Упражнения по курсу **Методы оптимизации**

5–6 семестры, 2008/2009 уч. год

(В скобках рядом с порядковым номером задачи указан ее уровень по пятибальной шкале.)

1.(3) Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.

2.(3) Доказать, что единичный шар в пространстве $C[a,b]$ не является компактным множеством.

3.(3) Доказать, что пространство $C[a,b]$ со скалярным произведением $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ не является гильбертовым.

4.(3) Доказать, что "параллелепипед" в $L^2(a,b)$ с постоянными границами $\alpha(t)\equiv\alpha<\beta\equiv\beta(t)$ не является компактным множеством.

5.(5) Доказать, что "гильбертов кирпич"

$$U=\left\{x\in\ell^2 \,\middle|\, |x_n|\le 2^{-n},\ n=1,2,\dots\right\}$$

является компактным множеством в пространстве ℓ^2.

6.(4) Привести пример функции одной переменной, для которой в некоторой точке x справедливо представление

$$f(x+h)=f(x)+f_1\cdot h+f_2\cdot\frac{h^2}{2}+\bar{o}(h^2),$$

но которая не является дважды дифференцируемой в этой точке.

7.(3) Пусть $J(u)\in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h)-J'(u),\, g\rangle=\int_0^1\langle J''(u+th)h,\, g\rangle\,dt \qquad \forall u,h,g\in H.$$

8.(3) Вычислить первые и вторые производные квадратичного функционала в гильбертовом пространстве H :

$$J(u)=\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle_H-\langle f,u\rangle_H,\quad A\in L(H\to H),\quad f\in H.$$

9.(4) Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u)=g(\|u\|_H)$, где $g:\ R^1\to R^1$ – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли он в точке $u=0$ в случае $g(t)=t$? в случае $g(t)=t^3$?

10.(5) Вычислить градиент функционала

$$J(u)=\int_0^\ell\rho(x)|y(x;u)-z(x)|^2\,dx$$

в пространстве $L^2(0,\ell)$, где $y(x)=y(x;u)$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} (k(x)y'(x))'-q(x)y(x)=-u(x), & 0<x<\ell,\\ y(0)=0, \qquad y(\ell)=0, \end{cases}$$

$k(x)\ge k_0>0,\ q(x)\ge 0,\ \rho(x)\ge 0$ – заданные функции.

11.(5) (дискретный вариант предыдущей задачи для случая $k(x) = 1,\ q(x) = 1,\ \rho(x) = 1$). Вычислить градиент функционала $J(u) = \sum_{i=1}^{N-1} |y_i(u) - z_i|^2 h$ в пространстве R^{N-1} сеточных функций $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$ со скалярным произведением $\langle u, v\rangle_= \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i\, h$. Здесь $h > 0$ – шаг разностной сетки, $z = (z_1, z_2, \dots, z_{N-1})$ – заданная дискретная траектория, а $y_i = y_i(u)$ – решение разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} - y_i = -u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \qquad y_0 = 0, \qquad y_N = 0. \end{cases}$$

12.(5) В пространстве $L^2(0, \ell)$ найти первые производные квадратичных функционалов

$$J(u) = \iint\limits_Q |y(t, x; u) - f(t, x)|^2\, dt\, dx \quad \text{и} \quad J(u) = \int_0^\ell |y(T, x; u) - f(x)|^2\, dx,$$

заданных на решениях $y = y(t, x; u)$ второй краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered} y_t = y_{xx}, \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, \ell), \\ y_x\,|_{\,x=0} = 0, \quad y_x\,|_{\,x=0} = 0, \quad 0 < t < T, \\ y_t\,|_{\,t=0} = u(x), \quad 0 < x < \ell. \end{gathered}$$

13.(5) Пусть H – гильбертово пространство, L – его замкнутое подпространство. Доказать, что оператор метрического проектирования из H на L является линейным ограниченным самосопряженным оператором (оператором ортогонального проектирования из H на L).

14.(4) Пусть x_0 – фиксированный элемент из $H,\ x_0 + L$ – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = pr_{x_0+L} h$ в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell\rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

15.(3) Вычислить проекции точек на гиперплоскость $\{u \in H \mid \langle c, u\rangle_H = \beta\}$ в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед $\{u = (u_1, ..., u_n) \in R^n \,|\, \alpha_i \le u_i \le \beta_i,\ i = 1, ..., n\}$ в R^n.

16.(3) Выписать явное выражения для шага α_k метода скорейшего спуска в задаче минимизации квадратичного функционала $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H$ $(A^* = A \ge 0)$.

17.(3) Найти все угловые точки множества $U = \{u \in R^4 \,|\, u \ge 0,\ Au = b\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и исследовать их на невырожденность.

18.(5) Доказательство теоремы отделимости точки от непустого выпуклого множества в R^n.

19.(5) Пусть $A \in L(H \to F)$, пространства H, F – гильбертовы. Доказать, что тогда $F = \overline{\mathrm{Im} A} \oplus \ker A^*,\ H = \overline{\mathrm{Im} A^*} \oplus \ker A$.

20.(3) Пусть H – гильбертово пространство, отображение $G(u) = (g_1(u), ..., g_n(u)) : H \to R^n$ дифференцируемо по Фреше и $G'(u) = (g_1'(u), ..., g_n'(u)) \in L(H \to R^n)$ – его первая производная. Доказать, что сопряженный к $G'(u)$ оператор $(G'(u))^* \in L(R^n \to H)$ действует по правилу

$$(G'(u))^* \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, g_i'(u), \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n.$$

21.(4) Множество M в R^2 задано уравнением $M = \{x = (x_1, x_2) | F(x) = 0\}$, где $F(x) = x_1^2 - x_2^4$. Найти множество $T_0 M$ касательных векторов к M в точке $0 = (0, 0)$ и ядро $\mathrm{Ker} F'(0)$. Верно ли равенство $T_0M = \mathrm{Ker}F'(0)$?

22.(4) С помощью правила множителей Лагранжа решить задачу минимизации квадратичного функционала $J(u) = \langle Au, u\rangle_H$ на сфере $\|u\|_H = 1$ в гильбертовом пространстве H. Здесь $A \in L(H \to H),\ A = A^* \geq 0$ (если $\dim H = \infty$, существование решения предполагается).

23.(4) Построить вторую двойственную задачу к канонической задаче линейного программирования и показать, что она совпадает с исходной задачей.

24.(4) Построить двойственную задачу к задаче минимизации

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \to \inf, \quad Au = f,$$

где $A \in L(H \to R^n),\ f \in R^n,\ H$ – гильбертово пространство.

25.(4) Решить задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^T (-x(t) + u^2(t))\,dt \to \inf,$$
$$x'(t) = u(t),\ 0 < t < T,\ x(0) = x_0; \quad |u(t)| \leq a.$$

Рассмотреть случаи а) $T > 2a > 0$ и б) $0 < T < 2a$.

26.(5) Показать, что функционал $J(u) = \int_0^T x^2(t)\,dt$, где $x(t) = x(t; u)$ – решение задачи Коши

$$x'(t) = u(t), \qquad 0 < t < T, \qquad x(0) = 0,$$

не является сильно выпуклым в пространстве $L^2(0, T)$.

27.(4) В пространстве R^2 найти нормальное решение u_* системы линейных уравнений $Au = f$, где $u = (u_1, u_2),\ Au = (2u_1 + u_2,\ 2u_1 + u_2),\ f = (5, 5)$. Для системы с приближенным оператором $\widetilde{A}u = (2u_1 + u_2,\ (2 - \delta)u_1 + u_2),\ \delta > 0$, найти экстремали

$$\widetilde{u} = \operatorname*{argmin}_{u \in R^2} T_\alpha(u)$$

функционала Тихонова $T_\alpha(u) = \|\widetilde{A}u - f\|^2 + \alpha\|u\|^2$ и исследовать их на сходимость к u_* при $\delta \to 0$ и значениях параметра регуляризации а) $\alpha = 0$ (регуляризация не проводится), б) $\alpha = \delta$.

Некоторые задачи из письменных контрольных работ 2008/2009 уч. года

1.(5) Пусть $y = y(t, x; u)$ – решение следующей начально-краевой задачи для параболического уравнения, отвечающее граничному управлению $u = u(t) \in L^2(0, T)$:

$$y_t = y_{xx}, \qquad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$
$$y|_{x=0} = u(t), \qquad y|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T,$$
$$y|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l.$$

Найдите первую производную Фреше $J'(u)$ терминального квадратичного функционала

$$J(u) = \int_0^l |y(T, x; u) - f(x)|^2\,dx,$$

используя известный общий результат $J'(u) = 2A^*(Au - f)$. Опишите правила действия взаимно сопряженных операторов A и A^*.

2.(5) Пусть $y = y(t, x; u)$ – решение следующей начально-краевой задачи для параболического уравнения с управлением $u = u(x) \in L^2(0, \pi)$ в начальном условии:

$$\begin{gathered} y_t = y_{xx}, \qquad 0 < t < T, \quad 0 < x < \pi, \\ y|_{x=0} = 0, \qquad y|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \\ y|_{t=0} = u(x), \quad 0 < x < \pi. \end{gathered}$$

Покажите, что квадратичный функционал

$$J(u) = \int_0^\pi \left| \frac{1}{T} \int_0^T y(t, x; u)\, dt - f(x) \right|^2 dx$$

с целевой функцией $f(x) \in L^2(0, \pi)$ дифференцируем по Фреше на всем пространстве $L^2(0, \pi)$ и найдите его первую производную $J'(u)$, используя известный общий результат $J'(u) = 2A^*(Au - f)$, где

$$(Au)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T y(t, x; u)\, dt \ : \ L^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi).$$

Опишите правило действия сопряженного к A оператора A^* с помощью сопряженной краевой задачи. Является ли оператор A ограниченным? Является ли функционал $J(u)$ сильно выпуклым?

3.(5) Примените классический метода Ньютона с постоянным шагом $\alpha_k = 1$ к задаче минимизации без ограничений в гильбертовом пространстве H, $\dim H = \infty$:

$$J(u) = \|u\|^4 + 8\, \|u - 4f\|^2 \to \inf, \quad u \in H,$$

где $f \in H$, $\|f\| = 1$. В качестве начального приближения возьмите $u_0 = -f$. Найдите следующие приближения. Остановите процесс при первом попадании во множество оптимальных решений.

4.(5) В пространстве $L^2(0, l)$ поставлена следующая задача минимизации с ограничением:

$$J(u) = \int_0^l |u(x)|^2\, dx + y'(0) \to \inf, \qquad y(l) = -\frac{l^2}{12}\,.$$

Здесь $y(x) = y(x; u)$ – решения краевой задачи

$$y''(x) = u(x), \quad 0 < x < l, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0,$$

соответствующие функциям $u = u(x) \in L^2(0, l)$. С помощью правила множителей Лагранжа найдите нижнюю грань функционала J_*, множество оптимальных решений U_* и значение множителя Лагранжа λ^*, отвечающего за ограничение. Представьте объяснения по поводу регулярности задачи и возможности выбора $\lambda_0^* = 1$.