Опр. ***Вероятностная модель:*** это математическая модель реального явления, содерж. элементы случайности.

Необходимо знать: Условия адекватности и парадокс Бертрана.

Теорема[без док-ва] (О продолжении меры)**.** *Существует и единственна мера μ на σ-алгебре $\sigma([a,b])$ — Борелевская σ-алгебра на $[0,1]$, такая что $\mu([a,b]) = b-a$.*

Опр. ***Случайная величина:*** это отображение $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$: $\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Необходимо знать: Модели центра(мат. ожидание, q-квантиль и мода) и разброса(дисперсия, интерквантильный размах, инженерная метрика, median absolute deviation и $\mathbb{E}\,|\xi - \operatorname{med}\xi|$) и их свойства.

Необходимо знать: Стохастическая независимость и свойства корреляции.

Необходимо знать: Виды сходимостей(сх-ть почти всюду, по вероятности, в среднем порядка r, слабая сх-ть и сх-ть по распределению), а также их связь.

Теорема[без док-ва] (УЗБЧ Колмогорова)**.** *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. $\exists\,\mathbb{E}\,X_i = a$, тогда $\frac{\sum X_i}{n} \to a$, почти всюду.*

Теорема[без док-ва] (ЦПТ)**.** *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. $\exists\,\mathbb{E}\,X_i = a$ и $\exists\,\mathrm{D}\,X_i = \sigma^2$, тогда $P(\frac{\sum X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x) \rightrightarrows \Phi(x)$.*

Необходимо знать: Неравенство Чебышёва, закон трех сигм и константу $0.4 < C_0 < 0.71$ в неравенстве Берри-Эссеена.

Опр. ***Условие Линдеберга:*** Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — нез. сл. вел. $\exists\,\mathbb{E}\,X_i = a_i$, $\exists\,\mathrm{D}\,X_i = \sigma_i^2$, $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $B_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, $F_n = P(\frac{\sum X_i - A_n}{B_n} < x)$ и $\forall t > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_{i,n}} |x - a_i|^2\,dF_i(x) = 0, Q_{i,n} = \{x\colon |x - a_i| > tB_n\}$

Теорема[без док-ва] (ЦПТ Линдеберга-Феллера)**.** *Если выполнено условие Линдеберга, то $F_n(x) \rightrightarrows \Phi(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} P(|x_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0$*

$\forall\varepsilon > 0$

Опр. ***Условие Ляпунова:*** Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — нез. сл. вел. $\exists\,\mathbb{E}\,X_i = a_i$, $\exists\,\mathrm{D}\,X_i = \sigma_i^2$, $\exists\,\mathbb{E}\,|X_i - a_i|^3 = \mu_i^3$, $X_i = \sigma_i^2$, $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $B_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, $M_n^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^3$ и $\frac{M_n^3}{B_n^3} \to 0$

Необходимо знать: условия на n для того, чтобы применять ЦПТ имело смысл.

Теорема[с док-вом]. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р.с.в. и $X_i \sim Bi(1,p)$, пусть $np = \lambda$, $p \leqslant \frac{1}{4}$, $k - 1 \leqslant \frac{n}{4}$, тогда $P(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda + r_n(k)}\lambda}{k!}$, где $\frac{\lambda k}{n} + 2\frac{(1-k)k}{n}\ln\frac{4}{3} - \frac{2\lambda^2}{3n} \leqslant r_n(k) \leqslant \frac{\lambda k}{n} + \frac{(1-k)k}{2n}$*

Теорема[без док-ва] (Пуассона)**.** *Пусть задана схема серий и $np_n \to \lambda$, тогда $\forall k = 0, 1, \ldots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$*

Необходимо знать: Схема серий.

Опр. ***Устойчивое распределение:*** функция распределения $G(x)$ и соотв. хар. функ. $g(t)$ называется **устойчивой**, если $\forall a_1, a_2 > 0\ \exists a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, такие что $g(a_1 t) g(a_2 t) = e^{ibt} g(at) \Leftrightarrow \forall a_1, a_2 > 0$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ $\exists a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, такие что $G(a_1 x + b_1) * G(a_2 x + b_2) = G(ax + b)$

Необходимо знать: Общий вид устойчивых распределений и свойства.

Теорема[без док-ва] (Леви)**.** *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — назав. од. распр. сл. вел., $S_n = \frac{\sum X_i - a_n}{b_n}$, тогда $G(x)$ может быть предельной для S_n, при некотором выборе $a_n \in \mathbb{R}$ и $b_n > 0 \Leftrightarrow G(x)$ — устойчива.*

Опр. ***Безгранично делимая хар. ф-ия:*** пусть f(t) — хар. ф-ия, тогда f(t) называется **безгранично делимой** если $\forall n \exists f_n(t)$ — хар. ф-ия, такая что $f(t) = [f_n(t)]^n$

Теорема[без док-ва] (Хинчина)**.** *Функция $F(x)$ может быть предельной для $S_{n,m_n} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,m_n}$, в схеме серий удовлетворяющей условию пред. малости $\Leftrightarrow$ безгранично делима.*

Теорема[с док-вом]. *Пусть $X_{n,j} \sim \begin{cases} 1, & p_{n,j} \\ 0, & 1 - p_{n,j} \end{cases}$, $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$. Пусть также $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} p_{n,j} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{n,j} \to \lambda > 0$, тогда $\forall k = 0, 1, \ldots\ \lim\limits_{n \to \infty} P(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$*

Опр. ***Информация события B отн. A:*** $I(A|B) = \log \frac{P(A|B)}{P(A)}$, при условии $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$.

Опр. ***Информация в событии A:*** $I(A) = -\log P(A)$.

Необходимо знать: Свойства информации.

Опр. ***Энтропия эксперимента:*** $H(E) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log p_i$.

Теорема[с док-вом]. *Энтропия обладает следующими свойствами:*

1. *$H(E) \geqslant 0$, равенство достигается $\Leftrightarrow \exists i^* \in \{1, \ldots, n\}$, такое что $p_{i^*} = 1$.*

2. *Пусть E_0 — эксперимент с равновероятными исходами, тогда выполнено $H(E_0) \geqslant H(E)$, $\forall E$ с n исходами.*

3. *Пусть E — эксперимент с n исходами, E_1 — с $(n-1)$ исходом(объед. A_i и A_j), E_2 — эксперимент с A_i и A_j, тогда получим $H(E) = H(E_1) + (p_i + p_j) H(E_2)$*

4. *$H(E)$ не зависит от $A_1, \ldots, A_n$, а зависит только от вероятностей и симметричным образом.*

5. *$H(E)$ — непрерывна.*

Теорема[без док-ва] (Фадеева)**.** *Если некоторый функционал H зависит от $p_1, \ldots, p_n$ и для этого функционала справедливы свойства предыдущей теоремы, то $H(E) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log p_i$.*

Опр. ***Дифференциальная энтропия:*** Пусть ξ — абс. непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$, тогда **дифференциальной энтропией** ξ называется $H(\xi) = -\mathbb{E}\log p(x)$.

Необходимо знать: эффект квантования абсолютно непрерывной случайной величины и разницу между дифференциальной энтропией и пределом дискретной.

Теорема[с док-вом]. *Пусть ξ — абс. непрерывная сл. вел..*

1. *Пусть $\xi \sim U_{[-a,a]}$, тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta), \forall\eta : P(|\eta| \leqslant a) = 1$.*
2. *Пусть $\xi \sim P(\lambda)$, тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta)$, $\forall\eta : P(\eta \geqslant 0) = 1$ и $\mathbb{E}\eta = \frac{1}{\lambda}$.*
3. *Пусть $\xi \sim N(a,\sigma)$, тогда $H(\xi) \geqslant H(\eta), \forall\eta : \mathbb{E}\eta = a$ и $\mathrm{D}\eta = \sigma^2$.*

Опр. ***Случайный процесс:*** это семейство сл. вел. $X(\omega,t)$, $t \in T$, определенных на одном базовом вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Опр. ***Траектория случайного процесса:*** это $X(\omega_0,t)$, при фиксированном ω_0.

Необходимо знать: что такое случайный элемент, распределение процесса и т.д..

Опр. ***Процесс с незав. приращениями:*** это случ. проц., у которого $\forall n \geqslant 1, \forall t_0 < \ldots < t_n : t_i \in T$ следует, что $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы в совокупности.

Опр. ***Однородный процесс:*** это случ. проц. у которого $X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$ одинаково распределены $\forall t \in T, s \in T, h : t+h,\ s+h \in T$.

Опр. ***Пуассоновский процесс:*** это случ. проц. для которого выполнены следующие свойства:

1. Это процесс с независимыми приращениями.
2. Это однородный процесс.
3. $X(0) = 0$, почти всюду.
4. $\exists\lambda > 0$: при $h \to 0$ получаем $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{o}(h)$, $P(X(h) = 1) = \lambda h + \bar{o}(h)$, $P(X(h) \geqslant 2) = \bar{o}(h)$

Теорема[с док-вом]. *Пусть $\tau_1,\ldots,\tau_n$ — упорядоченные скачки Пуассоновского процесса на $[a,b]$. Тогда распределение $(\tau_1,\ldots,\tau_n \mid X(b) - X(a) = n)$ совпадает с распределением вариационного ряда, построенного по выборке объема n из равномерного распределения на отрезке $[a,b]$.*

Теорема[с док-вом]. *Пусть X(t) — Пуассоновский процесс с $\lambda > 0$. $P(\frac{X(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x) \rightrightarrows \Phi(x)$, при $\lambda t \to \infty$. $\delta(\lambda t) = \sup\limits_x |P(\frac{X(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$*

Опр. ***Случайная сумма:*** пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р.с.в., а N — целая случайная величина: $N, X_1, X_2, \ldots$ определены на одном вер. пр-ве и независимы. Тогда **случайной суммой** называется $S_N = X_1 + \ldots + X_N$.

Теорема[с док-вом]. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $F_{S_N}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k F^{*k}(x)$, *где* F^{*k} *— k'ая свертка F самой с собой.* $F^{*0} = \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}(x)$
2. *Если* $p_0 > 0$, *то* F_{sum} *— не явл. абс. непр.. Если* $p_0 = 0$ *и у* X_i *есть плотность, то есть плотность и у* S_N*:* $p_{S_N}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k p^{*k}(x)$
3. $f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$
4. $\mathbb{E}\, S_N = \mathbb{E}\, N\, \mathbb{E}\, X_1$, *а* $\mathrm{D}\, S_N = \mathrm{D}\, X_1(\mathbb{E}\, N + (\mathbb{E}\, X_1)^2)$

Теорема[с док-вом]. *Для Пуассоновской суммы справедливы следующие утверждения:*

1. S_λ *— безгранично делима.*
2. $\mathbb{E}\, S_\lambda = \lambda\, \mathbb{E}\, X_1$, *а* $\mathrm{D}\, S_\lambda = \lambda\, \mathbb{E}\, X_1^2$

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *— н.о.р.с.в. и* $\mathbb{E}\, X_1^2 < \infty$, $a = \mathbb{E}\, X_1$, $\sigma^2 = \mathrm{D}\, X_1$, *тогда* $\sup\limits_x |P(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(\sigma^2+a^2)}} < x) - \Phi(x)| \to 0$. *Если* $\mathbb{E}\, X_1^3 < \infty$, $L_1 = \frac{\mathbb{E}\, X_1^3}{(\sigma^2+a^2)^{3/2}}$, *то* $\sup \leqslant \frac{C_0 L_1}{\sqrt{n}}$

Теорема[без док-ва] (Реньи). *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *— н.о.р.с.в. и* $X_i \geqslant 0$, $0 < a = \mathbb{E}\, X_i < \infty$. *Положим* $S_M = \sum\limits_{i=1}^{M} X_i$, *где* $M \sim Geom(p)$. *Тогда* $\sup\limits_x |P(\frac{p}{a} S_M < x) - G(x)| \xrightarrow{p \to 0} 0$, *где* $G(x) = (1 - e^x)\mathbb{I}_{\{x \,\geqslant\, 0\}}$. *Если* $b^2 = \mathbb{E}\, X_i^2$, *тогда* $\sup\limits_x |P(\frac{p}{a} S_M < x) - G(x)| \leqslant \frac{pb^2}{(1-p)a^2}$.

Лемма[с док-вом]. *Пусть M — целочисл. обобщ. Пуассоновская сл. вел. (неотриц.). Тогда* S_M *— Пуассоновская сл. сумма.*

Лемма[с док-вом]. *Пусть* $M \sim Geom(p)$, *тогда M — обобщенная Пуассоновская сл. вел..*

Теорема[с док-вом]. *Любая геометрическая случайная сумма является Пуассоновской случайной суммой.* $M, X_1, X_2, \ldots$ *— независимы.* $S_M = \sum\limits_{i=0}^{M} X_i$, $M \sim Geom(p)$. *Тогда* $S_M \overset{d}{=} S_N$, *где* $N \sim \Pi(\ln \frac{1}{p})$. $S_N \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_N$, $Y_i \overset{d}{=} \sum\limits_{j=1}^{L} X_j$, *где* $L \sim$ *логарифмич. распр..*

Следствие. *Предположим* S_N *— Пуассоновская случайная сумма. Если* $g(t) = \frac{1 - e^{-\lambda f(t)}}{1 - e^{-\lambda}}$ *— хар. ф-ия, где* $X_i \sim f(t)$, $N \sim \Pi(\lambda)$, *то* S_N *— геометрическая случайная сумма.* $S_M \overset{d}{=} S_N$, $S_M \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_N$, $Y_i \sim g(t)$, $M \sim Geom(e^{-\lambda})$.

Следствие. *Любая геометрическая случайная сумма имеет безгранично делимое распределение.*

Теорема[с док-вом] (Теорема переноса). *Пусть* $\{X_{n,j}\}$ *— схема серий, в которой случ. вел. в одной серии являются незав. и од. распр.. Пусть* N_n *— положительная целочисленная сл. вел. незав. с* $\{X_{n,j}\}$. *Пусть* $\exists\{m_n\}$ *— неогр. возраст. посл. неотр. чисел:* $S_{n,m_n} = \sum\limits_{j=1}^{m_n} X_{n,j}$, $P(S_{n,m_n} < x) \to H(x)$, $P(\frac{N_n}{m_n} < x) \to A(x)$. *Тогда* $\exists F(x)$, *такая что* $P(S_{n,N_n} < x) \to F(x)$. $F(x)$ *соотв. хар. ф-ия* $f(t) = \int\limits_0^{+\infty} h^u \, dA(u)$. $h(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \, dH(x)$ *— х.ф.* $H(x)$.

Опр. ***Относительно компактная последовательность:*** это последовательность функций распределения, из любой подпосл. которой можно выделить последовательность сход-ся к $F \in \{F_n\}$

Необходимо знать: $\{F_n\}$ — относительно компактно тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_n (F_n(-M) + 1 - F_n(M)) = 0$.

Необходимо знать: теорему о конечных приращениях в общем виде.

Замечание: Если $\frac{N_n}{m_n} \to c$, то $A(x)$ — вырождена. Если $c = 1$, то $f(t) = h(t)$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $\{X_{n,j}\}$ *— схема серий,* N_n *— положительная целочисленная сл. вел.. Пусть для некоторых* Y, U, V *и последовательности натуральных чисел* $\{m_n\}$, *последовательностей действит. чисел* $\{a_n\}$ *и* $\{c_n\}$ *выполнено:* $S_{n,m_n} - a_n \Rightarrow Y$, $\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U$, $a_n \frac{N_n}{m_n} - c_n \Rightarrow V$. *Тогда* $S_{n,m_n} - c_n \Rightarrow Z$, *где х.ф.* Z *имеет вид:* $\mathbb{E}\, e^{itV} h^u(t)$, *где* h *— х.ф.* Y. *Если* V *— вырожденная, то с точностью до множителя теорема переноса. Если* U *— вырождена в 1, то* $\mathbb{E}\, e^{itV} h(t) = h(t)\, \mathbb{E}\, e^{itV} \sim Y + V$.

Теорема[с док-вом] (Аналог теоремы Пуассона). *Пусть* $\{X_{n,p}\}$ *— семейство посл-тей сл. вел.* $X_{n,p} \sim \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$. *Пусть* N_p *— семейство полож. случ. вел. и* $N_p, X_{1,p}, \ldots, X_{n,p}, \ldots$ *— независимы. Пусть* $S_p = \sum\limits_{i=1}^{N_p} X_{i,p}$. *Пусть* $\exists N$, *такое что* $pNp \overset{p\to 0}{\Rightarrow} N$, *тогда имеем* $S_p \Rightarrow S$, *такой что* $P(S = k) = \frac{1}{k!} \int\limits_0^{\infty} e^{-z} \, dP(N < z)$.

Опр. ***Смесь:*** пусть $F(x, y)$ определена на $R \times \mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$, на $\mathcal{Y}$ зададим σ-алгебру Σ. $F(x, y)$ при $\forall y \in \mathcal{Y}$ явл. функцией распределения. $F(x, y)$ при $\forall x$ измерима относительно Σ. G — мера на $(\mathcal{Y}, \Sigma)$. Тогда $H(x) = \int F(x, y) \, dG(y)$ называется смесью $F(x, y)$ относительно G

Замечание: F — смешиваемое, а G — смешивающее распределение.

Необходимо знать: что будет в дискретном случае, сдвиг-масштабные смеси и пример с популяциями.

Опр. ***Идентифицируемость:*** $H(X) = \mathbb{E}\, F(X, Y)$ и Q — семейство случ. вел. заданных на $(\mathcal{Y}, \Sigma)$. $\mathcal{H} = \{H_Y(x), Y \in Q\}$. $\mathcal{H}$ **идентифицируема**, если из равенства $\mathbb{E}\, F(x, Y_1) = \mathbb{E}\, F(x, Y_2)$ $\forall x, Y_1, Y_2 \in Q$ следует $Y_1 \overset{d}{=} Y_2$

Опр. ***Идентифицируемость:*** Пусть Q — семейство случ. вел. на Y, $\mathcal{H} = \{H_q(x) = \mathbb{E}\, F(X, q) : q \in Q\}$. $\mathcal{H}$ **идентифицируема**, если из равенства $\mathbb{E}\, F(x, q_1) = \mathbb{E}\, F(x, q_2)$ $\forall x, q_1, q_2 \in Q$ следует $q_1 \overset{d}{=} q_2$

Опр. ***Аддитивно замкнутое семейство:*** это семейство $F(x,y)$, где $y > 0$, такое что $\forall y_1 > 0, y_2 > 0$ следует выполнение равенства $F(x,y_1) * F(x,y_2) = F(x,y_1+y_2)$

Теорема[без док-ва]. *Если семейство аддитивно замкнуто, то оно идентифицируемо.*

Теорема[без док-ва]. $F(x,y) = F(xy)$, $y > 0$ *и* $F(0) = 0$, *тогда если преобразование Фурье ф-ии* $G(y) = F(e^y)$ *не обращается в* 0 *нигде, то* $\{\mathbb{E}\,F(x,q) : P(q > 0) = 1\}$ *идентифицируемо.*

Теорема[без док-ва]. *Пусть* Q *— семейство всех случ. величин* $F(x,y)$ *удовлетворяет условию опр. смеси.* $\mathcal{H} = \{\mathbb{E}\,F(X-q) : q \in Q\}$, *то* $\mathcal{H}$ *идентифицируемо* $\Leftrightarrow$ $f(t)$ *— хар. ф-ия соответствующая* $F(x)$ *нигде не обращается в* 0.

Теорема[без док-ва]. *Конечные сдвиг-масштабные смеси нормальных законов идентифицируемы.*

Опр. ***Процесс Кокса:*** $N(t) = N_1(\Lambda(t))$ — дважды стохаст. процесс или **процесс Кокса**.

Необходимо знать: свойства процесса Кокса и Пуассона.

Теорема[без док-ва] (ЦПТ для обобщ. проц. Кокса). *Пусть* $d(t) > 0$ *— неогр. возр. ф-ия,* $\mathbb{E}\,X_i = 0$. *Для того, чтобы существовала сл. вел.* Z: $\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \Rightarrow S$, *при* $t \to \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала* U *— сл. вел., такая что:*

1. $P(Z < x) = \int\limits_0^\infty \Phi(\frac{x}{\sqrt{y}})\,dP(U < y)$
2. $\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow U$ *(регулярность)*

Теорема[без док-ва] (Критерий сходимости процессов). $P(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x) \Rightarrow G_{\alpha,\vartheta}(x) \Leftrightarrow P(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < x) \Rightarrow G_{\frac{\alpha}{2},1}(x)$

Теорема[без док-ва]. $\frac{S(n)}{\delta_n} \Rightarrow G_{\alpha,0}(x)$ *при некотором выборе* δ_n *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(z_1 \geqslant x)}{P(z_1 \geqslant kx)} = k^{\alpha/2}$

Теорема[без док-ва] (ЗБЧ для обобщ. проц. Кокса). *Пусть* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$, $\mathbb{E}\,X_i = a$. $\frac{S(t)}{t} \Rightarrow Z \Leftrightarrow \frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow U$, *причем* $Z \stackrel{d}{=} aU$.

Опр. ***Коэффициент эксцесса:*** $\kappa(X) = \mathbb{E}(\frac{X-\mathbb{E}\,X}{\sqrt{\mathrm{D}\,X}})^4$, если $\mathbb{E}\,X^4 < \infty$.

Замечание: Если $X \sim N(0,1)$, то $\kappa(X) = 3$.

Лемма[с док-вом]. *Пусть* $\mathbb{E}\,X = 0$, $\mathbb{E}\,X^4 < \infty$, $P(Y \geqslant 0) = 1$, *тогда* $\kappa(XY) \geqslant \kappa(X)$.

Лемма[с док-вом]. $P(Z > \ ) \geqslant 1 - \Phi(\sqrt{2\pi}p_z(0)x)$, *если* $\mathbb{E}\,U^{-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow P(Z > x) \geqslant 1 - \Phi(x)$.

Лемма[с док-вом]. *Пусть* $X_i \sim F_i(x)$, $Y_i \sim G_i(y)$, $P(Y_i \geqslant 0) = 1$, *тогда* $\delta = \rho(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}) \leqslant P(X_1 < 0)P(Y_1 = 0) + P(X_2 < 0)P(Y_2 = 0) + \rho(X_1, X_2)P(Y_1 > 0) + P(X_2 \leqslant 0)|P(Y_1 = 0) - P(Y_2 = 0)| + \rho(Y_1, Y_2)I_2(X)$.

Следствие. *Пусть* $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$. *Тогда* $\delta \leqslant \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2) \min\limits_{i=1,2} \max(P(X_i < 0), P(X_i > 0))$.

Следствие. *Пусть* $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$ *и хотя бы для одного* X_i $P(X_i > 0) = P(X_i < 0)$. *Тогда* $\delta \leqslant \rho(X_1, X_2) + \frac{1}{2}\rho(Y_1, Y_2)$.

Следствие. *Пусть* $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$. *Тогда* $\delta \leqslant \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2)$.

Следствие. *Пусть* $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$. *Тогда получаем* $\tilde{\delta} = \rho(X_1Y_1, X_2Y_2) \leqslant \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2) \min\limits_{i=1,2} \max(P(X_i < 0), P(X_i > 0))$.

Следствие. *Пусть* $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$ *и хотя бы для одного* X_i $P(X_i > 0) = P(X_i < 0)$. *Тогда* $\tilde{\delta} = \rho(X_1Y_1, X_2Y_2) \leqslant \rho(X_1, X_2) + \frac{1}{2}\rho(Y_1, Y_2)$.

Следствие. *Пусть* $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$. *Тогда получаем* $\tilde{\delta} = \rho(X_1Y_1, X_2Y_2) \leqslant \rho(X_1, X_2) + \rho(Y_1, Y_2)$.

Необходимо знать: равномерная метрика "неправильная".
Опр. ***метрика Леви:*** $L(X, Y) = \inf\{h : G(x - h) - h \leqslant F(x) \leqslant G(x + h) + h, \forall x \in \mathbb{R}\}$
Необходимо знать: модель контагенации.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $Y = XU$, $\rho(\Phi(x), \mathbb{E}\,\Phi(xU^{-1}) = \sup\limits_x |\Phi(x) - \mathbb{E}\,\Phi(xU^{-1})|$. *Пусть* $\mathbb{E}(\max(U, U^{-1}) - 1) < \infty$, *тогда* $\rho(\Phi(x), \mathbb{E}\,\Phi(xU^{-1})) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\,\mathbb{E}(\max(U, U^{-1}) - 1)$.

Теорема[без док-ва]. *Пусть* $\exists\,\mathbb{E}\,U^{-2} < \infty$ *тогда* $\rho(\Phi(x), \mathbb{E}\,\Phi(xU^{-1})) \leqslant \mathbb{E}\,|U^{-2} - 1|$.

Необходимо знать: как связаны $\gamma(Z)$ и $\kappa(Z)$ и что они характеризуют.

Теорема[без док-ва]. *Пусть* $\exists\,\mathbb{E}\,U^{-4} < \infty$ *тогда* $\rho(\Phi(x), \mathbb{E}\,\Phi(xU^{-1})) \leqslant 0.648\gamma(xU)$.

Теорема[без док-ва]. *Пусть* $\exists\,\mathbb{E}\,U^{\delta} < \infty$ *тогда получаем следующее неравенство* $L(\Phi(x), \mathbb{E}\,\Phi(xU^{-1}) \leqslant (2 + \frac{2}{\delta\sqrt{2\pi e}})L(U^{\delta}, 1)$.

Необходимо знать: что такое $F_{p,\sigma}$ и $G_{p,a}$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $p \in [0, 1]$, $\sigma \in (0, 1]$, $L(\Phi(x), F_{p,\sigma}(x)) < \varepsilon$, *то* $L(U_{p,\sigma}, 1) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$, *где* $c \leqslant (\sqrt{e}(1 + \sqrt{2\pi}))^{1/2}$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $|a| < 1$. *Если* $L(\Phi(x), G_{p,a}(x)) < \varepsilon$, *то* $L(V_{p,a}, 0) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$, *где* $c \leqslant (\sqrt{e}(1 + \sqrt{2\pi}))^{1/2}$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $\sigma \in (0, 1]$, *если* $L(F_{p,\sigma}(x), F_{q,\sigma}(x)) < \varepsilon$, *то* $L(U_{p,\sigma}, U_{q,\sigma}) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $|a| < 1$. *Если* $L(G_{p,a}(x), G_{q,a}(x)) < \varepsilon$, *то* $L(V_{p,a}, V_{q,a}) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $\sigma_1 1,\ \sigma_2 \in (0,1]$, *если* $L(F_{p,\sigma_1}(x), F_{p,\sigma_2}(x)) < \varepsilon$, *то* $L(U_{p,\sigma_1}, U_{p,\sigma_2}) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$.

Теорема[с док-вом]. *Пусть* $|a_1| < 1$ *и* $|a_2| < 1$. *Если* $L(G_{p,a_1}(x), G_{p,a_2}(x)) < \varepsilon$, *то* $L(V_{p,a_1}, V_{p,a_2}) \leqslant c\sqrt{\varepsilon}$.

Опр. ***Относительная компактность:*** семейство $\{\xi_n\}$ называется **относительно компактным**, если $\lim\limits_{x\to\infty} \sup\limits_n P(|\xi| > x) = 0$

Теорема[без док-ва]. *Пусть для некоторой последовательности* $b_k (> 0)$, *выполнено:* $P(\frac{1}{b_n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j < x) \Rightarrow \Phi(x)$ *и существует последовательность* $d_k(> 0)$*:* $\{\frac{b_{N_k}}{d_k}\}$ *— отн. компактно, то* $\forall s \in \mathbb{R} \lim\limits_{k\to\infty} |f(\frac{S}{d_k}) - \int\limits_0^\infty e^{-\frac{s^2x^2}{2}} dA_k(x)| = 0$, *где* $A_k(x)$ *— функция распределения* $\frac{b_{N_k}}{d_k}$.

Теорема[без док-ва]. *Пусть* $\Lambda(t,\lambda) \xrightarrow{P} \infty$, *при* $\lambda \to \infty$, *тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $P(\frac{\log P(t) - \log P(0)}{\sigma\sqrt{t\lambda}} < x) \Rightarrow F(x)$ *при* $\lambda \to \infty$.
2. *аналогично для* $P^* = \max\limits_{\tau\in[0,t]} P(\tau)$.
3. *аналогично для* $P_* = \min\limits_{\tau\in[0,t]} P(\tau)$.
4. $\frac{\Lambda(t,\lambda)}{t\lambda} \Rightarrow U$.*(Существует такая случайная величина.)*