Задача 1

Условие

Доказать, что $\mathbb{E}|\xi-a|\geq\mathbb{E}|\xi-med\xi|$ для $\forall a\in\mathbb{R}$ и для любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием.

Решение

Решение из учебника: Королев В.Ю. «Теория вероятностей и математическая статистика»(стр. 43)

Докажем, что $\mathbb{E}|\xi-med\xi|\leq\mathbb{E}|\xi-a|$

- Рассмотрим случай $a>med\xi$. Тогда

$$|\xi-a|-|\xi-med\xi|=\begin{cases}med\xi-a & \xi\in[a,\infty)\\ a+med\xi-2\xi & \xi\in(med\xi,a)\\ a-med\xi & \xi\in(-\infty,med\xi]\end{cases}.$$

Так как $a+med\xi-2\xi>med\xi-a$ при $med\xi<\xi<a$, то

$$\begin{array}{l}\mathbb{E}|\xi-a|-\mathbb{E}|\xi-med\xi|=\mathbb{E}[|\xi-a|-|\xi-med\xi|]\geq\\ \geq(med\xi-a)\mathbb{E}\mathbb{1}_{[a,\infty)}(\xi)+(med\xi-a)\mathbb{E}\mathbb{1}_{(med\xi,a)}(\xi)+(a-med\xi)\mathbb{E}\mathbb{1}_{(-\infty,med\xi]}(\xi)=\\ =(med\xi-a)P(\xi\geq a)+(med\xi-a)P(med\xi<\xi<a)+(a-med\xi)P(\xi\leq med\xi)=\\ =(a-med\xi)[P(\xi\leq med\xi)-P(\xi>med\xi)]\geq 0\end{array}.$$

Последнее неравенство вытекает из определения медианы.

- Случай $a<med\xi$ рассматривается аналогично.

Задача 3

Условие

Пусть ξ_1, ξ_2, $\cdots$ - случайные величины. Доказать, что $\xi_n\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$ тогда и только тогда. когда

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}=0.$$

Решение

Необходимость:

$$\mathbb{P}(|\xi_n|\geq\varepsilon)=\int\limits_{|x|\geq\varepsilon}d\,\Phi_n(x)\geq\int\limits_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)=\int\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)-\int\limits_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)\geq\int\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi,$$

Следовательно

$$0\leq\mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}\leq\varepsilon^2+\mathbb{P}(|\xi_n|\geq\varepsilon)$$

Достаточность:

$$\mathbb{P}(|\xi_n|\geq\varepsilon)=\int\limits_{|x|\geq\varepsilon}d\,\Phi_n(x)\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}d\Phi_n(x)\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}$$

Задача 5

Условие

Доказать, что из условия Линдеберга вытекает условие предельной малости.

Решение

Итак, путь выполняется условие Линдеберга

$$\forall\tau>0\quad\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Доказать, что

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\frac{x_k-a_k}{B_n}\right|>\epsilon\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\qquad\forall\epsilon>0$$

Итак,

$$P\left(\left|\frac{x_k-a_k}{B_n}\right|>\tau\right)\leq P(|x_k-a_k|>\tau B_n)\ =$$

$$=\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}d\,F_k(x)\ \leq\ \frac{1}{(\tau B_n)^2}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)$$

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\frac{x_k-a_k}{B_n}\right|>\tau\right)\ \leq\ \frac{1}{\tau^2B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

т.к. $P(\max\limits_{1\leq k\leq n} A_k > \tau) = P(A_1+A_2+\ldots+A_n) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} P[A_k]$.

Задача 6

Условие

Доказать, что из условия Ляпунова вытекает условие Линдеберга.

Решение

Теорема 4. (Ляпунова) Если для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n < x) = F(x)$.

при использовании того, что область интегрирования определяется неравенством

$$\frac{|x-a_k|}{\tau B_n} \geq 1$$

и поэтому при любом $\delta > 0$

$$\frac{|x-a_k|^\delta}{\tau^\delta B_n^\delta} \geq 1.$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|\geq\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_{\xi_k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2(\tau B_n)^\delta} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|\geq\tau B_n} (x-a_k)^{2+\delta} dF_{\xi_k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-a_k|^{2+\delta} dF_{\xi_k}(x) =$$

$$= \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall \tau > 0$$

Что означает выполнение условия Линдеберга.

Задача 7

Условие

Доказать, что сходимость функции распределения в центральной предельной теореме равномерная.

Решение

Пусть $F_n \Rightarrow F$ и $F(x)$ непрерывна, тогда $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0, n\to\infty$.

$\forall \varepsilon > 0$ возьмем $m > \frac{1}{\varepsilon}$

В силу непрерывности $F(x)$ существуют $x_1,\ldots,x_n : F(x_i) = \frac{i}{m}$ и $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$ для достаточно большого n.

Тогда $\forall x \in [x_k, x_{k+1}] (x_0 = -\infty, x_m = \infty)$

$$F_n(x) - F(x) \le F_n(x_{k+1}) - F(x_k) \le F(x_{k+1}) - F(x_k) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$$

$$F(x) - F_n(x) \le F(x_{k+1}) - F_n(x_k) \le F(x_{k+1}) - F(x_k) + \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon$$

Следовательно $|F_n(x) - F(x)| < 2\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$.

Задача 8

Условие

Пусть $\Phi(x)$ - стандартная нормальная функция распределения, $\phi(x)$ - соответствующая ей плотность. Доказать неравенства

$$\phi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \le 1 - \Phi(x) \le \frac{\phi(x)}{x}, \quad x > 0.$$

Решение

1) $1 - \Phi(x) = \int\limits_x^\infty \phi(u)du = \int\limits_x^\infty \frac{u}{u}\phi(u)du \le \frac{1}{x}\int\limits_x^\infty u\phi(u)du$, где $\int\limits_x^\infty u\phi(u)du = \phi(x)$

2) осталось показать выполнение первого неравенства…

Задача 9

Условие

Какова скорость сходимости в теореме Муавра-Лапласа.

Решение

По неравенству Берри-Эссена:

$\sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{L_n^3 * C}{\sqrt{n}}$, где $L_n^3 = \frac{\mathbb{E}|X_1 - p|^3}{\sqrt{(p(1-p))^3}}$,а С - некоторое число между $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и 0.8, независящее от распределения.

$\mathbb{E}|X_1 - p|^3 = p^3(1-p) + p(1-p)^3 = (1-p)p(1-2p+2p^2)$, следовательно $L_n^3 = \frac{(1-p)p(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{(1-2p+2p^2)}{\sqrt{p(1-p)}}$

Найдем максимум L_n^3: $(L_n^3)' = \frac{(-2+4p)(p-p^2)-(1-2p)(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{2p-1}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow L_n^3 \leq \frac{1-1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ поэтому:

$$\sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{L_n^3 * C}{\sqrt{n}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Задача 10

Условие

Пусть ξ_λ - случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

при $\lambda \to \infty$.

Решение

$\mathbb{E}$ распределения пуассона = λ

$$\mathbb{E}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = 1$$

$$\mathbb{D}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

применим теперь неравенство Чебышева $P(\ |\xi - \mathbb{E}\xi| > \epsilon\ ) < \frac{\mathbb{D}\xi}{\epsilon^2} = \frac{1}{\lambda\epsilon^2}$, но так как у нас по условию λ стремится к бесконечности, то правая часть стремится к нулю

в итоге вероятность того, что случайная величина отличается от своего матожидания (от 1) больше чем на ϵ равна нулю, а значит

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

Задача 11

Условие

Пусть ξ_λ - случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x)$$

при $\lambda \to \infty$.

Решение

Так как характеристическая функция стандартного нормального распределения равна $e^{\frac{-t^2}{2}}$, то, по теореме Леви, о непрерывном соответствии между х.ф и ф.р., достаточно показать, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$

$$f^*_\lambda(t) = \mathbb{E}e^{it\xi^*_\lambda} \to e^{\frac{-t^2}{2}},\ \lambda \to \infty, \text{ где } \xi^*_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Характеристическая функция распределения Пуассона имеет вид:

$$f_\lambda(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

Поэтому

$$f^*_\lambda(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} f_\lambda(t\lambda^{-1/2}) = \exp(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{it\lambda^{-1/2}} - 1))$$

Таким образом, раскладывая экспоненту(внутреннюю) в ряд Тейлора, при $\lambda \to \infty$ получим

$$f^*_\lambda(t) = \exp(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(it\lambda^{-1/2} + (it)^2(2\lambda)^{-1} + o(t^2\lambda^{-1}))) \to e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Задача 12

Условие

Пусть ξ_a - случайная величина, имеющая геометрическое распределение с математическим ожиданием, равным a. Доказать, что

$$\lim_{a\to\infty}\mathbb{P}(a^{-1}\xi_a < x) = 1-e^{-x}, \ \ x>0.$$

Решение

ξ: $P(\xi=k)=p(1-p)^k$.

Надо доказать, что $P\left(\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi} < x\right) = 1 - e^{-x}$, $x>0$;

$\phi_\xi(t)=\frac{p}{1-qe^{it}}$

$\lim\limits_{p\to 0}\phi_{\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi}}(t)=\Big\{$Т.к. если $Y=aX$, то $\Phi_Y(t)=\Phi_X(at)$ и для геометрического распределения $\mathbb{E}\xi=\frac{q}{p}\Big\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{1-qe^{\frac{itp}{q}}}=\Big\{$Разложим экспоненту в ряд Тейлора $\Big\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{1-q(1+\frac{itp}{q})}=\frac{1}{1-it}$;

$$Y\colon P(Y<x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

$\phi_Y(t)=\frac{1}{1-it}$

Следовательно $\phi_{\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi}}(t)\longrightarrow\phi_Y(t),\ p\ \to\ 0$. По теореме Леви, о непрерывном соответствии между х.ф и ф.р. получаемм доказательство.

Задача 13

Условие

Что больше: неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями, или неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно?

Решение

Энтропия равна $H(X) = -\sum p_i * \log p_i$

Вычислим энтропию распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями:

$$-H(X) \ = \ 0.5*\log 0.5 + 0.5*\log 0.5 = \log 0.5$$

Вычислим энтропию случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно:

$$-H(\xi) \ = \ 0.25*\log 0.25 + 0.5*\log 0.5 + 0.25*\log 0.25 = 0.5*(\log 0.25 + \log 0.5) = 0.5*\log$$

$$H(\xi) = -1.5*\log 0.5 > -\log 0.5 = H(X)$$

Задача 14

Условие

Для любой ли абсолютно непрерывной случайной величины существует дифференциальная энтропия?

Решение

Нет.

В качестве примера приводят функцию:

$$p(x) \ = \ \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x} & x \geq e \\ 0 & x < e \end{cases}$$

(**С форума ... тока не понят, приведена функция распределения, или плотности?**)

конечно же приведена плотность имхо надо исправить двойку на e т.е при x < e p(x) = 0

вообще требуется что сделать - найти такую функцию, что 1) интеграл от нее существует и равен единице 2) интеграл от нее помноженной на ее логарифм не существует (расходится)

Задача 15

Условие

Что больше: дифференциальная энтропия распределения, равномерного на [0, 1], или дифференциальная энтропия показательного распределения с параметром $\lambda = 2$?

Решение

- Вычислим дифференциальную энтропию показательного распределения:

$$H(X) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log(\lambda e^{-\lambda x})^{-1} dx = -\log\lambda \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda \log e \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \log\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \lambda \log e \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} d(\lambda x) & v = -e^{-\lambda x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\log\lambda + \lambda \log e (-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx) = -\log\lambda - (\log e) e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\mathrm{lo}$$

При $\lambda = 2$ дифференциальная энтропия показательного распределения равна $\log\frac{e}{2}$

- Вычислим дифференциальную энтропию равномерного на [0, 1] распределения. Имеем:

$$p(X) = \begin{cases} 0, & X<0 \\ 1, & 0 \le X \le 1 \\ 0, & 1<X \end{cases}$$

$H(X) = \int_0^1 1 \times \log(1) dx = 0$ для любого основания логарифма.

- Если в дифференциальной энтрропии показательного распределения возьмем основание 2, то очевидно, что $\log_2 \frac{e}{2} > 0$

Задача 16

Условие

Вычислить дифференциальную энтропию нормального распределения с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$.

Решение

$$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= -\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{vmatrix} =$$

$$= \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^2 dt = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}} dt v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{vmatrix} = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) +$$

$$= \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}}(0 + \sqrt{2\pi}) = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \log\sqrt{e} = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}).$$

Задача 17

Условие

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1 = a$ и $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть N - целочисленная положительная случайная величина, независимая от последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$, и имеющая конечный второй момент. Обозначим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Выразить $\mathbb{D}S_N$ через моменты индекса и слагаемых.

Решение

$$\mathbb{D}S_N = \mathbb{E}(S_N - \mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}S_N^2 - (\mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S_N^2|N)] - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N)^2$$
$$\mathbb{E}(S_N^2|N=n) = \mathbb{E}S_N^2 = \mathbb{D}S_n + (\mathbb{E}S_n)^2 = n\mathbb{D}\xi_1 + n^2(\mathbb{E}\xi_1)^2$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_N^2|N) = N\mathbb{D}\xi_1 + N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2$$
$$\Rightarrow \mathbb{D}S_N = \mathbb{E}(N\mathbb{D}\xi_1 + N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2) - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N)^2 = \mathbb{E}N\mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{E}N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N$$

Ответ: $\mathbb{D}S_N = \sigma^2\mathbb{E}N + a^2\mathbb{D}N$

Задача 18

Условие

Что больше: коэффициент эксцесса распределения Стьюдента с десятью степенями свободы или 3?

Решение

- Пусть задана случайная величина X, такая что $\mathbb{E}|X|^4 < \infty$. Пусть μ_4 обозначает четвёртый центральный момент: $\mu_4 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^4\right]$, а $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}[X]}$ — стандартное отклонение X. Тогда коэффициент эксцесса задаётся формулой:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

- Пусть $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ - независимые стандартные нормальные случайные величины, такие что $Y_i \sim \mathrm{N}(0,1)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда распределение случайной величины t, где

$$t = \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}}$$

называется распределением Стьюдента с n степенями свободы. Пишут $t \sim \mathrm{t}(n)$. Её распределение абсолютно непрерывно и имеет плотность

$$f_t(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где Γ - гамма-функция Эйлера.

- Посчитаем коэффициент эксцесса:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^4\right]}{(\mathbb{D}X)^2} = \dots$$

пользуясь свойствами моментов распределения Стьюдента:

1. $\mathbb{E}\left[t^k\right] = 0$, если k нечётно;
2. $\mathbb{E}\left[t^k\right] = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{n-k}{2})n^{k/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$, если k - четно.

(**я думаю стоит найти доказательство этих свойств**)

$$\dots = \frac{\mathbb{E}[X^4]}{(\mathbb{D}X)^2} = \frac{\mathbb{E}[X^4]}{(\mathbb{E}[X^2])^2} =$$

$$= \frac{\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)n^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(5)}}{\left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)n}{\sqrt{\pi}\Gamma(5)}\right)^2} = \frac{\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})2!}{\sqrt{\pi}4!}}{\left(\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})3!}{\sqrt{\pi}4!}\right)^2} = \frac{\frac{\frac{3}{4}2!}{4!}}{\left(\frac{\frac{1}{2}3!}{4!}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}2!4!}{\left(\frac{1}{2}3!\right)^2} = \frac{3 \times 2! \times 4!}{3!^2} =$$

- Ответ: 4 > 3

Задача 19

Условие

Пусть $N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс(с интенсивностью 1). Пусть далее Λ - положительная случайная величина, имеет конечный второй момент и независима от N_1 (t). Выразить $\mathbb{D}N_1(\Lambda)$ через моменты случайной величины Λ.

Решение

$N(t) = N_1(\Lambda)$

$$\mathbb{E}N(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}N_1 \lambda dP(\Lambda < \lambda) = \int_0^\infty \lambda dP(\Lambda < \lambda) = \mathbb{E}\Lambda$$

$$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}N^2(t) - (\mathbb{E}\Lambda)^2$$

$$\mathbb{D}N_1(\lambda) \; = \; \mathbb{E}N_1^2(\lambda) - (\mathbb{E}N_1(\lambda))^2 = \lambda = \mathbb{E}N_1^2(\lambda) - \lambda^2 \Rightarrow \mathbb{E}N_1^2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{E}N^2(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}N_1^2(\lambda) dP(\Lambda < \lambda) = \int_0^\infty (\lambda^2 + \lambda) dP(\Lambda < \lambda) = \mathbb{E}\Lambda + \mathbb{E}\Lambda^2$$

$$\mathbb{D}N(t) = \mathbb{E}\Lambda + \mathbb{E}\Lambda^2 - (\mathbb{E}\Lambda)^2 = \mathbb{E}\Lambda + \mathbb{D}\Lambda$$

Задача 21

Условие

Сколько респондентов надо опросить, чтобы определить рейтинг политического деятеля с точностью 0.1% и надежностью 0.95?

Решение

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p \right| \leq \epsilon$$

$$\mathbb{P}(\left| \frac{1}{n} \sum X_i - p \right| \leq \epsilon) \geq \gamma$$

$$\mathbb{P}(\left| \frac{1}{n} \sum X_i - p \right| \leq \epsilon) \geq \frac{1 - \mathbb{D}(\frac{1}{n} \sum X_i)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{p(p-1)}{\epsilon^2 n} \geq \gamma$$

$$\frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n} \leq 1 - \gamma \Rightarrow n \geq \frac{p(1-p)}{\epsilon^2 (1-\gamma)}$$

$$n \geq \frac{1}{4\epsilon^2(1-\gamma)}$$

В нашем случае $\epsilon = 0.001$ и $\gamma = 0.95$

Таким образом получаем

Ответ: 5'000'000

home/all.txt · Последние изменения: 2008/01/14 07:48 10.1.28.162