Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Методы оптимизации.
Конспект лекций

(V-VI семестр)

лектор — доцент М. М. Потапов
составитель — М. Л. Буряков <mib431@mail.ru>

v. 0.002β — 26.03.2003

Москва 2003

Содержание

1 Теоремы существования

Определение. Линейное пространство $\mathbf{M}$ называется *метрическим*, если на нём задана *метрика* ρ, $\rho:\ \mathbf{M}\times\mathbf{M}\to\mathbb{R}^1_+$:

1) $\rho(u,v)=\rho(v,u) \quad \forall u,v\in\mathbf{M}$;

2) $\rho(u+v,w)\leqslant\rho(u,w)+\rho(v,w) \quad \forall u,v,w\in\mathbf{M}$;

3) $\rho(u,v)\geqslant 0$, $\rho(u,v)=0\Leftrightarrow u=v$.

Упражнение 1 (3). Привести примеры функций, не достигающих inf на замкнутом, но не ограниченном множестве и ограниченном, но незамкнутом множестве.

Определение. Последовательность $\{u_k\}$ *сходится по метрике* ρ ($u_k \xrightarrow{\rho} u$) в метрическом пространстве $\mathbf{M}$, если $\rho(u_k,u)\to 0$ при $k\to\infty$.

Определение. Последовательность $\{u_k\}$ называется *фундаментальной*, если $\rho(u_k,u_m)\to 0$ при $k,m\to 0$.

Определение. Метрическое пространство $\mathbf{M}$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве является сходящейся к элементу из $\mathbf{M}$.

Примеры полных пространств:

1. $\mathbf{M}=\mathbb{R}^n$, при этом $\rho(u,v)=\|u-v\|_{\mathbb{R}^n}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-v_i)^2}$;

2. $\mathbf{M}=\mathbf{C}[a,b]$ — множество непрерывных на $[a,b]$ функций. В этом случае
$$\rho(f,g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|.$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *непрерывной* [*полунепрерывной снизу*] (*полунепрерывной сверху*) в точке u_0, если для любой, сходящейся к u_0, последовательности $\{u_k\}$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}J(u_k)=J(u_0)$ $\left[\varliminf\limits_{k\to\infty}J(u_k)\geqslant J(u_0)\right]$ $\left(\varlimsup\limits_{k\to\infty}J(u_k)\leqslant J(u_0)\right)$ (см. рис. 1.)

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *компактным* (*ρ-компактом*) в $\mathbf{M}$, если у любой последовательности $\{u_k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$.

Замечание. В конечномерном пространстве ($\mathbb{R}^n$) множество $\mathbf{U}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Введём ряд обозначений:
$$\inf_{u\in\mathbf{U}}J(u)=J_*;$$
$$\sup_{u\in\mathbf{U}}J(u)=J^*;$$
$$\mathbf{U}_*=\{v\in\mathbf{U}|J(v)=J_*\};$$
$$u_*=\operatorname*{argmin}_{u\in\mathbf{U}}J(u)\in\mathbf{U}_*.$$

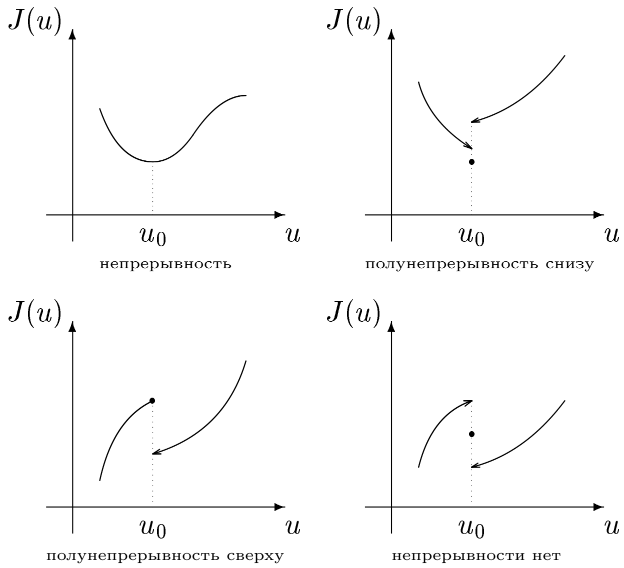


Рис. 1: к определению видов непрерывности.

Теорема 1. ***(метрический вариант теоремы Вейерштрасса)***
Пусть $\mathbf{M}$ *— метрическое пространство, множество* $\mathbf{U}$ *— компакт,* $J(u)$ *полунепрерывна снизу на* $\mathbf{U}$ *тогда:*

1) $J_* > -\infty$*;*

2) $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$*;*

3) из того, что $\begin{cases} J(u_k) \to J_*, \\ u_k \in \mathbf{U} \end{cases}$ *следует, что* $\rho(u_k, \mathbf{U}_*) \to 0$.

Доказательство.

По определению точной нижней грани J_* (которая в общем случае может равняться и $-\infty$) существует последовательность $\{u_k\} \subset \mathbf{U}$ такая, что $J(u_k) \to J_*$ при $k \to \infty$. Так как $\mathbf{U}$ — компакт, то у этой последовательности существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ такая, что $u_{k_m} \to u \in \mathbf{U}$ при $m \to \infty$. В свою очередь из полунепрерывности $J(u)$ снизу в этой точке u следует, что

$$-\infty < J(u) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} J(u_{k_m}) = \{\text{т.к. } \{u_{k_m}\} \text{ п/п-ть } \{u_k\}\} = \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*.$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы.

А из того, что $u \in \mathbf{U}$ и последнего неравенства $(J(u) \leqslant J_*)$ следует, что $u \in \mathbf{U}_* \neq \varnothing$, то есть второе утверждение теоремы.

Докажем теперь третье утверждение методом от противного. Предположим, что существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ такая, что $\rho(u_{k_m}, \mathbf{U}_*) \geqslant \rho_0 > 0$. Так как $\mathbf{U}$ — компакт, то у этой подпоследовательности существует "подподпоследовательность" $\{u_{k_{m_l}}\}$ такая, что $\rho(u_{k_{m_l}}, u) \overset{l\to\infty}{\to} 0$ $(u \in \mathbf{U})$. Отсюда, с учётом полунепрерывности $J(u)$ снизу, имеем:

$$J(u) \leqslant \varliminf_{l\to\infty} J(u_{k_{m_l}}) = \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*.$$

То есть для точки $u \in \mathbf{U}_*$

$$\rho(u_{k_{m_l}}, \mathbf{U}_*) = \inf_{u_* \in \mathbf{U}_*} \rho(u_{k_{m_l}}, u_*) \leqslant \rho(u_{k_{m_l}}, u) \to 0 \text{ при } l \to \infty.$$

Получили противоречие (подпоследовательность сходится к нулю, тогда как сама последовательность к нулю не стремится). Таким образом теорема полностью доказана. □

Определение. Если задача (1) удовлетворяет условиям (выводам) Теоремы 1, то такая задача называется *корректно поставленной* в метрическом пространстве $\mathbf{M}$.

Упражнение 2 (3). Доказать, что в $\mathbf{C}[a, b]$ единичный шар $\mathbf{U} = \{\|f\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1\}$ является замкнутым и ограниченным множеством, но при этом компактом не является.

Пример. (когда множество $\mathbf{U}$ не компакт и Теорема 1 не верна)

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}[-1, 1], \rho(f, g) = \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_{\mathbf{C}}, \mathbf{U} = \{\|f\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1\},$$

$$J(f) = \int\limits_{-1}^{0} f(t)\, dt - \int\limits_{0}^{1} f(t)\, dt.$$

$\mathbf{U}$ ограничено и замкнуто, но не является компактом (см. Упражнение 2); $J(u)$ — непрерывен:

$$|J(f) - J(g)| \leqslant \int\limits_{-1}^{0} |f(t) - g(t)|\, dt + \int\limits_{0}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt \leqslant 2 \cdot \|f - g\|_{\mathbf{C}}$$

(то есть даже Липшиц-непрерывен с константой 2). Но в тоже время минимум функционала $J(u)$ $J_* = -2 = J(u_*)$ достигается на функции (см. рис. 2):

$$u_*(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0 \\ 1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

которая, очевидно, не принадлежит классу $\mathbf{C}[-1, 1]$, то есть множество $\mathbf{U}_*$ пусто.

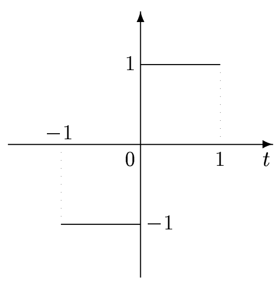


Рис. 2: $u_*(t)$

Пример. (когда множество $\mathbf{U}$ не компакт, но inf достигается)

Возьмём в предыдущем примере в качестве функционала $J(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\, dt$. Тогда $J_* = -2$, $\mathbf{U}_* = \{u_*\} \neq \varnothing$, $u_* = u_*(t) \equiv -1 \in \mathbf{U}$.

Определение. Линейное пространство L называется *нормированным*, если существует функция $\|u\| : \mathbf{L} \to \mathbb{R}^1_+$, называемая *нормой* такая, что:

1) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| \quad \forall u \in \mathbf{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$

2) $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{L};$

3) $\|u\| \geqslant 0,\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Если в пункте 3) выполнено только условие $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$, то подобные функции называют *полунормами.*

Определение. Нормированное линейное пространство $\mathbf{L}$, полное относительно метрики $\rho(u, v) = \|u - v\|$, называется *ба́наховым.*

Определение. Линейное пространство $\mathbf{L}$ называется *евклидовым*, если на нём задано *скалярное произведение* $\langle u, v\rangle : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbb{R}^1$:

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L};$

2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in \mathbf{L};$

3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$

4) $\langle u, u\rangle \geqslant 0,\ \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

В любом евклидовом пространстве: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ — евклидова норма; $\rho(u, v) = \|u - v\|$ — метрика.

Определение. Евклидово пространство $\mathbb{H}$, полное относительно метрики

$$\rho(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle_{\mathbb{H}}},$$

называется *ги́льбертовым* пространством. В дальнейшем буквой $\mathbb{H}$ будем обозначать гильбертовы пространства.

Упражнение 3 (3). Доказать, что $\mathbf{C}[a, b]$ является евклидовым пространством со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int\limits_a^b u(t)v(t)\,dt$, но не является гильбертовым пространством.

Пример. (ограниченное замкнутое множество в гильбертовом бесконечномерном пространстве, не являющееся компактом)

Рассмотрим единичный шар $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} : \|u\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1\}$. Возьмём любую ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (именно здесь важен факт бесконечномерности пространства). Так как норма e_k равна единице, то $e_k \in \mathbf{U}$. В случае, когда $k \neq m$, имеем:

$$\|e_k - e_m\|^2_{\mathbb{H}} = \langle e_k - e_m, e_k - e_m\rangle = 1 - 2\langle e_k, e_m\rangle + 1 = 2.$$

Отсюда следует, что у последовательности $\{e_k\}$ нет фундаментальности и, следовательно, никакая подпоследовательность этой последовательности не является фундаментальной.

Примеры гильбертовых пространств:

1. $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i;$

2. $\mathbb{H} = \mathbf{l}^2$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$, $u \in \mathbf{l}^2 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 < \infty$, $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i v_i$;

3. $\mathbb{H} = \mathbf{L}^2(a,b)$ — замыкание класса $\mathbf{C}[a,b]$ по норме $\|u\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\int\limits_a^b |u(t)|^2\,dt)}$ является гильбертовым пространством. (Другое определение класса $\mathbf{L}^2$: множество функций $f(t)$, измеримых по Лебегу на (a,b), интегрируемых по Лебегу и таких, что $f^2(t)$ тоже интегрируемы по Лебегу).

Определение. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{H}$ называется *слабо сходящейся* к элементу $u_0 \in \mathbb{H}(u_k \overset{\text{слабо}}{\to} u_0)$, если $\forall h \in \mathbb{H}$ $\langle u_k, h\rangle_{\mathbb{H}} \to \langle u_0, h\rangle_{\mathbb{H}}$ при $k \to \infty$.

Замечание. Из "обыкновенной" сходимости следует слабая сходимость, но не наоборот.

$\Rightarrow$

$$\|u_k - u_0\|_{\mathbb{H}} \to 0 \Rightarrow \forall h \mid \langle u_k, h\rangle_{\mathbb{H}} - \langle u_0, h\rangle_{\mathbb{H}} \mid = \mid \langle u_k - u_0, h\rangle_{\mathbb{H}} \mid \leqslant$$
$$\leqslant \{\text{нер-во Коши-Буняковского}\} \leqslant \underbrace{\|u_k - u_0\|_{\mathbb{H}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|h\|_{\mathbb{H}}}_{\text{const}} \to 0;$$

$\not\Leftarrow$ рассмотрим любую ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$;

$$\forall h \in \mathbb{H} \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k\rangle_{\mathbb{H}}{}^2 \leqslant \{\text{нер-во Бесселя}\} \leqslant \|h\|_{\mathbb{H}}^2 < \infty.$$

Необходимым условием сходимости этого ряда является $\langle h, e_k\rangle^2 \to 0$ при $k \to \infty \Rightarrow \langle h, e_k\rangle \to 0 = \langle h, 0\rangle$. Имеем $e_k \overset{\text{слабо}}{\to} 0$, но $\|e_k - 0\|_{\mathbb{H}} = \|e_k\|_{\mathbb{H}} = 1 \not\to 0$. $\blacksquare$

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *слабо компактным* (*слабым компактом*), если для любой последовательности $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ слабо сходящаяся к точке $u_0 \in \mathbf{U}$.

Замечание. Из того, что множество $\mathbf{U}$ является компактом, следует, что оно является и слабым компактом, но не наоборот. Например единичный шар в $\mathbb{H}$ представляет слабо компактное множество, но компактом не является.

Определение. Функционал $J(u)$ называется *слабо непрерывным* (*слабо полунепрерывным снизу*) в точке u_0, если для любой слабосходящейся к u_0 последовательности $\{u_k\}$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J(u_0)$$
$$(\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u_0))$$

Замечание. Из слабой непрерывности функционала $J(u)$ следует его "обычная" непрерывность, но не наоборот.

Теорема 2. ***(слабый вариант теоремы Вейерштрасса)***
Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, множество $\mathbf{U}$ — слабый компакт, $J(u)$ слабо полунепрерывна снизу на $\mathbf{U}$ тогда:

1) $J_* > -\infty$*;*

2) $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$*;*

3) любая слабая предельная точка любой минимальной последовательности принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$*.*

Доказательство.
Полностью аналогично Теореме 1 (провести самостоятельно). □

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *выпуклым*, если точка $\alpha u + (1-\alpha)v$ принадлежит множеству $\mathbf{U}$ для любых u и v из $\mathbf{U}$ и любого α из отрезка $[0,1]$.

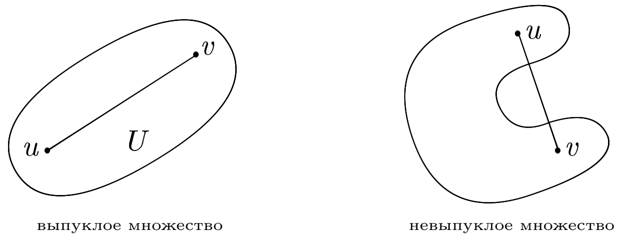


Рис. 3: к определению выпуклости множества

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве $\mathbf{U}$, если для любых точек u и v из множества $\mathbf{U}$ и для любого α из отрезка $[0,1]$ выполняется неравенство $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$.

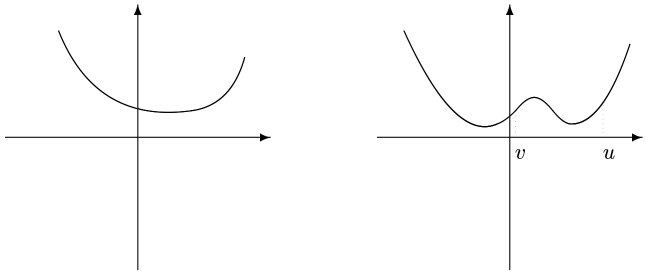


Рис. 4: к определению выпуклости функции

Достаточное условие слабой компактности в $\mathbb{H}$
Если множество $\mathbf{U}$ выпуклое, замкнутое и ограниченное, то $\mathbf{U}$ слабо компактно (без доказательства).

Достаточное условие слабой полунепрерывности снизу в $\mathbb{H}$
Если функция $J(u)$ выпуклая и полунепрерывная снизу на каком-либо множестве $\mathbf{U}$, то $J(u)$ слабо полунепрерывная снизу на этом множестве (без доказательства).

Приведём несколько примеров.

1) Рассмотрим линейный функционал $J(u) = \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}}$, где $c \in \mathbb{H}$. Он является слабо непрерывным просто из определения слабой сходимости.

2) Рассмотрим квадратичный функционал $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}$, где $A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F})$ — линейный ограниченный (непрерывный) оператор; $\mathbb{H}, \mathbf{F}$ — гильбертовы пространства; $f \in \mathbf{F}$.

   Покажем выпуклость и непрерывность (а как следствие и полунепрерывность снизу) функционала $J(u)$, тем самым мы докажем его слабую полунепрерывность снизу.

   a) (выпуклость)
   $$\|A(\alpha u - (1-\alpha)v) - f\|^2_{\mathbf{F}} = \{\text{т.к. } A \text{ -линейный}\} =$$
   $$= \|\alpha(Au - f) + (1-\alpha)(Av - f)\|^2_{\mathbf{F}} \leqslant \{\text{неравенство } \triangle\} \leqslant$$
   $$\leqslant (\alpha\|Au - f\|_{\mathbf{F}} + (1-\alpha)\|Av - f\|_{\mathbf{F}})^2 \leqslant \{\text{т.к. функция } y = x^2 \text{ выпуклая}\} \leqslant$$
   $$\leqslant \alpha\|Au - f\|_{\mathbf{F}} + (1-\alpha)\|Av - f\|_{\mathbf{F}}$$
   что и требовалось.

   b) (непрерывность) Пусть $u_k \overset{\text{в } \mathbb{H}}{\to} u$ при $k \to \infty$, тогда, та как A — непрерывный, $Au_k - f \overset{\text{в } \mathbf{F}}{\to} Au - f$. Отсюда в силу непрерывности $\|\cdot\|$ (неравенство Коши-Буняковского) следует, что
   $$\|Au_k - f\|_{\mathbf{F}} \to \|Au - f\|_{\mathbf{F}}$$
   ч.т.д.

   Замечание. Функционал $J(u) = \|u\|^2$ $(A = I, f = 0, H = F)$ слабо полунепрерывен снизу, но не является слабо непрерывным. (для любой ортонормированной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ $e_n \overset{\text{слабо}}{\to} 0$ при $n \to \infty$, но $\|e_n\|^2 = 1 \neq 0$).

3) Докажем, что множество $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}} \leqslant R^2\}$, где $\mathbb{H}$, $\mathbf{F}$ — гильбертовы пространства, A — обратимый оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbf{F}$, $f \in \mathbf{F}$, $R > 0$ (невырожденный эллипсоид), является слабым компактом. Для этого воспользуемся достаточным условие слабой компактности. Доказательство выпуклости и замкнутости множества $\mathbf{U}$ не представляет особого труда (сделать самостоятельно). Докажем его ограниченность:
   $$\forall u \in \mathbf{U} \quad \|u\| = \|A^{-1}Au\| = \|A^{-1}(Au - f) + A^{-1}f\| \leqslant \{\text{неравенство } \triangle\} \leqslant$$
   $$\leqslant \|A^{-1}(Au - f)\| + \|A^{-1}f\| \leqslant \|A^{-1}\|\cdot\|Au - f\| + C \leqslant$$
   $$\leqslant C_1\cdot\|Au - f\| + C \leqslant C_1 R + C \equiv const$$
   что и требовалось.

   Замечание. Шар $\mathbf{U} = \{\|u\| \leqslant R\}$ $(A = I, f = 0)$ представляет собой слабый компакт, но компактом не является.

4) Рассмотрим "параллелепипед" в $\mathbf{L}^2(a, b)$, то есть множество
   $$\mathbf{U} = \{u(t) \in \mathbf{L}^2(a, b) \mid \alpha(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} \beta(t),\ t \in (a, b)\},$$
   $\alpha(t)$, $\beta(t) \in \mathbf{L}^2(a, b)$ заданы (например, константы).

a) Докажем ограниченность $\mathbf{U}$: $\|u\|^2_{\mathbf{L}^2} = \int\limits_a^b |u(t)|^2\,dt \leqslant \int\limits_a^b (\max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\})^2\,dt \equiv R^2$ (здесь мы учитывали, что функция $\max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\} \in \mathbf{L}^2(a,b)$).

b) Замкнутость $\mathbf{U}$ следует из свойств интеграла Лебега (см., например, [КФ, гл.VII, §2,п.5])

c) Доказательство $\mathbf{U}$ предоставляется сделать самостоятельно.

Из пунктов a),b),c) следует, что “параллелепипед” в $\mathbf{L}^2(a,b)$ есть слабый компакт.

***Упражнение** 4* (3). Доказать, что “параллелепипед” в $\mathbf{L}^2(a,b)$ не является компактом.

2 Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах

Производная Фреше

Определение. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ - нормированные пространства, $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Отображение F называется *дифференцируемым (по Фреше́)* [Frechet] в точке x_0, если

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + o(\|h\|_{\mathbf{X}}) \quad \forall h \in \mathbf{X},$$

где $F'(x_0) \in \mathbf{L}(\mathbf{X} \to \mathbf{Y})$ - линейный оператор (*производная Фреше*), причём

$$\frac{\|o(\|h\|_{\mathbf{X}})\|_{\mathbf{Y}}}{\|h\|_{\mathbf{X}}} \to 0 \text{ при } \|h\|_{\mathbf{X}} \to 0.$$

Производные более старших порядков определяются рекурсивно.

В случае, когда $\mathbf{X} = \mathbb{H}$ - гильбертово, $\mathbf{Y} = \mathbb{R}^1$, имеем:

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + J'(u_0) \cdot h + o(\|h\|_{\mathbb{H}}).$$

$J'(u_0) \in \mathbb{H}^* = \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{R}^1)$ - пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathbb{H}$, *сопряжённое* к $\mathbb{H}$.

Теорема (Рисс). [КФ, гл. IV, §2, п.3]

Пространство $\mathbb{H}$ изоморфно сопряжённому пространству $\mathbb{H}^*$: $\mathbb{H} \backsimeq \mathbb{H}^*$, т.е. для любого элемента f из $\mathbb{H}^*$ существует и при том единственный элемент h_f из $\mathbb{H}$ такой, что

$$f(h) = \langle h_f, h \rangle_{\mathbb{H}} \;\; \forall h \in \mathbb{H},$$

причём

$$\|f\|_{\mathbb{H}^*} = \|h_f\|_{\mathbb{H}}$$

(без доказательства).

Замечание. Если у функции $J(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$ существует вторая производная $J''(u)$, то приращение функции $J(u)$ в точке u_0 представимо в виде:

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + \left\langle J'(u_0), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle J''(u_0)h, h \right\rangle + o(\|h\|^2).$$

Упражнение 5 (5). Показать, что из того, что $J(u_0+h) = J(u_0) + ah + \frac{1}{2}bh^2 + o(\|h\|^2)$, не следует существование $J''(u_0)$ (рассмотреть случай $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$).

Теорема (о производной сложной функции). [КФ, гл.X]

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ - нормированные пространства, $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}, G : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, существует производная функции F в точке x_0, существует производная функции G в точке $y_0 = F(x_0)$. Тогда существует производная сложной функции $GF : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ в точке x_0, причём

$$(GF)'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$$

(без доказательства).

Формулы конечных приращений

Введём ряд обозначений:

$\mathbf{C}(\mathbf{U})$ - класс непрерывных на $\mathbf{U}$ функций;

$\mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ - класс Липшиц-непрерывных на $\mathbf{U}$ функций (т.е. функций, для которых выполняется условие $|f(u) - f(v)| \leqslant L{\cdot}\|u - v\|_{\mathbb{H}}$, где L - константа Липшица);

$\mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ - класс непрерывно дифференцируемых функций;

$\mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ - класс дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Утверждение. Для функции $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ и $\forall u, v \in \mathbf{U}$ выполняется следующее равенство:

$$J(u) - J(v) = \int\limits_0^1 \left\langle J'(v + t(u-v)), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} dt =$$
$$= \left\langle J'(v + \theta(u-v)), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}}, \ \theta \in [0,1].$$

Доказательство. Введём вспомогательное отображение $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{H}, \ F(t) = v + t(u - v), \ F'(t) = u - v$.

$$J(u) - J(v) = JF(1) - JF(0) = \{\text{формула Ньютона-Лейбница}\} =$$

$$= \int\limits_0^1 (JF)'(t)\, dt = \{\text{теорема о производной сложной функции}\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \underbrace{J'(F(t))}_{\in \mathbb{H}^* = \mathbb{H}} \underbrace{F'(t)}_{u-v} dt = \{\text{теорема Рисса}\} = \int\limits_0^1 \left\langle J'(v + t(u-v)), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} dt =$$

$$= \{\text{теорема о серднем (матнан)}\} = \left\langle J'(v + \theta(u-v)), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}}, \ \theta \in [0,1] \quad \square$$

Упражнение 6 (3). Пусть $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{H})$. Доказать, что

$$\left\langle J'(u+h) - J'(u), g \right\rangle_{\mathbb{H}} = \int\limits_0^1 \left\langle J''(u+th)h, g \right\rangle_{\mathbb{H}} dt = \left\langle J''(u+\theta h)h, g \right\rangle_{\mathbb{H}},$$

где $\theta \in [0,1]$.

Приведём примеры вычисления производной.

1) $J(u) = \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}} \Rightarrow J'(u) \equiv C \in \mathbb{H},\ J''(u) = \Theta$, ($\Theta$ - нуль-оператор).

2) $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}},\ A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F}),\ f \in \mathbb{H}$:

$$J(u+h) - J(u) = \|(Au - f) + Ah\|^2_{\mathbf{F}} - \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}} = 2\,\langle Au - f, Ah\rangle_{\mathbf{F}} + \|Ah\|^2_{\mathbf{F}}$$

Заметим, что $\|Ah\|^2_{\mathbf{F}} = o(\|h\|_{\mathbb{H}})$, т.к. $\|Ah\|^2_{\mathbf{F}} \leqslant \|A\|^2_{\mathbf{L}} \cdot \|h\|^2_{\mathbb{H}}$. Отсюда, сделав элементарные преобразования скалярного произведения в последнем равенстве, получаем, что $J'(u) = 2A^*(Au - f)$. Аналогично можно получить, что $J''(u) = 2A^*A$ ($\in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$).

Упражнение 7 (3). Найти $J'(u)$ и $J''(u)$ для $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_{\mathbf{H}} - \langle f, u\rangle_{\mathbf{H}}$, где $A \in L(\mathbf{H} \to \mathbf{H}), f \in \mathbf{H}$.

Упражнение 8 (4). Найти $J'(u)$ и $J''(u)$ для $J(u) = g(\|u\|_{\mathbf{H}}),\ g : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1,\ g \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^1)$. Что будет, если $g(t) \equiv t$?

3 Задачи управления линейной динамической системой

Здесь мы рассмотрим простейшую задачу оптимального управления при следующих условиях:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t) + F(t), \quad t_0 < t < T, \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{L}^2_r(t_0, T), \qquad (1)$$

здесь $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ — матрица (оператор)порядка $n{\times}n$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$ — матрица порядка $n{\times}r$, $f(t) = \{f_i(t)\}$ — матрица порядка $n{\times}1$, то есть n-мерный вектор столбец; моменты времени t_0, T, а также точка x_0 заданы; $\mathbf{U}$ — заданное множество из $\mathbf{L}^2_r(t_0, T)$; $x(t,u) = x(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$ — решение (траектория), соответствующая управлению $u = u(t) = \big(u^1(t), \dots, u^r(t)\big) \in \mathbf{L}^2_r(t_0, T)$. Также мы считаем известной траекторию, разницу с которой мы минимизируем.

Критериями качества управления могут выступать различные функционалы, например:

$$J_1(u) = |x(T,u) - y(t)|^2_{\mathbb{R}^n} \to \inf \ \text{— \textit{терминальный квадратичный функционал}} \qquad (2)$$

или

$$J_2(u) = \int\limits_{t_0}^{T} |x(t,u) - y(t)|^2_{\mathbb{R}^n}\, dt \to \inf \ \text{— \textit{интегральный квадратичный функционал}} \qquad (3)$$

Минимизация терминального квадратичного функционала позволят добиться точности в достижении конечной точки. Интегрального — близости траектории к заданной.

Определение. При $u(t) \in \mathbf{L}^2(t_0, T)$ под *решением задачи Коши* (1) понимается непрерывная на отрезке $[t_0, T]$ функция $x(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + F(\tau)\right)\, d\tau \quad t \in [t_0, T]$$

При этом функционалы $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ должны принадлежать классу измеримых по Лебегу и ограниченных функций $\mathbf{L}^\infty(t_0, T)$.

Напомним, что $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty(t_0,T)} = \inf\limits_{\substack{C>0:\\ |u(t)|\leqslant C \text{ п.в.}}} C = \lim\limits_{p\to\infty}\left(\int\limits_{t_0}^{T}|u(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$

Редуцируем исходную задачу к линейной, положив $x = x_1 + x_2$, где

$$\begin{cases} x_1' = Ax_1 + Bu \\ x_1(t_0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = Ax_2 + F \\ x_2(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Заметим, что во второй системе нет неизвестного управления, а значит можно найти x_2. При такой редукции критериальные функционалы можно представить как

$$J_1(u) = |\underbrace{x_1(T,u)}_{=A_1u} - \underbrace{(y - x_2(T))}_{=f\in\mathbb{R}^n}|^2_{\mathbb{R}^n} = \|Au - f\|^2_{\mathbb{R}^n},$$

$$J_2(u) = \int\limits_{t_0}^{T} |\underbrace{x_1(T,u)}_{=A_2u} - \underbrace{(y - x_2(T))}_{=f\in\mathbf{L}^2(t_0,T)}|^2\,dt.$$

Таким образом, для решения задачи (1), (2) или задачи (1), (3) необходимо минимизировать нормы $\|A_1u - y\|^2$ и $\|A_2u - y\|^2$ соответственно, где операторы A_1 и A_2 задаются следующим образом

$$\begin{aligned} &A_1u = x(T,u)\colon \mathbf{L}^2(t_0,T) \to \mathbb{R}^n, \\ &A_2u = x(t,u)\colon \mathbf{L}^2(t_0,T) \to \mathbf{L}^2(t_0,T). \end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений докажем, что операторы A_1 и A_2 ограничены, то есть для соответствующих норм $\|Au\| \leqslant c{\cdot}\|u\|$. Из (1) и определения решения задачи Коши имеем

$$|x(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} (A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))\;d\tau\right| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} (|A(\tau)||x(\tau)| + |B(\tau)||u(\tau)|)\;d\tau.$$

Так как $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{L}^\infty$, то модули под знаком интеграла можно оценить сверху константами, тогда получим, что $|x(t)|$ не превосходит

$$C_B\int\limits_{t_0}^{t} \|u(\tau)|\,d\tau + C_A\int\limits_{t_0}^{t} \|x(\tau)|\,d\tau.$$

Можно загрубить оценку, заменив момент времени на максимальный, тогда в силу неравенства Коши-Буняковского полученное выражение меньше или равно

$$C_B\sqrt{T - t_0}\|u\|_{\mathbf{L}^2} + C_A\int\limits_{t_0}^{t} |x(\tau)|\,d\tau.$$

Эта оценка верна для всех $t \in [t_0, T]$. Далее нам понадобиться лемма Гронуолла-Беллмана. Напомним её формулировку без доказательства.

Лемма (Гронуолл-Беллман). [B2, стр. 30–31, лемма 2], [АТФ, стр. 189]

Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \omega(t) \leqslant b + a \int\limits_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, d\tau \quad (b \geqslant 0, a > 0).$$

Тогда верно неравенство $\omega(t) \leqslant b{\cdot}e^{a(t-t_0)}$.

Применяя лемму к функции $x(t)$, получаем оценку $|x(t)| \leqslant C_B\sqrt{T-t_0}\|u\|e^{C_A(t-t_0)}$, то есть $|x(t)| \leqslant C\|u\|$. Таким образом, мы доказали, что оператор A_1 ограничен.

Для доказательства ограниченности оператора A_2 заметим, что

$$\|A_2u\|_{\mathbf{L}^2} = \|x\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\int\limits_{t_0}^{T} |x(t)|^2\, dt} \leqslant C\|u\|_{\mathbf{L}^2}\sqrt{T-t_0}.$$

Из приведённых рассуждений можно сделать вывод, что функционалы $J_1(u)$ и $J_2(u)$ слабо полунепрерывны снизу на $\mathbf{L}^2$, откуда следует следующая

Теорема 3. ***(о существовании оптимального управления задач** (1)**,** (2) **и** (1)**,** (3)**)*** *Пусть $A(t)$, $B(t)$, $F(t) \in \mathbf{L}^\infty(t_0,T)$; $y(t) \in \mathbf{L}^2(t_0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда у обеих задач* (1), (2) *и* (1), (3) *при выборе управления из слабокомпактного множества $\mathbf{U} \subset \mathbf{L}^2(t_0,T)$ существует оптимальное управление.*

Доказательство.

По сути, достаточно сослаться на Теорему 2. □

Теперь обратимся к вопросу о дифференцируемости функционалов J_1 и J_2. Для любого дифференцируемого по Фреше квадратичного функционала $J(u) = \|Au - f\|^2$ справедливы формулы $J'(u) = 2A^*(Au - f)$ и $J''(u) = 2A^*A$. Вычислим сопряжённые операторы в нашем случае. Для оператора A_1 для любого v имеем

$$\langle A_1u, v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, A_1^*v\rangle_{\mathbf{L}^2}$$

Если расписать это равенство, то получим

$$\langle x(T,u), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{t_0}^{T} \langle u(t), \ldots\rangle_{\mathbb{R}^r}\, dt,$$

где вместо многоточия стоит необходимый нам множитель.

Введём функцию $\psi(t)$ как решение *сопряжённой задачи Коши*:

$$\begin{cases} \psi(T) = v, \\ \psi'(t) = -A^T(t)\psi(t). \end{cases} \tag{5}$$

Тогда скалярное произведение можно расписать как

$$\langle x(T), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x(T), \psi(T)\rangle - \langle 0, \psi(t_0)\rangle = \{\text{ф-ла Ньютона-Лейбница}\} =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t), \psi(t)\rangle_t'\, dt = \int\limits_{t_0}^{T} \big(\langle x'(t), \psi(t)\rangle + \langle x(t), \psi'(t)\rangle\big)\, dt = \{x'(t) = Ax + Bu\} =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi(t)\rangle_{\mathbb{R}^n} \ dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left(\langle Ax, \psi(t)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle x(t), \psi'(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\right) \ dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle u(t), B^T\psi(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} \ dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle x(t), \psi'(t) + A^T(t)\psi(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} \ dt$$

Последний интеграл в силу (5) обнуляется, а из первого мы получаем, что $A_1^* v = B^T\psi(t)$.
Аналогичные рассуждения можно провести для оператора A_2:

$$\langle A_1 u, v\rangle_{\mathbf{L}^2} = \langle u, A_1^* v\rangle_{\mathbf{L}^2}$$

$$\int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t,u), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{t_0}^{T} \langle u(t), \ldots\rangle_{\mathbb{R}^r} \ dt$$

Прибавим к левой части этого равенства $\int\limits_{t_0}^{T} \langle Bu + Ax - x'(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$, где $\psi(t)$ — решение системы

$$\begin{cases} \psi(T) = 0, \\ \psi(t) = -A^T(t)\psi(t) - v(t). \end{cases} \tag{6}$$

Получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t,u), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle u(t), B^T\psi(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} \ dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left(\langle x(t), v(t)\rangle + \left\langle x(t), A^T\psi\right\rangle - \left\langle x'(t), \psi\right\rangle\right) \ dt.$$

Последний интеграл обращается в ноль в силу (6) и того, что по формуле Ньютона-Лейбница

$$-\int\limits_{t_0}^{T} \left\langle x'(t), \psi\right\rangle \ dt = -\left\langle x(t), \psi(t)\right\rangle \Big|_{t=t_0}^{T} + \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle x(t), \psi'(t)\right\rangle \ dt = \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle x(t), \psi'(t)\right\rangle \ dt.$$

Отсюда $A_2^* v = B^T\psi(t)$.

Теорема 4. ***(о дифференцируемости функционалов J_1 и J_2)***
Пусть $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{L}^\infty(t_0, T)$; $y(t) \in \mathbf{L}^2(t_0, T)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда оба функционала J_1 и J_2 бесконечно дифференцируемы по u на $\mathbf{L}^2(t_0, T)$, причём

$$J_1'(u) = 2B^T\psi(t), \text{ где } \psi(t) \text{ — решение (5)},$$

$$J_2'(u) = 2B^T\psi(t), \text{ где } \psi(t) \text{ — решение (6)}.$$

Доказательство.
Фактически мы провели доказательство этой теоремы выше при вычислении A_1^* и A_2^*. □

Упражнение 9 (5). Вычислить $J'(u)$ для

$$J(u) = \int\limits_{0}^{l} |y(x,u) - z(x)|^2 \ dx,$$

где y — решение системы

$$\begin{cases} (k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = u(x), 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, q(x) \geqslant 0, u(x) \in \mathbf{L}^2(0, l).$$

4 Элементы выпуклого анализа

Напомним определение выпуклой функции.

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве $\mathbf{U}$, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, \forall \alpha \in [0,1].$$

И введём несколько новых понятий:

Определение. Функция $J(u)$ называется *строго выпуклой*, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, u \neq v, \forall \alpha \in [0,1].$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *сильно выпуклой* с коэффициентом $\kappa > 0$, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, \forall \alpha \in [0,1].$$

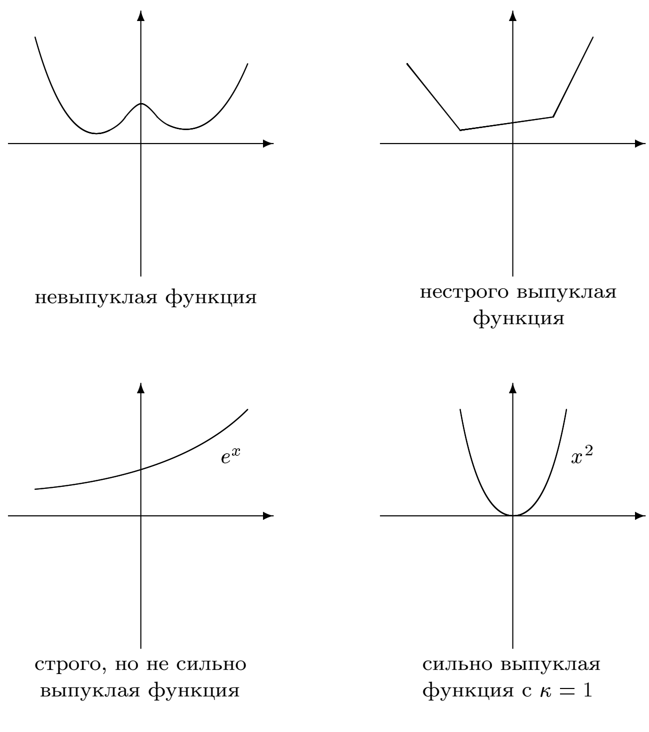


Рис. 5: к определению выпуклости функции

Теорема 5. ***(о локальном минимуме выпуклой функции)***
Пусть множество $\mathbf{U}$ выпуклое, функция $J(u)$ выпукла на $\mathbf{U}$, $J_* > -\infty$ тогда:

1) *любая точка локального минимума $J(u)$ на $\mathbf{U}$ является точкой глобального минимума;*

2) *если $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, то $\mathbf{U}_*$ выпукло;*

3) *если $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, а $J(u)$ строго выпукла, то $\mathbf{U}_* = \{u_*\}$ (состоит из одного элемента).*

Доказательство.
Пусть точка $u_* \in \mathbf{U}$ - точка локального минимума, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall u \in \mathbf{U} \cap \{\|u - u_*\| \leqslant \varepsilon\} \Rightarrow J(u) \geqslant J(u_*).$$

Фиксируем любую точку $v \in \mathbf{U}$, тогда существует такое $\alpha_0, 0 < \alpha_0 < 1$, что для любого α из отрезка $[0, \alpha_0]$ выполнено условие

$$u_* + \alpha(v - u_0) \in \mathbf{U} \cap \{\|u - u_*\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Имеем:

$$J(u_*) \leqslant J(u_* + \alpha(v - u_*)) \leqslant$$

$$\leqslant \{\text{определение выпуклой функции}\} \leqslant (1 - \alpha)J(u_*) + \alpha J(v).$$

Отсюда следует, что $\alpha J(u_*) \leqslant \alpha J(v)$, причём $\alpha > 0$, т.о. доказано первое утверждение теоремы.

Доказательство второго утверждения теоремы предоставляется читателю.
Для доказательства третьего утверждения, предположим, что в $\mathbf{U}_*$ существует элемент $v_* \neq u_*$, тогда для любого α из интервала $(0, 1)$ будем иметь:

$$J_* = J(\underbrace{\alpha + (1 - \alpha)v_*}_{\in \mathbf{U}_* (\text{по п.2})}) < \{\text{т.к. } J \text{ строго выпукла}\} <$$

$$< \alpha J(u_*) + (1 - \alpha)J(v_*) = \{v_*, u_* \in \mathbf{U}\} = J(v_*) = J_*.$$

Получили противоречие и теорема полностью доказана. □

Теорема 6. ***(сильно выпуклый вариант теоремы Вейерштрасса)***
Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ выпукло и замкнуто (не обязательно ограничено!), функция $J(u)$ сильно выпукла и полунепрерывна снизу на $\mathbf{U}$ (т.е. и слабо полунепрерывна снизу) тогда:

1) *$J_* > -\infty$;*

2) *$\mathbf{U}_* = \{u_*\} \neq \varnothing$;*

3) *$\forall u \in \mathbf{U} \ \frac{\varkappa}{2}\|u - u_*\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant J(u) - J(u_*)$.*

Доказательство.
Зафиксируем любую точку u_0 из $\mathbf{U}$ и рассмотрим множество $\mathbf{M}(u_0) = \{u \in \mathbf{U} | J(u) \leqslant J(u_0)\}$. Докажем, что $\mathbf{M}(u_0)$ выпукло, замкнуто и ограничено.
Выпуклость следует из выпуклости $\mathbf{U}$ и $J(u)$.

Для доказательства замкнутости рассмотрим любую последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{M}(u_0)$, сходящуюся к некоторой точке u. Необходимо доказать, что точка u принадлежит множеству $\mathbf{M}(u_0)$. Т.к. $\mathbf{U}$ замкнуто, то точка $u \in \mathbf{U}$, и

$$J(u) \leqslant \{J \text{ п.н. снизу}\} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \leqslant \{J(u_k) \leqslant J(u_0) \forall k\} \leqslant J(u_0).$$

Таким образом замкнутость доказана.

Теперь докажем, что $\mathbf{M}(u_0)$ ограничено. Для этого разобьём это множество на два (см. рис. 6):

$$\mathbf{M}(u_0) = (\underbrace{\mathbf{M}(u_0) \cap \{\|u-u_0\| \leqslant 2\}}_{\mathbf{M}_1}) \cup (\underbrace{\mathbf{M}(u_0) \setminus \mathbf{M}_1}_{\mathbf{M}_2}).$$

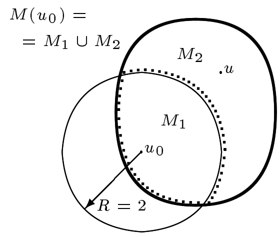


Рис. 6: множество $\mathbf{M}$

Множество $\mathbf{M}_1$ ограничено (по построению), то есть нам необходимо доказать ограниченность множества $\mathbf{M}_2$.

Для любой точки u из $\mathbf{M}_2$ $u \in \mathbf{U}$, $J(u) \leqslant J(u_0)$, $\|u-u_0\| > 2$. Возьмём $\alpha = \frac{1}{\|u-u_0\|} \in (0, \frac{1}{2})$, $1-\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, тогда для точки $v = u_0 + \underbrace{\alpha(u-u_0)}_{\|\cdot\|=1<2} \in \mathbf{M}_1$ выполняется неравенство

$$J(v) \leqslant \{J(u) \text{ сильно выпукла}\} \leqslant (1-\alpha)J(u_0) + \alpha J(u) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-u_0\|^2.$$

Отсюда, перегруппировав слагаемые и учтя ограничения на α, получаем, что $\frac{\kappa}{4}\|u-u_0\| \leqslant J(u_0) - J(v)$. Но $v \in \mathbf{M}_1$, а для этого множества (так как оно выпукло, замкнуто и ограничено) выполнена Теорема 2: $J_{1*} = \inf\limits_{u\in\mathbf{M}_1} J(u) > -\infty$ — и мы имеем $\|u-u_0\| \leqslant \frac{4(J(u_0)-J_{1*})}{\kappa}$.

Таким образом множество $\mathbf{M}_2$ (а значит и всё множество $\mathbf{M}$) ограничено и первое утверждение теоремы полностью доказано.

Второе утверждение теоремы следует непосредственно из Теоремы 5.

Докажем третье утверждение. Имеем

$$J(u_*) \leqslant J(\underbrace{u_* + \alpha(u-u_*)}_{\in\mathbf{U}}) \leqslant \{J(u) \text{ сильно выпукла}\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u_*) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-u_*\|^2$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-u_*\|^2 \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u_*) - J(u_*) = \alpha[J(u) - J(u_*)]$$

то есть, $\frac{\kappa}{2}(1-\alpha)\|u-u_*\|^2 \leqslant J(u)-J(u_*)$. Устремляя α к нулю, получаем третье утверждение. $\square$

Теорема 7. ***(критерий выпуклости для дифференцируемых функций)***
Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ выпукло, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) *$J(u)$ выпукла;*

(b) *$J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u-v\rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$;*

(c) *$\langle J'(u) - J'(v), u-v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$.*

Если, кроме того, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ и $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$, то эквивалентны утверждения $(a)-(c)$ и утверждение

(d) *$\langle J''(u)\cdot h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}, \forall h \in \mathbb{H}$.*

Доказательство.

Для начала проведём цепочку доказательств по следующей схеме $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

1) $(a) \Rightarrow (b)$

По определению выпуклой функции:

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v).$$

Перегруппируем слагаемые и получим:

$$\alpha J(u) \geqslant \alpha J(v) + [J(v+\alpha(u-v)) - J(v)].$$

Применим к выражению в квадратных скобках формулу конечных приращений:

$$\alpha J(u) \geqslant \alpha J(v) + \left\langle J'(v+\theta\alpha(u-v)), \alpha(u-v)\right\rangle_{\mathbb{H}}, \ \theta \in [0,1].$$

Теперь разделим обе части неравенства на $\alpha > 0$ и устремим α к нулю. Так как $J'(u)$ непрерывна по условию, мы получим, что для любых $u, v \in \mathbf{U}$:

$$J(u) \geqslant J(v) + \left\langle J'(v), u-v\right\rangle_{\mathbb{H}},$$

т.е. утверждение (b).

2) $(b) \Rightarrow (c)$

Запишем условие (b) для любых двух точек $u, v \in \mathbf{U}$:

$$J(u) \geqslant J(v) + \left\langle J'(v), u-v\right\rangle_{\mathbb{H}}$$

$$J(v) \geqslant J(u) + \left\langle J'(u), v-u\right\rangle_{\mathbb{H}},$$

и сложим два этих неравенства:

$$J(u) + J(v) \geqslant J(v) + J(u) + \left\langle J'(v) + J'(u), u-v-v+u\right\rangle_{\mathbb{H}}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение (c).

3) $(c) \Rightarrow (a)$

Обозначим через w выражение $\alpha u + (1-\alpha)v$. Тогда:

$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - [\alpha J(w) + (1-\alpha)J(w)] =$$

$$= \alpha(J(u) - J(w)) + (1-\alpha)(J(v) - J(w)) = \{\text{формула конечных приращений}\} =$$

$$= \alpha \int\limits_0^1 \left\langle J'(w + t(u-w)), u - w \right\rangle_{\mathbb{H}} dt + (1-\alpha) \int\limits_0^1 \left\langle J'(w + t(v-w)), v - w \right\rangle_{\mathbb{H}} dt.$$

Заметим, что $u - w = (1-\alpha)(u - v), v - w = \alpha(v - u)$ и, продолжая цепочку равенств, получим, что предыдущее выражение равно

$$\alpha(1-\alpha) \int\limits_0^1 \left\langle J'(w + t(u-w)) - J'(w + t(v-w)), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} dt.$$

Если обозначить через x выражение $w + t(u - w)$, а через y выражение $w + t(v - w)$, то $u - v$ будет равняться $(x-y)/t$, где $t > 0$. Тогда в этих обозначениях предыдущий интеграл равен

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{t} \left\langle J'(x) - J'(y), x - y \right\rangle_{\mathbb{H}} dt \geqslant 0.$$

Таким образом импликация $(c) \Rightarrow (a)$ доказана.

Докажем теперь, что из утверждения (c) с дополнительными ограничениями следует утверждение (d).

Фиксируем любое $u \in \mathrm{int}\mathbf{U}$ и любое $h \in \mathbb{H}$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0, \epsilon_0] \quad u + \varepsilon h \in \mathbf{U}$. Имеем

$$\left\langle J'(u + \varepsilon h) - J'(u), \varepsilon h \right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0.$$

Применим к первому аргументу скалярного произведения формулу конечных приращений (здесь учитывается, что $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$):

$$\left\langle J''(u + \theta\varepsilon h)\varepsilon h, \varepsilon h \right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1].$$

Разделим это неравенство на ε^2 и устремим ε к нулю. Тогда, учтя, что $J''(u)$ непрерывна, получим, что утверждение (d) выполнено для всех $u \in \mathrm{int}\mathbf{U}$.

Теперь применим свойство *выпуклых* множеств: $\overline{\mathrm{int}\mathbf{U}} = \mathrm{int}\overline{\mathbf{U}}$ (здесь оно приводится без доказательства, см., например, [АТФ, стр.216-217]). Имеем, что (d) выполняется для всех $u \in \mathbf{U} \cap \overline{\mathrm{int}\mathbf{U}} = \mathbf{U} \cap \overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$.

Для завершение доказательства теоремы докажем, что выполнение условия (d) влечёт за собой (c), а это следует из того, что

$$\left\langle J'(u) - J'(v), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} = \{\text{Упражнение 6}\} = \left\langle J''(v + \theta(u - v))(u - v), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0.$$

Таким образом теорема полностью доказана. $\square$

Аналогичным образом можно доказать подобную теорему для случая сильной выпуклости. Приведём её формулировку.

Теорема 8. ***(критерий сильной выпуклости для дифференцируемых функций)*** *Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ выпукло, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a') $J(u)$ *сильно выпукла с коэффициентом* $\varkappa > 0$*;*

(b') $J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\varkappa}{2}\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$*;*

(c') $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \varkappa\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$.

Если, кроме того, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ *и* $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$*, то эквивалентны утверждения* $(a') - (c')$ *и утверждение*

(d') $\langle J''(u)\cdot h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \varkappa\|h\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u \in \mathbf{U}, \forall h \in \mathbb{H}$.

Доказательство.

По сути, необходимо повторить доказательство Теоремы 7, учитывая сильную выпуклость. Предоставим это читателю. □

Приведём пример, показывающий, что условие $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$ в пунктах (d) и (d') Теорем 7 и 8 важно.

Рассмотрим множество $\mathbf{U} = \{y = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ ($u = (x, y)$, $\mathbf{U}$ - выпукло, $\mathrm{int}\mathbf{U} = \varnothing$) и функцию $J(u) = x^2 - y^2$. $J(u) \in \mathbf{C}^2$ и сильно выпукла, однако очевидно, что её вторая производная

$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

не удовлетворяет ни условию (d), ни условию (d').

Примеры применения Теорем 7 и 8.

1) $J(u) = \langle c, u\rangle$ - линейная функция, выпуклая, но не сильно. $J''(u) = 0$, т.е. неравенство (d) выполняется, но при этом неравенство (d') не выполняется.

2) $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}, \quad A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F}), f \in \mathbf{F}$ - квадратичный функционал, как известно выпуклый (доказано выше). Докажем это по-другому — применяя Теорему 7.

$$J''(u) = 2A^*Au \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$$

$$\big\langle J''(u)h, h\big\rangle_{\mathbb{H}} = \langle 2A^*Ah, h\rangle_{\mathbb{H}} = 2\|Ah\|^2_{\mathbf{F}} \geqslant 0 \quad \forall h \in \mathbb{H}.$$

Т.е. условие (d) выполняется.

В то же время $J(u)$ - сильно выпуклый с коэффициентом $\varkappa > 0$ тогда и только тогда, когда

$$2\,\langle A^*Ah, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \varkappa\|h\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall h \in \mathbb{H}.$$

На алгебраическом языке это означает существование обратного оператора

$$(A^*A)^{-1} \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H}).$$

То есть, если $\det(A^*A) \neq 0$, то сильная выпуклость есть, а в противном случае сильной выпуклости нет.

Докажем теперь одну из основных теорем курса.

Теорема 9. ***(условия оптимальности в форме вариационного неравенства)*** *Пусть множество* $\mathbf{U}$ *- выпукло,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$*. Тогда*

1) если $u_* = \underset{u \in \mathbf{U}}{\operatorname{argmin}} J(u)$, то $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \quad (1)$;

2) если $u_* \in \operatorname{int}\mathbf{U}$, то $J'(u_*) = 0$*;*

3) если выполняется (1)*, а* $J(u)$ *выпукла, то* $u_* = \underset{u \in \mathbf{U}}{\operatorname{argmin}} J(u)$*.*

Доказательство.

1) Так как $\mathbf{U}$ выпукло, то для любой точки u из $\mathbf{U}$ найдётся такое число $\alpha_0 \in [0,1]$, что для любого $\alpha \in [0, \alpha_0]$ точка $u_* + \alpha(u - u_*)$ будет принадлежать $\mathbf{U}$. Для этой точки по условию выполнено неравенство:
$$J(u_* + \alpha(u - u_*)) - J(u_*) \geqslant 0.$$
Применяя формулу конечных приращений, получаем:
$$\Big\langle J'(u_* + \theta\alpha(u - u_*), \alpha(u - u_*)\Big\rangle \geqslant 0.$$
Разделим это неравенство на α и устремим α к нулю. Тогда в силу непрерывности $J'(u)$ получаем первое утверждение утверждение теоремы.

2) Для достаточно малых $\alpha > 0$ точка $u_a = u_* - \alpha J'(u_*)$ принадлежит $\mathbf{U}$. Подставим точку u_a в (1) и получим:
$$\Big\langle J'(u_*), -\alpha J'(u_*)\Big\rangle \geqslant 0,$$
то есть $\|J'(u_*)\|^2 \leqslant 0$, а это означает, что $J'(u_*) = 0$.

3) Последнее утверждение теоремы следует из пункта (b) Теоремы 7:
$$J(u) - J(u_*) \geqslant \Big\langle J'(u_*), u - u_*\Big\rangle \geqslant 0.$$

Теорема доказана. □

Примеры применения Теоремы 9.

1) Рассмотрим следующую тривиальную задачу минимизации на пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$:
$$J(u) = u^2 \to \inf, \quad u = x, \quad \mathbf{U} = [1,2].$$
Очевидно, что $u_* = 1$. Получим этот результат с помощью (1). Для нашего случая скалярное произведение есть просто "естественное" умножение, поэтому необходимым условием оптимальности вследствие (1) является неравенство $2u_*(u - u_*) \geqslant 0$, которое должно выполняться для любого u из отрезка $[1,2]$. Так как u_* может быть только из $[1,2]$, то необходимо должно выполняться $u - u_* \geqslant 0$ опять же для любого u из отрезка $[1,2]$. Отсюда получаем, что $u_* = 1$.

2) Решим следующую задачу оптимального управления в пространстве $\mathbf{L}^2(0,4)$:

$$J(u) = \int\limits_0^4 \big(x(t) + u^2(t)\big)\,dt \to \inf_{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{L}^2(0,4) \mid |u(t)| \leqslant 1 \text{ почти всюду}\},$$

$$\begin{cases} x'(t) = u(t), \quad 0 < t < 4 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Для начала заметим, что множество $\mathbf{U}$ выпукло замкнуто и ограничено и, следовательно, является слабым компактом в $\mathbf{L}^2(0,4)$.

Разобьём функционал $J(u)$ на два интеграла:

$$J(u) = \int\limits_0^4 x(t)\,dt + \int\limits_0^4 u^2(t)\,dt \equiv J_1(u) + J_2(u)$$

Функция $J_1(u)$ выпукла как линейная по u. Функция $J_2(u) = \|u\|^2_{\mathbf{L}^2(0,2)}$ сильно выпукла с коэффициентом $\kappa = 2$. Отсюда получаем, что $J(u)$ является сильно выпуклым и по Теореме 6 существует единственно оптимальное управление.

Воспользуемся необходимым условием (1) для нахождения оптимального управления.

$$\big\langle J'(u_*), u - u_* \big\rangle_{\mathbf{L}^2} \geq 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \tag{$*$}$$

$J'(u_*)$ в наших обозначениях представимо как $J_1'(u_*) + J_2'(u_*)$, при этом $J_2'(u_*) = 2u_*$. Если бы мы представили $J_1(u)$ в каноническом виде $J_1 = \langle c, u\rangle$ (виде Рисса), то $J_1'(u) = c$.

$$J_1(u) = \int\limits_0^4 x(t,u)\,dt = \int\limits_0^4 c(t)u(t)\,dt = \int\limits_0^4 x(t)\cdot 1\,dt = \int\limits_0^4 x(t)(t-4)'\,dt = \{\text{инт. по частям}\} =$$

$$= -\int\limits_0^4 x'(t)(t-4)\,dt = \int\limits_0^4 u(t)(t-4)\,dt.$$

Таким образом, получаем, что $J_1'(t) = c(t) = 4 - t$. Тогда условие $(*)$ переписывается в виде

$$\int\limits_0^4 \left((4-t) + 2u_*(t)\right) \cdot \left(u(t) - u_*(t)\right)\,dt \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Воспользуемся тем, что это неравенство должно выполняться для любых u из $\mathbf{U}$ и рассмотрим следующее семейство функций, принадлежащих $\mathbf{U}$:

$$u(t) = \begin{cases} u_*(t), \quad t \in [0,4] \backslash (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \\ v, \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

где v любое число из отрезка $[-1, 1]$, $\varepsilon > 0$

Таким образом мы заменили оптимальное управление функцией, отличной от оптимальной, лишь на интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, на котором она принимается равной допустимой константе. Этот метод называют методом *игольчатых вариаций.*

Тогда для любого положительного ε и любого $v \in [-1, 1]$ условие $(*)$ переписывается в виде

$$\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} ((4-t) + 2u_*(t)) \cdot (u(t) - u_*(t))\ dt \geqslant 0$$

Теперь воспользуемся теоремой о дифференцируемости интеграла Лебега (см., например, [КФ, гл.VI, §6]). Разделим полученное неравенство на 2ε и устремим ε к 0. Для почти всех t_0 из интервала $(0, 4)$ получим $(4 - t_0 + 2u_*(t_0)) \cdot (v - u_*(t_0)) \geqslant 0$.

Возможны несколько вариантов.

i) Предположим, что $4 - t_0 + 2u_*(t_0) > 0$. Так как $u_*(t_0) \in [-1, 1]$, то при t_0 из интервала $[0, 2)$ это неравенство будет выполнено. Тогда необходимо должно выполняться условие $v - u_* \geqslant 0 \Leftrightarrow v \geqslant u_*$ для любого $v \in [-1, 1]$. Отсюда при $t_0 \in [0, 2)$ оптимальным является управление $u_*(t) \equiv -1$.

ii) Если $4 - t_0 + 2u_*(t_0) < 0$, то $v - u_*(t) \leqslant 0 \quad \forall v \in [-1, 1]$ и мы получаем $u_*(t) \equiv 1$, но это противоречит тому, что $4 - t_0 + 2u_*(t_0) < 0$. Значит этот вариант исключён.

iii) Осталось рассмотреть случай, когда $4 - t_0 + 2u_*(t_0) \equiv 0$. Тогда получаем, что при $t_0 \in [0, 2)$ $u_*(t) = \frac{t-4}{2}$.

Задача полностью решена.

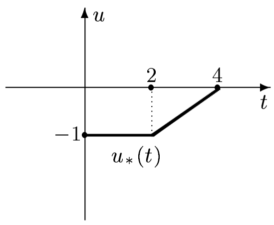


Рис. 7: $u_*(t)$

Метрическая проекция

В этом пункте $\mathbf{M}$ - метрическое пространство, $\rho(x, y)$ - метрика, $\mathbf{U} \subset \mathbf{M}$.

Определение. *Проекцией* $\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(v)$ точки v на множество $\mathbf{U}$ называется $\operatorname*{argmin}\limits_{u \in \mathbf{U}} \rho(u, v)$ (в некоторых случаях выгоднее рассматривать проекцию как $\operatorname*{argmin}\limits_{u \in \mathbf{U}} \rho^2(u, v)$).

Заметим, что в случае, когда $\mathbf{U}$ не выпукло проекция точки, вообще говоря, может быть не единственной (см. рис. 8).

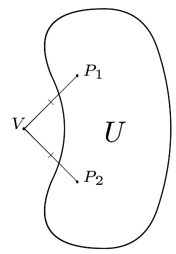


Рис. 8: пример проекции на невыпуклое множество

Для некоторых множеств проекции точки на них вообще не существует. Например, если рассмотреть открытый шар $\mathbf{U} = \{\|u\| < 1\}$ и точку вне этого шара, то она не будет иметь проекцию на это множество (см. рис. 9).

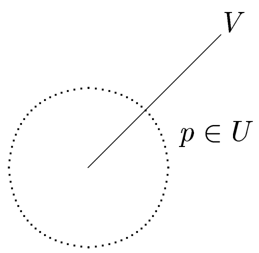


Рис. 9: пример отсутствия проекции

Теорема 10. ***(существование и единственность проекции и её свойства)***
Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, $\mathbf{U}$ - выпуклое замкнутое множество, тогда

1) *для любого элемента h из $\mathbb{H}$ существует единственная $\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(h)$;*

2) $p = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(h) \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \mathbf{U}, \\ \langle p - h, u - p\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \end{cases}$ *(см. рис. 10);*

3) $\|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(f) - \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(g)\|_{\mathbb{H}} \leqslant \|f - g\|_{\mathbb{H}} \quad \forall f, g \in \mathbb{H}$. *Это свойство называют **нестрогой сжимаемостью** оператора проектирования (см. рис. 11).*

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию $J(u) = \|u-h\|^2_{\mathbb{H}}$. Она сильно выпукла ($\kappa = 2$). Множество $\mathbf{U}$ выпукло и замкнуто по условию. Отсюда по Теореме 6 следует, что J_* конечно и $\mathbf{U}_* = \{u_*\} \neq \varnothing$, то есть первое утверждение теоремы.

2) Второе утверждение является следствием применения Теоремы 9 к этой же функции.

3) Пусть $p_f = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(f),\ p_g = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(g)$. Тогда, применяя второе утверждение два раза, имеем:

$$\langle p_f - f, u - p_f \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0$$

$$\langle p_g - g, u - p_g \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0$$

Примем за u в первом неравенстве p_g, а во втором p_f и вычтем из первого второе

$$\langle p_f - f - p_g + g, p_g - p_f - p_f + p_g \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0$$

или по-другому

$$\langle p_f - p_g, p_f - p_g \rangle_{\mathbb{H}} + \langle g - f, p_g - p_f \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0.$$

Тогда в силу неравенства Коши-Буняковского:

$$\|g - f\|_{\mathbb{H}} \cdot \|p_g - p_f\|_{\mathbb{H}} \geqslant \langle g - f, p_g - p_f \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \|p_g - p_f\|^2_{\mathbb{H}}.$$

Разделим это неравенство на $\|p_g - p_f\|_{\mathbb{H}} \neq 0$ (если $p_g = p_f$ доказываемое неравенство очевидно выполняется) и получим третье утверждение теоремы.

Теорема полностью доказана. $\square$

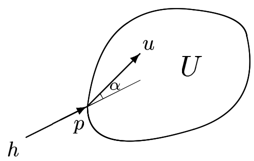


Рис. 10: к п. 2 Теоремы 10

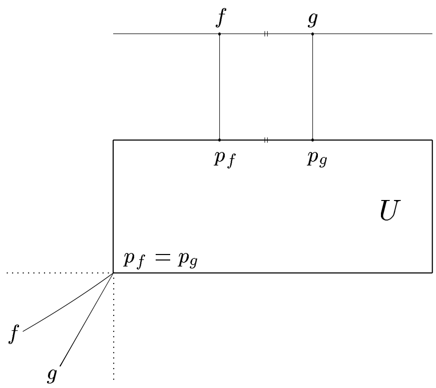


Рис. 11: к п. 3 Теоремы 10

Упражнение 10 (5). Пусть $\mathbf{H}$ - гильбертово пространство, $\mathbf{L}$ - *замкнутое* линейное подпространство из $\mathbf{H}$. Доказать, что $pr_{\mathbf{L}}$ есть линейный ограниченный самосопряжённый оператор

(оператор ортогонального проектирования).

Упражнение 11 (4). Пусть $\mathbf{H}$ - гильбертово пространство, $\mathbf{L}$ - *замкнутое* линейное подпространство из $\mathbf{H}$, $x_0 \in \mathbf{H}$ - фиксированная точка. Доказать, что (см. утв. 2 Теоремы 10)

$$p = pr_{x_0+\mathbf{L}} h \Leftrightarrow \begin{cases} p \in x_0 + \mathbf{L} \\ \langle p - h, l \rangle = 0 \ \forall l \in \mathbf{L}. \end{cases}$$

Примеры на вычисление проекций.

1) Пусть $\mathbf{U}$ - шар в $\mathbb{H}$: $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid \|u - u_0\|_{\mathbb{H}} \leqslant R, u_0 \in \mathbb{H}\}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $u_0 = 0$. Рассмотрим точку $h \notin \mathbf{U}$. Тогда по аналогии с геометрическим пространством $\mathbb{R}^3$ предположим, что проекция этой точки на множество $\mathbf{U}$ равна:
$$\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(h) = R\frac{h}{\|h\|_{\mathbb{H}}}.$$
Докажем это, используя утверждение 2) Теоремы 10. Для этого рассмотрим скалярное произведение
$$\left\langle R\frac{h}{\|h\|_{\mathbb{H}}} - h, u - R\frac{h}{\|h\|_{\mathbb{H}}} \right\rangle_{\mathbb{H}} = \left(\frac{R}{\|h\|_{\mathbb{H}}} - 1\right) \times \left(\langle h, u\rangle_{\mathbb{H}} - R\frac{\|h\|^2_{\mathbb{H}}}{\|h\|_{\mathbb{H}}}\right)$$
Так как $h \notin \mathbf{U}$, то $\|h\|_{\mathbb{H}} > R$, а значит первый множитель этого произведения отрицателен. Во втором множителе распишем скалярное произведение по неравенству Коши-Буняковского:
$$\langle h, u\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant \|h\|_{\mathbb{H}} \cdot \|u\|_{\mathbb{H}} \leqslant R \cdot \|h\|_{\mathbb{H}}.$$
Отсюда следует, что он неположителен, то есть всё скалярное произведение оказывается неотрицательным и выполняется второе условие Теоремы 10. Таким образом наше предположение оказалось верным.

2) Рассмотрим $\mathbf{U} = \{u(t) \in \mathbf{L}^2(a, b) \mid \alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t);\ \alpha(t), \beta(t) \in \mathbf{L}^2\}$ - "параллелепипед" в $\mathbf{L}^2$. Для нахождения проекции функции $h(t)$ (не принадлежащей $\mathbf{U}$, т.к. в противном случае проекция просто будет равна $h(t)$) на $\mathbf{U}$ необходимо минимизировать норму:
$$\|u(t) - h(t)\|^2_{\mathbf{L}^2} = \int\limits_a^b |u(t) - h(t)|^2\, dt \to \inf_{u \in \mathbf{U}}.$$
Проекция в этом случае, как нетрудно видеть, будет равна:
$$[\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(h(t))]\,(t) = \begin{cases} h(t), & t: \ \alpha(t) \leqslant h(t) \leqslant \beta(t), \\ \beta(t), & t: \ h(t) > \beta(t), \\ \alpha(t), & t: \ h(t) < \alpha(t). \end{cases}$$

Упражнение 12 (3). Найти проекции

1) в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ на гиперплоскость $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} : \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}} = \beta\}$;

2) в пространстве $\mathbb{R}^n$ на "параллелепипед" $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = \overline{1, n}\}$.

Теорема 11. ***(проекционная форма критерия оптимальности)***
Пусть $\mathbb{H}$ *- гильбертово пространство,* $\mathbf{U}$ *- выпуклое замкнутое множество,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$*,* $J(u)$ *- выпукла. Тогда*

$$u_* = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J(u) \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha > 0 \quad u_* = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u_* - \alpha J'(u_*)).$$

Доказательство.

По Теореме 9 имеем, что u_* является точкой минимума тогда и только тогда, когда

$$\left\langle J'(u_*), u - u_* \right\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Умножим это неравенство на $\alpha > 0$ и в первом аргументе скалярного произведения прибавим и вычтем u_*:

$$\left\langle u_* - (u_* - \alpha J'(u_*)), u - u_* \right\rangle \geqslant 0.$$

Это неравенство по п.2 Теоремы 10 выполнено тогда и только тогда, когда

$$u_* = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u_* - \alpha J'(u_*)).$$

Теорема доказана. $\square$

5 Итерационные методы минимизации

Метод скорейшего спуска

Рассмотрим достаточно общую задачу минимизации:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Для её решения в данном методе строится следующая итерационная последовательность:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k),\; k = 0, 1, 2, \ldots;\; \alpha \geqslant 0 \tag{2}$$

Для начала процесса итерирования необходимо задать $u_0 \in \mathbb{H}$. Способов, для выбора u_0 в общем случае не существует и в основном здесь исходят из каких-либо эмпирических данных и полагаются на опыт.

Критерии остановки процесса приближенного нахождения минимума могут быть основаны на различных соображениях. Приведём некоторые из них:

1) $\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \varepsilon_1$;

2) $\|J(u_{k+1}) - J(u_k)\| \leqslant \varepsilon_2$;

3) $\|J'(u_k)\| \leqslant \varepsilon_3$.

(ε_i выбираются, исходя из требований к решению). Обычно на практике применяют комбинации этих оценок.

Выбор шага спуска α_k в общем случае также не единственен (причём на каждом шаге он может быть взят по-разному). Иногда α_k берут не зависящим от k: $\alpha_k = \alpha \equiv const > 0$. В методе скорейшего спуска α_k определяется конкретным образом:

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{\alpha \geqslant 0} J(u_k - \alpha J'(u_k)). \tag{3}$$

Обозначим, выражение $J(u_k - \alpha J'(u_k))$ через $f_k(\alpha)$.

Заметим, что в при таком выборе α_k, если $u_{k+1} = u_k$, то либо $\alpha_k = 0$, либо $J'(u_k) = 0$. Случай $J'(u_k) = 0$ является необходимым условием минимума и процесс итерирования можно остановить. А в случае, когда $\alpha_k = 0$ из (3) имеем

$$f_k'(0) = \left\langle J'(u_k), -J'(u_k) \right\rangle \geqslant 0,$$

и мы опять получили необходимое условие минимума.

Теорема 12.
Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{H})$, $J(u)$ сильно выпукла с коэффициентом $\kappa > 0$, $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbb{H})$ с константой $L > 0$. Тогда при любом выборе начальной точки u_0 из $\mathbb{H}$ метод (2)–(3) сходится к точке минимума u_* задачи (1):

$$\frac{\kappa}{2}\|u_k - u_*\|^2 \leqslant J(u_k) - J(u_*) \leqslant q^k(J(u_0) - J(u_*)), \text{ где } q = 1 - \frac{\kappa}{L} \in [0,1) \tag{4}$$

Доказательство.
Для начала заметим, что по Теореме 6 точка u_* для функции $J(u)$ существует и единственна.

По Теореме 8 п. (c') (условие сильной монотонности градиента) имеем:

$$\kappa\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \left\langle J'(u) - J'(v), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Учитывая, что $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbb{H})$ и применяя неравенство Коши-Буняковского также получаем, что

$$\left\langle J'(u) - J'(v), u - v \right\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant L\|u - v\|_{\mathbb{H}}.$$

Из этих неравенств следует, что $\kappa \leqslant L$.

Теперь обозначим через a_k разность между $J(u_k)$ и $J(u_*)$. Очевидно, что $a_k \geqslant 0$. В свою очередь

$$a_{k+1} = J(u_{k+1}) - J(u_k) + a_k \leqslant \{(2), (3);\ \forall\alpha\} \leqslant [J(u_k - \alpha J'(u_k)) - J(u_k)] + a_k$$

Применим к разности в квадратных скобках формулу конечных приращений в интегральной форме:

$$J(u_k - \alpha J'(u_k)) - J(u_k) = \int\limits_0^1 \left\langle J'(u_k - \alpha t J'(u_k)), -\alpha J'(u_k) \right\rangle_{\mathbb{H}} dt$$

По неравенству Коши-Буняковского и в силу Липшиц-непрерывности $J'(u)$ это выражение не превосходит

$$-\alpha\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}} + \int\limits_0^1 L\| - \alpha t J'(u_k)\|_{\mathbb{H}} \cdot \| - \alpha J'(u_k)\|_{\mathbb{H}}\, dt = -\alpha\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2}L\alpha^2\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}}.$$

Таким образом,

$$a_{k+1} \leqslant a_k - \alpha\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2}L\alpha^2\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall \alpha \geqslant 0.$$

В правой части этого неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно α, который достигает своего минимума в точке $1/L$. Отсюда следует, что

$$a_{k+1} \leqslant a_k - \frac{1}{2L}\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}} \tag{5}$$

Далее. По Теореме 8 п. (b') имеем:

$$a_k = J(u_k) - J(u_*) \geqslant \left\langle J'(u_*), u_k - u_* \right\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\kappa}{2}\|u_k - u_*\|^2_{\mathbb{H}}.$$

Но $J'(u_*) = 0$ по условию оптимальности, т.е.

$$a_k \geqslant \frac{\kappa}{2}\|u_k - u_*\|^2_{\mathbb{H}} \tag{6}$$

и доказана первая часть неравенства (4).

Для доказательства второй части заметим, что

$$L\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \geqslant \kappa\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \geqslant \|J(u_k) - J(u_*)\|_{\mathbb{H}} = \|J(u_k)\|_{\mathbb{H}}, \text{ т.е. } \|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \geqslant \frac{\|J(u_k)\|_{\mathbb{H}}}{\kappa}.$$

Подставив это выражение в (6), получим:

$$a_k \geqslant \frac{1}{2\kappa}\|J'(u_k)\|^2_{\mathbb{H}}.$$

Выражая отсюда норму $\|J'(u_k)\|_{\mathbb{H}}$ и подставляя её в (5), получим:

$$a_{k+1} \leqslant a_k \left(1 - \frac{\kappa}{L}\right) = a_k q.$$

Применяя это неравенство k раз получаем второе неравенство в (4) и теорема полностью доказана. □

Наилучшие результаты, как нетрудно видеть, метод (2)–(3) даёт в случае, когда $\kappa = L$ (например, для квадратичных функционалов вида $J(u) = \|u\|^2_{\mathbb{H}} - \langle b, u\rangle_{\mathbb{H}}$). При этом согласно (4) мы получаем *точный* результат уже после первого шага процесса.

Заметим, что для квадратичного функционала $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}$ задача (3) решается явным образом. Если обозначить через $f_k(\alpha)$ выражение $J(u_k - \alpha J'(u_k))$, то для случая квадратичного функционала имеем:

$$f_k(\alpha) = \|A(u_k - \alpha J'(u_k)) - f\|^2_{\mathbf{F}} = \|Au_k - f\|^2_{\mathbf{F}} + \alpha^2\|AJ'(u_k)\|^2_{\mathbf{F}} - 2\left\langle Au_k - f, \alpha AJ'(u_k)\right\rangle_{\mathbf{F}}.$$

В случае, когда $\|AJ'(u_k)\|_{\mathbf{F}} \neq 0$, имеем в правой части квадратный трёхчлен относительно α, который достигает минимума в точке

$$\alpha_k = \frac{\langle Au_k - f, AJ'(u_k)\rangle_{\mathbf{F}}}{\|AJ'(u_k)\|^2_{\mathbf{F}}} = \{J'(u) = 2A^*(Au - f)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\langle Au_k - f, AA^*(Au_k - f)\rangle_{\mathbf{F}}}{\|AA^*(Au_k - f)\|^2_{\mathbf{F}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\langle A^*(Au_k - f), A^*(Au_k - f)\rangle_{\mathbf{F}}}{\|AA^*(Au_k - f)\|^2_{\mathbf{F}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\|A^*(Au_k - f)\|^2_{\mathbf{F}}}{\|AA^*(Au_k - f)\|^2_{\mathbf{F}}} \quad \left(= \frac{1}{2}\cdot\frac{\|J'(u_k)\|^2_{\mathbf{F}}}{\|AJ'(u_k)\|^2_{\mathbf{F}}}\right)$$

Случай же, когда $AJ'(u_k) = 0$ означает, что $AA^*(Au_k - f) = 0$. Если обозначить разность $Au_k - f$ через v_k, то будем иметь, что $v_k \in \ker AA^*$. А из этого следует, что $v_k \in \ker A^*$, действительно:

$$AA^* v_k = 0 \Rightarrow \langle AA^* v_k, v_k \rangle = 0 \Rightarrow \langle A^* v_k, A^* v_k \rangle = 0 \Rightarrow A^* v_k = 0.$$

Отсюда получаем, что $J'(u_k) = 0$, то есть процесс останавливается.

Упражнение 13 (3). Найти явное выражение для α_k из (3) для функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle, \quad A^* = A \geqslant 0.$$

Непрерывный аналог метода скорейшего спуска

Как и в предыдущем методе здесь мы рассматриваем задачу минимизации функции $J(u)$ на множестве без ограничений $\mathbf{U} = \mathbb{H}$:

$$J(u) \to \inf, \ u \in \mathbb{H} \tag{1}$$

Приведём некоторые формальные рассуждения, которые позволят нам получить непрерывный аналог метода скорейшего спуска. Рассмотрим шаг процесса для этого метода:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha J'(u_k).$$

Если рассматривать Δt_k как некий временной шаг, то разделив это равенство на Δt_k получим:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t_k} = -\frac{\alpha_k}{\Delta t_k} J(u_k).$$

Если теперь задать значение $u(t)$ в начальный момент времени $t = 0$, то мы придём (исходя из здравого смысла) к системе

$$\begin{cases} u'(t) = -\beta(t) J'[u(t)], \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 13.
*Пусть $J(u)$ сильно выпукла на $\mathbb{H}$ с коэффициентом $\kappa > 0$, $J'(u) \in$ **Lip**$(\mathbb{H})$, $\beta(t) \geqslant \beta_0 > 0$ непрерывна по t. Тогда для любого начального приближения $u_0 \in \mathbb{H}$ метод (2) сходится к u_*:*

$$\|u(t) - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \|u_0 - u_*\|_{\mathbb{H}} \cdot e^{-\kappa \beta_0 t}, \ t \geqslant 0 \tag{3}$$

Доказательство.

Как и в предыдущей теореме заметим, что по Теореме 6 точка u_* существует и единственна.

Введём функцию Ляпунова:

$$V(\tau) = \|u(\tau) - u_*\|^2_{\mathbb{H}}.$$

$$V'(\tau) = 2 \left\langle u'(\tau) - u'_*, u(\tau) - u_* \right\rangle_{\mathbb{H}} = 2 \left\langle -\beta(\tau) J'[u(\tau)], u(\tau) - u_* \right\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant$$
$$\leqslant \{\text{Теорема 8 п.}(c')\} \leqslant -2\beta_0 \kappa \|u(\tau) - u_*\|^2_{\mathbb{H}} = -2\beta_0 \kappa V(\tau).$$

Домножим обе части этого неравенства на $e^{2\beta\kappa\tau}$ и перенесём всё в одну левую часть:

$$e^{2\beta\kappa\tau}V'(\tau) + 2\beta_0\kappa e^{2\beta\kappa\tau}V(\tau) \leqslant 0$$

$$\Big(V(\tau)e^{2\beta\kappa\tau}\Big)' \leqslant 0.$$

Проинтегрируем обе части по τ от 0 до t:

$$\|u(t) - u_*\|^2_{\mathbb{H}}\cdot e^{2\beta\kappa t} - \|u(t) - u_*\|^2_{\mathbb{H}}\cdot 1 \leqslant 0.$$

Перенося второе слагаемое в правую часть и деля на $e^{2\beta\kappa t}$, получаем (3). Теорема доказана. $\square$

Метод проекции градиента

В этом пункте рассмотрим задачу минимизации функции $J(u)$ на множестве, уже не совпадающем со всем пространством $\mathbb{H}$ (задачу на условный минимум):

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subset \mathbb{H} \qquad (1).$$

В данном методе рассматривается итерационная последовательность

$$u_{k+1} = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u_k - \alpha_k J'(u_k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

При этом необходимо учитывать, что на каждом шаге приближения все точки u_k должны принадлежать $\mathbf{U}$. Для простоты будем считать, что

$$\alpha_k = \alpha \equiv const \qquad (3)$$

Теорема 14.
Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ - выпуклое, замкнутое множество, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ и сильно выпукла с коэффициентом $\kappa > 0$, $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ с константой $L > 0$. Пусть также $\alpha \in \left(0, \frac{2\kappa}{L^2}\right)$. Тогда для любого начального приближения $u_0 \in \mathbf{U}$ метод (2), (3) сходится:

$$\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \|u_0 - u_*\|_{\mathbb{H}}\cdot q^k(\alpha), \ \textit{где}\ 0 < q(\alpha) = \sqrt{1 - 2\kappa\alpha + \alpha^2L^2} < 1. \qquad (4)$$

Доказательство.

По Теореме 11 точка u_* является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда

$$u_* = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u_* - \alpha J'(u_*)), \quad \forall\alpha > 0.$$

Введём оператор $A : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ такой, что

$$Au = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u - \alpha J'(u)).$$

Тогда точка u_* будет неподвижной для этого оператора.

Подберём теперь такие α, при которых оператор A будет сжимающим.

$$\|Au - Av\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \{\text{Теорема 10 п.3}\} \leqslant \|[u - \alpha J'(u)] - [v - \alpha J'(v)]\|^2_{\mathbb{H}} =$$

$$= \|u - b\|^2_{\mathbb{H}} + \alpha^2\|J'(u) - J'(v)\|^2_{\mathbb{H}} - 2\alpha\left\langle u - v, J'(u) - J'(v)\right\rangle_{\mathbb{H}}$$

Второе слагаемое в этом выражении не превосходит в силу Липшиц-непрерывности первой производной $J'(u)$ величины $L^2\|u - v\|^2_{\mathbb{H}}$. Последнее же слагаемое не больше, чем $\kappa\|u - v\|^2_{\mathbb{H}}$, т.к. $J(u)$ сильно выпукла. Из этого получаем:

$$\|Au - Av\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant (1 - 2\kappa\alpha + \alpha^2L^2)\|u_0 - u_*\|^2_{\mathbb{H}} = q^2(\alpha)\|u_0 - u_*\|^2_{\mathbb{H}}.$$

Теперь, применяя принцип сжимающих отображений (см., например [КФ, гл. II, §4]), получаем (4) и теорема доказана. $\square$

Метод условного градиента

В этом пункте рассматривается задача минимизации следующего вида:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{H}. \tag{1}$$

Идея метода условного градиента основана на том, что в окрестности точки u_k функционал $J(u)$ можно приближенно представить как

$$J(u) \simeq J(u_k) + \left\langle J'(u_k), u - u_k \right\rangle.$$

Так как $J(u_k)$ близко к $J(u)$, то мы стараемся минимизировать скалярное произведение $J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k\rangle$. Введём обозначение

$$\overline{u}_k = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J_k(u). \tag{2}$$

Тогда итерационная последовательность рассматриваемого метода описывается как

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\overline{u}_k + u_k), \tag{3}$$

где

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} J\left(u_k + \alpha\left(\overline{u}_k - u_k\right)\right) \tag{4}$$

Для обоснования сходимости метода докажем сначала одну небольшую лемму.

Лемма 1. ***(оценка скорости сходимости числовой последовательности)***
Пусть для монотонной числовой последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$*:*

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_n > \ldots > 0$$

выполняется условие

$$a_k - a_{k+1} \geqslant C{\cdot}a_k^2 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда верна оценка:

$$a_m \leqslant \frac{a_0}{1 + a_0 C m} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{$*$}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность сходится как монотонно убывающая и ограниченная снизу. Оценим разность величин, обратных элементам последовательности:

$$\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k{\cdot}a_{k+1}} > \frac{C{\cdot}a_k^2}{a_k^2} = C.$$

Просуммировав эти неравенства по k от 0 до m, получим

$$\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_0} > C{\cdot}m.$$

Отсюда непосредственно следует $(*)$. □

Теорема 15.
Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ *- выпуклое, замкнутое, ограниченное множество,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ *и выпукла,* $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ *с константой* $L > 0$, $D = \mathrm{diam}\mathbf{U}$. *Тогда*

$$J(u_k) - J_* \leqslant \frac{J(u_0) - J_*}{1 + \frac{J(u_0)-J_*}{2LD}k} = O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (5).$$

Если $J(u)$ *сильно выпукла, то кроме этого выполнено условие*

$$\frac{\kappa}{2}\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant J(u_k) - J_*.$$

Доказательство.

$J(u)$ выпукла и непрерывна, следовательно, и слабо полунепрерывна снизу. $\mathbf{U}$ выпукло, замкнуто и ограничено, следовательно, является слабым компактом. Отсюда по Теореме 2 имеем, что

$$J_* > -\infty, \mathbf{U}_* \neq \varnothing.$$

Обозначим через a_k разность между $J(u_k)$ и J_*, тогда

$$a_{k+1} = a_k + J(u_{k+1}) - J(u_k) \leqslant a_k + J(u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)) - J(u_k) =$$

$$= \{\text{ф-ла конечных приращений}\} = a_k + \int\limits_0^1 \left\langle J'(u_{k+1} + t\alpha(\overline{u}_k - u_k)), \alpha(\overline{u}_k - u_k)\right\rangle_{\mathbb{H}} dt$$

Прибавим и вычтем к первому аргументу скалярного произведения под интегралом $J'(u_k)$ и, применив неравенство Коши-Буняковского и учтя Липшиц непрерывность $J'(u)$, получим

$$a_{k+1} = a_k + \alpha\left\langle J'(u_k), \overline{u}_k - u_k\right\rangle_{\mathbb{H}} + \int\limits_0^1 L{\cdot}\|t\alpha(\overline{u}_k - u_k)\|_{\mathbb{H}}{\cdot}\|\alpha(\overline{u}_k - u_k)\|_{\mathbb{H}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant a_k + \alpha\left\langle J'(u_k), \overline{u}_k - u_k\right\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{L}{2}\alpha^2 D^2 \leqslant a_k + \alpha\left\langle J'(u_k), u_* - u_k\right\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{L}{2}\alpha^2 D^2$$

По Теореме 7 п. (b) отсюда получаем:

$$a_{k+1} \leqslant a_k + \frac{L}{2}\alpha^2 D^2 + \alpha(J(u_*) - J(u_k)) = (1-\alpha)a_k + \frac{L}{2}\alpha^2 D^2 \quad \forall \alpha \in [0,1] \qquad (6)$$

Подставим в эту оценку $\alpha = 0$ и получим, что $a_{k+1} \leqslant a_k$, но при этом все $a_k \geqslant 0$, то есть последовательность $\{a_k\}$ имеет предел $\overline{a} \geqslant 0$.

Перейдём в (6) к пределу при $k \to \infty$:

$$\overline{a} \leqslant (1-\alpha)\overline{a} + \frac{L}{2}\alpha^2 D^2$$

Разделим на α и устремим α к 0. Имеем оценку $\overline{a} \leqslant 0$. Таким образом $\overline{a} = 0$.

Рассмотрим теперь минимум правой части (6) по α

$$\alpha_{\text{верш}} = \overline{\alpha}_k = \frac{a_k}{LD^2} \to 0.$$

Значит, начиная с некоторого k $\alpha_k \in [0, 1]$.

Берём в (6) $\alpha = \overline{\alpha}_k$ и получаем оценку

$$a_{k+1} \leqslant a_k - \frac{a_k^2}{2LD^2}.$$

Отсюда с учётом Леммы 1 получаем первое утверждение теоремы.

Осталось заметить, что если $J(u)$ сильно выпукла, то второе утверждение следует непосредственно из Теоремы 6 п. 2. Теорема полностью доказана. $\square$

Метод Ньютона

Рассматриваем задачу минимизации функции $J(u)$:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{H} \tag{1}$$

Идея метода Ньютона похожа на метод условного градиента, но здесь мы будем использовать не линейную, а квадратичную аппроксимацию функции $J(u)$ в окрестности точки u_k:

$$J(u) \simeq J(u_k) + \left[\left\langle J'(u_k), u - u_k \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k \right\rangle \right].$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $J_k(u)$ (квадратично по u).

На каждом шаге процесса находится минимум

$$\overline{u}_k = \underset{u \in \mathbf{U}}{\operatorname{argmin}}\, J_k(u). \tag{2}$$

И вычисляется следующее приближение по формулам (в общем случае):

$$\alpha_k = \underset{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}{\operatorname{argmin}}\, J(u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)),$$

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\overline{u}_k - u_k).$$

Но мы будем рассматривать метод в более простом варианте, когда α_k не минимизируются и принимаются равными 1. В этом случае $u_{k+1} = \overline{u}_k$. Это “классический” метод Ньютона.

Теорема 16.
Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ - выпуклое, замкнутое множество, причём $\operatorname{int} \mathbf{U} \neq \varnothing$, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ и сильно выпукла с коэффициентом $\varkappa > 0$, $J''(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ с константой $L > 0$. Тогда если $q = \frac{L}{2\varkappa}\|u_1 - u_0\|_{\mathbb{H}} < 1$, то метод (2) сходится к u_* и верна следующая оценка скорости сходимости:

$$\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{2\varkappa}{L} \cdot q^{2^k} \left(1 - q^{2^k}\right)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3).$$

Доказательство.

По Теореме 6 u_* существует и единственна.

Применим к $J_k(u)$ Теорему 8 п.(d'):

$$\begin{array}{l} J_k'(u) = J'(u_k) + J''(u_k)(u - u_k) \\ J_k''(u) = J''(u_k) \\ \langle J_k''(u)h, h\rangle_{\mathbb{H}} = \langle J''(u_k)h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \kappa \|h\|^2_{\mathbb{H}} \end{array}.$$

Отсюда по Теореме 7 u_k также существует и единственна.

По Теореме 9 из (2) имеем:

$$\left\langle J_k'(u_{k+1}, u - u_{k+1}\right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}$$

$$\left\langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u - u_{k+1}\right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \tag{4}$$

Подставим в это выражение вместо u u_k:

$$\left\langle J'(u_k), u_k - u_{k+1}\right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \left\langle J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u_{k+1} - u_k\right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \kappa\|u_{k+1} - u_k\|^2_{\mathbb{H}} \tag{5}$$

Теперь в качестве u возьмём в (4) u_{k+1} $(k := k-1)$ и прибавим к (5):

$$\kappa\|u_{k+1} - u_k\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \left\langle J'(u_k) - J'(u_{k-1}) - J''(u_{k-1})(u_k - u_{k-1}), u_k - u_{k+1}\right\rangle_{\mathbb{H}} = \{\text{упр. } 6\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\langle J''(u_{k-1} + t(u_k - u_{k-1}))(u_k - u_{k-1}), u_k - u_{k-1}\right\rangle_{\mathbb{H}} dt -$$

$$- \left\langle J''(u_{k-1})(u_k - u_{k-1}), u_k - u_{k+1}\right\rangle_{\mathbb{H}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\langle \left[J''(u_{k-1} + t(u_k - u_{k-1})) - J''(u_{k-1})\right](u_k - u_{k-1}), u_k - u_{k+1}\right\rangle_{\mathbb{H}} dt \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^1 \|t(u_k - u_{k-1})\|_{\mathbb{H}}\cdot\|u_k - u_{k-1}\|_{\mathbb{H}}\cdot\|u_{k+1} - u_k\|_{\mathbb{H}}\, dt = \frac{L}{2}\|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{H}}\cdot\|u_{k+1} - u_k\|_{\mathbb{H}}.$$

Имеем:

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{L}{2\kappa}\|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{2\kappa}{L}q^{2^k} \tag{6.}$$

Из (6) и условия $q < 1$ получаем, что последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ фундаментальная и существует (в силу полноты $\mathbb{H}$)

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \overline{u} \in \mathbb{H},$$

но так как все $u_k \in \mathbf{U}$, а $\mathbf{U}$ замкнуто, то $\overline{u} \in \mathbf{U}$.

Перейдём в (4) к пределу при $k \to \infty$, тогда в силу непрерывности $J'(u)$ и $J''(u)$ получаем, что

$$\left\langle J'(\overline{u}) + J''(\overline{u})(\overline{u} - \overline{u}), u - \overline{u}\right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}$$

Отсюда по Теореме 9 $\overline{u} \in \mathbf{U}_*$, но $\mathbf{U}_*$ состоит из единственной точки u_*, значит $\overline{u} = u_*$. Таким образом мы доказали, что процесс сходится. Теперь осталось выяснить скорость сходимости.

$$\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \{\text{нер-во } \triangle\} \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \|u_m - u_{m+1}\|_{\mathbb{H}} \leqslant \{(6)\} \leqslant \frac{2\kappa}{L}q^{2^k} \sum_{m=k}^{\infty} q^{2^m - 2^k}$$

Отсюда получаем (3) и теорема доказана. □

Замечания.

1) Рассмотрим случай, когда u_k начинают повторяться, то есть когда $u_{k+1} = u_k$. Из (4) следует, что

$$\left\langle J'(u_k) + J''(u_k)(u_{k+1} - u_k), u - u_{k+1} \right\rangle_{\mathbb{H}} = \left\langle J'(u_k), u - u_k \right\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

   Отсюда по Теореме 9 получаем, что u_k совпадает с u_* и процесс останавливается.

2) Так как q должно быть меньше 1, то u_0 необходимо выбирать не произвольным образом, то есть процесс сходится в достаточно малой окрестности u_*. Но в случае, когда $\mathbf{U}$ совпадает со всем $\mathbb{H}$ можно предложить априорный вариант выбора u_0.

   Возьмём в (5) $k = 0$:

$$\kappa \|u_1 - u_0\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \left\langle J'(u_0), u_0 - u_1 \right\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant \|J'(u_0)\|_{\mathbb{H}} \cdot \|u_1 - u_0\|_{\mathbb{H}}.$$

   Теперь достаточно выбрать u_0 таким, что

$$\frac{\|J'(u_0)\|_{\mathbb{H}}}{\kappa} \cdot \frac{L}{2\kappa} < 1,$$

   и q меньше этой величины.

   В случае, когда $\mathbf{U} \neq \mathbb{H}$ это, вообще говоря, сделать не всегда удастся, так как $J'(u)$ на $\mathbf{U}$ может и не быть столь малым.

Метод сопряжённых направлений (градиентов)

В этом пункте рассмотрим задачу минимизации для функционалов специального вида в конечномерном гильбертовом пространстве:

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle \to \inf, \quad u \in \mathbb{R}^n = \mathbf{U}, \quad A^* = A > 0. \tag{1}$$

Критерием оптимальности для такой задачи является условие $J'(u_*) = 0$, которое эквивалентно условию $Au_* = f$.

Идея метода сопряжённых градиентов заключается в следующем. Пусть $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой точки u_0 из $\mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$u_* - u_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_{n-1} p_{n-1}.$$

Таким образом, u_* представимо в виде

$$u_* = u_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_{n-1} p_{n-1}.$$

Тогда итерационную последовательность данного метода можно описать как

$$\begin{aligned}
&u_0 = u_0 \\
&u_1 = u_0 + \alpha_0 p_0 \\
&u_2 = u_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

(точное описание итерации будет дано ниже).

Подействовав на вышеприведённое равенство оператором A, получим

$$f - Au_0 = \alpha_0 Ap_0 + \alpha_1 Ap_1 + \ldots + \alpha_{n-1} Ap_{n-1}.$$

Выражение $f - Au_0$ считаем известным, и наша задача состоит в нахождении α_i, а также "правильного" выбора базиса $\{p_k\}$.

Определение. Векторы p и q называются *сопряжёнными относительно матрицы* $R = R^* > 0$, если $\langle Rp, q\rangle = 0$. По-другому это называют ортогональностью относительно скалярного произведения $\langle p, q\rangle_R = \langle Rp, q\rangle$.

Если $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ — базис из сопряжённых, относительно A векторов, то

$$\alpha_k = \frac{\langle f - Au_0, p_k\rangle}{\langle Ap_k, p_k\rangle}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{α}$$

Лемма 2.
Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, $A = A^* > 0$, $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ *— базис из сопряжённых, относительно* A *векторов,* $u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1}$, *где* α_k *вычисляются по формулам* (α). *Тогда*

$$\alpha_k = \alpha_k^* = \underset{-\infty<\alpha<+\infty}{\operatorname{argmin}} J(u_k + \alpha p_k) = -\frac{\langle J'(u_k), p_k\rangle_{\mathbb{H}}}{\langle Ap_k, p_k\rangle_{\mathbb{H}}} \tag{2}$$

и

$$\left\langle J'(u_k + 1), p_k\right\rangle_{\mathbb{H}} = 0 \quad \forall k = \overline{0, n-1} \tag{3}$$

Доказательство. Запишем условие на минимум $J(u_k + \alpha p_k)$:

$$J'(u_k + \alpha_k^* p_k) = 0.$$

Тогда, домножив это скалярно на p_k, получим:

$$\left\langle J'(u_k + \alpha_k^* p_k), p_k\right\rangle = \langle Au_k - f + \alpha_k^* Ap_k, p_k\rangle = \{u_k = u_0 + \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1}\} =$$

$$= \langle Au_0 - f, p_k\rangle + \alpha_k^* \langle Ap_k, p_k\rangle = 0.$$

Отсюда с учётом (α) следует, что $\alpha_k = \alpha_k^*$, то есть (2).

Теперь из (2) имеем:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k^* p_k \Rightarrow J'(u_{k+1}) = 0 \quad \forall k = \overline{0, n-1}, \text{ то есть (3).}$$

Лемма доказана. □

Опишем подробнее итерации в рассматриваемом методе. В качестве первого приближения берём любую точку из $\mathbb{R}^n$, а первый вектор будущего базиса вычисляем как значение производной функции $J(u)$ в данной точке:

$$\begin{cases} \forall u_0 \in \mathbb{R}^n \\ p_0 = -J'(u_0) \end{cases}$$

Теперь пусть требуется вычислить $k+1$-ю итерацию, когда предыдущие k уже вычислены, тогда применяем следующие формулы:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, & (4u) \\ p_{k+1} = -J'(u_{k+1}) + \beta_k p_k & (4p) \end{cases}$$

α_k здесь вычисляются по формулам (α) или (2) (обозначим для однообразия формулы (2) как (4α)). Коэффициенты же β_k берутся таким образом, чтобы для p_{k+1} сохранялась ортогональность (сопряжённость) с p_k:

$$\beta_k = \frac{\langle J'(u_{k+1}), Ap_k \rangle}{\langle Ap_k, p_k \rangle} \qquad (4\beta)$$

Теорема 17.
Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ — гильбертово пространство, $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle$, $A^* = A > 0$. Тогда метод (4) сходится к u_* за конечное число шагов (не превосходящее n), причём

(a) $\langle Ap_k, p_m \rangle = 0 \quad \forall k \neq m$;

(b) $\langle J'(u_k), J'(u_m) \rangle = 0 \quad \forall k \neq m$;

(c) $\langle J'(u_k), p_m \rangle = 0 \quad \forall m = 0, 1, \ldots, k-1$.

Доказательство.
Проведём доказательство по индукции по количеству итераций.

Для одной итерации имеем (базис индукции):

(a): верно по построению (см. (4β));

(b): $\langle J'(u_1), J'(u_0) \rangle = \langle J'(u_1), -p_0) \rangle = \{\text{Лемма}\} = 0$;

(c): в точности совпадает с (3).

Пусть теперь $(a), (b), (c)$ верны для k итераций включительно. Докажем, что эти формулы верны для $(k+1)$-й итерации.

(b): докажем сначала, что $\langle J'(u_{k+1}), J'(u_k) \rangle = 0$. Имеем:

$$J'(u_{k+1}) = Au_k - f + \alpha_k Ap_k = J'(u_k) + \alpha_k Ap_k$$

Подставляя это в скалярное произведение получаем, что

$$\left\langle J'(u_{k+1}), J'(u_k) \right\rangle = \left\langle J'(u_k), J'(u_k) \right\rangle + \alpha_k \left\langle Ap_k, J'(u_k) \right\rangle = \{4\alpha\} =$$

$$= \left\langle J'(u_k), J'(u_k) \right\rangle - \frac{\langle J'(u_k), p_k \rangle}{\langle Ap_k, p_k \rangle} \left\langle Ap_k, J'(u_k) \right\rangle \qquad (*)$$

По формулам (3) имеем

$$\left\langle J'(u_k), p_k \right\rangle = \{(4p)\} = \left\langle J'(u_k), -J'(u_k) + \beta_{k-1} p_{k-1} \right\rangle = -\left\langle J'(u_k), J'(u_k) \right\rangle.$$

А по предположению индукции (a)

$$\left\langle Ap_k, J'(u_k) \right\rangle = \{(4p)\} = \langle Ap_k, -p_k + \beta_{k-1} p_{k-1} \rangle = -\langle Ap_k, p_k \rangle.$$

Подставляя последние два выражения в $(*)$, получаем, что $\langle J'(u_{k+1}), J'(u_k)\rangle = 0$.

Покажем теперь, что для $m \leqslant k-1$ $\langle J'(u_{k+1}), J'(u_m)\rangle$ также равно 0.

$$\left\langle J'(u_{k+1}), J'(u_m)\right\rangle = \left\langle J'(u_k), J'(u_m)\right\rangle + \alpha_k \left\langle Ap_k, J'(u_m)\right\rangle = \{\text{предп. инд. } (b)\} =$$
$$= \alpha_k \left\langle Ap_k, -p_m + \beta_{m-1}p_{m-1}\right\rangle = \{\text{предп. инд. } (a)\} = 0.$$

(c): если $m = k$, то $\langle J'(u_{k+1}), p_k\rangle = \{\text{Лемма}\} = 0$.

Если же $m \leqslant k-1$, то

$$\left\langle J'(u_{k+1}), p_m\right\rangle = \left\langle J'(u_k), p_m\right\rangle + \alpha_k \left\langle Ap_k, p_m\right\rangle = \{\text{предп. инд. } (a) \text{ и } (c)\} = 0.$$

(a): рассмотрим $m \leqslant k-1$ (для $m = k$ утверждение верно по построению).

$$\langle Ap_m, p_{k+1}\rangle = -\left\langle Ap_m, J'(u_{k+1}) + \beta_k p_k\right\rangle = -\left\langle Ap_m, J'(u_{k+1})\right\rangle =$$
$$= -\frac{1}{\alpha_m}\left\langle \alpha_m Ap_m, J'(u_{k+1})\right\rangle = \frac{1}{\alpha_m}\left\langle J'(u_m) - J'(u_{m+1}), J'(u_{k+1})\right\rangle = \{(b)\} = 0.$$

Здесь мы предполагали, что $\alpha_m \neq 0$. Покажем, что это действительно так.

Возможны ситуации:

1) $\alpha_k = 0$. Тогда по формулам $(4u)$ получаем, что $u_{k+1} = u_k$, то есть процесс зацикливается. Но по (4α) $\alpha_k = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\left\langle J'(u_k), p_k\right\rangle = 0 = \{(4p)\} = \left\langle J'(u_k), -J'(u_k) + \beta_{k-1}p_{k-1}\right\rangle = \{\text{Лемма}\} = -\|J'(u_k)\|^2.$$

Отсюда следует, что $J'(u_k) = 0$ и $u_k = u_*$. Таким образом найден минимум и процесс можно остановить.

2) $\langle Ap_k, p_k\rangle = 0$. Тогда, так как $A > 0$, $p_k = 0$ и по формулам $(4u)$ опять получаем, что $u_{k+1} = u_k$. По формулам $(4p)$ $p_k = 0$ тогда и только тогда, когда

$$-J'(u_k) + \beta_{k-1}p_{k-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\|J'(u_k)\|^2 = 0.$$

То есть $u_k = u_*$ и процесс опять таки можно остановить.

Теорема полностью доказана.

□

При реализации метода сопряжённых направлений для функционалов общего вида возникают проблемы из-за наличия матрицы A в формулах (4α) и (4β). Но для такого случая можно использовать другие способы вычисления этих формул:

$$\alpha_k = \{\text{Лемма (2)}\} = \underset{-\infty<\alpha<\infty}{\operatorname{argmin}} J(u_k + \alpha p_k)$$

$$\beta_k = \frac{\langle J'(u_{k+1}, Ap_k\rangle}{\langle Ap_k, p_k\rangle}\cdot\frac{\alpha_k}{\alpha_k} = \frac{\langle J'(u_{k+1}), J'(u_{k+1}) - J'(u_k)\rangle}{\langle J'(u_{k+1}) - J'(u_k), p_k\rangle} = \{(3), (b), (c)\} =$$
$$= \frac{\langle J'(u_{k+1}), J'(u_{k+1}) - J'(u_k)\rangle}{\|J'(u_k)\|^2} = \frac{\|J'(u_{k+1})\|^2}{\|J'(u_k)\|^2}.$$

Заметим, что эти формулы различны, если функционал не квадратичный.

Метод покоординатного спуска

Рассматриваем экстремальную задачу в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\{p_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Положим $p_{n+1} = p_1, p_{n+2} = p_2, \ldots$ Пусть также $u_0 \in \mathbb{R}^n$ — некое начальное приближение. Предположим, что уже построены k приближений u_k и мы находимся на $k+1$-ом шаге итерации.

Назовём $(k+1)$-й шаг итерации *удачным*, если

$$\left[\begin{array}{l} J(u_k - \alpha_k p_{k+1}) < J(u_k), \\ J(u_k + \alpha_k p_{k+1}) < J(u_k). \end{array}\right.$$

В противном случае назовём шаг *неудачным*.

Если шаг удачный, то обновляем u_k (берём то значение, где меньше $J(u_{k+1})$) и не меняем α_k: $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. Если же шаг неудачный, то переходим к обработке p_{k+2}.

Кроме того, ведётся подсчёт неудачных шагов "подряд". Если это число становится равным размерности пространства, то происходит дробление α: u_{k+1} оставляем равной u_k, переходим к обработке вектора p_{k+2}, и полагаем $\alpha_{k+1} = \lambda\alpha_k$, где $\lambda \in (0,1)$ - наперёд заданный коэффициент дробления (обычно его берут равным $1/2$).

Теорема 18.
Пусть функция $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$ и выпукла, множество Лебега $M(u_0) = \{u \in \mathbb{R}^n | J(u) \leqslant J(u_0)\}$ ограничено. Тогда описанный выше процесс сходится и по функции и по аргументу:

$$J(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} J_*; \quad \rho(u_k, \mathbf{U}_*) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство.

Так как $M(u_0)$ ограничено и замкнуто (то есть компакт в $\mathbb{R}^n$), а функция $J(u)$ непрерывна, то по Теореме 1 $J_* > -\infty$, $\mathbf{U} \neq \varnothing$.

Далее, по построению

$$J(u_k) \geqslant J(u_{k+1}) \geqslant \ldots \geqslant J_*,$$

то есть последовательность $\{J(u_k)\}$ сходится и существует предел

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = \underline{J} \geqslant J_*.$$

Заметим, что $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Это следует из бесконечности числа дроблений.

Рассмотрим подпоследовательности с индексами k_m — моментами дробления.

$$\alpha_{k_m} \underset{m\to\infty}{\to} 0; \quad u_{k_m} \underset{m\to\infty}{\to} \overline{u} \in M(u_0)$$

Моменту k_m предшествует n неудач:

$$J(u_{k_m} \pm \alpha_{k_m} p_i) \geqslant J(u_{k_m}) \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

По формуле конечных приращений имеем:

$$\left\langle J'(u_{k_m} \pm \theta^i_m \alpha_{k_m} p_i), \pm\alpha_{k_m} p_i \right\rangle \geqslant 0, \quad \theta^i_m \in [0,1].$$

Разделим это выражение на α_{k_m} и устремим m к бесконечности, тогда в силу непрерывности $J'(u)$ получим:

$$\left\langle J'(\overline{u}), \pm p_i \right\rangle \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{1,n}, \text{ т.е. } \left\langle J'(\overline{u}), p_i \right\rangle = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Отсюда в силу того, что $\{p_i\}$ - базис следует, что $J'(\overline{u}) = 0$. Так как $J(u)$ выпукла, то $\overline{u} \in \mathbf{U}_*$, а в силу непрерывности $J(u)$ $J(u_{k_m}) \to J(\overline{u}) = J_*$ при $m \to \infty$, то есть

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*,$$

и сходимость по функции доказана.

Сходимость же по аргументу вытекает непосредственно из Теоремы 1. $\square$

Рассмотрим пример, когда первая производная функции $J(u)$ не существует и данный метод не сходится.

Возьмём в пространстве $\mathbb{R}^2$ функцию $J(u) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2|x-y| - 2$. Эта функция сильно выпукла, непрерывна, но не дифференцируема при $x = y$. Легко видеть, что $\mathbf{U}_* = \{(1,1)\}$, $J_* = -2$. Если стартовать из точки $u_0 = (0,0)$, то получим, что все $u_k = u_0 = (0,0)$, то есть при базисе $p_1 = (1,0), p_2 = (0,1)$, $J(u_0 + \alpha p_i) = \alpha^2 - 2\alpha + 2|\alpha| \geqslant 0$ — все шаги неудачные.

Задачи линейного программирования

В этом пункте мы рассмотрим задачу минимизации функционала $J(u) = \langle c, u\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, где c фиксировано из $\mathbb{R}^n$.

Общая задача линейного программирования рассматривается на множестве

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n |\, \langle a_i, u\rangle = b_i, \langle \overline{a_i}, u\rangle \leqslant \overline{b_j}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,s}\} \tag{1}$$

Если ввести ряд обозначений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \dots \\ \overline{a_m} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \dots \\ \overline{b_m} \end{pmatrix},$$

то множество $\mathbf{U}$ можно описать в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b, \overline{A}u \leqslant \overline{b}\}.$$

Наряду с общей задачей (1) мы будем рассматривать *каноническую* задачу линейного программирования на множестве

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b, u \geqslant 0\}. \tag{2}$$

Заметим, что задача (1) сводится к задаче (2). Действительно, положим в (1)

$$w_i = \max\{0, u_i\} \geqslant 0, \quad v_i = \min\{0, -u_i\} \geqslant 0, \quad y = \overline{b} - \overline{A}u \geqslant 0.$$

Тогда можно рассмотреть задачу (2) относительно новой переменной z:

$$z = (y, v, w) \in \mathbb{R}^{2n+s},\ z \geqslant 0$$

$$J(u) = \langle c, u \rangle = \langle c, w - v \rangle \text{ — линейна по } z \text{ (не зависит от } y),$$

а ограничения задаются равенством $A(w - v) = b$.

Определение. Точка v выпуклого множества $\mathbf{U}$ называется *угловой* точкой этого множества, если из соотношения $v = \alpha x + (1-\alpha)y$, где $x, y \in \mathbf{U}, \alpha \in (0,1)$, следует, что $v = x = y$.

Теорема 19. ***(критерий угловой точки для канонического*** $\mathbf{U}$***)***
Пусть $A = (A_1|A_2|\cdots|A_n)$ (расписано по столбцам). Точка v является угловой точкой канонического множества $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда существует набор столбцов $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_r)$, $r = \operatorname{rank} A$, причём

$$A_{j_1}v_{j_1} + A_{j_2}v_{j_2} + \cdots + A_{j_r}v_{j_r} = b, \tag{3}$$

где $v_{j_i} > 0$ $(i = \overline{1,r})$, а $\forall j \notin J_b = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ $\quad v_j = 0$.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть точка v является угловой для множества $\mathbf{U}$. Если $v = 0$, то в (3) можно взять любые базисные столбцы матрицы A. Рассмотрим случай, когда $v \neq 0$. Пусть

$$v_{j_1} > 0, v_{j_2} > 0, \ldots, v_{j_k} > 0,$$

а остальные $v_j = 0$.

Покажем, что столбцы $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ линейно независимы. Необходимо доказать, что равенство

$$\gamma_{j_1}A_{j_1} + \gamma_{j_2}A_{j_2} + \cdots + \gamma_{j_k}A_{j_k} = 0 \tag{$*$}$$

выполняется только тогда, когда

$$\gamma_{j_1} = \gamma_{j_2} = \cdots = \gamma_{j_k} = 0.$$

Введём вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ так, что $\gamma_j = \gamma_{j_i}$, если $j = j_i$, и $\gamma_j = 0$, если $j \neq j_i$ ни для какого i. Равенство $(*)$ выполняется тогда и только тогда, когда $A\gamma = 0$.

Рассмотрим точку $v_{\pm\varepsilon} = v \pm \varepsilon$. $v_{\pm\varepsilon} \geqslant 0$ (для достаточно малых $\varepsilon > 0$), $Av_{\pm\varepsilon} = Av \pm \varepsilon A\gamma = Av = b$. Отсюда следует, что $v_{\pm\varepsilon} \in \mathbf{U}$. В то же время $v = \frac{v_{+\varepsilon}}{2} + \frac{v_{-\varepsilon}}{2}$, а так как v — угловая точка, то $v_{+\varepsilon} = v_{-\varepsilon} = v$. Но $\varepsilon \neq 0$ и значит $\gamma = 0$, то есть $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ линейно независимы.

Теперь достаточно заметить, что (3) выполняется после дополнения $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ до базисного набора в случае, когда $k < r$. Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть для точки v выполнены условия (3). Значит, $v \geqslant 0$, $Av = b$, то есть $v \in \mathbf{U}$. Требуется доказать, что из условия

$$v = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad \alpha \in (0,1),\ x, y \in \mathbf{U}$$

следует, что $v = x = y$.

Если $v_j = 0 = \alpha x + (1-\alpha)y$, то $v_j = x_j = y_j = 0$, так как $\alpha > 0$, а $x_j \geqslant 0$ и $y_j \geqslant 0$.

Выделим все $v_{j_1} > 0, \ldots, v_{j_k} > 0$ (остальные координаты равны нулю). Тогда, так как $v, x, y \in \mathbf{U}$, то

$$\begin{cases} A_{j_1}v_{j_1} + A_{j_2}v_{j_2} + \cdots + A_{j_k}v_{j_k} = b \\ A_{j_1}x_{j_1} + A_{j_2}x_{j_2} + \cdots + A_{j_k}x_{j_k} = b \\ A_{j_1}y_{j_1} + A_{j_2}y_{j_2} + \cdots + A_{j_k}y_{j_k} = b \end{cases}$$

Учитывая, что $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ линейно независимы, получаем, что $v_{j_i} = x_{j_i} = y_{j_i} > 0$ для любого $i = \overline{1, k}$. Теорема доказана. $\square$

Определение. Угловая точка v канонического множества $\mathbf{U}$ называется *невырожденной*, если $v_j > 0,\ \forall j \in J_b$. Эти координаты (j) называются *базисными* для точки v:

$$B = (A_{j_1}|A_{j_2}|\ldots|A_{j_r}) \text{ - базис } v.$$

Определение. Если у множества $\mathbf{U}$ все угловые точки невырожденные, то задана минимизации (2) называется *невырожденной*.

Упражнение 14 (3). Пусть

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid u \geqslant 0, Au = b\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все угловые точки $\mathbf{U}$ и исследовать их на невырожденность.

Симплекс-метод

Здесь мы применим аппарат угловых точек для рассмотрения оптимизационной задачи следующего вида:

$$J(u) = \langle c, u\rangle \to \inf \quad u \in \mathbf{U} = \{u \geqslant 0, Au = b\} \tag{1}$$

Идея метода лежит в переборе лишь только угловых точек множества $\mathbf{U}$. Часто это позволяет найти оптимальное решение быстрее рассмотренных выше методов. Перейдем к описанию симплекс-метода.

Пусть имеется угловая точка v множества $\mathbf{U}$ (каким образом она находится нам сейчас не важно). Будем считать также, что из матрицы A выкинуты все линейно зависимые строки (в системе нет линейно зависимых уравнений), то есть $r = \operatorname{rank} A = m$. Находясь в условиях Теоремы 19 можно записать, что $v_b = (v_{j_1}, \ldots, v_{j_r})$ — базисные для v, $v_{j_r} \geqslant 0$, а остальные v_j равны нулю. Обозначим через J_b множество $\{j_1, \ldots, j_r\}$, а через J_f — множество $\{1, \ldots, n\}\backslash J_b$. Пусть далее для соответствующих A_{j_i} матрица $B = (A_{j_1}|A_{j_2}|\cdots|A_{j_r})$, а остальные столбцы матрицы A образую некую матрицу $F_{r\times(n-r)}$. По определению B и Теореме 19 $B \neq 0$ и существует обратная матрица B^{-1}.

Разобьём вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ на базисные переменные $u_b = (u_{j_1}, \ldots, u_{j_n})$ и на свободные переменные u_f. Тогда условие $Au = b$ можно записать как $Bu_b + Fu_f = b$. В этом случае для u_b в (1) справедливо равенство $u_b = B^{-1}b - B^{-1}Fu_f$, а так как $Av = b \Leftrightarrow Bv_b + Fv_f = Bv_b = b$, то это можно переписать как $u_b = v_b - B^{-1}Fu_f$. Теперь от канонических ограничений $u \geqslant 0$ можно перейти к неканонической форме:

$$\begin{cases} u_f \geqslant 0, \\ B^{-1}Fu_f \leqslant v_b. \end{cases}$$

Для функции $J(u)$, используя те же рассуждения, можно написать:

$$J(u) = \langle c, u\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle c_b, u_b\rangle_{\mathbb{R}^r} + \langle c_f, u_f\rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} = \langle c_b, v_b\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle c_f - (B^{-1}F)^T c_b, u_f\right\rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} = J(v) - \langle \Delta, u_f\rangle, \tag{2}$$

где $J(v) = \langle c, v\rangle$, $-\Delta = c_f - (B^{-1}F)^T c_b$.

Введём обозначение

$$g(u_f) = J(v) - \langle \Delta, u_f \rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} \,. \tag{3}$$

Заметим, что в этом случае $J(v) = C \equiv const$. Тогда задача (1) сводится к задаче с меньшим количеством переменных, но с неканоническими ограничениями:

$$\begin{cases} g(u_f) = J(v) - \sum\limits_{j \in J_f} \Delta_j u_j \to \inf, \\ u_f \in \mathbf{U}_f = \{u_f \geqslant 0, \ (B^{-1}F)u_f \leqslant v_b\}. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через J_f^+ множество тех $j \in J_f$, для которых $\Delta_j > 0$. И пусть $k \in J_f^+$, например, самый меньший:

$$k = \min_{j \in J_f^+} j. \tag{5}$$

Рассмотрим для (4) подзадачу минимизации функции от одной переменной $u_f = (0, \ldots, 0, u_k, 0, \ldots, 0)$:

$$\begin{cases} g_k(u_k) = J(v) - \Delta_k u_k \to \inf, \\ u_k \in \mathbf{U}^k = \{u_k \geqslant 0, \ (B^{-1}F)_k u_f \leqslant v_b\}. \end{cases}$$

Обозначим через γ_k вектор $(B^{-1}F)_k = B^{-1}A_k$, и пусть

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1k} \\ \gamma_{2k} \\ \vdots \\ \gamma_{rk} \end{pmatrix}, \quad I_k^+ = \{i = \overline{1,r} \mid \gamma_{ik} > 0\}, \tag{6}$$

(I_k^+ есть множество “реальных” ограничений сверху на u_k). Тогда в качестве решения подзадачи можно взять

$$\theta_k = \min_{i \in I_k^+} \left(\frac{v_{ji}}{\gamma_{ik}} \right). \tag{7}$$

Опишем теперь непосредственно сам метод. Возможны следующие ситуации.

1) $J_f^+ = \varnothing$. В этом случае v принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$ (оптимальна) и мы останавливаемся.

2) $J_f^+ \neq \varnothing$, и существует такой номер $k \in J_f^+$, что $I_k^+ = \varnothing$. Но тогда нет “реальных” ограничений на u_k, которые могут бесконечно возрастать. Откуда $J_* = -\infty$, $\mathbf{U}_* = \varnothing$ и процесс итерирования следует остановить.

3) Множество J_f^+ не пусто и для любого k из J_f^+ соответствующее множество I_k^+ также не пусто. (Этот случай представляет собой непосредственно “шаг” метода.)

   Берём k по правилу (5), $u_k = \theta_k$ по правилу (7).

   В (7) минимум может достигаться на нескольких номерах, поэтому введём супер-мега-множество

   $$\left(I_k^+\right)_* = \left\{ i \in I_k^+ \mid \frac{v_{ji}}{\gamma_{ik}} = \theta_k \right\},$$

   и из него выберем, например, наименьший элемент $s = \min\limits_{i \in \left(I_k^+\right)_*} i$.

   После этого переходим к рассмотрению следующей угловой точки $w \in \mathbf{U}$, которая вычисляется по правилу $w_b = v_b - B^{-1}A_k u_k$. Докажем, что при использовании такого правила мы действительно получим угловую точку.

Для точки w соответствующая ей матрица B будет иметь вид

$$B(w) = (A_{j_1}|\cdots|A_{j_{s-1}}|A_k|A_{j_{s+1}}|\cdots|A_{j_r}).$$

Нам необходимо показать, что это есть базис. Сделаем это по определению. Пусть

$$\alpha_1 A_{j_1} + \ldots + \alpha_{s-1} A_{j_{s-1}} + \alpha_k A_k + \alpha_{s+1} A_{j_{s+1}} + \ldots + \alpha_r A_{j_r} = 0.$$

Подставим в это равенство $A_k = B\gamma_k = \gamma_{1k} A_{j_1} + \ldots + \gamma_{rk} A_{j_r}$. Тогда так как $B(v)$ есть базис, то необходимо должно выполняться

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_k \gamma_{ik} = 0, & \forall i \neq s, \\ \alpha_k \gamma_{sk} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что все α_i равны нулю, то есть $B(w)$ — базис.

Таким образом по Теореме 19 мы получаем, что w действительно угловая точка множества $\mathbf{U}$.

Замечания.

1) В случае, когда v вырождена $\theta_k = 0$ и $v = w$. При этом может произойти зацикливание процесса, но правила выбора k и s (правила Блэнда) позволяют избежать этого.

2) Если угловых точек в множестве $\mathbf{U}$ конечное число, то остановка процесса произойдёт через конечное число шагов на случаях 1) или 2).

В конце пункта сформулируем обобщающую наши рассуждения теорему.

Теорема 20. ***(к задаче линейного программирования)***
В задаче линейного программирования выполняются следующие утверждения:

1) если $\mathbf{U} \neq \varnothing$, то в $\mathbf{U}$ существует по крайней мере одна угловая точка;

2) если $J_* > -\infty$, то во множестве U_* содержится по крайней мере одна точка.

Доказательство.
Доказательство этой теоремы, по сути, приводится в обосновании симплекс-метода (перебора по угловым точкам). □

Замечание. Утверждение 2) справедливо именно для задачи линейного программирования. В противном случае это, вообще говоря, не верно. Например, если $J(u) = e^{-u}$ (это не задача линейного программирования), то $\mathbf{U} = \mathbb{R}^1$, $J_* = 0$, но $U_* = \varnothing$.

6 Методы снятия ограничений

В этой главе рассматриваются задачи минимизации функционалов

$$J(u) \to \inf, \ u \in \mathbf{U}$$

с учётом ограничений на множество $\mathbf{U}$.

Эти ограничения могут быть “терпимыми”, например, u может принадлежать не всему пространству, а какому-либо подмножеству этого пространства. Такие ограничения мы не рассматриваем и считаем, что их можно обойти простыми методами.

Нас же будут интересовать более “функциональные” ограничения на u. Рассмотрим конкретный пример:

$$u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subset \mathbb{H} \mid g_i(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s} = 0\},$$

где g_i какие-либо функции.

Здесь интересующие нас ограничения это m ограничений типа “неравенство” и s ограничений типа “равенство” (“терпимым” ограничением является принадлежность точки u множеству $\mathbf{U}_0$).

Естественно, какие-либо из ограничений могут отсутствовать.

Метод штрафов

В этом методе рассматривается задача минимизации с ограничениями следующего вида:

$$J(u) \to \inf,\ u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subset \mathbb{H} \mid g_i(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s} = 0\} \tag{1}$$

Рассмотрим функцию (называемую *штрафом* или *штрафной функцией*):

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m+s} (g_i^+(u))^{p_i}, \quad p_i \geqslant 1 \text{ (обычно} = 2).$$

Функции $g_i^+(u)$ называют *индивидуальными штрафами.* В качестве конкретного примера можно взять

$$g_i^+(u) = \max\{g_i(u), 0\},\ i = \overline{1, m},$$
$$g_i^+(u) = |g_i(u)|\,,\ i = \overline{m+1, m+s}.$$

Легко видеть, что условие

$$\begin{cases} P(u) = 0, \\ u \in \mathbf{U}_0 \end{cases}$$

выполняется тогда и только тогда, когда точка u принадлежит множеству $\mathbf{U}$.

Из штрафной функции $P(u)$ формируются формулы вида

$$\Phi_k(U) = J(u) + A_k P(u), \quad A_k > 0, A_k \to \infty \text{ при } k \to \infty, u \in \mathbf{U}_0, k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Теперь от задачи (1) мы переходим к последовательности задач (2). Пусть точки $u_k \in \mathbf{U}_0$ таковы, что

$$\Phi_{k*} \equiv \inf_{\mathbf{U}_0} \Phi_k \leqslant \Phi_k(u_k) \leqslant \Phi_{k*} + \varepsilon_k \tag{3}$$

(их можно получить, например, методами, изложенными в предыдущей главе). Используя эту последовательность точек, сформулируем основную теорему в этом пункте.

Теорема 21.
Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, множество $\mathbf{U}_0$ слабо замкнуто; $J(U)$, $g_i^+(u)$ слабо полунепрерывны снизу на $\mathbf{U}_0$; точка

$$J_0 = \inf_{\mathbf{U}_0} J(u)$$

конечна; множество

$$\mathbf{U}(\delta) = \{u \in \mathbf{U}_0 : g_i^+ \leqslant \delta, i = \overline{1, m+s}\}$$

ограничено в $\mathbb{H}$ *для некоторого* $\delta > 0$*;* $A_k \to +\infty$*,* $\varepsilon_k \to +0$*, тогда последовательность* $J(u_k)$ *стремится к минимуму* $J(u)$*:*

$$J(u_k) \to \inf \quad (J(u_k) \to J_*),$$

и все слабые предельные точки последовательности $\{u_k\}$ *содержатся во множестве* $\mathbf{U}_*$*.*

Доказательство.

Прежде всего докажем, что при выполнении условий теоремы последовательность u_k существует. Действительно, учитывая, что $A_k > 0, P(u) \geqslant 0$, имеем:

$$\Phi_k(u) = J(u) + A_k P(u) \geqslant \{u \in \mathbf{U}_0\} \geqslant J_0 > -\infty,$$

то есть формулы (3) имеют смысл (это верно, когда Φ_{k*} конечны).

Далее, рассмотрим цепочку неравенств:

$$J(u_k) \leqslant \Phi_k(u) \leqslant \{(3)\} \leqslant \Phi_{k*}(u) + \varepsilon_k \leqslant \{\forall u \in \mathbf{U}_0\} \leqslant \Phi_k(u) + \varepsilon_k.$$

Последнее неравенство верно для любого u из $\mathbf{U}_0$ и, в частности, для любого u из множества $\mathbf{U}$. Возьмём inf по множеству $\mathbf{U}$ от обеих частей неравенства, тогда справа будем иметь $J_* + \varepsilon_k$. Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $\varepsilon_k \to \infty$ при $k \to \infty$, получаем:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} J(u_k) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \Phi_k(u) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \Phi_{k*} \leqslant J_* \tag{4}$$

Теперь рассмотрим значение $\Phi_k(u)$ в точке u_k:

$$\Phi_k(u_k) = J(u_k) + A_k P(u_k) \leqslant \{(3)\} \leqslant \Phi_{k*} + \varepsilon_k.$$

$$P(u_k) \leqslant \frac{\Phi_{k*} + \varepsilon_k - J(u_k)}{A_k} \leqslant \frac{\Phi_{k*} + \varepsilon_k - J_0}{A_k} \leqslant \{(4)\} \leqslant \frac{c}{A_k} \to 0.$$

Отсюда, учитывая, что $P(u)$ — суммирующий штраф из неотрицательных элементов g_i^+, получаем, что каждый индивидуальный штраф $g_i^+ \to 0$, при $k \to \infty$. Таким образом для δ из условия теоремы существует такой номер $k_0(\delta)$, что для любого номера $k \geqslant k_0$ $g_i^+ \leqslant \delta \quad i = \overline{1, m+s}$, то есть $u_k \in \mathbf{U}(\delta)$. Так как $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, то отсюда получаем, что у последовательности $\{u_k\}$ существуют слабые предельные точки.

Пусть теперь $\{u_{k_l}\}$ такая подпоследовательность $\{u_k\}$, что

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} J(u_k) = \lim_{l\to\infty} J(u_{k_l}) \in \mathbf{U}(\delta) \quad \forall l \geqslant l_0 \tag{5}$$

и u_0 — одна из слабых предельных точек $\{u_{k_l}\}$.

Учитывая слабую полунепрерывность снизу функций $J(u), g_i^+(u)$, имеем с одной стороны

$$J(u_0) \leqslant \underline{\lim_{l\to\infty}} J(u_{k_l}) \leqslant J_*,$$

то есть $J(u_0)$ не превосходит минимума на допустимом множестве $\mathbf{U}$; с другой стороны

$$0 \leqslant g_i^+(u_0) \leqslant \underline{\lim_{l\to\infty}} g_i^+(u_{k_l}) = 0$$

и (так как $\mathbf{U}_0$ слабо замкнуто) $u_0 \in \mathbf{U}$, то есть точка u_0 принадлежит допустимому множеству $\mathbf{U}$. Таким образом возможна лишь ситуация $J(u_0) = J_*$, то есть

$$\lim_{l\to\infty} J(u_{k_l}) = J_*.$$

В силу правила выбора (5):

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*,$$

и утверждение теоремы о сходимости последовательности $J(u_k)$ к минимуму доказано.

Сходимость по аргументу можно доказать аналогично, либо опираясь на доказательство Теоремы 2. $\square$

Упражнение 15 (4). Доказать, что при выполнении условий Теоремы 21 задача (1) является слабо корректно поставленной в пространстве $\mathbb{H}$.

Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач

В этом пункте рассматриваем следующую задачу минимизации:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subset \mathbf{L} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0\} \tag{1}$$

Можно рассмотреть и случай, когда есть ограничения типа “равенство”, но при этом они обязаны быть линейными (в предыдущем методе на такие ограничения также накладываются жёсткие условия в виде слабой полунепрерывности снизу, так что они “почти” линейны).

Назовём задачу (1) *выпуклой*, если множество $\mathbf{U}_0$ выпукло, $\mathbf{L}$ представляет собой линейное пространство, функции g_i выпуклы.

Построим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^{m+1}).$$

Числа λ_i называют *множителями Лагранжа.*

Теорема 22. ***(теорема Ку́на-Та́ккера)***
Пусть задача (1) *выпукла в указанном смысле. Тогда*

1) *если точка u_* является оптимальной ($u_* \in \mathbf{U}_*$), то существует набор множителей Лагранжа $\lambda^* \neq 0$ такой, что*

   i)
   $$\min_{u\in\mathbf{U}_0} \mathcal{L}(u, \lambda^*) = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*) \ \text{— } \textit{принцип минимума};$$

   ii)
   $$\lambda_i^* \geqslant 0, \quad i = \overline{0,m} \ \text{— } \textit{условия неотрицательности множителей Лагранжа};$$

   iii)
   $$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = \overline{1,m} \ \text{— } \textit{условия, дополняющие нежёсткости.}$$

2) *если для некоторой пары (u_*, λ^*) выполняются условия i)-iii) и, кроме того, $u_* \in \mathbf{U}$, $\lambda^* \neq 0$, то u_* — оптимальная точка ($u_* \in \mathbf{U}_*$).*

Доказательство.

1) Необходимость.

Условимся считать, что $J(u_*) = J_* = 0$ (в противном случае можно рассмотреть функцию $\tilde{J}(u) = J(u) - J_*$, а функция Лагранжа “не реагирует” на сдвиг на константу).

Введем множество

$$M = \{\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists u \in \mathbf{U}_0 \ : \ J(u) < \mu_0,\ g_i(u) \leqslant \mu_i,\ i = \overline{1, m}\}.$$

Множество M не пусто, так как в нем содержится (с учётом договорённости $J_* = 0$), по крайней мере, весь положительный октант $\mathbb{R}_+^{m+1}$ (для таких μ подходящей точкой будет $u_* \in \mathbf{U}_0$).

Множество M выпукло из-за выпуклости исходных данных (условия теоремы). Это элементарно доказывается по определению.

Также легко доказать, что с учётом договорённости точка 0 не принадлежит множеству M.

По теореме отделимости (см., например, [В2, гл. 4,§5, Теорема 1]) существует ненулевой вектор λ^* такой, что

$$\langle \lambda^*, \mu \rangle_{\mathbb{R}^{m+1}} \geqslant 0 = \langle \lambda^*, 0 \rangle_{\mathbb{R}^{m+1}} \quad \forall \mu \in M \tag{2}$$

(λ^* — нормальный вектор к гиперплоскости).

Докажем для начала утверждение *ii*). Возьмём точку $\mu_\varepsilon^i = (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, 1, \ldots, \varepsilon)$, $\varepsilon \geqslant 0$, единица стоит в i-й позиции. Эта точка принадлежит множеству M (так как она находится в положительном октанте). Подставив её в (2) и устремив ε к нулю, получим, что $\lambda_i^* \geqslant 0$ для любого i. Таким образом утверждение *ii*) доказано.

Теперь докажем утверждение *iii*). В случае, когда $g_i(u_*) = 0$, это утверждение, очевидно, верно. Рассмотрим случай, когда $g_i(u_*) < 0$. Берём точку $\nu_\varepsilon^i = (\varepsilon, 0, \ldots, g_i(u_*), 0, \ldots, 0) \in M$, где $g_i(u_*)$ стоит на i-ом месте. Подставив эту точку в (2), получим:

$$\varepsilon J(u_*) + \lambda_i^* g_i(u_*) \geqslant 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Устремляя ε к нулю, имеем $\lambda_i^* g_i(u_*) \geqslant 0$. В то же время $g_i(u_*) < 0$ и по доказанному $\lambda_i^* \geqslant 0$. Отсюда получаем утверждение *iii*): $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0$.

Осталось доказать основное утверждение *i*). Для этого зафиксируем любую точку u из множества $\mathbf{U}_0$ и по ней построим семейство векторов $\eta_\varepsilon = (J(u) + \varepsilon, g_1(u), \ldots, g_m(u))$ $(\varepsilon > 0)$. Точка η_ε содержится во множестве M, так как подходящим $u \in \mathbf{U}_0$ в этом случае является сама точка η_ε. Подставляем η_ε в (2) и устремляем ε к нулю. Имеем:

$$\mathcal{L}(u, \lambda^*) = \lambda_0^* J(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(u) \geqslant 0 = \{\text{допущение, утв.}ii)\} =$$

$$= \lambda_0^* J(u_*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(u_*) = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*).$$

Утверждение *i*) доказано.

2) Достаточность.

Пусть точка $u_* \in \mathbf{U}$, $\lambda_0^* \neq 0$. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_0^* = 1$, так как функцию Лагранжа можно делить/умножать на положительное число. Тогда имеем:

$$J(u_*) = 1 \cdot J(u_*) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i^* g_i(u_*)}_{=0} = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*) \leqslant \{i)\} \leqslant \mathcal{L}(u, \lambda^*).$$

Последнее неравенство верно для любого u из $\mathbf{U}_0$ и, в частности для любого u из $\mathbf{U}$. Далее.

$$\mathcal{L}(u, \lambda^*) = 1 \cdot J(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(u) \leqslant \{\lambda_i^* \geqslant 0 \text{ (утв. } ii)), g_i(u) \leqslant 0 \ (u \in \mathbf{U})\} \leqslant J(u) \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Так как u_* содержится в допустимом множестве $\mathbf{U}$, то отсюда получаем, что u_* — оптимальная точка и достаточность доказана. □

Упражнение 16 (5). Доказать теорему об отделимости точки от выпуклого множества в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Замечание о регулярности

Рассмотрим пример, в котором $\lambda_0^* = 0$. Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$, $J(u) = -u \to \inf$, $\mathbf{U}_0 = \mathbb{R}^1$, $g_1(u) = u^2$, $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 \mid u^2 \leqslant 0\} = \{0\} = \mathbf{U}_*$. Докажем, что в любом наборе $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*)$ обязательно $\lambda_0^* = 0$. По Теореме 22 найдётся неотрицательный набор $(\lambda_0^*, \lambda_1^*)$ такой, что будет выполняться условие i): $-\lambda_0^* u + \lambda_1^* u^2 \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^1$.

Разделим это неравенство на $u > 0$: $-\lambda_0^* + \lambda_1^* u \geqslant 0 \quad \forall u > 0$, и устремим u к нулю. Получим $-\lambda_0^* \geqslant 0$.

Отсюда с учётом условия неотрицательности множителей Лагранжа имеем $\lambda_0^* = 0$.

Достаточные условия регулярности (условия Сле́йтера)

Достаточным условием на регулярность является существование точки $u_0 \in \mathbf{U}_0$ такой, что $g_1(u_0) < 0, \ldots, g_m(u_0) < 0$. Для доказательства этого факта предположим, что в некотором (ненулевом) наборе λ^* первая координата λ_0^* равна нулю, тогда функция Лагранжа на этом наборе равна:

$$\mathcal{L}(u_0, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_0) < 0 = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*),$$

и мы приходим к противоречию с принципом минимума.

Приведём аналог теоремы Куна-Таккера в несколько иной формулировке. Для этого сначала введём одно

Определение. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — множества произвольной природы. $f: \ \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbb{R}^1$. Точка (x_*, y^*) называется *седловой* точкой функции f на множестве $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, если

$$f(x_*, y) \leqslant f(x_*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \quad \forall x \in \mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{Y}.$$

Теорема 23. ***(седловая форма теоремы Куна-Таккера)***
Пусть выполняются условия Теоремы 22 и условия регулярности Слейтера. Тогда точка u_* принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$ (u_* — оптимальная точка) тогда и только тогда, когда классическая функция Лагранжа (с $\lambda_0 = 1$) имеет седловую точку (u_*, λ^*) на множестве $\mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}^m_+$.

Доказательство.

Для начала перепишем определение седловой точки (u_*, λ^*) для функции Лагранжа:

$$J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u_*) \leqslant J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_*) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+ \qquad (a)$$

$$J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_*) \leqslant J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u) \quad \forall u \in \mathbf{U}_0 \qquad (b)$$

1) Необходимость.

Пусть точка $u_* \in \mathbf{U}_*$. Тогда по Теореме 22 с учётом условий Слейтера существует такой набор $\lambda^* = (1, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*) \geqslant 0$, что условие (b) непосредственно вытекает из условия $i)$ этой теоремы, а условие (a) следует из следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{g_i(u_*)}_{\leqslant 0} \leqslant 0 = \{iii)\} = J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_*).$$

2) Достаточность.

Пусть в точке $u_* \in \mathbf{U}_0$ выполняются неравенства (a) и (b).

Из (a) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(u_*) \leqslant 0 \quad \forall \lambda_i \geqslant 0.$$

Подставив в это выражение $\lambda = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_{i-1}^*, \lambda_i^* + \varepsilon, \lambda_{i+1}^*, \ldots, \lambda_m^*)$ $(\varepsilon > 0)$, мы получим, что $\varepsilon g_i(u_*) \leqslant 0$, то есть $g_i(u_*) \leqslant 0$. Поскольку это верно для любого i, то отсюда следует, что $u_* \in \mathbf{U}$.

Если подставить в это выражение $\lambda = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_{i-1}^*, 0, \lambda_{i+1}^*, \ldots, \lambda_m^*)$, то будем иметь $-\lambda_i^* g_i(u_*) \leqslant 0$, но $\lambda_i^* \geqslant 0$, а $g_i(u_*) \leqslant 0$, то есть $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0$. Опять же из того, что это верно для любого i, получаем условие $iii)$ Теоремы 22.

Из (b) непосредственно следует условие $i)$.

Теперь осталось применить утверждение Теоремы 22 относительно достаточности и теорема доказана. □

Правило множителей Лагранжа для гладких задач

В этом пункте рассматривается задача минимизации с ограничениями:

$$J(u) \to \inf \quad u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s}(u) = 0\}, \qquad (1)$$

где $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, с дополнительными требованиями на гладкость функций. Здесь мы кратко рассмотрим лишь необходимое условие локального минимума.

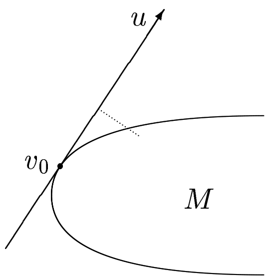
Для начала введём несколько понятий (некоторые из них приведены лишь в качестве напоминания).

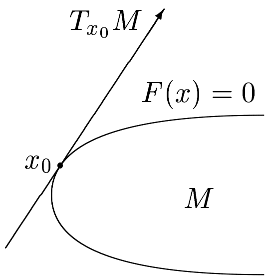
Определение. Точка u_* называется *точкой локального минимума* функции $J(u)$, если существует такое положительное число ε, что для любой точки $u \in \mathbf{U}_\varepsilon \cap \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}_\varepsilon = \{u : \|u - u_*\| < \varepsilon\}$, выполняется условие $J(u_*) \leqslant J(u)$.

Определение. Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство, $M \subset \mathbf{X}$, $x_0 \in M$. Вектор $h \in \mathbf{X}$ называют *касательным* ко множеству M в точке x_0 если существует отображение $\varphi(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbf{X}$, обладающее свойствами:

1) $x_0 + th + \varphi(t) \in M$;

2) $\varphi(t) = o(t)$, то есть $\frac{\|\varphi(t)\|_{\mathbf{X}}}{t} \to 0$ при $t \to 0$.





Вообще говоря, для наших целей достаточно существования отображения переводящего в $\mathbf{X}$ не всю действительную ось $\mathbb{R}^1$, а лишь какой-либо интервал $(-\varepsilon; \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $T_{x_0}M$ все касательные векторы ко множеству M в точке x_0.

Приведём без доказательства одну теорему, которой мы в последствии воспользуемся.

Теорема (Люсте́рник). [АТФ, стр. 171-174]

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — банаховы пространства, отображение $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ дифференцируемо по Фреше, $M = \{x \in \mathbf{X} \mid F(x) = 0\}$, $x_0 \in M$, $\operatorname{im} F'(x_0) = \mathbf{Y}$. Тогда $T_{x_0}M = \ker F'(x_0)$.

Упражнение 17 (4). Пусть $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Y} = \mathbb{R}^1$, $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$, множество M имеет вид $M = \{(x_1, x_2) \mid F(x_1, x_2) = 0\}$, $x_0 = (0, 0)$.

1) Найти $T_{x_0}M$;

2) найти $\ker F'(0, 0)$;

3) выяснить, совпадают они или нет и почему.

Теперь сформулируем и докажем основную теорему этого пункта.

Теорема 24.

Пусть u_* — точка локального минимума в задаче (1)*; $J(u), g_i(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U}_\varepsilon)$ для некоторого положительного ε. Тогда существует ненулевой набор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{m+s}^*)$, обладающий следующими свойствами:*

i)

$$\mathcal{L}'_u(u_*, \lambda^*) = \lambda_0^* J'(u_0) + \sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i^* g_i'(u_*) = 0 \text{ — \textit{условие стационарности функции Лагранжа}};$$

ii)

$$\lambda_i^* \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{0, m} \text{ — \textit{условия неотрицательности множителей Лагранжа}};$$

iii)

$$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0 \quad \forall i = \overline{1,m} \text{ — \textit{условия, дополняющие нежёсткости.}}$$

Доказательство.

Для начала договоримся о некоторых соглашениях.

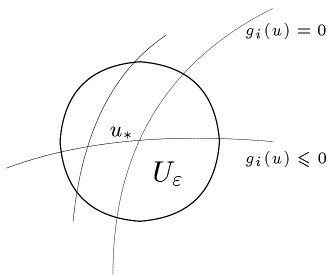
Во-первых, как и в доказательстве Теоремы 22, не ограничивая общности, будем считать, что

$$J(u_*) = 0 \qquad (d1).$$

Во-вторых, будем считать, что

$$g_i(u_*) = 0 \quad \forall i = \overline{1,m} \qquad (d2).$$

На самом деле, это не столь сильное ограничение, как может показаться, так как при невыполнении этого условия, можно рассмотреть другую окрестность $\mathbf{U}_\varepsilon$, что иллюстрирует рисунок. Поэтому мы рассматриваем лишь задачу на границе. Заметим, что, принимая это соглашение, мы автоматически избавляем себя от доказательства пункта iii), так как он, очевидно, выполняется.



В-третьих, для удобства обозначим через $g_0(u)$ саму функцию $J(u)$:

$$g_0(u) = J(u) \qquad (d3).$$

Далее, пусть $G(u) = (g_{m+1}(u), \ldots, g_{m+s}(u)) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^s$. По условию теоремы в точке u_* эта функция дифференцируема по Фреше:

$$\exists\ G'(u_*) = (g_{m+1}(u_*), \ldots, g_{m+s}(u_*)) \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{R}^s) \text{ — линейный ограниченный оператор.}$$

Возможны три случая:

1) $\operatorname{im} G'(u_*) \neq \mathbb{R}^s$;

2) $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$, $\ker G'(u_*) = \{0\}$ (состоит из одного нуля);

3) $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$, $\ker G'(u_*) \neq \{0\}$.

Рассмотрим все три этих случая.

1) Вырожденный случай: $\operatorname{im} G'(u_*) \neq \mathbb{R}^s$

В этом случае пространство $\mathbb{R}^s$ раскладывается на прямую сумму подпространств (см. Упражнение 18):

$$\mathbb{R}^s = \overline{\operatorname{im} G'(u_*)} \oplus \ker(G'(u_*))^* = \{\mathbb{R}^s \text{ конечномерно}\} = \operatorname{im} G'(u_*) \oplus \ker(G'(u_*))^*.$$

Таким образом найдётся ненулевой вектор $\lambda^0 \in \ker(G'(u_*))^*$, для которого справедливо выражение:

$$0 = (G'(u_*))^*[\lambda^0] = \sum_{i=m}^{m+s} \lambda_i^0 g_i'(u_*).$$

Теперь в качестве искомого набора множителей Лагранжа достаточно взять:

$$\lambda^* = (\lambda_0^* = 0, \ldots, \lambda_m^* = 0, \lambda_{m+1}^* = -\lambda_{m+1}^0, \ldots, \lambda_{m+s}^* = -\lambda_{m+s}^0) \neq 0.$$

Как нетрудно видеть, для этого набора все утверждения теоремы выполняются.

2) "Полувырожденный" случай: $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$, $\ker G'(u_*) = \{0\}$

Аналогично предыдущему случаю, имеем разложение пространства $\mathbb{H}$: $\mathbb{H} = \operatorname{im}(G'(u_*))^*$ ($\dim \mathbb{H} \leqslant s$). То есть найдётся такой вектор $\lambda^0 \in \mathbb{R}^S$, что

$$J'(u_*) = (G'(u_*))^*[\lambda^0] = \sum_{i=m+1}^{m+s} \lambda_i^0 g_i'(u_*).$$

В качестве искомого набора λ^* берём следующий:

$$\lambda^* = (\lambda_0^* = 1, \lambda_1^* = 0, \ldots, \lambda_m^* = 0, \lambda_{m+1}^* = -\lambda_{m+1}^0, \ldots, \lambda_{m+s}^* = -\lambda_{m+s}^0) \neq 0.$$

3) Невырожденный случай: $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$, $\dim(\ker G'(u_*)) \geqslant 1$

Обозначим через V_k множества следующего вида:

$$V_k = \left\{u \in \mathbb{H} \mid G'(u_*)[u] = 0, \left\langle g_i'(u_*), u\right\rangle < 0, i = \overline{k, m}\right\} \quad k = \overline{0, m}.$$

Заметим, что условие $\dim(\ker G'(u_*)) \geqslant 1$ в этом случае важно, так как иначе все V_k были бы пустыми.

Очевидно, что справедлива цепочка вложений:

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m.$$

Докажем, что $V_0 = \varnothing$. Предположим обратное, то есть, что существует некий элемент $v \in V_0$. Это означает, что $v \in \ker G'(u_*)$ и $\langle g_i(u_*), v\rangle < 0$ для $i = \overline{0, m}$. Так как $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$, то по Теореме Люстерника получаем, что $\ker G'(u_*) = T_{u_*}\{u \mid G(u) = 0\}$ и существует отображение $\varphi(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{H}$ такое, что $u_* + tv + \varphi(t) \in \{u \mid G(u) = 0\}$, то есть $G(u_* + tv + \varphi(t)) = 0$ для любого t из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Таким образом, все точки вида $u_* + tv + \varphi(t) \equiv u(t)$ удовлетворяют ограничениям типа "равенство".

Теперь для всех $i = \overline{0, m}$ разложим функции g_i в окрестности точки u_*:

$$g_i(u(t)) = g_i(u_*) + \left\langle g_i'(u_*), tv + \varphi(t)\right\rangle + o(tv + \varphi(t)) = \{(d1), (d2)\} = t\left\langle g_i'(u_*), v\right\rangle + o(t) < 0 \quad \forall t \in (0, \varepsilon)$$

Мы получили, что для t из интервала $(0, \varepsilon)$ точки $u(t)$ принадлежат допустимому множеству $\mathbf{U}$, и в тоже время $J(u(t)) < 0$, что противоречит с $(d1)$. Значит наше предположение неверно и $V_0 = \varnothing$.

Рассмотрим случай, когда все V_i не содержат элементов, то есть когда

$$V_m = \{u \in \mathbb{H} \mid G'(u_*)[u] = 0, \left\langle g_m'(u_*), u\right\rangle < 0\} = \varnothing.$$

Поставим задачу минимизации функционала на ядре:

$$J_m(u) = \left\langle g'_m(u_*), u \right\rangle \to \inf, \quad u \in \ker G'(u_*) \tag{2}$$

Если $V_m = \varnothing$, то $u = 0$ — решение (2). Разложим градиент в ортогональную сумму:

$$g'_m(u_*) = g^1_m + g^2_m, \text{ где } g^1_m \in \ker G'(u_*),\ g^2_m \in \left(\ker(G'(u_*)\right)^{\perp}$$

$$J_m(u) = \left\langle g^1_m, u \right\rangle \Rightarrow \{\min\,=\,0\} \Rightarrow g^1_m = 0$$

Таким образом, получаем, что $g'_m(u_*) \in \operatorname{im}(G'(u_*))'$, и существует такой вектор $\lambda^0 \in \mathbb{R}^s$, что

$$1{\cdot}g'_m(u_*) = \sum_{i=m}^{m+s} \lambda^0_i g'_i(u_*).$$

Тогда в качестве искомого набора множителей Лагранжа можно взять

$$\lambda^* = (\lambda^*_0 = 0, \lambda^*_1 = 0, \ldots, \lambda^*_{m-1} = 0, \lambda^*_m = 1, \lambda^*_{m+1} = -\lambda^0_{m+1}, \ldots, \lambda^*_{m+s} = -\lambda^0_{m+s}).$$

Остаётся рассмотреть случай, когда

$$\varnothing = V_0 = V_1 = \ldots = V_k \subset V_{k+1} \subseteq V_{k+1} \subseteq \ldots \subseteq V_m.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям поставим задачу минимизации:

$$J_k(u) = \left\langle g'_k(u_*), u \right\rangle \to \inf, \quad u \in \{u \in \ker G'(u_*) \mid \left\langle g'_i(u_*), u \right\rangle \leqslant 0,\ i = \overline{k+1, m}\} \tag{3}$$

и покажем, что $u = 0$ — решение задачи (3).

Необходимо доказать, что inf в (3) неотрицателен. Сделаем это методом от противного. Предположим, что $J_{k*} < 0$, тогда найдутся допустимый для (3) вектор v и вектор $w \in V_{k+1}$ такие, что

$$\left\langle g'_k(u_*), v \right\rangle < 0,\ \left\langle g'_i(u_*), v \right\rangle \leqslant 0 \text{ для } i = \overline{k+1, m},\ G'(u_*)[v] = 0,$$

$$\left\langle g'_k(u_*), w \right\rangle < 0,\ \left\langle g'_j(u_*), w \right\rangle < 0 \text{ для } j = \overline{k+1, m},\ G'(u_*)[w] = 0.$$

Сдвинувшись на достаточно малое ε из v в направлении w, получим

$$\left\langle g'_k(u_*), v + \varepsilon w \right\rangle < 0,$$

$$\left\langle g'_i(u_*), v + \varepsilon w \right\rangle \leqslant 0 \text{ для } i = \overline{k+1, m}$$

и, так как G линеен,

$$G'(u_*)[v + \varepsilon w] = 0.$$

Мы получили, что точка $v + \varepsilon w$ содержится во множестве V_k, которое по предположению пусто. Полученное противоречие доказывает, что $v = 0$ — решение.

Так как $V_{k+1} \neq \varnothing$ то задача (3) является выпуклой задачей, для которой выполняются условия Слейтера. Применим к (3) Теорему 22.

Пусть классическая функция Лагранжа

$$\mathcal{L}_k(u, \lambda) = 1{\cdot} \left\langle g'_k(u_*), u \right\rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \left\langle g'_i(u_*), u \right\rangle$$

удовлетворяет принципу минимума из Теоремы 22 при $\lambda = \lambda^0 = (1, \lambda^0_{k+1}, \ldots, \lambda^0_m) \neq 0$. Тогда для любого $u \in \ker G'(u_*)$ $(= \mathbf{U}_0)$ будет выполняться неравенство

$$0 = 1\cdot \left\langle g'_k(u_*), u\right\rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda^0_i \left\langle g'_i(u_*), u\right\rangle \leqslant \mathcal{L}_k(u, \lambda^0).$$

Так как множество терпимых ограничений и функция Лагранжа линейны, отсюда получаем, что $\mathcal{L}_k(u, \lambda^0) = 0$ для любого $u \in \ker G'(u_*)$ (вместо u можно взять $-u$ и получить аналогичное верное неравенство).

Мы получили, что

$$1\cdot g'_k(u_*) + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda^0_i g'_i(u_*) \in \left(\ker G'(u_*)\right)^{\perp} = \operatorname{im}\left(G'(u_*)\right)^*,$$

и существует такой набор $(\lambda^0_{m+1}, \ldots, \lambda^0_{m+s}) \in \mathbb{R}^s$, то в качестве искомого вектора можно взять

$\lambda^* = (\lambda^*_0 = 0, \ldots, \lambda^0_{k-1} = 0, \lambda^*_k = 1, \lambda^*_{k+1} = \lambda^0_{k+1}, \ldots, \lambda^*_m = \lambda^0_m, \lambda^*_{m+1} = -\lambda^0_{m+1}, \ldots, \lambda^*_{m+s} = -\lambda^0_{m+s})$.

Теорема полностью доказана. □

Упражнение 18 (5). Доказать, что в случае, когда $A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F})$, $\mathbb{H}, \mathbf{F}$ — гильбертовы пространства, справедливы разложения:

$$\mathbf{F} = \overline{\operatorname{im} A} \oplus \ker A^*,$$

$$\mathbb{H} = \overline{\operatorname{im} A^*} \oplus \ker A.$$

(Замечание: в бесконечномерном случае дополнения писать необходимо.)

Опишем теперь достаточные условия регулярности в рассматриваемой задаче. В случае когда $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$ и существует такой элемент $h \in \mathbb{H}$, что

1) $G'(u_*)[h] = 0$;

2) $\langle g'_i(u_*), h\rangle < 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$,

то в любом наборе множителей Лагранжа $\lambda_0 \neq 0$.

Для доказательства предположим, что существует набор, в котором $\lambda_0 = 0$. Тогда из утверждения $i)$ Теоремы 24 имеем

$$\sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i g'_i(u_*) = 0.$$

Умножим это равенство скалярно на h:

$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{\left\langle g'_i(u_*), h\right\rangle}_{2)\,\Rightarrow\, <0} + \sum_{i=m+1}^{m+s} \lambda_i \underbrace{\left\langle g'_i(u_*), h\right\rangle}_{1)\,\Rightarrow\, =0} = 0.$$

Получаем, что $\lambda_i = 0$ для любого $i = \overline{1, m}$ и

$$\sum_{i=m+1}^{m+s} \lambda_i g'_i(u_*) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{H}.$$

Следовательно,
$$\left\langle \left(G'(u_*)\right)^* [(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+s})]\, , u\right\rangle = 0 \quad \forall u \in \mathbb{H}.$$

А так как $\operatorname{im} G'(u_*) = \mathbb{R}^s$, мы получаем, что $\lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_{m+s} = 0$, то есть все $\lambda_i = 0$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Упражнение 19 (4). Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, $A = A^* \geqslant 0$, $A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$. Решить с помощью Теоремы 24 задачу минимизации:
$$J(u) = \langle Au, u\rangle \to \inf,\ \|u\|^2_{\mathbb{H}} = 1.$$
(В случае бесконечномерного $\mathbb{H}$ существование решения предполагается.)

Двойственные экстремальные задачи

В этом пункте рассмотрим задачу минимизации
$$\begin{gathered} J(u) \to \inf, \\ u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subseteq \mathbf{L} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s}(u) = 0\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Для решения подобных задач иногда легче перейти к решению так называемых *двойственных задач*. Опишем этот процесс. Строим функцию Лагранжа для задачи (1):
$$\mathcal{L}(u, \lambda) = 1 \cdot J(u) + \sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i g_i(u),\ u \in \mathbf{U}_0,\ \lambda \in \Lambda_0 = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \lambda_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}\right\}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию
$$\varphi(u) = \sup_{\lambda \in \Lambda_0} \mathcal{L}(u, \lambda) = \begin{cases} J(u), \text{ если } u \in \mathbf{U}, \\ +\infty, \text{ если } u \in \mathbf{U}_0 \backslash \mathbf{U} \end{cases}. \tag{3}$$

Задача (1) равносильна задаче минимизации на расширенном множестве:
$$\varphi(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U}_0. \tag{4}$$

Вводим функцию
$$\psi(\lambda) = \inf_{u \in \mathbf{U}_*} \mathcal{L}(u, \lambda). \tag{5}$$

Определение. Задача
$$\psi(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda_0 \tag{6}$$
называется *двойственной* к исходной задаче (1).

Теорема 25.
Всегда верны неравенства:
$$\psi(\lambda) \leqslant \psi^* \leqslant \varphi_* = J_* \leqslant \varphi(u), \quad \forall \lambda \in \Lambda_0,\ \forall u \in \mathbf{U}_0. \tag{7}$$
Для того, чтобы
$$\psi^* = \varphi_*,\ \mathbf{U}_* \neq \varnothing,\ \Lambda^* \neq \varnothing, \tag{8}$$
необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{L}(u, \lambda)$ имела седловую точку на $\mathbf{U}_0 \times \Lambda_0$; $\mathbf{U}_* \times \Lambda^*$ — множество всех седловых точек.

Доказательство.

Утверждение (7) следует непосредственно из определения $\varphi(u)$ и $\psi(\lambda)$.

Докажем, что из (8) следует существование седловой точки. Возьмём любые $u_* \in \mathbf{U}_*$, $\lambda_* \in \Lambda^*$. Для них верна цепочка неравенств:

$$\psi^* = \psi(\lambda^*) = \inf_{u\in\mathbf{U}_0} \mathcal{L}(u,\lambda^*) \leqslant \{\mathbf{U}_* \subseteq \mathbf{U}_0\} \leqslant \mathcal{L}(u_*,\lambda^*) \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \mathcal{L}(u_*,\lambda) = \varphi(u_*) = \varphi_*.$$

Так как $\varphi_* = \psi^*$, все неравенства превращаются в равенства и мы имеем:

$$\mathcal{L}(u_*,\lambda) \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \mathcal{L}(u_*,\lambda) = \mathcal{L}(u_*,\lambda^*) = \inf_{u\in\mathbf{U}_0} \mathcal{L}(u,\lambda^*) \leqslant \mathcal{L}(u,\lambda^*), \quad \forall\lambda \in \Lambda_0,\ \forall u \in \mathbf{U}_0.$$

То есть (u_*,λ^*) — седловая точка.

Итак мы доказали, что $\mathbf{U}_* \times \Lambda^*$ содержится во множестве седловых точек.

Теперь проведём доказательство обратного вложения. Пусть точка (u_*,λ^*) — седловая для функции $\mathcal{L}$. Докажем, что выполняются условия (8). Нам известно, что

$$\mathcal{L}(u_*,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(u_*,\lambda^*) \leqslant \mathcal{L}(u,\lambda^*) \quad \forall\lambda \in \Lambda_0,\ \forall u \in \mathbf{U}_0.$$

Взяв sup по λ и inf по u, получим

$$\varphi_* \leqslant \{u_* \in \mathbf{U}_0\} \leqslant \varphi(u_*) \leqslant \mathcal{L}(u_*,\lambda^*) \leqslant \psi(\lambda^*) \leqslant \{\lambda^* \in \Lambda_0\} \leqslant \psi^* \leqslant \{(7)\} \leqslant \varphi_*.$$

Отсюда имеем, что u_* — оптимальный элемент и λ^* — оптимальный элемент, $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, $\Lambda^* \neq \varnothing$, $\varphi_* = \psi^*$ и теорема доказана. $\square$

Пример. ($\psi^* < \varphi_*$, седла нет)

Рассмотрим функционал $J(u) = e^{-u}$ на множестве $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 \mid g(u) = ue^{-u} = 0\} = \{0\}$.

$$J_* = J(0) = 1 = \varphi_*,$$

$$\mathbf{U}_* = \{0\} \neq \varnothing,$$

$$\mathcal{L}(u,\lambda) = 1\cdot e^{-u} + \lambda u e^{-u} = e^{-u}(1+\lambda u),$$

$$\Lambda_0 = \mathbb{R}^1, \psi(\lambda) = \begin{cases} 0, \text{ если } \lambda = 0, \\ -\infty, \text{ если } \lambda > 0, \\ \lambda e^{-1+\frac{1}{\lambda}}, \text{ если } \lambda < 0. \end{cases}$$

То есть $\psi^* = 0 = \psi(0)$, $\Lambda^* = \{0\} \neq \varnothing$ и $\varphi_* > \psi^*$.

Пример. ($\psi^* = \varphi_*$, $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, $\Lambda^* = \varnothing$, седла нет)

Рассмотрим функционал $J(u) = -u$ на множестве $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 \mid g(u) = u^2 \leqslant 0\} = \{0\}$.

$$\varphi_* = 0 = J_*, \mathbf{U}_* = \{0\} \neq \varnothing,$$

$$\mathcal{L}(u,\lambda) = 1\cdot(-u) + \lambda u^2,\ \lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \geqslant 0\}, \psi(\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{4\lambda}, \text{ если } \lambda > 0, \\ -\infty, \text{ если } \lambda = 0 \end{cases}.$$

То есть $\psi^* = 0$, но множество Λ^* пусто.

Вторая двойственная задача

Введём понятие второй двойственной задачи. Для этого рассмотрим один

Пример.

Рассмотрим минимизацию функции $J(u) = u^2$ на множестве $\mathbf{U} = \{g(u) = u^2 - 1 \leqslant 0\} = [-1; 1]$. Имеем:

$$J_* = \varphi_* = 0, ; \mathbf{U}_* = \{0\} \neq \varnothing,$$

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = u^2 + \lambda(u^2 - 1)$$

Получаем $\psi(\lambda) = -\lambda$, если $\lambda \geqslant 1$ (в нашем случае $\lambda \geqslant 0$).

Теперь поставим двойственную задачу к $\psi(\lambda)$:

$$\psi(\lambda) = -\lambda \to \sup_{\lambda \geqslant 0}, \ \psi^* = 0 = \psi(0), \ \Lambda^* = \{0\} \neq \varnothing.$$

Перейдём к задаче на минимум:

$$\overline{J}(v) = v \to \inf, \ v \geqslant 0, \quad (v := \lambda)$$

$$v \in V = \{v \in \mathbb{R}^1 = V_0 \mid g(v) = -v \leqslant 0\}$$

Отсюда получаем функцию Лагранжа:

$$\overline{\mathcal{L}}(v, \mu) = 1 \cdot v + \mu(-v), \ \mu \geqslant 0$$

$$\overline{\psi}(\mu) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu = 1, \\ -\infty, \text{ если } \mu \neq 1 \end{cases}.$$

Определение. Задача максимизации функции $\overline{\psi}(\mu)$ при $\mu \geqslant 0$ называется *второй двойственной задачей.*

Приведённый пример показывает, что вторая двойственная задача не всегда совпадает с исходной.

Упражнение 20 (4). Доказать, что для канонической задачи линейного программирования вторая двойственная задача совпадает с исходной.

7 Простейшая задача оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина

Постановка задачи

В этой главе мы коснёмся задачи оптимизации, которую принято называть задачей *оптимального управления.* Более подробно этот вопрос освещается в соответствующем курсе, мы же рассмотрим его, исходя из наших потребностей.

В общем виде рассматриваемая задача выглядит следующим образом:

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)\, dt + \varphi(x(T)) \to \inf$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t) \ \text{ почти всюду для } t_0 < t < T, \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$u \in \mathbf{U} = \{u(t) \text{ — измерима по Лебегу } \mid u(t) \in V \subseteq \mathbb{R}^r \text{ для почти всех } t\}$$

Функционал f^0 принято называть *интегрантом*, а функционал φ — *терминантом*. Заметим, что в этой постановке отсутствуют фазовые ограничения на $x(t)$ $(x(t) \in G \subseteq \mathbb{R}^n)$, что облегчает нам исследование задачи.

Предположим существование $f, f_x, f^0, f^0_x, \varphi, \varphi_x$ их непрерывность по t, а также Липшец-непрерывность по x и u на $\mathbb{R}^n \times V \times [t_0; T]$. (В принципе можно обойтись без Липшец-непрерывности, но при этом многие выкладки значительно усложняются.) В дальнейшем будем ссылаться на подобное существование отметкой (2).

Функция Гамильтона-Понтрягина. Принцип максимума

В этом пункте рассмотрим функцию следующего вида:

$$H(x, u, t, \psi) = f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t)\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

называемой функцией Гамильтона-Понтрягина.

Введём ряд обозначений:

$$\Delta J = J(u + h) - J(u),$$

$$\Delta x = x(t, u + h) - x(t, h),$$

$$\Delta f^0 = f^0\left(x(t, u + h), u(t) + h(t), t\right) - f^0\left(x(t, u), u(t), t\right).$$

Преобразуем $\Delta J(u)$ так, чтобы получить принцип максимума.

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta f^0 \, dt + \Delta\varphi \tag{3}$$

Применяя формулу конечных приращений, имеем

$$\Delta\varphi = \langle \varphi_x\left(x(T) + \theta\Delta x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{R}_\varphi,$$

где $\theta \in [0, 1]$, $\mathcal{R}_\varphi$ — некоторый остаток.

Таким образом, получаем

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta f^0 \, dt + \langle \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{R}_\varphi. \tag{4}$$

Введём обозначение

$$\psi(T) = \varphi_x\left(x(T)\right). \tag{5}$$

Тогда

$$\langle \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle = \langle \psi(T), \Delta x(T)\rangle = \{\Delta x(t_0) = 0\} = \langle \psi(T), \Delta x(T)\rangle - \langle \psi(t_0), \Delta x(t_0)\rangle =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\langle \psi(t), \Delta x(t)\rangle \, dt = \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle \psi'(t), \Delta x(t)\right\rangle \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle \psi(t), \Delta x'(t)\right\rangle \, dt.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta H \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle \psi'(t), \Delta x(t) \right\rangle \, dt + \mathcal{R}_{\varphi}. \tag{6}$$

Теперь, используя формулу конечных приращений и элементарные преобразования, представим ΔH в несколько ином виде:

$$\Delta H = \left(H\left(x(t,u+h), u+h, t, \psi\right) - H\left(x(t,u), u+h, t, \psi\right)\right) + \left(H\left(x(t,u), u+h, t, \psi\right) - H\left(x(t,u), u, t, \psi\right)\right) =$$

$$= \left\langle H_x\left(x(t) + \theta(t)\Delta x(t), u+t, t, \psi\right), \Delta x(t) \right\rangle + \Delta_u H,$$

где $\theta \in [0; 1]$, а через $\Delta_u H$ обозначено второе слагаемое.

Продолжая цепочку равенств, получаем

$$\Delta H = \langle H_x(x, u, t, \psi, \Delta x(t)\rangle + \Delta_u H + \mathcal{R}_H(t),$$

где $\mathcal{R}_H(t)$ — некий остаток, связанный с $H(\ldots)$. Имеем:

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle \psi' + H_x, \Delta x \right\rangle \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t) \, dt + \mathcal{R}_{\varphi}. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\psi'(t) = -H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)). \tag{8}$$

При выполнении этого условия выражение (7) преобразуется в

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t) \, dt + \mathcal{R}_{\varphi}. \tag{9}$$

Оценим остатки в этом выражении. Для этого рассмотрим сначала производную приращения x:

$$\begin{cases} \Delta x'(t) = \Delta f(t), \quad t_0 < t < T; \\ \Delta x(t_0) = 0. \end{cases}$$

Перейдём к эквивалентной интегральной форме:

$$\Delta x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Delta f(\tau) \, d\tau.$$

Тогда из условия Липшица получим:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \, d\tau + L \int\limits_{t_0}^{t} \| \underbrace{h(\tau)}_{=\Delta u(\tau)} \|_{\mathbb{R}^r} \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \, d\tau + L \int\limits_{t_0}^{T} \|h(\tau)\|_{\mathbb{R}^r} \, d\tau.$$

По лемме Гронуола-Бэллмана имеем:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L\|h\|_{\mathbf{L}^1(t_0;T)} \exp\left\{L(t-t_0)\right\}.$$

Возьмём максимум по t от обоих частей этого неравенства:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbf{C}[t_0;T]} \leqslant \mathrm{const}\|h\|_{\mathbf{L}^1(t_0;T)} = O\left(\|h\|_{\mathbf{L}^1}\right).$$

Тогда для остатка $\mathcal{R}_\varphi$, используя условия Липшица и неравенство Коши-Буняковского, получаем следующую оценку:

$$|\mathcal{R}_\varphi| = |\langle \varphi_x\left(x(T)+\theta\Delta x(T)\right) - \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n}| \leqslant \{\theta\in[0;1]\} \leqslant L\|\Delta x(T)\|^2_{\mathbb{R}^n} = O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right)$$

Оценим остаток $\mathcal{R}_H(t)$.

$$\mathcal{R}_H(t) = \langle H_x\left(x(t)+\theta(t)\Delta x(t), u(t)+h(t), t, \psi(t)\right) - H_x\left(x(t), u(t)+h(t), t, \psi(t)\right), \Delta x(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского и условий (2) получаем

$$\left|\int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t)\,dt\right| \leqslant L\int\limits_{t_0}^{T} \|\theta(t)\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\left(1+\|\psi\|_{\mathbf{C}}\right)\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\,dt.$$

И так как ψ непрерывна и промежуток ограничен, то

$$\left|\int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t)\,dt\right| = O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right).$$

Из оценок остатков получаем формулу

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H\,dt + O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1(t_0;T)}\right). \tag{10}$$

Теперь сформулируем основную теорему пункта.

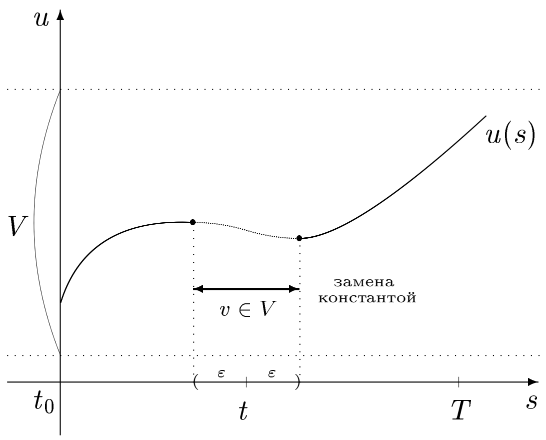
Теорема 26. ***(принцип максимума Понтрягина)***
Пусть для задачи (1) *выполняются условия* (2)*,* $u(t)$ *— оптимальное управление,* $x(t)$ *— соответствующая оптимальная траектория,* $\psi(t)$ *— решение сопряжённой задачи* (5)*,* (8)*. Тогда*

$$H\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right) = \min_{v\in V\subseteq\mathbb{R}^n} H\left(x(t), v, t, \psi(t)\right) \tag{11}$$

для почти всех t*.*

Доказательство.
Из того, что $u(t)$ — оптимальное управление, следует, что для всех допустимых h $\Delta J = J(u+h) - J(u) \geqslant 0$, отсюда

$$\int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H(t)\,dt + O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right) \geqslant 0, \quad \forall h\in\mathbf{L}^1 :\ u+h\in\mathbf{U}$$



Применим метод игольчатых вариаций, заменив оптимальное управление на некотором отрезке $[t-\varepsilon; t+\varepsilon]$ постоянной v (см. рис.)

$$u(s) + h(s) = u_\varepsilon(s) = \begin{cases} v, \text{ если } s \in [t-\varepsilon; t+\varepsilon], \\ u(s) \text{ для остальных } s. \end{cases}$$

Тогда разность $\Delta_u H(s)$ будет ненулевой только на этом отрезке:

$$\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Delta_u H(s)\, ds + O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right) \geqslant 0$$

Мы можем сказать, что $O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right) = O(\varepsilon^2)$, так как

$$\|h\|_{\mathbf{L}^1} = \int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |u(s) - v|\; ds = O(\varepsilon).$$

Разделив полученное выражение на ε и устремив ε к нулю, в пределе для почти всех t из интервала (t_0, T) получаем (11). $\square$

Об использовании принципа максимума

Заметим, что используя принцип максимума, мы, по сути, переходим от бесконечномерной задачи к континууму конечномерных задач. (Параметр t можно считать при этом "номером" задачи.) Иногда это позволяет упростить решение, иногда нет. Принцип максимума даёт нам лишь необходимые условия на оптимальность, то есть управления, ему удовлетворяющие, на самом деле есть лишь "подозрительные" на оптимальность управления.

Предположим, что $u(t,x,\psi)$ — оптимальное управление, на котором достигается (11). Тогда, подставляя его в наши условия, имеем систему:

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(x(t), u\left(t, x(t), \psi(t)\right), t\right) \\ x(t_0) = x_0 \\ \psi'(t) = -H_x\left(x(t), u\left(t, x(t), \psi(t)\right), t\right), t, \psi(t)) \\ \psi(T) = -\varphi\left(x(T)\right) \end{cases}$$

Получаем краевую задачу принципа максимума, в которой $2n$ дифференциальных уравнений и $2n$ краевых условий. К сожалению, это именно краевая задача, с условиями не в t_0, а в T, к тому же она нелинейно зависит от траектории $x(t)$.

Предположим, что $x(t)$,$\psi(t)$ — решение этой системы. Тогда управление $u(t, x(t), \psi(t))$ будет являться "подозрительным" на оптимальность.

Пример. (на применение принципа максимума)

Этот пример уже приводился нами как комментарий к Теореме 9, теперь мы воспользуемся другим способом решения. Рассмотрим задачу минимизации

$$J(u) = \int\limits_0^4 \left(x(t) + u^2(t)\right)\, dt \to \min,$$

$$V = [-1, 1], \quad \begin{cases} x'(t) = u(t), & 0 < t < 4, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Для этой задачи в наших обозначениях

$$f^0 = x + u^2,\ f = u,\ \varphi = 0,\ H = (x + u^2) + \psi u,$$

где $\psi(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} \psi'(t) = 1, \\ \psi(4) = 0. \end{cases}$$

Решая это уравнение, получаем $\psi(t) = 4 - t$. Отсюда из (11) следует, что "подозрительным" управлением является

$$u = u(t, x, \psi) = \operatorname*{argmin}_{-1 \leqslant v \leqslant 1}(x + v^2 + \psi v) = \begin{cases} -1,\ \text{если } t \in [0, 2), \\ \frac{t}{2} - 2,\ \text{если } t \in [2, 4]. \end{cases}$$

На самом деле можно доказать, что полученное управление является оптимальным (из теоремы Вейерштрасса).

Линеаризованный принцип максимума. Градиент функционала

Добавим в задаче (1) к условиям (2) условия на гладкость: f_u, f^0_u — Липшец-непрерывны по u и непрерывны по совокупности переменных (x, u, t). Обозначим эти условия $(2u)$.

Тогда аналогично предыдущим выкладкам можно показать, что

$$\Delta_u H(t) = H\left(x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)\right) - H\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right) = \left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), h(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} + \mathcal{R}_u.$$

Для $\mathcal{R}_u$ в силу наших предположений справедлива оценка:

$$|\mathcal{R}_u| \leqslant L\, |h(t)|^2 .$$

И для (10) мы получаем выражение:

$$J(u + h) - J(u) = \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), h(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r}\, dt + O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right) + L \int\limits_{t_0}^{T} |h(t)|^2\, dt.$$

Последнее слагаемое в этой сумме есть норма h в пространстве $\mathbf{L}^2$ в квадрате, умноженная на константу L, то есть $O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}\right)$.

Второе слагаемое также можно считать $O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}\right)$, так как

$$\|h\|^2_{\mathbf{L}^1} = \left(\int\limits_{t_0}^{T} 1\cdot|h(t)|\ dt\right)^2 \leqslant \underbrace{\left(\int\limits_{t_0}^{T} 1\,dt\right)}_{=const} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_{t_0}^{T} |h(t)|^2\ dt\right)}_{=\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}}$$

И по определению $J'(u) = H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right)$ (отождествление по Риссу).

Теорема 27.
Пусть выполнены условия Теоремы 26 и условия $(2u)$*. Тогда* $J(u)$ *дифференцируема по Фреше в* $\mathbf{L}^2$ *и её производная имеет вид*

$$J'(u) = H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right).$$

Если, кроме того, $u(t)$ *— оптимальное управление в задаче* (1)*, то необходимо выполняется линеаризованный принцип максимума:*

$$\left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), u(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} = \min_{v\in V}\left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), v\right\rangle_{\mathbb{R}^r}. \tag{15}$$

Упражнение 21 (4). Доказать линеаризованный принцип максимума (15).

8 Регуляризация некорректно поставленных экстремальных задач по Тихонову

Напомним, что экстремальная задача минимизации функционала $J(u)$ называется корректно поставленной в случае, когда

1) J_* существует (конечно);
2) множество оптимальных решений $\mathbf{U}_*$ не пусто;
3) из того, что последовательность $J(u_k)$ (u_k допустимы) сходится к J_* следует, что соответствующая последовательность u_k сходится к u_*.

В зависимости от типа сходимости $u_k \to u_*$ корректность задачи может быть, соответственно, сильной и слабой. Следующий пример показывает, что эти типы корректности не эквивалентны.

Пример. (слабо корректная задача, не являющаяся сильно корректной)

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$J(u) = \int\limits_0^T x^2(t)\,dt \to \inf, \quad x'(t) = u(t),\ 0 < t < T, \quad x(0) = 0,$$

$$u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{L}^2(0,T) \mid u(t) \in [-1;1] \text{ почти всюду}\}$$

Ранее было доказано, что множество $\mathbf{U}$ (“параллелепипед” в $\mathbf{L}^2$) — слабый компакт, а функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу. Можно также показать, что $J_* > -\infty$ ($J_* = 0$), оптимальной является точка $u_* = 0$ и, более того, $\mathbf{U}$ состоит из одной этой точки: $\mathbf{U} = \{0\} \neq \varnothing$. Таким образом, пункты 1) и 2) в определении корректности выполняются. По Теореме 2 получаем, что задача является слабо корректно поставленной. Докажем, что она не сильно корректно поставлена.

Берём последовательность

$$u_k(t) = \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right) \in \mathbf{C}^\infty[0,T] \subset \mathbf{L}^2(0,T) \Rightarrow u_k \in \mathbf{U}.$$

Тогда соответствующие x_k сходятся к 0:

$$x_k(t) = \frac{T}{\pi k}\underbrace{\left(1 - \cos\frac{\pi k T}{T}\right)}_{\leqslant 2} \overset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

То есть, $J(u_k) \to 0 = J_*$, но в тоже время сходимости по u_k нет:

$$\|u_k - u_*\|^2_{\mathbf{L}^2} = \|u_k - 0\|^2_{\mathbf{L}^2} = \frac{T}{2} \overset{k\to\infty}{\nrightarrow} 0.$$

И задача не является сильно корректно поставленной.

Перейдём к теме пункта. Пусть, как обычно, требуется решить задачу минимизации

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{H}, \tag{1}$$

но при этом мы будем считать, что известно лишь приближенное значение функции $J(u)$ ($\mathbf{U}$ задано точно). Положим, что отличие известного значения функции от истинного удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{J}(u) - J(u)| \leqslant \delta\left(1 + \|u\|^2_{\mathbb{H}}\right), \quad \delta \geqslant 0, \quad \forall u \in \mathbf{U}. \tag{2}$$

Это означает, что ошибка может быть довольно большой на “периферии”, но достаточна мала, если u близко к 0.

Выбор такого рода ограничения обусловлен следующими рассуждениями. Рассмотрим функционал $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}$ ($A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F})$, $f \in \mathbf{F}$). Если порождающий оператор задан неточно с некоторой ошибкой $\|\tilde{A} - A\| \leqslant h$, $\tilde{J}(u) = \|\tilde{A}u - f\|^2_{\mathbf{F}}$, то для соответствующих квадратичных функционалов ошибка принимает вид

$$|\tilde{J}(u) - J(u)| \leqslant h\cdot \max\left\{\|f\|^2_{\mathbf{F}},\ 1 + h + 2\|A\|\right\} \cdot \left(1 + \|u\|^2_{\mathbb{H}}\right) \leqslant \delta\left(1 + \|u\|^2_{\mathbb{H}}\right),$$

то есть получаем (2) (данную оценку можно получить из того, что $\|Au - \tilde{A}u\|_{\mathbf{F}} \leqslant \|A - \tilde{A}\|\cdot\|u\|$).

А. Н. Тихонов в 1960-х годах предложил метод, позволяющий решать подобного рода задачи. Суть метода в том, что от исходной задачи мы переходим к экстремальной задаче следующего вида:

$$T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha\cdot\|u\|^2 \to \inf, \quad \alpha > 0, \quad u \in \mathbf{U}. \tag{3}$$

Функционал T_α называют *функционалом Тихонова.* α — некий стабилизирующий функционал.

При переходе к такой задаче нам достаточно найти такое $\tilde{u} \in \mathbf{U}$, что

$$T_\alpha(\tilde{u}) \leqslant \inf_{u\in\mathbf{U}} T_\alpha(u) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Теорема 28.
Пусть в задаче (1) $J_* > -\infty$, $\mathbf{U} \neq \varnothing$, *множество* $\mathbf{U}$ *выпукло и замкнуто в* $\mathbb{H}$ — *гильбертовом пространстве, функционал* $J(u)$ *выпукл и полунепрерывен снизу, выполняется условие* (2), $\tilde{u}$ *выбирается по правилу* (4), *параметры* δ, α, ε *стремятся к* 0, *причём* $\frac{\delta+\varepsilon}{\alpha} \to 0$. *Тогда*

$$\tilde{J}(\tilde{u}) \to J_*, \quad \|\tilde{u} - u_*\|_{\mathbb{H}} \to 0,$$

где $u_* = \underset{u \in \mathbf{U}_*}{\operatorname{argmin}} \|u\|_{\mathbb{H}}$ — *нормальное решение задачи* (1).

Доказательство.

Из условий теоремы следует, что множество $\mathbf{U}_*$ выпукло и замкнуто в $\mathbb{H}$, отсюда по Теореме 10 получаем, что u_* существует и единственна ($u_* = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}_*}(0)$).

Докажем, что у задачи (4) существует решение $\tilde{u}$, то есть $\inf\limits_{u \in \mathbf{U}} T_\alpha(u) > -\infty$:

$$T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha\|u\|^2 = \tilde{J}(u) + \alpha\|u\|^2 \pm J(u) \geqslant \{(2)\} \geqslant$$
$$\geqslant -\delta\left(1 + \|u\|^2\right) + J(u) + \alpha\|u\|^2 \geqslant J_* - \delta + (\alpha - \delta)\|u\|^2 \geqslant J_* - \delta > -\infty,$$

что и требовалось.

Для доказательства сходимости по функции запишем следующую цепочку неравенств:

$$J_* = J(u_*) \leqslant J(\tilde{u}) \leqslant J(\tilde{u}) + \alpha\|\tilde{u}\|^2 \leqslant \{(2)\} \leqslant T(\tilde{u}) + \delta\left(1 + \|\tilde{u}\|^2\right) \leqslant \{(4)\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{u \in \mathbf{U}} T_\alpha(u) + \varepsilon + \delta\left(1 + \|\tilde{u}\|^2\right).$$

По отношению к T_α точка u_* является “рядовой”, поэтому $\inf\limits_{u \in \mathbf{U}} T_\alpha(u) \leqslant T_\alpha(u_*)$. Отсюда полученное выражение не превосходит

$$J(u_*) + \delta\left(1 + \|u_*\|^2\right) + \alpha\|u_*\|^2 + \varepsilon + \delta\left(1 + \|\tilde{u}\|^2\right) = J_* + (2\delta + \varepsilon) + (\delta + \alpha)\|u_*\|^2 + \delta\|\tilde{u}\|^2.$$

Из этой цепочки неравенств имеем

$$(\alpha - \delta)\|\tilde{u}\|^2 \leqslant J_* - J(\tilde{u}) + (2\delta + \varepsilon) + (\delta + \alpha)\|u_*\|^2.$$

Тогда, взяв верхний предел от обеих частей неравенства и принимая во внимание, что $\frac{\delta+\varepsilon}{\alpha} \to 0$, получаем

$$\overline{\lim}\, \|\tilde{u}\|^2 \leqslant 1 \cdot \|u_*\|^2. \tag{5}$$

Переходя к пределу в вышеприведённой цепочке и учитывая (5) (в последнем равенстве), получаем сходимость по функции:

$$\lim J(\tilde{u}) = \lim \tilde{J}(\tilde{u}) = J_*. \tag{6}$$

Докажем теперь сходимость по аргументу. Из (5) следует, что существует подпоследовательность $\tilde{u}$, которая слабо сходится к некой точке u_0 в $\mathbb{H}$. Из условия теоремы видно, что функционал J слабо полунепрерывен снизу, откуда получаем, что $J(u_0) \leqslant \underline{\lim}\, J(\tilde{u}) = \{(6)\} = J_*$. Множество $\mathbf{U}$ выпукло и замкнуто, следовательно, оно слабо замкнуто. Из этого получаем, что $u_0 \in \mathbf{U}$, но тогда $u_0 \in \mathbf{U}_*$, то есть u_0 — оптимальное решение.

Функция $\|u\|^2$ слабо полунепрерывна снизу, значит $\|u_0\|^2 \leqslant \underline{\lim}\, \|\tilde{u}\|^2 \leqslant \{(5)\} \leqslant \|u_*\|^2$, отсюда $u_0 = u_*$ (так как u_* единственна).

Из приведённых рассуждений делаем вывод, что всё семейство $\tilde{u}$ слабо сходится к u_*. Для доказательства сильной сходимости перейдём в равенстве $\|\tilde{u} - u_*\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 - 2\langle \tilde{u}, u_* \rangle + \|u_*\|^2$ к верхнему пределу. Тогда, учитывая слабую сходимость $\tilde{u} \to u_*$ и то, что $\lim \|\tilde{u}\|^2 \leqslant \|u_*\|^2$, получаем существование предела $\lim \|\tilde{u} - u_*\|^2 = 0$, что и требовалось.

Теорема полностью доказана. $\square$

Список литературы

[В1] Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* — М.: Факториал Пресс, 2002.

[В2] Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач.* — М.: Наука, 1980(1988).

[В3] Васильев Ф. П. *Методы решения экстремальных задач.* — М.: Наука, 1981.

[КФ] Колмогоров А. Н., Фомин С.В. *Элементы теориии функций и функционального анализа.* — М.: Наука, 1976.

[АТФ] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимизационное управление.* — М.: Наука, 1979.