{B_n^2} \leq \underbrace{\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>t\cdot B_n} |x-a_k|^2 dF_k}_{\leq \frac{\varepsilon^2}{2}} + t^2$$

$\leq \frac{\varepsilon^2}{2}$ по условию Линдеберга.

Т.е. дисперсия k-го слагаемого мала по сравнению со всей суммой.

Пусть существует третий момент: $M_i^3 = \mathbb{E}|x-a_i|^3$; $M_n^3 = \sum_{i=1}^n M_i^3$

Тогда $\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{|\dots|>tB_n} |x-a_k|^2 dF_k(x) \leq \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{|x-a_k|>tB_n} |x-a_k|^2 \frac{|x-a_k|}{tB_n} dF_k(x)$:

$$= \frac{1}{B_n^3 t}\sum_{k=1}^n \int\limits_{|\dots|>tB_n} |x-a_k|^3 dF_k(x) \leq \frac{M_n^3}{B_n^3 t}$$

(Ибо $\frac{|x-a_k|}{tB_n} > 1$)

к замене на всю прямую.

Условие Ляпунова: если $\frac{M_n^3}{B_n^3 t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то Ц.П.Т.!

(Т.е. вклады отдельных малы.)

Рассмотрим $\mathbb{P}(|X_k - a_k| > \varepsilon B_n)\cdot \varepsilon^2 B_n^2 = \varepsilon^2 B_n \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} dF_k(x) =$

$$= \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} \varepsilon^2 B_n^2\, dF_k(x) \leq \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} |x-a_k|^2 dF_k(x)$$

$$\mathbb{P}(|X_k - a_k| > \varepsilon B_n) \leq \frac{1}{B_n^2 \varepsilon^2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} |x-a_k|^2 dF_k(x) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ условие равном. пред. малости (следует из условия Линдеберга).

__Теорема.__ Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ с нул. м.о. и 1 дисперсией схд. к норм. и есть условие р. пред. малости $\Rightarrow$ вып. условие Условие Линдеберга.

ЛЕКЦИЯ #04

Вспомним нер-во Берри-Эссена: $\left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum x_i - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \phi(x)\right| \leq \underbrace{\frac{C_0 \mu^3}{\sigma^3\sqrt{n}}}_{L_n}$

где $0{,}4 < C_0 \leq 0{,}7003$. Посмотрим на $|\overline{X} - a| < \varepsilon$.

$$\mathbb{P}(|\overline{X} - a| < \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - a| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx \phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} - 1\right) \geq \gamma; \ \phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1+\gamma}{2}; \ \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} = U_{\frac{1+\gamma}{2}} \text{ (квантиль)},$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{\frac{1+\gamma}{2}}; \ 2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 - 2L_n \leq \mathbb{P}(|\overline{X} - a| < \varepsilon) \leq 2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 + 2L_n$$

$2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 - 2L \geq \gamma \Rightarrow U_{\frac{1+\gamma}{2}} + L_n$; $L_n > \frac{0{,}4}{\sqrt{n}}$. Возможно,

$\frac{1+\gamma}{2} + \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} > 1$; $\frac{0{,}8}{\sqrt{n}} > 1 - \gamma$; $n < \frac{0.64}{(1-\gamma)^2}$ – и точности локализации нет...

Пример. $X_i \sim \begin{cases} 1, & \text{с вер. } p \\ 0, & q = 1-p \end{cases}$; $X_1, \dots, X_n$ – норсв; $S_n = X_1 + \dots + X_n$; $\mathbb{D}S_n = npq$.

Если $\mathbb{D}S_n$ велико (n велико, p и q далеки от 0 и 1), то ЦПТ дает аппроксимацию норм. распределением.

Распределение Пуассона: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$; $\lambda > 0$.

Теорема. Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ – норсв; $X_i \sim Bi(1, p)$; $n \cdot p = \lambda$; $p \leq \frac{1}{4}$.

Если $k - 1 \leq \frac{n}{4}$, то $\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + r_n(k)}$, причем

$$\frac{\lambda k}{n} + 2\ln\frac{4}{3} - \frac{3\lambda^2}{3n} \leq r_n(k) \leq \frac{\lambda k}{n} + \frac{(1-k)k}{2n}$$

Д-во 1) $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)(1-p)^{n-k} \cdot$

$\cdot e^{np} = \frac{\lambda^k}{k!} \exp\{-\lambda + r_n(k)\}$

$$r_n(k) = \ln\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots(1-p)^{n-k} e^{np}\right] = \sum_{i=1}^{k-1} \ln\left(1 - \frac{i}{n}\right) + \ln(1-p)(n-k) +$$

$$+ \lambda \leq \{\ln(1-x) \leq -x;\ 0 < x < \tfrac{1}{4}\} \leq -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} - np + kp + \lambda = \frac{(1-k)k}{2n} + \frac{k\lambda}{n}$$

2) $\ln(1-x) \geq -4x\ln\frac{4}{3}$. Разложение $\ln(1-x)$ в Тейлора. Ч.Т.Д.

Схема серий: $\begin{matrix} X_{1,1} \\ X_{2,1}, X_{2,2} \\ \dots \\ X_{n,1}, X_{n,2} \dots X_{n,n} \end{matrix}$ С.в. независимы в каждой серии, $X_{ni} \sim \begin{cases} 1 & \text{с вер. } p_n \\ 0 & \text{с вер. } q_n \end{cases}$

Теорема (Пуассон) Пусть есть схема серий с $np_n \to \lambda$, тогда $\forall k = 0, 1, \dots$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Док-во Очевидно в силу предыдущей теоремы. Ч.Т.Д.

Опр. Функция распределения $G(x)$ и соотв. ей х.ф. $g(t)$ называются устойчивыми, если $\forall\, a_1>0,\ a_2>0\ \exists\, a>0,\ b$ $(b\in\mathbb{R})$: $g(a_1 t)\,g(a_2 t)=e^{ibt}g(at)$. Это равносильно тому, что $\forall\, a_1, a_2>0\ \forall\, b_1, b_2\in\mathbb{R}\ \exists\, a>0,\ b\in\mathbb{R}$: $G(a_1x+b_1) * G(a_2x+b_2) = G(ax+b)$.

Т.е. распределение суммы лежит в том же классе, что и слагаемые.

Таковы, например, $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$.

Утв. Все невырожденные уст. распределения абс. непрерывны.

$$g(t)=\exp\left(iat-c|t|^{\alpha}\left(1+ib\frac{t}{|t|}Q(t,\alpha)\right)\right),\ \text{где}$$

$$Q(t,\alpha)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha\ne1\\ \frac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha=1\end{cases}$$

таков канонический вид х.ф. устойчивого распред.

α – характеристический показатель: $\alpha\in(0,2]$ $(\alpha=2:\ \mathcal{N})$

$(\alpha=1$: расп. Коши$)$ $\alpha=\frac{1}{2}$: распр. Леви: $p_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}\frac{\delta}{\sqrt{2\pi x^3}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2x}\right\}, & x>0\\ 0, & x\le0.\end{cases}$

или $p_{\frac{1}{2}}(|x|)$ – расп. Леви на отриц. оси.

В остальных случаях плотность через элем. ф-ии не выражается.

• Устойчивые распределения имеют "тяжелые хвосты", т.е. если $G_\alpha(x)$ – ф.р., то $G_\alpha(-x)+1-G_\alpha(x)$ – хвосты $(x\to\infty)$, они $\sim\frac{c}{x^\alpha}$. При этом у у.р. нет моментов порядка выше α. (ну, кроме нормального.)

Теорема (Леви) $X_1, X_2, \dots$ – норсв; $S_n=(X_1+\dots+X_n-a_n)\frac{1}{b_n}$. Тогда $G(x)$ – ф.р может быть предельной для S_n такого вида при некотором выборе $a_n\in\mathbb{R}$ и $b_n>0 \iff G(x)$ – устойчива

Опр. Х.ф. $f(t)$ называется безгранично делимой, если $\forall\, n\geqslant1$ $\exists$ х.ф. $f_n(t)$, т.ч. $f(t)=(f_n(t))^n$.

Таковы $\mathcal{N}$, Pois, Γ, $\overline{Bi}$.

Вспомним схему серий:

$X_{1,1}$
$X_{2,1}\ X_{2,2}$
$\dots\dots$
$X_{n,1}\ \dots\ X_{n,m_n}$

Пусть выполнено условие равномерной предельной малости:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le m_n} \mathbb{P}(|X_{n,j}|>\varepsilon)=0 \;\forall \varepsilon>0$$

<u>Теорема</u> (Хинчина) Ф-я распределения $F(x)$ может быть предельной для сумм в схеме серий для сумм вида $S_{n,m_n}=X_{n,1}+\ldots+X_{n,m_n}$, удов. условию равномерной предельной малости $\Leftrightarrow$ $f(t)$ безгранично делима.
$\uparrow$ х.ф.

Пусть $X_{n,j}\sim\begin{cases}1, & \text{с вер. } p_{n,j}\\ 0, & \text{с вер. } 1-p_{n,j}\end{cases}$; $S_n=X_{1,1}+\ldots+X_{n,n}$

<u>Теорема</u>. Пусть $\max\limits_{1\le j\le n} p_{n,j}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (условие р. пред. малости), и $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{n,j}\longrightarrow\lambda$ ($\lambda>0$). Тогда $\forall k=0,1,\ldots$ предел $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ (т.е. $\sim Pois$)

<u>Д-во.</u> Пусть $\varphi_n(s)=\mathbb{E}s^{X_{n1}+\ldots+X_{nn}}$ (произв. функция)
Какова $\varphi_{n,j}(s)$? Такова: $\varphi_{n,j}(s)=\mathbb{E}s^{X_{n,j}}=1-p_{n,j}+sp_{n,j}\ominus$ (везде считаем, что $|s|<1$) $\ominus\; p_{n,j}(s-1)+1$
Рассмотрим $\ln\varphi_n(s)=\sum\limits_{j=1}^{n}\ln(1+p_{n,j}(-1+s))\circledcirc$ Заметим, что $\sum\limits_{j=1}^{n}p_{n,j}^2\le\max\limits_{1\le j\le n}p_{n,j}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}p_{n,j}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$; $\Rightarrow$ то верно и для больших степеней. Значит, $\circledcirc\sum\limits_{j=1}^{n}p_{n}s(s-1)\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda(s-1)$. Значит, $\varphi_n(s)\to e^{\lambda(s-1)}$. Но это производ. ф-я распределения Пуассона! В силу взаимо-однозн. соотв. и т. непрерывности, Ч.Т.Д.

ЛЕКЦИЯ #05

<u>Математические модели информации неопределенности.</u>

Разные распределения имеют разную "степень неопределенности":

Опр. (Шеннон) Информация, содержащаяся в событии B относит. A ($\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$) называется $I(A|B) = \log \frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$ (о основании логарифма пока не будем)

Если $A = B$: $I(A|A) = -\log \mathbb{P}(A)$

Опр. Информация, содержащаяся в событии A, это $I(A|A) = I(A) = -\log \mathbb{P}(A)$ (редкие события дают больше информации)

Основание логарифма больше 1; но какое именно — роли не играет. Если оно $= 2$, то инф. измеряется в битах; бит содержится в событии вероятности $1/2$. Если оно $= e$, то инф. измеряется в натах.

1. Чем меньше $\mathbb{P}(A)$, тем больше $I(A)$.
2. Если A, B независимы, то $I(A|B) = 0$.
3. Если A, B независ., то $I(AB) = I(A) + I(B)$.

Рассмотрим эксперемент E: осуществляется один из исходов $A_1, A_2, \dots, A_n$ с вер-ю $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$; $I(A_1), I(A_2) \dots$ — инф. в каждом из событий. Пусть $Q(E)$ — с. в., принимающая значения $I(A_1), \dots, I(A_n) \dots$ с вер-ми $p_1, \dots, p_n \dots$; $H(E) = \mathbb{E}Q(E) = -\sum_{k=1}^{n} p_i \ln p_i$

Опр. Вот эта самая величина, $H(E) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$ — энтропия эксперемента с конечным числом исходов.

$H(E)$, оказывается, — разумная "мера неопределенности" эксперемента.

Теорема. $H(E)$ обладает свойствами:

1. Энтропия всегда больше или равна 0, причем равна тогда и только тогда, когда сущ. такое i: $p_i = 1$.
2. Пусть E_0 — эксперемент с равновероятными исходами; $p_i = \frac{1}{n}$. Тогда его энтропия $H(E_0) \geqslant H(E)$ для $\forall E$ — экспер. с n исходами.
3. Пусть E — экспер. с n исходами; E_1 — эксперемент, полученный из исходного объединением двух A_i и A_j

(т.е с $n-1$ исходами). Кроме того, E_2 — эксперимент с исходами A_i и A_j и вер-ми $\frac{p_i}{p_i+p_j}$, $\frac{p_j}{p_i+p_j}$. Тогда энтропия $H(E)=H(E_1)+(p_i+p_j)H(E_2)$.

4. $H(E)$ не зависит от $A_1, \dots, A_n$, а зависит только от $p_1, \dots, p_n$. (симметричным образом)

5. $H(E)$ непрерывна по $p_1, \dots, p_n$.

Док-во. 1. $f(p)=-p\log p$; доопределим по непр-ти при $p=0$ $f(0)=0$. При $p\in[0,1]$ она неотрицательна, причём $f(p)=0 \Rightarrow p=0$ или 1. $H(E)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$, $p_i\in[0,1] \Rightarrow H(E)\geqslant 0$, $=0 \Rightarrow \exists p_i=1$, $p_j=0$ при $j\neq 1$. Иначе и быть не может, ибо $p_1+\dots+p_n=0$.

2. Пусть теперь $f(p)=p\log p$; $f'(p)=1+\log p$; $f''(p)=\frac{1}{p}\geqslant 0$ (пусть основание равно e для удобства) $p\in(0,1]$. Значит, $f(p)$ выпукла вниз. Значит, $\forall \alpha_1\dots\alpha_n: \alpha_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, $\forall y_1,\dots y_n$:
$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(y_i)$. Положим $\alpha_i=\frac{1}{n}$, $y_i=p_i$:

$$H(E_0)=-\log\frac{1}{n}=-n\frac{\sum p_i}{n}\log\frac{\sum p_i}{n} \geqslant \text{ (Ибо } \sum p_i=1)$$

$$\geqslant -n\frac{\sum p_i}{n}\log p_i=-\sum_{i=1}^{n} p_i\log p_i=H(E).$$

3. Покажем, что $H(E)\geqslant H(E_1)$. $H(E_1)=-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} p_k\log p_k - (p_i+p_j)\ln(p_i+p_j)=-\sum_{k\neq i,j} p_k\log p_k - p_i\log(p_i+p_j) - p_j\log(p_i+p_j)\leqslant -\sum_{k\neq i,j}p_k\log p_k - p_i\log p_i - p_j\log p_j = H(E)$

Рассмотрим $0 \le H(E) - H(E_1) = -p_i \log p_i - p_j \log p_j + (p_i+p_j) \cdot \log(p_i+p_j) = (p_i+p_j)\left([\log p_i] \cdot \frac{-p_i}{p_i+p_j} - \frac{p_j}{p_i+p_j}\log p_j + \frac{p_i}{p_i+p_j}\log(p_i+p_j) + \frac{p_j}{p_i+p_j}\log(p_i+p_j)\right) = (p_i+p_j)\left(\frac{-p_i}{p_i+p_j}\ln\frac{p_i}{p_i+p_j} - \frac{p_j}{p_i+p_j}\ln\frac{p_j}{p_i+p_j}\right)$

Значит, $H(E) = H(E_1) + H(E_2)$ (прирост энтропии $H(E_2)$ за счет увеличения числа исходов пропор. их вероятности)

4 и 5. Очевидно. Ч.Т.Д.

Теорема. (Фадеев) Если функционал H зависит от $p_1, \dots, p_n$, и для него справедливы свойства 1)–5) из пред. теоремы, то H обязан иметь вид $H(E) = -\sum p_i \log p_i$

Пусть с.в $\xi = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$. Тогда энтропия ξ, $H(\xi) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$.

Пусть $p(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i, \ i = 1 \dots n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, $H(\xi) = -\mathbb{E}\log p(\xi)$

это плотность относительно считающей меры.

Попробуем обобщить на непр. случай. Пусть $p(x)$ – плотность ξ; формально напишем $H(\xi) = -\mathbb{E}\log(p(\xi))$. Увы, предельным переходом тут не получится. Вспомним, что если X – с.в, то сущ. послед. пр-х с.в. $X_\delta \xrightarrow[\text{поточечно}]{\delta \to 0} X \Rightarrow X_\delta \xrightarrow{\text{слабо}} X$. $H(X_\delta) \xrightarrow{?} H(X)$. Нет, не будет.

Посмотрим: Δ_i – участки разбиения X; $|\Delta_i| = \delta$. Тогда $H(X_\delta) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(x \in \Delta_k) \ln(\mathbb{P}(x \in \Delta_k)) = \{$ плотность непрерывна; заюзаем теорему о среднем $\} = -\sum_{k=1}^{n} p(x_k^*)\delta \log(p(x_k^*)\delta) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i^*)\delta \log(p_i^*) - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{p(x_j^*)\delta}_{\mathbb{P}(x \in \Delta_j)} \log\delta$

$\equiv -\log\delta$. Т.е. это куда надо не стремиться...

инт. сумма Дарбу для $H(\xi) = -\mathbb{E}\log p(\xi)$

Формально, $H(\xi) = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ (\delta \to 0)}} (H(X_\delta) + \log\delta)$ информация события с вер. δ. Рост энтропии обусловлен квантованием с. в., за счет роста числа исходов.

Опр. Пусть ξ - абс. непр. с.в. с плотностью $p(x)$; $H(\xi) = -\mathbb{E}\log p(\xi)$ - дифференциальная энтропия ξ.

7.10.09

ЛЕКЦИЯ # 06

А какое абс.-непр. распределение максимально энтропийно?

Пусть $p(x)$ - ф-я; $a<b$; пусть $F(x, p(x))$, $\varphi_i(x, p(x))$, $i=\overline{1,n}$ - некие ф-ии, a_i - числа. Тогда $p(x)$, обращающееся в максимум функционал при условиях

$$\begin{cases} \int_a^b F(x,p(x))\,dx, \\ \int_a^b \varphi_i(x, p(x))\,dx = a_i. \quad (*) \end{cases}$$

Находим его из уравнений

$$(\nabla) \quad \frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial p} = 0,$$

λ_i - неопределенные множители, находимые подстановкой решений ур-я в $(*)$.

<u>Теорема.</u> 1) Пусть X - с.в., равномерно распред. на $[-a,a]$. Тогда $H(X) \geq H(Y)$, сосредоточенной на $[-a,a]$: $\mathbb{P}(|Y|\leq a)=1$ (для любого Y)

2) Пусть X - с.в. с показательным распределением с параметром $\lambda>0$. Тогда $H(X) \geq H(Y)$, $\forall Y: \mathbb{P}(Y\geq 0)=1$, $\mathbb{E}Y = \frac{1}{\lambda}$.

3) Пусть X: с.в. $\sim N(a, \sigma^2)$. Тогда $H(X)\geq H(Y)$, т.ч. $\mathbb{E}Y = a$, $\mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \sigma^2$.

<u>Док-во.</u> 1) $F(x,p(x)) = -p\log p$; $\varphi_1(x,p(x)) = p$. Д-м, что у

$$\begin{cases} \int_{-a}^{a} F(x,p(x))\,dx \longrightarrow \max \\ \int_{-a}^{a} \varphi(x,p(x)) = 1. \end{cases}$$

решение - равном. распр.

Запишем (∇):

$-(1+\log p) + \lambda_1 = 0$; $p = e^{\lambda_1 - 1}$ - постоянна на $[-a,a]$.

Найдём λ_1 подстановкой: $\int\limits_{-a}^{a} e^{\lambda_1 - 1}\,dx = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \log\frac{1}{2a} + 1$,

$p(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$

2) $F(x, p(x)) = -p\ln p$; $\varphi_1(x, p(x)) = p$; $\varphi_2 = x\cdot p$

Решим задачу:
$$\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} F(x, p(x))\,dx \to \max \\ \int\limits_0^{+\infty} \varphi_1(x, p(x))\,dx = 1 & \text{(плотность)} \\ \int\limits_0^{+\infty} \varphi_2(x, p(x))\,dx = \frac{1}{\lambda} & \text{(мат. ожидание)} \end{cases}$$

$-(1 + \log p) + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$; $\log p = \lambda_2 x + \lambda_1 - 1$;

$p = \exp\{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 x\}$, $x \in [0; +\infty)$. Аналогично, подстановкой находим λ_1 и λ_2; $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Это $P(\lambda)$.

3) Пусть $a = 0$ (это всегда можно сделать). По-прежнему,

$F(x, p(x)) = -p\ln p$; $\varphi_1(x, p(x)) = p$; $\varphi_2(x, p(x)) = x^2 p$.

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, p(x)) = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x, p(x))\,dx \to \max \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x, p(x)) = \sigma^2, \end{cases}$$

(∇): $-(1 + \log p) + \lambda_1 + x^2\lambda_2 = 0 \Rightarrow p = \exp\{\lambda_1 - 1 + \lambda_2 x^2\}$

Подстановкой, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma}\right\}$. Ч.Т.Д.

Случайные процессы.

Опр. Семейство $X(\omega, t)$, $t \in T$, опр. на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, называется случайным процессом (сл. функцией).

При фикс. ω_0 $X(\omega_0, t)$ — траектория с.п-са.

Последов-ть с.в. — частный случай с.п: $T = \mathbb{N}$. Если $T \subseteq \mathbb{Z}$, то с.п. называют с.п. с дискретным временем; если $T \subseteq$ ~~$\mathbb{R}$~~ — интервал (конечный или бесконечный), то пр-с называется процессом с непрерывным временем.

Пусть мы хотим узнать $\mathbb{P}(a \le X(t) \le b, t \in [t_1, t_2])$.
В дискретном случае, это $\bigcap_{t,n} \{X_{t\, n} \in [a, b]\}$; но в недискрет. случае это может быть вообще не событие!

Пусть S - множество всех траекторий с.п.; пусть Σ - борелевская сигма-алгебра на S (порождена всеми откр. подмножествами.)

<u>Опр.</u> $X: \Omega \to S$; X наз-ся случайным элементом, если оно измеримо (т.е. $\forall B \in \Sigma$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$)

<u>Опр.</u> Распределением случайного процесса назовём меру
$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in B)$, $\forall B \in \Sigma$.

Если мы фиксируем $t_0, \ldots, t_n$, то получим вектор: $(X(t_0), \ldots, X(t_n))$. Распределение таких векторов - конечномерное распределение $X(t)$.

<u>Опр.</u> С.п. $X(t)$ наз-ся процессом с независимыми приращениями, если $\forall n \geq 1$, $\forall t_0, t_1, \ldots, t_n : t_k < t_{k+1}$, $t_k \in T$, с.в. $X(t_0)$, $X(t_1) - X(t_0)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы в совокупности.

<u>Опр.</u> С.п. $X(t)$ наз-ся однородным, если с.в. $X(t+h) - X(t)$, $X(s+h) - X(s)$ одинаково распределены для всех ~~t, h, s~~ $t, t+h, s, s+h \in T$.

<u>Опр.</u> С.п. $X(t)$ наз-ся пуассоновским, если:
1. Он - ПсНП; (процесс с незав. приращ.)
2. Он однородный;
3. $\mathbb{P}(X(0) = 0) = 1$
4. $\exists \lambda > 0$: при $h \xrightarrow{\text{справа}} 0$ $\mathbb{P}(X(\overset{t}{h}) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{\bar{o}}(h)$;
$\mathbb{P}(X(\overset{t}{h}) = 1) = \lambda h + \bar{\bar{o}}(h)$
$\mathbb{P}(X(\overset{t}{h}) \geq 1) = \bar{\bar{o}}(h)$

Это определение нестрогое; из него не следует, например, то, что пуас. процесс принимает целые значения.

Рассмотрим производящую ф-ю пуас. пр-са; $|s|\le 1$: $\varphi_{X(t)}(s) \equiv \varphi_t(s) \equiv \mathbb{E} s^{X(t)}$;

$\varphi_{t+h}(s) = \mathbb{E} s^{X(t+h)} = \mathbb{E} s^{X(t+h)-X(t)+X(t)} = \mathbb{E} s^{X(t+h)-X(t)} \mathbb{E} s^{X(t)}$

$= \{$ибо однородный$\} = \mathbb{E} s^{X(h)} \mathbb{E} s^{X(t)} = \varphi_h(s)\varphi_t(s)$;

$\varphi_h(s) = 1 - \lambda h + \bar{o}(h) + \lambda h \cdot s + \bar{o}(h) \ominus$ / по св. 4)

$\ominus\ \lambda h(s-1) + \bar{o}(h)$. Подставим: $\varphi_{t+h}(s) = \varphi_t(s) + \lambda h\, \varphi_t(s)(s-1) + \bar{o}(h)$; $\dfrac{\varphi_{t+h}(s) - \varphi_t(s)}{h} = \lambda(s-1)\varphi_t(s) + \bar{o}(1)$; Устремим h к 0: $\dfrac{d\varphi_t}{dt} = \lambda(s-1)\varphi_t$; $\varphi_0(s) = 1$. Решение: $\varphi_t(s) = e^{\lambda(s-1)t}$

А разложим-ка мы это в ряд: $\varphi_t(s) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{s^k \lambda t^k}{k!}\right] e^{\lambda t}$

Значит, $\mathbb{P}(X(t)=k) = \dfrac{e^{\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \sim Pois(\lambda t)$

$\mathbb{E}X(t) = \mathbb{D}X(t) = \lambda t$; λ — интенсивность пуас. процесса

ЛЕКЦИЯ #07

141009

Пусть $\tau_1, \tau_2 \dots$ — точки, в которых происходят скачки. Как $\tau_n - \tau_{n-1}$ распределена?

Нестрого: в силу однородности можно рассмотреть только первый скачок, т.е. $\tau_1 - \tau_0 = \tau_1$; $\mathbb{P}(\tau_1 \le t) = 1 - \mathbb{P}(\underbrace{\tau_1 > t}_{\text{экв. "за время } t \text{ скачка не было"}}) = 1 - \mathbb{P}(X(t)=0) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \ge 0)$

Значит, τ_1 — показат. распред. с показателем λ, $P(\lambda)$

Однако у $P(\lambda)$ есть проблема, у него "нет памяти". Т.е., пусть τ_1 — время жизни некоего объекта. Пусть он прожил s, какова вер-ть того, что он еще $t+s$ проживет? $\mathbb{P}(T > t+s \mid T > s) = U(t|s)$; обозначим $U(t) = \mathbb{P}(T > t)$

$U(t|s) = \dfrac{\mathbb{P}(T>t+s, T>s)}{\mathbb{P}(T>s)} = \dfrac{\mathbb{P}(T>t+s)}{\mathbb{P}(T>s)} = \dfrac{U(t+s)}{U(s)}$

А когда эта величина не зависит от t? Когда $v(t+s) = v(t)v(s)$. Это возможно, когда $v(t) = e^{-\lambda t}$ (Ч.и Феллер) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathcal{T} \sim \Pi(\lambda)$.

Интерпретировать можно как $X(t)$ - число событий, произошедших за время t (поток событий: приход клиентов, падение метеоритов).

Пусть на $[a,b]$ произошло n событий, т.е. $X(b)-X(a)=n$. Как они распределены на $[a,b]$?

<u>Теорема</u> Пусть $\tau_1, \tau_2, .., \tau_n$ - скачки пуассоновского процесса; тогда распределение в-ра $(\tau_1, .., \tau_n \mid X(b)-X(a)=n)$ совпадает с распределением вариационного ряда, построенного по выборке объёма n из равномерного распределения на $[a,b]$.

$X_{(1)}, .., X_{(n)}$ - вариац. ряд, X_i имеет плотность $f(x)$, тогда совместная плотность $f_{1..n}(x_1, .., x_n) = \begin{cases} n! \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i), & x_1 < x_2 < .. < x_n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

<u>Док-во.</u> $\eta_1, .. \eta_n$ - в-р случайных величин с плотностями, тогда

$$\mathbb{P}(\eta_i \in [t_i, t_i+h], i=\overline{1,n}) = h^n f(t_1, .., t_n) + \bar{\bar{o}}(h^n)$$

~~Положим $t_i = \tau_i$~~; $a = t_0 + h < t_1 + h < \ldots < t_n + h < b = t_{n+1}$, пусть $h < \min\limits_{1 \le i \le n} (t_{i+1} - t_i)$. $\mathbb{P}(\tau_i \in [t_i, t_i + h], i=\overline{1,n} \mid X(b) - X(a) = n) = \dfrac{\mathbb{P}(\tau_i \in [t_i, t_i+h], i=\overline{1,n}; X(b)-X(a)=n)}{\mathbb{P}(X(b)-X(a)=n)} =$

$$= \frac{\mathbb{P}(\tau_i \in [t_i, t_i+h], i=\overline{1,n})}{\mathbb{P}(X(b)-X(a)=n)} = \frac{\mathbb{P}(X(t_i+h)-X(t_i)=1, i=\overline{1,n}, \; X(t_{i+1})-X(t_i+h)=0, i=\overline{0,n})}{\mathbb{P}(X(b)-X(a)=n)} \underset{\text{В силу свойств П. потока}}{=} \frac{(\lambda h)^n e^{-n\lambda h} e^{-\lambda(t_1 - a + t_2 - t_1 + .. + b - t_n - h)}}{\mathbb{P}(X(b)-X(a)=n)} =$$

$$= \frac{(\lambda h)^n e^{-\lambda(b-a)} e^{-n\lambda h} e^{n\lambda h}}{\mathbb{P}(X(b)-X(a)=n)} \underset{\text{в силу однородности}}{=} \frac{(\lambda h)^n e^{-\lambda(b-a)}}{e^{-\lambda(b-a)}(\lambda(b-a))^n \frac{1}{n!}} =$$

$= \frac{n!}{(b-a)^n} h^n$. Значит, условная плотность $\frac{n!}{(b-a)^n} \mathbb{I}(t_1 < \ldots < t_n)$

Ч.Т.D.

Обозначим $\xi_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, $\tau_0 = 0$; Тогда $\tau_1 = \xi_1$, $\tau_2 = \xi_1 + \xi_2, \ldots, \tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

Совместная плотность $\tau_1, \ldots, \tau_n$ равна (при $a = h$, $b = t_n + h$) $\lambda^n e^{-\lambda t_n}$ при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ Якобиан перехода от τ к ξ равен 1; $\vec{\tau} = I \cdot \vec{\xi}$, $|I| = 1$. Тогда $\mathbb{P}(\tau_1 < t_1, \ldots, \tau_n < t_n) =$

$= \int\limits_{u_1 < t_1, \ldots, u_n < t_n} \cdots \int p_{\tau_1 \ldots \tau_n}(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$. С другой стороны, это то же, что и $\mathbb{P}(\xi_1 < t_1, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n < t_n) = \int\limits_{v_1 < t_1, \ldots, v_1 + \ldots + v_n < t_n} \cdots \int p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(v_1, \ldots, v_n)\, dv_1 \ldots dv_n$. Значит,

$$p_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(s_1, \ldots, s_n) = p_{\tau_1, \ldots, \tau_n}(s_1, \ldots, s_1 + \ldots + s_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda s_i}$$

(где $s_i \geq 0$) $\Rightarrow \xi_1, \ldots, \xi_n$ незав. и имеют распределение $\Gamma(\lambda)$.

В этом смысле интервалы между скачками имеют макс. везпотную неопределённость

__Теорема__ Пусть $X(t)$ - пуассоновский процесс, $\lambda > 0$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) \underset{\lambda t \to \infty}{\rightrightarrows} \Phi(x),$$ равномерно по x, причём

$$\Delta(\lambda t) = \sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$$ - C_0 - константа из нер-ва Берри-Эссена

__Док-во.__ Х.ф.: $X(t)$: $\mathbb{E} e^{is X(t)} = e^{\lambda t (e^{is} - 1)} \textcircled{=}$, причём $\forall n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) $\textcircled{=} \left(e^{\frac{\lambda t}{n}(e^{is} - 1)}\right)^n$. (Ибо безгранично делимое)

__Упр.__ D-ть, что б.д х.ф. нигде не ноль.

Значит, распределение $X(t) \overset{d}{=} X_{n,1} + \ldots + X_{nn}$, X_{ni} - нopсв, $X_i \sim \Pi\left(\frac{\lambda t}{n}\right)$ $\Delta(\lambda t) \leq \frac{C_0 \mathbb{E}|X_{n,1} - \frac{\lambda t}{n}|^3}{\sqrt{n}(\mathbb{D}X_{n,1})^{3/2}}$ (Нер-во Берри-Эссена для нужных) (∇)

$\mathbb{D}X_{n,1} = \frac{\lambda t}{n}$ $\exists n > \lambda t$; $\mathbb{E}|X_{n,1} - \frac{\lambda t}{n}|^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = k) \cdot$

$\cdot |k - \frac{\lambda t}{n}|^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left[\mathbb{P}(X_{n,1} = k)\left(k - \frac{\lambda t}{n}\right)^3 + \underset{\text{при } k=0}{2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^3 \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)}\right] =$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left(X_{n,1}-\frac{\lambda t}{n}\right)^3}_{=\frac{\lambda t}{n}} + 2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^3 \cdot \mathbb{P}(X_{n,1}=0) = \frac{\lambda t}{n} + 2e^{-\frac{\lambda t}{n}}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^3 \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{\lambda t}{n}}_{\mathbb{D}X_{n,1}}\left(1+2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2\right)$$ Подставим в (∇):

$\Delta(\lambda t) \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}\left(1+2\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2\right)$; устремим n к бесконечности

$\Delta(\lambda t) \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$. Ч.Т.Д.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ № 08}}$

Случайные суммы.

Опр. $X_1, \dots, X_n$ — норсв; N — целочисленная неотрицательная с.в, т.ч. $N, X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ — определены на одном $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и независимые. Тогда случайная сумма — $S_N = X_1^{(\omega)} + \dots + X_{N(\omega)}^{(\omega)} = \sum\limits_{k=1}^{N} X_k$ (Договоримся, что $\sum\limits_{k=1}^{0} X_k = 0$)

Пусть $F(x)$ — ф.р. X_1, $p(x)$ — плотность (если она есть) $f(t)$ — х.ф. X_1; $\psi(s)$ — производящая ф-я N; $p_k = \mathbb{P}(N=k)$

Теорема 1. 1) $F_{S_N}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k F^{*k}(x)$, где $F^{*k}(x)$ — k-кратная свёртка F с самой собой; считаем, что $F^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

2) Если $p_0 > 0$, то F_{S_N} не является абс.-непрерывной, даже если у X_i есть плотность. Если же у X_i есть плотность и $p_0 = 0$, то плотность S_n имеет вид
$p_{S_N}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k p^{*k}(x)$ (p^{*k} — тоже k-кр. свертка)

3) $f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$

4) $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$; $\mathbb{D}S_N = (\mathbb{D}X_1)\mathbb{E}N + \mathbb{D}N(\mathbb{E}X_1)^2$

Док-во. 1) $F_{S_N}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k \underline{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k < x)}$ (ф-ла полной вероятности) ← а это и есть k-кр свёртка F)

2) Если $p_0 > 0$, то есть слагаемое $F^{*0}(x)$ — ф.р. дискре-

той с.в, и плотности нет; иначе, ряд сх. равномерно, у всех есть плотность $\Rightarrow$ можно диф. почленно, $p_{S_N}=\sum_{k=1}^{\infty} p_k p^{*k}(x)$

3) $f_{\underset{k\text{-го слагаем.}}{\downarrow}}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF^{*k}(x)=\mathbb{E}e^{it(X_1+\ldots+X_k)}=f^k(t)\Rightarrow$

$f_{S_N}(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,d\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{*k}(x)\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{в силу р. сход-ти,}\\ \text{можно диф. почленно}\end{array}\right\}=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} p_k \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,dF^{*k}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k f^k(t)\ominus\left\{\psi(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k\right\}_{|s|\le 1}\ominus$$

$\ominus\ \psi(f(t))$

4) $$\mathbb{E}S_n=\frac{1}{i}\left.\frac{d(\psi(f(t)))}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{i}\left.\left(\frac{\partial\psi(f(t))}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right|_{t=0}=$$

$$=\frac{1}{i}\mathbb{E}N\cdot i\mathbb{E}X_1=\mathbb{E}N\mathbb{E}X_1.$$

$$\mathbb{E}S_n^2=\frac{1}{i^2}\left.\frac{d^2(\psi(f(t)))}{dt^2}\right|_{t=0}=-\frac{\partial}{\partial t}\left.\left(\frac{\partial\psi(f(t))}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right|_{t=0}=$$

Тут много бед со знаками и скобками

$$=-\left.\left[\frac{\partial^2\psi(f(t))}{\partial f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2-\frac{\partial\psi(f(t))}{\partial f}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right]\right|_{t=0}=-\mathbb{E}(N(N-1))\cdot$$

$$\cdot(-\mathbb{E}X_1)^2)-\mathbb{E}N(-\mathbb{E}X_1^2)=\mathbb{E}N^2(\mathbb{E}X_1)^2-\mathbb{E}N(\mathbb{E}X_1)^2+$$

$$+\mathbb{E}N(\mathbb{E}X_1^2)^2=\mathbb{E}N^2(\mathbb{E}X_1)^2+\mathbb{E}N\mathbb{D}X_1\Rightarrow\mathbb{D}S_n=\mathbb{E}N^2(\mathbb{E}X_1)^2+$$

$$+\mathbb{E}N\mathbb{D}X_1-(\mathbb{E}N)^2(\mathbb{E}X_1)^2=\mathbb{D}N(\mathbb{E}X_1)^2+\mathbb{E}N\cdot\mathbb{D}X_1.$$ Ч.Т.Д.

Если $N\sim Pois(\lambda)$, то $S_N\equiv S_\lambda$ назыв-ся пуассоновской суммой; её распределение наз-ся обобщ. пуассоновским. $\psi_N(s)=e^{\lambda(s-1)}$ (произв. ф-я пуассоновского распределения)

<u>Теорема 2.</u> 1) S_λ обладает безгр.-делимым распределением.
(ибо $f_{S_\lambda}(t)=e^{\lambda(f(t)-1)}\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\ f_{S_\lambda}(t)=\left(e^{\frac{\lambda}{n}(f(t)-1)}\right)^n=$
$=(g_n(t))^n$, где g_n – х.ф. случайной суммы $X_1+\ldots+X_{N_n}$, $N_n\sim Pois(\frac{\lambda}{n})$)

2) $\mathbb{E}S_\lambda=\lambda\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{D}S_\lambda=\lambda\mathbb{E}X_1^2$ (ибо $N\sim Pois(\lambda)\Rightarrow$
$\mathbb{E}N=\mathbb{D}N=\lambda$)

<u>Теорема 3</u> $]\,X_1,\ldots,X_N$ – н.о.р.с.в; $\mathbb{E}X_1^2<\infty$; $a=\mathbb{E}X_1$, $\sigma^2=\mathbb{D}X_1$;
$N\sim Pois(\lambda)$; тогда

$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(b^2+a^2)}} < x \right) - \Phi(x) \right| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0.$

Если же $\mathbb{E}X_1^3 < \infty$, то $\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(b^2+a^2)}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{C_0 L_1}{\sqrt{\lambda}}$, где $L_1 = \frac{\mathbb{E}|X_1|^3}{(b^2+a^2)^{3/2}}$, ($C_0$ – константа из нер-ва Берри – Эссена)

Если $M = Geom(p)$ (геометр. распределение: $\mathbb{P}(M=k) = p(1-p)^k$, $k=0,1,\ldots$), то S_M – геометрическая сл. сумма. $\mathbb{E}M = \frac{1-p}{p}$, $\mathbb{D}M = \frac{1-p}{p^2}$, $\Psi(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$

__Теорема (Реньи)__ Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – норсв, $X_i \geqslant 0$, $\overset{a}{\mathbb{E}X_i} > 0$, $\mathbb{E}X_i < \infty$. Пусть S_M – геометрическая с.с. (M независ. с $X_1, \ldots, X_m, \ldots$)

Тогда $\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{p}{a} S_M < x \right) - G(x) \right| \xrightarrow[p\to 0]{} 0$, где $G(x) = (1-e^{-x})\mathbb{1}(x\geqslant 0)$; Если $b^2 \mathbb{E}X_i^2 < \infty$, то

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{p}{a} S_M < x \right) - G(x) \right| \leqslant \frac{p b^2}{(1-p)a^2}$$

__Связь между пуассонов. и геометр. случайными суммами__

__Лемма 1.__ Пусть M – целочисленная обобщ. пуассоновская с. в. Тогда S_M – пуассоновская с. в.

__Д-во__ $\Psi_M(s) = \Psi_\lambda(\Psi(s)) = e^{\lambda(\Psi(s)-1)}$ Х.ф. S_M $f_{S_M}(t) =$

производящая ф-я; некая п. ф.

$= \Psi_M(f(t)) = \exp\{\lambda(\Psi(f(t)) - 1)\}$ – это х. ф. $Y_1 + \ldots + Y_N$, где $N \sim Pois(\lambda)$, а х.ф. Y_i $f_{Y_i}(t) = \Psi(f(t))$.

$S_M \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_N$; $Y_i \overset{d}{=} X_1 + \ldots + X_L$, где L имеет пр. ф-ю $\Psi(s)$. Ч.Т.Д.

__Лемма 2.__ Пусть $M \sim Geom(p) \Rightarrow M$ – обобщ. пуассон. с. в.

__Д-во__ $\Psi_M(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$; Д-м, что $\Psi_M(s) = e^{\lambda(\Psi(s)-1)}$, где Ψ – некая п.ф. Положим $\lambda = \ln\frac{1}{p}$, $\Psi(s) = \frac{1}{\lambda}\ln \frac{1}{1-(1-p)s}$. Подставим:

$\Psi_M(s) = \exp\{\ldots\} = \exp\{\ln\left(\frac{1}{1-(1-p)s}\right) - \lambda\}$

$= \frac{p}{1-(1-p)s}$.

тут: $\exp\{\lambda(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-(1-p)s} - 1)\}$

Осталось д-ть, что $\Psi(s)$ - производящая ф-я. $-\log(1-(1-p)s) = $
$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k s^k}{k}$ Заметим, что $\frac{(1-p)}{\lambda k} > 0$; $\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = 1$.

Значит, набор чисел $\frac{1}{\log\frac{1}{p}} \frac{(1-p)^k}{k}$ задает распределение вероятностей $\Rightarrow \Psi$ - произв. ф-я. Ч.Т.Д.
(р-е это наз-ся логарифмическим)

<u>Теорема</u> Любая геометрическая с.с. есть пуассоновская с.с.:
$M, X_1, \dots, X_n, \dots$ - независ, $S_M = \sum_{k=1}^{M} X_k$, $M \sim Geom(p)$,
то $S_M \overset{d}{=} S_N$, где $N \sim Pois(\ln(\frac{1}{p}))$, $S_N \overset{d}{=} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$,
где $Y_i \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{L} X_k$, где L имеет логарифмическое распределение. $\left(\mathbb{P}(L=k) = \frac{1}{\log\frac{1}{p}} \frac{(1-p)^k}{k}\right)$

<u>Д-во.</u> По лемме 2, M - об. пуас. с.в, из леммы 1 - что S_M - просто пуас. с.с. Соотношения для параметров вытекают из леммы 2. Ч.Т.Д.

ЛЕКЦИЯ # 09

291009

<u>Следствие 1.</u> Пусть S_N - пуас. случ. сумма; тогда, если $g(t) = \frac{1-\exp\{-\lambda f(t)\}}{1-e^{-\lambda}}$ $(X_i \sim f(t), N \sim Pois(\lambda))$ - хар. ф-я, то S_N - геометрическая с.с: $S_N \overset{d}{=} S_M$, $S_M = \sum_{i=1}^{M} Y_i$, $Y_i \sim g(t)$,
$M \sim Geom(e^{-\lambda})$

<u>Д-во.</u> Вспомним, что $S_N \sim \exp\{\lambda(f(t)-1)\}$, надо д-ть, что $\exp\{\lambda(f(t)-1)\} = \Psi_M(g(t))$, где Ψ_M - произв. ф-я геометр. распр: $\Psi_M(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$. Проверим: $\Psi_M(g(t)) = \frac{e^{-\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda})g(t)} =$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda})\frac{1-\exp\{-\lambda f(t)\}}{1-e^{-\lambda}}} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{\{-\lambda f(t)\}}} = \exp\{\lambda(f(t)-1)\}$$

Ч.Т.Д.

<u>Следствие 2.</u> Любая геометр. с.с. имеет безгранично-делимое распред.

Д-во. Х. ф. S_M равна $\varphi_M(f(t)) = \exp\{\lambda(\varphi(f(t))-1)\} \Rightarrow$
$\forall n \geq 1 \quad \exp\{\lambda(\varphi(f(t))-1)\} = \left(\exp\{\frac{\lambda}{n}(\varphi(f(t))-1)\}\right)^n$ ЧТД

Вспомним схему серий: $\{X_{n,j}\}$

$$\begin{array}{lll} X_{1,1} & & \\ X_{2,1} & \ldots & X_{2,2} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \ldots \end{array}$$

(Пусть мы что-то наблюдаем $f_1, f_2, \ldots f_N$; мы видим $X_i = f_i + \varepsilon_i$. Надо придумать оценку $\hat{f}_i$. И тут распределение по N меняется совсем не так, как в ЦПТ.)

Итак, пусть $X_{n,j}$ — нorсв в каждой серии.

Теорема (переноса) $\{X_{nj}\}$ — схема серий с $\uparrow_j$; N_n — послед-ть положит. целочисленных с. в., не зависящих от $\{X_{n,j}\}$ $\forall n$; Пусть $\{m_n\}$ — послед. неогр. возр. натур. чисел; $S_{n,k} = \sum_{j=1}^{k} X_{n,j}$

~~Тогда~~ Пусть $\mathbb{P}(S_{n,m_n} < x) \longrightarrow H(x)$, $\mathbb{P}\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right) \longrightarrow A(x)$

Тогда $\exists F(x)$: $\mathbb{P}(S_{n,N_n} < x) \longrightarrow F(x)$; При этом $F(x)$ соотв. х. ф. $f(t) = \int_0^{+\infty} h^v(t)\, dA(v)$, где $h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dH(x)$ — х. ф. $H(x)$

Д-во. $g_n(t) = \mathbb{E}\, e^{itX_{n,1}}$; $h_n(t) = g_n^{m_n}(t)$; $A_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right)$.

Тогда х. ф. с. с. $f_n(t) = \mathbb{E}\, e^{it\sum^{N_n} X_{n,j}} = \{$ф-ла полной вероятности$\} =$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k)\, g_n^k(t) = \int_0^{+\infty} g_n^v(t)\, d\mathbb{P}(N_n < v) \ominus$ (интеграл Лебега-Стилт)

Замена: $v = v' m_n \ominus \int_0^{+\infty} g_n^{v' m_n}\, dA_n(v') = \int_0^{+\infty} h_n^{v'}\, dA_n(v')$

Надо д-ть, что $|f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall t$.

$|f_n(t) - f(t)| = \left|\int_0^{+\infty} h_n^v\, dA_n(v) - \int_0^{+\infty} h^v\, dA(v)\right| \leq \left|\int_0^{+\infty} h_n^v(t) \cdot dA_n - \int_0^{+\infty} h^v(t)\, dA_n(v)\right| + \left|\int_0^{\infty} h^v(t)\, dA_n(v) - \int_0^{+\infty} h^v(t)\, dA(v)\right| =$
$= I_1(n) + I_2(n)$.

Пусть $\frac{N_1}{m_1} \sim A(x)$ (ф.р.); $\frac{N_n}{m_n} \xrightarrow{d} N$ означает, что $\forall \varphi(z)$ - непр. и огранич. $\mathbb{E}\varphi\left(\frac{N_n}{m_n}\right) \longrightarrow \mathbb{E}\varphi(N)$. Пусть $\varphi(z) = z^{v}$ при $|z| < 1$; в I_2 вместо z подставляется $h(t)$.

Значит, $I_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$I_1(n) \leq \left|\int_0^M h_n^v(t)\, dA_n(v) - \int_0^M h_n^v(t)\, dA_n(v)\right| + \left|\int_M^{+\infty} h_n^v(t)\, dA_n - \int_M^{+\infty} h^v(t)\, dA_n(v)\right| = I_{11}(n) + I_{12}(n)$$ Оценим их.

<u>Опр</u> П-ть F_n - ф.р. называется отн. компактной, из из $\forall$ под. ти можно выделить подпосл-ть, сход. к $F \in \{F_n\}$ по распределению

<u>Утв.</u> $\{F_n\}$ отн. компактно $\Leftrightarrow \lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_n (F_n(-M) + 1 - F_n(M)) = 0$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_n \mathbb{P}(|\xi_n| > M) = 0$.

$\Leftarrow$? из последовательности выделяем подпослед. $\forall$ подпосл-ти ??? видимо, из послед. случ-х величин с ф.р F_n?

- Это - частный случай т. Прохорова: отн. комп. $\Leftrightarrow$ плотности.

A_n - отн. компактно, $I_{12}(n) \leq \int_M^{+\infty} |h_n^v(t)|\, dA_n(v) + \int_M^{+\infty} |h_n^v(t)|\, dA_n(v) \leq$
$\leq 2\int_M^{+\infty} dA_n(v) < \varepsilon'$ ($\exists M(\varepsilon')$, не зав. от n).

$$I_{11}(n) = \left|\int_0^M h_n^v(t)\, dA_n(v) - \int_0^M h^v(t)\, dA_n(v)\right| \leq \int_0^M |h_n^v(t) - h^v(t)|\, dA_n(v) \circledleq$$

<u>Утв</u> Пусть $\Psi(z) \in C^1[U]$ $\subset \mathbb{C}$. Тогда, если $a, b \in U$, то $|\Psi(b) - \Psi(a)| \leq$
выпукла $\leftarrow$ функция или множество ли?
$\leq |b-a| \sup\limits_{\alpha\in[1,0]} \Psi'(\alpha a + (1-\alpha) b)$.

$$\circledleq \begin{cases} \Psi(z) = z^v \\ \Psi'(z) = v z^{v-1} \end{cases} \int_0^M v|h_n(t) - h(t)| \sup_{\alpha\in[0,1]} |\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)|^{v-1}\, dA_n(v)$$

$$\leq \int_0^M v|h_n(t) - h(t)| \frac{dA_n(v)}{\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} |\alpha h_n(t) + (1-\alpha) h(t)|} \leq \int_0^M v|h_n(t) - h(t)| \cdot$$

- $\frac{dA_n(v)}{\min(|h(t)|, |h_n(t)|)}$ $\circledleq$ По т. Хинчина, $h(t)$ безгр. делима $\Rightarrow$ она нигде не обр. в ноль. $h_n(t)$ тоже рано или поздно

отлично от нуля. Значит, $\min(|h_n(t)|, h(t)) > \delta$, $\delta = \delta(t)$ при дост. больших n. $\circledS \int\limits_0^M \frac{v}{\delta} |h_n(t) - h(t)| \, dA_n(v) \leq$
$\leq \frac{M}{\delta} |h_n(t) - h(t)| \leq \varepsilon$" с некоего n. Ч.Т.Д.

<u>Замечание.</u> Если $\frac{N_n}{m_n} \to const$ и $A(v)$ вырождена, то за счёт выбора m_n можно сделать $\frac{N_n}{m_n} \to 1$, и $f(t) = h(t)$ (т. е. распределение с.с. совпадает с распределением неслучайных сумм)

11.11.09

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#10}}$

<u>Теорема</u> (б/д) $\{X_{n,j}\}$ — схема серий; пусть для некоторых с. в. Y, U, V (N_n — послед. полож. целочисленных с. в.) $\{m_n\}$ — натуральна; $\{c_n\}$ — действительнозначная; $S_{n,m_n} - a_n \Rightarrow Y$, $\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U$, $a_n \frac{N_n}{m_n} - c_n \Rightarrow V$. Тогда последовательность $S_{n,N_n} - c_n \Rightarrow Z$, причём х. ф. Z имеет следующий вид $\mathbb{E} e^{itV} h^U(t)$, где $h(t)$ — х.ф. Y

Что такое a_n - ?

это U?

?

- Если V - вырожденная, то х.ф. имеет вид $e^{it\beta} \mathbb{E} h^U(t)$ (значит, с точностью до множителя это теорема переноса)
- Если $U \overset{п.в.}{\equiv} 1$, то $\mathbb{E} e^{itV} h(t) = h(t) \mathbb{E} e^{itV} \sim Y + V$ (если Y и V независимы) Это - частный случай смесей.

Попробуем сформулировать аналог т. Пуассона: случайная сумма случайных индикаторов.

<u>Теорема</u> (начало) Пусть $\{X_{n,p}\}$ — семейство последовательностей с.в., т.ч. при любом фикс. p $X_{n,p} \sim \begin{cases} 1 & с \text{ вер. } p \\ 0 & с \text{ вер. } 1-p \end{cases}$, и они независимы $\forall p$; Пусть N_p — семейство положительных целочисленных с.в., причём $\forall p$ $N_p, X_{1,p}, X_{2,p} \ldots$ — независимы;

Обозначим $S_p = \sum_{i=1}^{N_p} X_{ip}$, $p \to 0$

• Предположим, мы рассматриваем деятельность страховых компаний; N_p - число договоров, заключенных за месяц; p - вер-ть случая, от которого страхуются, $X_{ip} = \mathbb{1}$(Произошло ЧП). Тогда S_p - количество выплат по портфелю.

<u>Теорема</u> (окончание) $\exists N$: $pN_p \Rightarrow N$ при $p \to 0$; тогда $S_p \Rightarrow S$, где S - дискретная с.в: $\mathbb{P}(S=k) = \frac{1}{k!}\int_0^{+\infty} e^{-z} z^k \, d\mathbb{P}(N<z)$?

<u>Д-во</u> Р-м $p_n \to 0$; $m_n = \left[\frac{1}{p_n}\right]$; Тогда $\sum_{i=1}^{m_n} X_{i,p_n} \Rightarrow Y \sim \Pi(1)$ (по т. Пуассона, обычной); ($S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$, $np_n \to \lambda$, $S_n \Rightarrow S \sim \Pi(\lambda)$, а $m_n p_n \to 1$). $h(t) = e^{e^{it}-1}$, $\frac{N_{p_n}}{m_n} = \frac{p_n N_{p_n}}{\underbrace{p_n m_n}_{\to 1}} \Rightarrow N$.

Выполнены, таким образом, все условия т. переноса $\Rightarrow S$ имеет х.ф. $\int h^u(t)\, d(\mathbb{P}(N<u)) = \int_0^{\infty} e^{u(e^{it}-1)} dP(N<u)$ $\overset{\text{этому соотв.}}{\Longrightarrow} \frac{1}{k}\int_0^{\infty} e^{-z} z^k \, dP(N<z)$. От p_n ничего тут не зависит (*) так что всё верно и при $p \to 0$ (произвольно) Ч.Т.D.

<u>Опр</u> Смесь: $H(x) = \int F(x,y)\, d\,G(y)$ ← смешивающее (F, G - это ф.р.)

↑ смешиваемое

(*) - смешанное пуассоновское распред. Например, если $N \sim \Gamma$, то S - отрицательно-биномиальное.

• Если в теореме переноса $H(x) = \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u)$ - масштабная смесь нормальных законов. Покажем, что это действительно так: $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u) =$

$= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\sqrt{u}y}\, d\Phi(y)\, dA(u) = \int_0^{+\infty} \varphi(t\sqrt{u})\, dA(u) \ominus$ Вспомним, что $\varphi(t) = \exp\{-t^2/2\} \ominus \int_0^{\infty} e^{-tu^2/2} dA(u) = \int_0^{\infty} \varphi^u(t)\, dA(u)$.

• Класс пред. р-й ширек: нормальное ($\frac{e^{-x^2/2}}{|x|}$ - скорость убывания хвоста), Лапласа ($p(x) = \frac{1}{2}M e^{-M(x)}$, скор. убыв. хвоста $e^{-M(x)}$), Стьюдента ($\frac{1}{|x|^r}, r>0$), Коши ($\frac{1}{|x|}$)

Опр. Пусть $F(x,y)$ опр. на $\mathbb{R}\times \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}\subset \mathbb{R}^n$; на $\mathcal{Y}$ зададим сигма-алгебру Σ. Пусть при любом фикс. $y\in\mathcal{Y}$ $F(x,y)$ – ф-я распределения; при любом фикс. x $F(x,y)$ измерима отн. Σ. Пусть G-мера на $(\mathcal{Y},\Sigma)$. Тогда $H(x)=\int\limits_{\mathcal{Y}} F(x,y)dG(x)$ называется смесью F и G. (F – смешиваемое, G – смешивающее)

Если с.в. $Y(y)\equiv y$, то $H(x)=\mathbb{E}F(x,Y(x))$. Если $\exists f(x,y)$ – плотность Y, то $\exists$ плотность смеси $h(x)=\mathbb{E}f(x,Y)$

Если Y дискретно, то $H(x)=\sum\limits_i p_i F(x,y_i)$; $F(x,y_i)=$
$=\sum F_i(x)$ – компоненты смеси, p_i – веса компонент.

• Сдвиг-масштабные смеси: $y=(U,V)$; $F(x,y)=F\left(\frac{x-V}{U}\right)$
$V\in\mathbb{R}, U>0$; $\mathcal{Y}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$. Тогда $H(x)=\iint F\left(\frac{x-V}{U}\right)G(du,dv)$
$h(x)=\iint \frac{1}{U}f\left(\frac{x-V}{U}\right)G(du\,dv)$; в терминах случайных величин, $H(x)=\mathbb{E}F\left(\frac{x-V}{U}\right)$; $H(x)$ соотв. распределению с.в. $X\cdot U+V$, где $X,(U,V)$ – независимы.

• Дискретный случай: $H(x)=\sum p_i F\left(\frac{x-a_i}{b_i}\right)$; $h(x)=\sum\frac{p_i}{b_i}\cdot f\left(\frac{x-a_i}{b_i}\right)$

• Пусть мы наблюдаем некую популяцию из K субпопуляций. $F_i(x)$ – вер-ть того, что значение признака не превосходит x, при условии, что индивид из i-ой популяции; p_i – вер-ть выбрать индивида из i-й популяции. $H(x)=\sum\limits_{i=1} p_iF_i(x)$ – вероятность того, что значение признака меньше x.

• Очень важна обратная задача: по смеси восстановить компоненты (расщепление смеси)

Опр. $H(x)=\mathbb{E}F(x,Y)$; пусть Q – семейство с.в., заданных на

(Y, Σ); через H обозначим семейство $H = \{H_Y(x), Y \in Q\}$. Семейство H наз-ся идентифицируемым, если из равенства $\mathbb{E}F(x, Y_1) = \mathbb{E}F(x, Y_2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $Y_1, Y_2 \in Q$, следует, что $Y_1 \overset{d}{=} Y_2$.

Пример. (Не все семейства идентефицируемы) Равн. р-е представимо двояко:

$$\frac{1}{3} 3 I_{[0,1/3)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} I_{[\frac{1}{3},1]} = \frac{1}{2} 2 I_{[0,\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} 2 I_{[\frac{1}{2},1]}$$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ № 11}}$

181109

В дальнейшем нас будут интересовать сдвиг масштабные смеси вида $\mathbb{E}F\left(\frac{U-V}{U}\right)$, где F - ф.р. для $\forall$ значений (u,v) с.в. (U,V)

Сформулируем идентефицируемость для сдвиг-масштабных смесей. Пусть $X_1, X_2 \sim F(x)$, $X_1, X_2, (U_1, V_1), (U_2, V_2)$ опр. на одном вер. пр-ве, X_1 и (U_1, V_1) независимы, X_2 и (U_2, V_2) независимы; тогда семейство сдвиг-масштабных смесей идентефицируемы, если из $X_1 U_1 + V_1 \overset{d}{=} X_2 U_2 + V_2 \Rightarrow (U_1, V_1) \overset{d}{=} (U_2, V_2)$

Важен случай конечных семейств: $H = \left\{\sum_{j=1}^{K} p_j F\left(\frac{x-a_j}{b_j}\right), a_j \in \mathbb{R}, b_j > 0, p_j > 0, \sum_{j=1}^{K} p_j = 1\right\}$. Оно идентефицируемо, если

$$\sum_{j=1}^{K} p_j F\left(\frac{x-a_j}{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{m} q_i F\left(\frac{x-b_i}{d_i}\right)$$

влечёт $K = m$ и $\forall j = \overline{1,K}$ $\exists i$, т.ч. $p_j = q_i$, $a_j = b_i$, $b_j = d_i$

Опр. Семейство $F(x,y)$, где $y > 0$, называется аддитивно-замкнутым, если $\forall y_1 > 0, y_2 > 0$ $F(x, y_1) * F(x, y_2) = F(x, y_1 + y_2)$

(Вспомним, что свёртка $F_1(x) * F_2(x) = \int F_1(x-u)\, dF_2(u)$ или наоборот)

Пример. $\left\{\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right), s > 0\right\}$ - адд.-зам. относительно дисперсии (Φ - ф.р. Стандартного Нормального Закона!!!)

Теорема 1. Если $\{F(x,y)\}$ аддитивно-замкнуто, то оно идентефицируемо.

Теорема 2. Пусть $F(x, y) = F(xy)$, $y > 0$, $F(0) = 0$ (т.е. распределение сосред на положительной оси). Тогда, если ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ функции $G(y) = F(e^y)$ нигде не обращается в ноль, то семейство $\{\mathbb{E}F(x, Q)$, где $Q > 0$ с вер. $1\}$ идентифицируем

Теорема 3. Пусть $\mathcal{Q}$ – семейство всех с. в.; $\mathcal{H} = \{\mathbb{E}F(x - Q),\ Q \in \mathcal{Q}\}$ (F – фиксировано, дано свыше). Тогда $\mathcal{H}$ идентиф. $\Leftrightarrow$ $f(t)$ – х.ф. $F(x)$ нигде не обр. в ноль.

Следствие. Сдвиговые смеси безгранично-делимых законов идентиф. (ибо у них х.ф. нигде не ноль)

Теорема 4. Конечные сдвиг-масштабные смеси норм. законов идент.

Пример. Сдвиг-масштабные смеси нормальных законов при произв. смешивающем распределении не являются, вообще говоря, идентиф. Пусть X_1, X_2, U_1, U_2 – независимые с. в; $X_1, X_2 \sim N(0,1)$; $U_2 > 0$ с вер. 1; U_1 – вырожденная единица (т.е. $\mathbb{P}(U_1 = 1) = 1$). Рассмотрим $Z = X_1 U_2 + X_2$

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x-V}{U}\right) d\,\mathbb{P}(U_2 < U)\, d\,\mathbb{P}(X_2 < V)$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\frac{x-V}{U}\right) d\,\mathbb{P}(U_1 < U)\, d\,\mathbb{P}(X_1 U_2 < V)$

В 1) $(U', V') = (U_2, X_2)$, в 2) $(U'', V'') = (U_1, X_1 U_2)$.

Эти два вектора по распределению не совпадают.

Процессы Кокса

Р-м пуассоновский процесс $N_\lambda(t)$, т.ч.

1) Приращения его независимые: $N_\lambda(t) - N_\lambda(s)$ и $N_\lambda(U) - N_\lambda(V)$ независимы, если $[s, t]$ и $[U, V]$ не пересекаются

2) Процесс однороден: $N_\lambda(t+h) - N_\lambda(t) \overset{d}{=} N_\lambda(s+h) - N_\lambda(s)$

3) $N_\lambda(0) = 0$ п.н.;

4) при $h \to 0+0$ монотонно, $\mathbb{P}(N_\lambda(h)=0)=1-\lambda h+\bar{\bar{o}}(h)$ $\forall \lambda>0$

$$\mathbb{P}(N_\lambda(h)=1)=\lambda h+\bar{\bar{o}}(h);\ \mathbb{P}(N_\lambda(h)\geqslant 2)=\bar{\bar{o}}(h)$$

Заметим, что $\mathbb{P}(N_\lambda(t)=k)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$; $\mathbb{E}N_\lambda(t)=\mathbb{D}N_\lambda(t)=\lambda t$, λ-интенсивность.

Хорошие свойства: а) время ожидания скачка имеет экспон. распределение (самое энтропичное на $\mathbb{R}^+$); б) условное распределение точек скачков на $[a,b]$ при условии $N_\lambda(b)-N_\lambda(a)=n$ совпадает с совместным распределением порядковых статистик, n-х из выборки равномерного распределения.

Однако хотим для неоднородных процессов модель тоже!

• Неоднородный Пуассоновский процесс: пусть $\lambda(t)$ - локально интегр. ф-я; $\Lambda(t)=\int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau$. $N^*(t)$ - неодн. пуассоновский процесс, если: 1) $\mathbb{P}(N^*(0)=0)=1$

2) $\mathbb{P}(N^*=k)=\dfrac{e^{-\Lambda(t)}(\Lambda(t))^k}{k!}$

Если N_1 - станд. Пуассон. процесс ($\lambda(t)\equiv 1$), то $\mathbb{P}(N^*(t)=k)=$
$=\mathbb{P}(N_1(\Lambda(t))=k)$ - стохастически эквивалентные процессы.

При этом $N_\lambda(t)$ и $N_1(\lambda t)$ тоже эквиваленты стохастически.

При этом $\mathbb{E}N^*(t)=\Lambda(t)$; $\lim\limits_{h\downarrow 0}\left[\dfrac{N^*(t+h)-N^*(t)}{h}\right]=$
$=\lim\limits_{h\downarrow 0}\dfrac{\Lambda(t+h)-\Lambda(t)}{h}=\lambda(t)$ - мгновенная интенсивность процесса

Итак, пусть $\Lambda(t)$ - некий случ. процесс, обладающий следующими свойствами:

1) $\Lambda(0)=0$ п.н;

2) $\mathbb{P}(\Lambda(t)<\infty)=1$ $\forall t\geqslant 0$

3) Траектории процесса неубывают и непр. справа

Тогда определим $N(t)=N_1(\Lambda(t))$ - дважды-стохастический пуас. процесс (процесс Кокса) (N_1, Λ - независ.)

Если $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau$, где $\lambda(\tau)$ - случ. процесс с положит. траекториями, то $\lambda(t)$ - мгновенная стохастическая интенсивность. $\Lambda(t)$ наз-ся управляющим процессом.

Телефоны со случайной интенсивностью звонков.

- $\mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}N_1(t) / \Lambda(t)) = \mathbb{E}\Lambda(t)$.
- $\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}N^2(t) - \mathbb{E}^2N(t) = \mathbb{E}\mathbb{E}(N^2(t) / \Lambda(t)) - \mathbb{E}^2\lambda(t) =$ (Λ?)

$= \mathbb{E}\Lambda(t) + \mathbb{E}\Lambda^2(t) - \mathbb{E}^2\lambda(t) = \mathbb{E}\Lambda(t) + \mathbb{D}\Lambda(t)$ (Λ?)

- $\ell(t,\omega)$ - траектория неотр. случ. пр.

Теперь рассмотрим случайную сумму вида $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$,
где $X_1 \dots X_k \dots$ - независимые, $N(t)$ - процесс Кокса,

?. → $X_1(t), N(t), X_2 \dots$ - независимы для $\forall t \geq 0$.

<u>Опр</u> $S(t)$ - обобщённый процесс Кокса. Если $\Lambda(t) = \lambda t$, то мы получаем просто обобщ.-пуасс. процесс.

25.11.09

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 12}}$

<u>Обобщенные процессы Кокса.</u>

<u>Пример</u> Броуновское движение частицы. $N(t)$ - число соударений с другими частицами среды до момента t включительно. X_i - смещение частицы в силу соударения. Тогда $S(t)$ - координата частицы в момент t.

- Не трудно подсчитать $\mathbb{E}S(t) = a\,\mathbb{E}\Lambda(t)$, $\mathbb{D}S(t) =$

$= \mathbb{E}\Lambda(t)(a^2 + b^2) + \mathbb{D}\Lambda(t)a^2$. $(\mathbb{E}X_i = a, \mathbb{D}X_i = b)$

<u>Теорема</u> (ЦПТ для ОПК) $\exists\, d(t) > 0$ и неогр. возрастает (масштабирование).
Для существования с. в. Z, т.ч. $\frac{S(t)}{b\sqrt{d(t)}} \xrightarrow[t\to\infty]{} Z$,
$(\mathbb{E}X_i = 0)$

необходимо и достаточно существование с.в. U, т.ч.

1) $\mathbb{P}(Z < x) = \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) d\mathbb{P}(U < y) = \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right)$

2) $\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow U$

Д-во Существенно не отличается от т. Перенса. Ч.Т.Д.

Замечание. Условие 2 - условие "статистической регулярности". Отметим, что сдвиг-масштабные смеси нормальных законов имеют более тяжелые хвосты, чем нормальное распределение. Это отвечает реальности: там не всё так плохо, как в устойчивых, но и не так хорошо, как в нормальном.

Следствие. $Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow 1.$

Д-во. Следует из теоремы и идентефицируемости смесей н.р. Ч.Т.Д.

Пусть $G_{\alpha,0}(x)$ - ф.р. строго устойчиво закона; х.ф.

$g_{\alpha,\theta}(t) = \exp\{-|t|^{\alpha}\exp(-i\frac{\pi\theta\alpha}{2}\operatorname{sign}(t))\}, \; |\theta| \le \theta_{\alpha} = \min(1, \frac{2}{\alpha}-1)$

$0<\alpha\le 2$

$\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$

Теорема. (Крит. сх. ОПК к строго устойч.) Пусть выполнены требования из пред. теоремы;

$\mathbb{P}\left(\frac{S(t)}{\delta\sqrt{d(t)}} < x\right) \underset{t\to\infty}{=\!=} G_{\alpha,0}(x) \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow G_{\frac{\alpha}{2},1}(x).$

Д-во Из пред. теоремы и справедливости представления

$G_{\alpha,0}(x) = \int_0^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) d\, G_{\frac{\alpha}{2},1}(y)$ (Золотарёв 1983: одномерные устойчивые распределения) ЧТД.

Пусть n - номер наблюдения; $S(t)$ наблюдается в n точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$, причём $t_k - t_{k-1} = const$. Пусть $\Lambda(n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, Z_i - норсв (т.е. у Λ независимые приращения); $S_n = \sum_{i=1}^{N(\Lambda(n))} \lambda_i$

Теорема. $\frac{S(n)}{b_n} \Rightarrow G_{2,0}(x)$ при некоем выборе констант b_n

$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_1 > x)}{\mathbb{P}(Z_1 > Kx)} = K^{\alpha/2} \;\forall K>0.$ (Хвосты управляющего процесса ведут себя как надо)

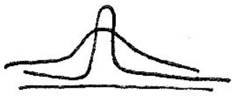
$N(\cdot) \xrightarrow{P} \infty$

Теорема (ЗБЧ для обоб. пр Кокса) Пусть $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$, $\mathbb{E}X_i = a$. Тогда $\frac{S(t)}{t} \Rightarrow Z \Leftrightarrow \frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow U$, причём $Z \overset{d}{=} aU$.

$\mathbb{E}\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$, y-неотр. с.в.; $\mathbb{E}\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right) = \int_0^{+\infty} \Phi\left(\frac{x}{y}\right) d\mathbb{P}(Y<y)$

Плотность: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) d\mathbb{P}(Y<y)$, φ-плотность $N(0,1)$

В дискретном случае, $\sum_k p_k \Phi\left(\frac{x}{y_k}\right)$ п-ть $\sum_k \frac{p_k}{y_k}\varphi\left(\frac{x}{y_k}\right)$

Островершинность:  - при острой купол масса утекает на бесконечность.

Если есть 4й момент, то островер. определяется коэф. эксцесс

$\varkappa(X) = \mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathbb{D}X}}\right)^4$ при $\mathbb{E}X^4<\infty$.

Если $X \sim N(0,1)$, то $\varkappa(x) = 3$.

Масштабная смесь: $\overset{X,Y\text{-незав}}{\mathbb{E}}\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right) \sim \mathbb{P}(X\cdot Y<x)$, $X\sim N(0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{P}(Y\geq 0)=1$.

Лемма. Пусть с.в X: $\mathbb{E}X=0$; $\mathbb{P}(Y\geq 0)=1$, X,Y-незав. тогда $\varkappa(X\cdot Y)\geq \varkappa(X)$. (при условии, что $\mathbb{E}X^4<\infty$, $\mathbb{E}Y^4<\infty$)

Док-во.
$$\varkappa(X\cdot Y) = \frac{\mathbb{E}(XY-\mathbb{E}XY)^4}{(\mathbb{E}(XY-\mathbb{E}XY)^2)^2} = \frac{\mathbb{E}(XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y)^4}{(\mathbb{E}(XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y)^2)^2} =$$
$$= \frac{\mathbb{E}X^4Y^4}{(\mathbb{E}X^2Y^2)^2} = \frac{\mathbb{E}X^4\,\mathbb{E}Y^4}{\mathbb{E}^2X^2\,\mathbb{E}^2Y^2} = \varkappa(X)\frac{\mathbb{E}Y^4}{\mathbb{E}^2Y^2} \geq \varkappa(X)$$

По нер-ву Йенсена, $\mathbb{E}Y^4 \geq (\mathbb{E}Y^2)^2$. Ч.Т.Д.

Замечание. Равенство достигается ттт, $Y \overset{\text{п.н.}}{=} \text{const}$.

- Итак, если $X\sim N(0,1)$, $\mathbb{E}U^2<\infty$, то $\varkappa(X\sqrt{U})\geq\varkappa(X)$, т.е. масштабная смесь имеет более острую вершину.
- Пусть $Z = X\sqrt{U}$, p_Z- плотность; $\mathbb{P}(Z>x) = 1-\mathbb{E}\,\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right)$

Лемма $\mathbb{P}(Z>x)\geq 1-\Phi(\sqrt{2\pi}\,p_Z(0)\,x)$, если $\mathbb{E}\,U^{1/2}=1$, то $p_z(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\mathbb{P}(z > x) \geqslant 1 - \Phi(x)$ (x вост тяжелее, чем у нормального)

<u>Д-во</u> $\mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{v}}\right) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) d\mathbb{P}(v<y)$, при $x=0$: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} d\mathbb{P}(v<y) =$

$= \mathbb{E} v^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Легко д-ть и проче. Ч.Т.Д.

ЛЕКЦИЯ #13

021209

Устойчивость смесей относительно смешивающего распределения

Пусть $X_i \sim F_i(x)$, $Y_i \sim G_i(x)$; $\mathbb{P}(Y_i \geqslant 0) = 1$

$\rho(\xi, \eta) = \sup\limits_x |F_\xi(x) - F_\eta(x)|$. Задача: оценить $\rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right)$

"относительное расстояние"

через $\rho(X_1, X_2)$ и $\rho(Y_1, Y_2)$. Введём $H(x) = \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{v}}\right)$

(где $y = \sqrt{v}$). Как ни странно, легко видеть, что $H(x) \sim X \cdot Y$;

Пусть $X \sim N(0,1)$ и $\mathbb{P}(Y \geqslant 0) = 1$.

Введём $\Delta(x) = |H_1(x) - H_2(x)|$, $H_i \sim \frac{X_i}{Y_i}$; тогда $H(x) =$

$= \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < x\right) = \mathbb{P}(X<0)\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X < x \cdot Y)\mathbb{P}(Y>0) =$

$= F(0)(G(0+) - G(0)) + \int\limits_{0+}^{\infty} F(xy)\, dG(y)$. Тогда

$$\Delta(x) \leqslant |F_1(0)(G_1(0+) - G_1(0))| + |F_2(0)(G_2(0+) - G_2(0))| +$$

$$+ \underbrace{\left|\int\limits_{0+}^{\infty} F_1(xy)\, dG_1(y) - \int\limits_{0+}^{\infty} F_2(xy)\, dG_2(y)\right|}_{Q_2} = Q_1 + Q_2$$

- На Q_1 ограничимся тем, что скажем, что $Q_1 = \mathbb{P}(X_1 < 0) \cdot \mathbb{P}(Y_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 < 0)\,\mathbb{P}(Y_2 = 0)$.

- $Q_2 \leqslant \left|\int\limits_{0+}^{\infty} (F_1(xy) - F_2(xy))\, dG(y)\right| + \left|\int\limits_{0+}^{\infty} F_2(xy)\, d(G_1(y) - G_2(y))\right| =$

$= Q_{21} + Q_{22}$;

$$Q_{21} \leqslant \int_0^{+\infty} \rho(X_1, X_2)\, d G_1(y) = \rho(X_1, X_2)\, \mathbb{P}(Y_1 > 0)$$

Q_{22}: если $x = 0$, то $Q_{22} = \mathbb{P}(X_2 < 0) \left| \left(\mathbb{P}(Y_1 > 0) - \mathbb{P}(Y_2 > 0)\right)\right| =$

$= \mathbb{P}(X_2 < 0) \left| \mathbb{P}(Y_1 = 0) - \mathbb{P}(Y_2 = 0) \right|$

Если же $x \neq 0$, возьмём интеграл по частям:

$$Q_{22} = \left| F_2(xy) \left| G_1(y) - G_2(y) \right| \Big|_0^{+\infty} - \int_{0+}^{\infty} [G_1(y) - G_2(y)]\, d_y F_2(xy) \right|$$

$\leqslant Q_{221} + Q_{222}$; $Q_{221} = F_2(0+) \left| G_1(0+) - G_2(0+) \right| =$

$= \mathbb{P}(X_2 \leqslant 0) \left| \mathbb{P}(Y_1 = 0) - \mathbb{P}(Y_2 = 0) \right|$

учитывает вклад x

$$Q_{222} \leqslant \int_0^{\infty} \rho(Y_1, Y_2)\, d_y F(x, y) = \rho(Y_1, Y_2)\, I_2(x)$$

$$I_2(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_2 > 0), & x > 0 \\ \mathbb{P}(X_2 < 0), & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы показали, что верна

<u>Лемма.</u> Пусть $X_i \sim F_i(x)$, $Y_i \sim G_i(y)$, причём $\mathbb{P}(Y_i \geqslant 0) = 1$

Тогда $\Delta = \rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right) \leqslant \mathbb{P}(X_1 < 0) + \mathbb{P}(Y_1 = 0) +$

$+ \mathbb{P}(X_2 < 0)\mathbb{P}(Y_2 = 0) + \rho(X_1, X_2)\mathbb{P}(Y_1 > 0) + \mathbb{P}(X_2 \leqslant 0) \cdot$

$\cdot \left| \mathbb{P}(Y_1 = 0) - \mathbb{P}(Y_2 = 0) \right| + \rho(Y_1, Y_2)\, I_2(x)$

<u>Следствие 1.</u> $\rceil\ \mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 0) = 0$.

Тогда $\Delta \leqslant \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2) \min\limits_{i=1,2} \max\left((\mathbb{P}(X_i > 0), \mathbb{P}(X_i < 0)\right))$ (в силу равноправности индексов)

<u>Следствие 2.</u> $\rceil\ \mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 0) = 0$ и хотя бы для одного X_i $\mathbb{P}(X_i > 0) = \mathbb{P}(X_i < 0)$; тогда

$\Delta \leqslant \rho(X_1, X_2) + \frac{1}{2}\rho(Y_1, Y_2)$

(ибо $\max(\mathbb{P}(X_i>0), \mathbb{P}(X_i<0)) \leqslant 1/2$)

<u>Следствие 3.</u> $\exists\, \mathbb{P}(Y_1=0) = \mathbb{P}(Y_2=0) = 0$; тогда $\Delta \leqslant \rho(X_1,X_2) + \rho(Y_1,Y_2)$. (Простейшее следствие Следствия 1)

Предположим теперь, что $\mathbb{P}(Y_i=0)=0$; $\rho\left(\frac{1}{Y_1}, \frac{1}{Y_2}\right) =$
$= \sup\limits_x \left|\mathbb{P}\left(\frac{1}{Y_1}<x\right) - \mathbb{P}\left(\frac{1}{Y_2}<x\right)\right| = \sup\limits_{x>0}\left|\mathbb{P}\left(Y_1>\frac{1}{x}\right) - \mathbb{P}\left(Y_2>\frac{1}{x}\right)\right| =$
$= \sup\limits_{x>0}\left|1 - \mathbb{P}\left(Y_1 \leqslant \frac{1}{x}\right) - 1 + \mathbb{P}\left(Y_2 \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}}_{z}\right)\right| = \sup\limits_z |\mathbb{P}(Y_1<z) + \mathbb{P}_2(Y_2<z)| =$
$= \rho(Y_1, Y_2)$

<u>Следствие 4.</u> $\exists\, \mathbb{P}(Y_1=0) = \mathbb{P}(Y_2=0) = 0$; $\tilde{\Delta} = \rho(X_1Y_1, X_2Y_2)$
$\leqslant \rho(X_1,X_2) + \rho(Y_1,Y_2)\min\limits_{i=1,2}\max(\mathbb{P}(X_i>0), \mathbb{P}(X_i<0))$

<u>Следствие 5.</u> $\exists\, \mathbb{P}(Y_i=0)=0$; $\exists$ хоть для одного X_i
$\mathbb{P}(X_i>0) = \mathbb{P}(X_i<0) \Rightarrow \tilde{\Delta} \leqslant \rho(X_1,X_2) + \frac{1}{2}\rho(\cancel{X}_1, Y_2)$

<u>Следствие 6.</u> $\exists\, \mathbb{P}(Y_i=0)=0$; тогда $\tilde{\Delta} \leqslant \rho(X_1,X_2) + \rho(Y_1,Y_2)$

Вернёмся к нашей смеси вида $\mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right)$; для масштабных смесей нормальных законов $\sup\limits_x \left|\mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U_1}}\right) - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U_2}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\rho(\sqrt{U_1}, \sqrt{U_2})$ (из Следствия 5)

Итак, прямая задача устойчива. Займемся обратной. Посмотрим на х.ф. нашей смеси: $f_j(t)$ – х.ф. $\mathbb{E}\Phi\left(\frac{x}{U_j}\right) \sim Z_j = X\sqrt{U_j}$
$f_j(t) = \mathbb{E}\exp\{itZ_j\} = \mathbb{E}e^{itXU_j} = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(e^{itX\sqrt{U_j}} \,|\, U_j\right) =$
$= \mathbb{E}e^{-\frac{1}{2}t^2U_j}$; $\psi_j(s) = \mathbb{E}e^{-sU_j}$ – преобразование Лапласа-Стильтьеса.
$|f_1(t) - f_2(t)| = |\psi_1(\frac{1}{2}t^2) - \psi_2(\frac{1}{2}t^2)|$;

Как можно подсмотреть в книжке Феллера, $\mathbb{P}(Y_j<x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{n\le\sqrt{2t}} \frac{(-1)^n(2t)^{n/2}}{n!} f_j^{(n)}(\sqrt{2t}\,x); \quad |\mathbb{P}(Y_1<x)-\mathbb{P}(Y_2<x)| \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{n\le\sqrt{2t}} \frac{(2t)^{n/2}}{n!} \left| f_1^{(n)}(\sqrt{2t}\,x) - f_2^{(n)}(\sqrt{2t}\,x)\right|$$

Т.е. одних расстояний мало... Равномерная метрика не годится для решения обр. задачи.

Пример. $\sup_x \left|\mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y_1}\right) - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y_2}\right)\right| \overset{?}{<} \varepsilon$ (Пусть это не известно)

Пусть $\mathbb{P}(Y_1=1)=1$, $\mathbb{P}(Y_2=1+\varepsilon')=1$, где $\varepsilon'=\varepsilon\sqrt{2\pi e}$. $\mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y_1}\right) - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y_2}\right) = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{1+\varepsilon'}\right) =$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{ф-ла Лагранжа,}\\ \delta\in[0,1]\end{array}\right\} = \frac{x\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\left(\varphi\left(\delta+(1-\delta)\frac{1}{1+\varepsilon'}\right)\right), \ominus$$

$$\delta+\frac{1-\delta}{1+\varepsilon'} = \frac{\delta\varepsilon'+1}{1+\varepsilon'} \ge \frac{1}{1+\varepsilon'} \ominus \frac{x\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\varphi\left(x\left(\frac{1+\delta\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\right)\right) \le \{\text{в силу чётности } \varphi\} \le \frac{x\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon'}\right)$$

$$\sup_x \frac{x\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon'}\right) = \sup_{x'=\frac{x}{1+\varepsilon'}} \varepsilon' x\,\varphi(x') =$$

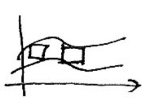
Итак, нас интересует $\sup_x x\varphi(x) = \sup_x \frac{xe^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \Rightarrow \sup_x \left|\mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y_1}\right) - \mathbb{E}\Phi\left(\frac{X}{Y_2}\right)\right| \le \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2\pi e}} = \varepsilon$$

Итак, они хорошие, но каково расстояние между Y_1 и Y_2? $\rho(Y_1,Y_2)=1$. Регуляризировать по Тихонову надо по-хорошему. Но мы просто возьмём другую метрику — метрику Леви: X, Y — с.в., $\sim F, G$;

(она метризует слаб. сходимость) $\rho(X,Y) = L(X,Y) =$

$$= L(G,F) = \inf\{h:\ G(x-h)-h \le F(x) \le G(x+h)+h\ \forall x\in\mathbb{R}\}$$



(Сторона макс. квадрата, что можно вписать между графиками F и G)