Д.В. Денисов

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Методическая разработка

МОСКВА
2006

Оглавление

Цели и задачи курса

Цель модифицированного курса "Актуарная математика на основе современных методик обучения актуарной и финансовой математике познакомить студентов с одновременно как с базовыми, так и с практическими методами исследования страховых и пенсионных схем. При модификации курса "Актуарная математика"все изучаемые схемы рассматриваются не только с точки зрения соотношения нетто-премий и резервов, но и в первую очередь с точки зрения исследования свойств случайных величин текущих выплат в различных видах современного страхования. При модификации курса указанные методы иллюстрируются задачами. Особое внимание в модифицированном курсе уделяется видам страхования с переменными выплатами. Здесь единовременные и регулярные премии выражаются через премии в стандартных видах страхования с неизменными выплатами. В современной практике страхования расчеты для исчисления премий и резервов производятся при различных предположениях относительно процентной ставки. При модификации курса на это обращается особое внимание не только в теории, но и в приводимых примерах. Для случайных величин убытков в различных видах страхования исследуется не только величина нетто-премии, но и показывается, при каких соотношениях разных типов выплат дисперсия теккущей стоимости выплат будет минимальной. Таким образом, содержание данного модифицированного курса по актуарной математике дает возможность для ограниченного числа полисов вычислить необходимую безопасную нагрузку для обеспечения финансовой устойчивости. Как правило, в курсах по актуарной математике не затрагивается вопрос о влиянии на стоимость аннуитета положение в промежуточные возраста по страховым периодам. Этот вопрос важен, например, при назначении выкупных сумм при расторжении договоров или при изменни их условий. В данном модифицированном курсе данный вопрос подробно рассматривается, приводится методика пересчета стоимости аннуитета в промежуточных возрастах.

Актуарная математика позволяет получить необходимые количественные данные для страхования. Как правило, и данный курс в том числе, актуарная математика имеет предметом своей деятельности в первую очередь виды страхования, связанные со страхованием жизни. Само страхование жизни как система создания специальных фондов для компенсации ущерба от случайных потерь, связанных со смертью людей, в первую очередь работников или основных кормильцев семьи, возникло достаточно давно. Например, в древние времена правитель любого государства создавал запасы зерна на случай неурожая в будущем. Известны письменные подтверждения относительно расчетов по объемам необходимых запасов не только основных, но и витаминосодержащих продуктов для поддержания здоровья строителей пирамид в Египте. Страхование как система сформировалась в эпоху географических открытий и развития морской торговли в конце 18 века. В современном мире страховые компании, пенсионные фонды аккумулируют значительную часть мировых активов и по доле активов, принадлежащим этим организациям, можно судить о цивилизованности и уровне развития государства. В развитом государстве личные пенсионные вклады очень значительны вследствие того, что с одной стороны сами граждане рассчитывают прожить достаточно долго и и этими вкладами воспользоваться, с другой стороны, существование устойчивых активов позволяет гражданам вложить в них свои личные сбережения. Человек как личность представляет ценность не только для себя, но и как квалифицированный сотрудник для работодателя, и часто утрата данного сотрудника или их группы приводит к серьезным, в том числе и материальным, последствиям. Роль отдельного квалифицированного сотрудника в современном мире будет только возрастать и поэтому роль личного и пенсионного страхования будет неуклонно повышаться. Актуарная математика исследует последствия чисто случайных событий, связанных в первую очередь с жизнью людей. Страховщик платит определенную плату лицу или организации за покрытие случайного ущерба в будущем. Здесь возникает понятия страхователя, который подвержен случайным ущербам и платит за компенсацию этих ущербов в случае их наступления, и страховщика, который возмещает случайные ущербы, заранее получая за эту услугу деньги. Основной вопрос данного курса по актуарной математике - определения объма страховой премии или регулярного взноса за страховой полис.

Глава 1

Характеристики дожития.

1.1 Функции выживания. Таблицы смертности.

Для каждого человека продолжительность его жизни будем считать непрерывной случайной величиной и обозначать как X. Человек может жить в различных условиях как природных, так и социальных, заниматься тем или иным видом деятельности, иметь предрасположенности к определенным заболеваниям - все эти и другие факторы влияют на его продолжительность жизни. Тем не менее будем считать, что мы знаем функцию распределения случайной величины X, обозначая ее через $F(x)$. На практике это означает, что при работе с достаточно большой и достаточно однородной по условиям жизни и роду занятий группой населения известна статистика смертности внутри данной группы. На основании этой статистики и строится функция F. Далее, индивидуума, находящегося в возрасте x, будем именовать просто как жизнь x и обозначать (x). Разность $1-F(x)$ будем обозначать как $s(x)$ и называть функцией выживания, имея в виду указанную группу населения. Функция выживания $s(x)$ непрерывно убывает, $s(0)=1, s(+\infty)=0$. Из определения следует, что $P(a < X < b) = s(a) - s(b)$. Далее, вероятность того, что жизнь (x) умрет на интервале $(x, x+t)$ равна

$$P(x < X < x+t | X > x) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - {}_tp_x,$$

где величина ${}_tp_x$ есть вероятность дожития до возраста $x+t$ индивидуума X при условии дожития до возраста x. Разность $1 - {}_tp_x$ будем обозначать через ${}_tq_x$, где величина ${}_tq_x$ равна вероятности наступления смерти у жизни (x) до возраста $x+t$. Введем в рассмотрение случайную величину $T(x)-$ случайную величину будущего времени (x). Тогда

$$P(T(x) < t) = {}_tq_x,$$

это означает, что величина ${}_tq_x$ является функцией распределения случайной величины $T(x)$. При значении $x=0$ величина ${}_tp_x$ равна, очевидно, значению $s(t)$. Кроме того, при значении $t=1$ величины ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ будем обозначать как p_x, q_x соответственно. Вероятность того, что жизнь (x) умрет на возрастном интервале $(x+t, x+t+u)$, равна

$$ {}_{t|u}q_x = P(t < T(x) < t+u) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x $$

Следовательно,

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)}\frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x+t)} = {}_tp_x\ {}_uq_{x+t}. $$

При значении $u=1$ величина ${}_{t|1}q_x$ обозначается просто как ${}_{t|}q_x$. До сих пор мы рассматривали непрерывные случайные величины, связанные с продолжительностью жизни индивидуума, но статистические таблицы имеют дело с дискретными величинами, поэтому введем понятие округленной (по годам) случайной величины будущего времени жизни: $[T(x)] = K(x)$, при этом

$$ P(K(x)=k) = P(k < T(x) < k+1) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_{k|}q_x = {}_kp_xq_{x+k}, $$

откуда, в частности, следует, что

$$ \sum_{k=0}^{n} {}_{k|}q_x = {}_{n+1}q_x. $$

Рассмотрим понятие интенсивности смертности в возрасте x. При малых значениях t величина ${}_tq_x$ равна

$$ \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = -\frac{s^{'}(x)t}{s(x)}, $$

в последнем выражении множитель, не зависящий от t, а именно -$s^{'}(x)/s(x)$, называется интенсивностью смертности в возрасте x и обозначается как μ_x. Поскольку $-\mu_x = \frac{d}{dx}(\log s(x))$, то справедливы равенства

$$ \log({}_np_x) = \log(\frac{s(x+n)}{s(x)}) = -\int_x^{x+n} \mu_t dt, $$

откуда следует, что

$$ {}_np_x = exp(-\int_0^n \mu_{x+t}dt). $$

Кроме того, при $x=0$ полученное соотношение дает:

$$ s(n) = exp(-\int_0^n \mu_t dt), $$

тогда плотность распределения $f(x)$ случайной величины X равна

$$ -s^{'}(x) = exp(-\int_0^x \mu_t dt.)\mu_x = s(x)\mu_x. $$

Теперь получим выражение для плотности распределения случайной величины $T(x)$:

$$g(t) = \frac{d}{dt}(\ _tq_x) = \frac{d}{dt}(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}) = -\frac{s^{'}(x+t)}{s(x)} = -\frac{s^{'}(x+t)}{s(x+t)}\frac{s(x+t)}{s(x)} = \ _tp_x\mu_{x+t},$$

из которого вытекает, в частности, что

$$\int_0^\infty \ _tp_x\mu_{x+t}dt = 1.$$

Поскольку $\ _np_x \to 0 \quad (n \to \infty)$, то

$$-\log(\ _np_x) \to \infty, \quad \int_x^{x+n} \mu_t dt \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Пример. Пусть $0 < t < 1$, событие $A = (T(x) \leq t)$, а событие $B = (t < T(x) \leq 1)$. Из формулы $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ следует, что

$$q_x = \ _tq_x + \ _tp_x \ _{1-t}q_{x+t}.$$

Полученное равенство означает, что для (x) вероятность умереть в течение ближайшего года складывается из вероятности умереть в течение первой $t-$й части года и вероятности умереть в течение оставшейся $(1-t)-$й части года при условии выживания в течение первой $t-$й части.

Рассмотрим схематический процесс построения таблиц величин, введенных выше. Предположим, что в поле нашего наблюдения имеется имеется некоторое число l_0 (например, 100000) одновременно родившихся индивидуумов, из них $\overline{L}(x)$ дожило до возраста x. Отметим еще раз, что $\overline{L}(x)$ является случайной величиной. Если для каждого индивидуума с номером $j, j = 1, 2, \ldots, l_0$ обозначить через $I_j(x)$ индикатор дожития до возраста x,, то есть величину, равную 1, если указанный индивидуум жив к возрасту x, и равную 0 в противном случае, то, считая всех индивидуумов наделенными одинаковыми вероятностными характеристиками смертности, из равенства $EI_j(x) = s(x)$ получаем:

$$E\overline{L}(x) = l_0 s(x),$$

Всюду в дальнейшем среднее число доживших до возраста x, то есть значение $E\overline{L}(x)$, будем обозначать через l_x. Наряду с величиной $\overline{L}(x)$ рассмотрим величину $\ _n\overline{D}_x-$ случайное число умерших на возрастном интервале $(x, x+n)$ из начальной группы l_0 человек. Тогда, обозначив через $\ _nd_x$ среднее число умерших на данном интервале, получим:

$$\ _nd_x = E(\ _n\overline{D}_x) = l_0(s(x) - s(x+n)).$$

Выразим некоторые соотношения через величины l_x.

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad d_x = l_x - l_{x+1}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, $$

$$ {}_{n|m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}, \qquad {}_{n|}q_x = \frac{d_x}{l_x}, $$

$$ \mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{l'_x}{l_x}, \Longleftrightarrow -dl_x = l_x\mu_x dx, $$

$$ l_x = l_0 exp(-\int_0^x \mu_t dt), \quad l_{x+n} = l_x exp(-\int_x^{x+n} \mu_t dt), $$

$$ l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_t\mu_t dt. $$

Здесь мы рассматриваем случай, когда $x-$ целочисленный возраст. Кроме того, наличие достаточно большой группы наблюдения практически трудно осуществимо. Поэтому для построения таблиц смертности приходится в каждом конкретном случае делать свои предположения [2]. Кроме того, имеющаяся статистика, как правило, недостаточно полна. Здесь мы не останавливаемся на этих вопросах, полагая таблицу смертности изначально заданной.

Замечание. В применении к человеку оперировать бесконечными возрастными категориями часто бывает неудобно, поэтому определяется предельный возраст w такой, что $s(w) = 0$.

Рассмотрим пример. Пользуясь таблицей величин l_x на стр. 15, требуется выразить:

а. вероятность того, что (30) доживет до 45.

б. вероятность того, что (30) умрет к 40.

в. вероятность того, что (30) умрет на пятом десятке.

Решение.

а. ${}_{15}p_{30} = l_{45}/l_{30} = \frac{89231}{93757} = 0.9517.$

б. ${}_{10}q_{30} = 1 - l_{40}/l_{30} = 1 - \frac{91179}{93757} = 0.0275.$

в. ${}_{10|10}q_{30} = {}_{10}p_{30}\ {}_{10}q_{40} = l_{40}/l_{30}(1 - l_{50}/l_{40}) = 0.04617.$

На рис. 1 представлены графики зависимостей от возраста x соответственно величин $\mu_x, l_x, l_x\mu_x$. Из вида графиков и соотношения

$$ \frac{d}{dx}(l_x\mu_x) = \frac{d}{dx}(-\frac{dl_x}{dx}) = -\frac{d^2}{dx^2}l_x $$

следует, что локальные экстремумы функции $l_x\mu_x$ соответствуют точкам перегиба функции l_x.

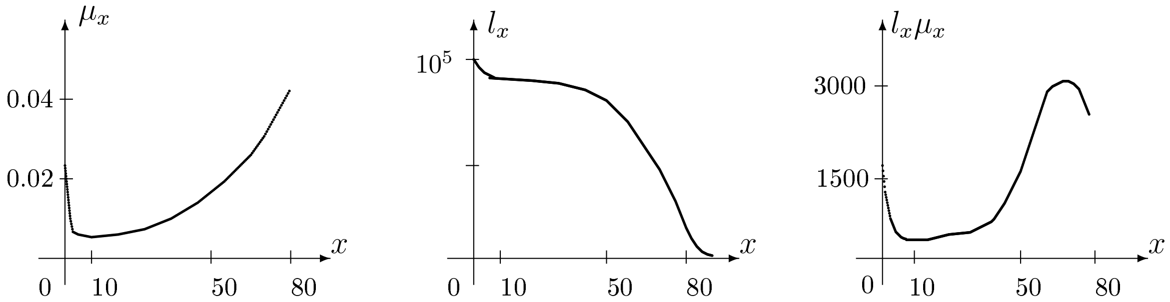

Рис. 1

Получим выражения для моментов случайных величин $T(x), K(x)$. Для этого докажем две леммы, касающиеся непрерывного и дискретного случаев.

Лемма 1 *Пусть $X-$ неотрицательная непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(x)$, а $z(t)-$ монотонная дифференцируемая функция, принимающая неотрицательные значения. Тогда при условии существования $Ez(X)$ справедливо равенство*

$$Ez(X) = z(0) + \int_0^\infty (1 - F(x)dz(x).$$

Доказательство. Для всякого $A > 0$ имеем

$$\int_0^A z(x)dF(x) = -\int_0^A z(x)d(1-F(x)) = z(0) - z(A)(1-F(A)) + \int_0^A (1-F(x)dz(x).$$

Доказательство леммы будет завершено, если будет показано, что

$$\lim_{A\to\infty} z(A)(1-F(A)) = 0.$$

Последнее равенство очевидно, если функция $z(x)$ невозрастающая. В случае неубывания функции $z(x)$ справедливы соотношения

$$0 \leq z(A)(1-F(A)) = z(A)\int_A^\infty dF(x) \leq \int_A^\infty z(x)dF(x) \to 0 \quad \text{при } A\to\infty,$$

поскольку по предположению интеграл $\int_0^\infty z(x)dF(x)$ сходится. Отсюда следует утверждение леммы. Из данной леммы легко получить ожидаемое время будущей жизни: полагая $z(x) = x$, имеем равенство

$$E(T(x)) = \int_0^\infty t \ \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty \ {}_tp_xdt.$$

Всюду далее величина $ET(x)$ будет обозначаться как $\overset{o}{e}_x$. Аналогично, полагая $z(x) = x^2$, получим выражение для второго момента случайной величины $T(x)$:

$$E(T(x))^2 = 2\int_0^\infty t \ \ {}_tp_xdt.$$

Отсюда выражение для дисперсии случайной величины $T(x)$будет

$$Var(T(x)) = 2\int_0^\infty t \ \ {}_tp_x dt - (\overset{o}{e}_x)^2.$$

Рассмотрим теперь аналогичные преобразования для округленной случайной величины $K(x)$.

Рассмотрим любую дискретную случайную величину X, принимающую значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с соответствующими вероятностями $g(k)$. Для нее функция распределения $G(k)$ определяется из равенств $g(k) = G(k) - G(k-1) = \Delta G(k-1)$, при этом $G(-1) = G(0) = 0$. Кроме того, справедлива

Лемма 2 *Пусть $z(k)$– произвольная монотонная неотрицательная функция такая, что существует $Ez(X)$. Тогда*

$$E(z(X)) = \sum_{k=0}^\infty z(k)g(k) = z(0) + \sum_{k=0}^\infty (1 - G(k))\Delta z(k).$$

Доказательство. Прежде всего обозначим разность $1 - G(k)$ через $s(k)$. Тогда сумма

$$\sum_{j=0}^k z(j)g(j) = \sum_{j=0}^k z(j)(s(j-1) - s(j)) =$$

$$z(0)s(-1) - z(0)s(0) + z(1)s(0) - z(1)s(1) + \ldots z(k)s(k-1) - z(k)s(k-1) =$$

$$z(0) - z(k)s(k-1) + \sum_{j=0}^{k-1} s(j)\Delta z(j)$$

Справедливость леммы теперь следует из условия

$$\lim_{k\to\infty} z(k)s(k-1) = 0,$$

которое очевидно при невозрастающей функции $z(k)$ и следует из $s(j) \to 0$ при $j \to \infty$. Для неубывающей функции $z(k)$ не убывает, тогда из соотношений

$$0 \le z(k)s(k-1) = z(k)\sum_{j=k}^\infty g(j) \le \sum_{j=k}^\infty z(j)g(j),$$

где

$$\sum_{j=k}^\infty z(j)g(j) \to 0, \quad (n \to \infty),$$

вытекает утверждение леммы.

Для случайной величины $X = K(x)$ разность $1 - G(k) = {}_{k+1}p_x$, поэтому

$$Ez(K(x)) = z(0) + \sum_{k=0}^\infty \Delta z(k) \ {}_{k+1}p_x.$$

Полагая $z(k) = k$, получаем:

$$Ez(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x.$$

Если же в качестве $z(k)$ выбрать k^2, то получим простое выражение для второго момента случайной величины $K(x)$:

$$E(K(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ {}_{k+1}p_x.$$

Всюду далее обозначая $EK(x)$ через e_x, несложно получить, что

$$Var(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ {}_{k+1}p_x - e_x.$$

Рассмотрим еще 4 функции - характеристики смертности. Обозначим через L_x общее среднее количество лет, прожитых на интервале $(x, x+1)$ теми, кто изначально был членом когорты, состоящей из l_0 человек. Тогда

$$L_x = l_{x+1} + \int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t}dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$L_x = l_{x+1} - \int_0^1 t dl_{x+t} = l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t}dt - tl_{x+t}|_0^1 = \int_0^1 l_{x+t}dt.$$

Введем с помощью L_x так называемый центральный коэффициент смертности в возрасте x, обозначаемый как m_x :

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}.$$

Пусть теперь T_x означает среднее число лет, прожитых после возраста x членами указанной группы. Тогда

$$T_x = \int_0^{\infty} t l_{x+t}\mu_{x+t}dt = -\int_0^{\infty} t dl_{x+t} = \int_0^{\infty} l_{x+t}dt.$$

Из последнего выражения для T_x следует, что

$$\frac{T_x}{l_x} = \int_0^{\infty}\ {}_t p_x dt = \overset{o}{e}_x,$$

поэтому можно величину T_x определить как произведение $\overset{o}{e}_x\ l_x$. Справедлива

Теорема 1 *Для величины T_x справедливо равенство*

$$T_{x+t} = T_x \cdot exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\overset{o}{e}_{x+s}}\right)$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{d}{dx}T_x = \int_0^\infty \frac{d}{dx}l_{x+t}dt = -\int_0^\infty l_{x+t}\mu_{x+t}dt = -l_x\int_0^\infty \ {}_tp_xxt\mu_{x+t}dt = -l_x,$$

а $T_x = l_x \overset{o}{e}_x$, то

$$\frac{d}{dx}T_x/T_x = -1/\overset{o}{e}_x,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}(\ln T_x) = -\frac{1}{\overset{o}{e}_x}.$$

Последнее означает, что

$$\ln T_{x+t} - \ln T_x = -\int_0^t \frac{1}{\overset{o}{e}_{x+s}}ds,$$

отсюда вытекает утверждение теоремы.

Функция T_x часто используется для вычисления количества работающих за какой-то отрезок времени. Рассмотрим следующий пример. Каждый год на работу в промышленную компанию поступает j человек в возрасте 22 лет, которые продолжают работать до 55 лет. Никаких причин ухода кроме смерти нет. Требуется выяснить, сколько человек работает в компании. Для ответа на этот вопрос рассмотрим возрастной период от x до $x+1$ года. Количество сотрудников, поступивших на работу k лет назад, на этом году проработали количество времени, равное

$$j({}_{k+1}p_{x-k} + \int_k^{k+1}(t-k)d({}_tq_{x-k})) = j({}_{k+1}p_{x-k} - \int_k^{k+1}(t-k)d({}_tp_{x-k})) =$$

$$= \frac{j}{l_{x-k}}(l_{x+1} - \int_k^{k+1}(t-k)d(l_{x-k+t})) =$$

$$= \frac{j}{l_{x-k}}\Big(l_{x+1} - (t-k)l_{x-k+t}|_k^{k+1} + \int_k^{k+1} l_{x-k+t}dt\Big) = \frac{j}{l_{x-k}}\int_k^{k+1} l_{x-k+t}dt.$$

Но величина $x-k=22$, сотрудники работают в течение 33 лет, поэтому суммарное количество лет, проработанных всеми сотрудниками, на интервале $(x, x+1)$, равно

$$\frac{j}{l_{22}}\sum_{k=0}^{32}\int_k^{k+1} l_{22+t}dt = \frac{j}{l_{22}}\int_0^{55} l_{22+t}dt = \frac{j}{l_{22}}(T_{22} - T_{55}) = j(\overset{o}{e}_{22} - {}_{33}p_{22}\ \overset{o}{e}_{55}).$$

Рассмотрим еще одну характеристику дожития, именно средний срок жизни на возрастном интервале $(x, x+1)$ у тех, кто умер на этом интервале, равен

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt} = \frac{\int_0^1 t \;\, {}_tp_x\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 \;\, {}_tp_x\mu_{x+t}dt} = E(T(x)|T(x) < 1).$$

При этом, если на интервале $(0, 1)$ функция l_{x+t} линейна по t, то в таком случае $l_{x+t}\mu_{x+t} = d_x$ и тогда $a(x) = 0.5$. Кроме того, величина

$$a(x) = \frac{L_x - l_x}{l_x - l_{x+1}},$$

что эквивалентно представлению

$$L_x = a(x)l_x + (1 - a(x))l_{x+1} \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

Как правило, в существующих статистических таблицах параметры t, x, u функций дожития $l_x, \;\, {}_tp_x, \;\, {}_tq_x, L_x$ и т.д. являются целочисленными. Это означает, что фактически имеются таблицы определяющие распределение случайной величины $K(x)$. Для вычисления по этим данным значений соответствующих функций для нецелых возрастов используются три основных предположения:

А. Равномерное распределение смертей на каждом интервале $(x, x+1)$, где $x-$ целое. Здесь полагается $s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+t), \quad t \in (0, 1)$.

В. Постоянная интенсивность смертности на каждом интервале $(x, x+1)$, где $x-$ целое. В этом случае $s(x+t) = s(x)exp(-\mu t), \quad t \in (0, 1), \quad \mu = -\log p_x$.

С. Предположение Балдуччи, где справедливо соотношение

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}.$$

Для каждого из этих предположений легко вывести выражения для различных функций. Например, пусть для равномерного распределения смертей требуется вывести выражение для $\;\, {}_tp_x$. Используя данное предположение, получим

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{(1-t)s(x) + ts(x+1)}{s(x)} = (1-t) + tp_x = 1 - tq_x.$$

Для этого же предположения получим выражение для $\mu_{x+t}, \quad t \in (0, 1)$. По определению для таких t величина

$$\mu_{x+t} = -\frac{s^{'}(x+t)}{s(x+t)} = -\frac{s(x+1) - s(x)}{s(x) + t(s(x+1) - s(x))} = \frac{q_x}{1 - tq_x}.$$

Для произвольных $t, u \in (0, 1), \quad t+u < 1$ предположение постоянной интенсивности смертности дает выражение для $\;\, {}_uq_{x+t}$:

$${}_uq_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} = \frac{s(x)e^{-\mu t} - s(x)e^{-\mu(t+u)}}{s(x)e^{-\mu t}} = 1 - e^{-\mu u}.$$

Аналогично, выражая величину $s(x+t), \quad t \in (0,1)$ для каждого из трех предположений, можно получить выражения для любой функции. Приведем некоторые выражения для этих функций при предположениях A,B,C в таблице:

Функция	A	B	C
${}_tq_x$	tq_x	$1-e^{-\mu t}$	$tq_x/(1-(1-t)q_x)$
${}_tp_x$	$1-tq_x$	$e^{-\mu t}$	$p_x/(1-(1-t)q_x)$
${}_uq_{x+t}$	$uq_x/(1-tq_x)$	$1-e^{-\mu u}$	$uq_x/(1-(1-u-t)q_x)$
μ_{x+t}	$q_x/(1-tq_x)$	μ	$q_x/(1-(1-t)q_x)$
${}_tp_x\mu_{x+t}$	q_x	$\mu e^{-\mu t}$	$p_xq_x/(1-(1-t)q_x)^2$

Из приведенных предположений для дробных возрастов наиболее часто применимым является первое. При данном предположении график функции l_x представляет собой кусочно-линейную линию. Рассмотрим еще одно полезное свойство равномерного распределения смертей. Представим случайную величину будущего времени жизни в виде $T(x) = K(x)+S(x), \quad S(x)-$ дробная часть функции $T(x)$. Тогда для всякого целого неотрицательного k и любого $s \in (0,1)$

$$P(k < T(x) < k+s) = P(K(x) = k, S(x) \leq s) = \ {}_{k|s}q_x = \ {}_kp_x \ {}_sq_{x+k}.$$

При этом для равномерного распределения смертей на интервале $(k, k+1)$ величина ${}_sq_{x+k} = sq_{x+k}$, в то же время $P(K(x) = k) = \ {}_kp_xq_{x+k}$, поэтому условная вероятность

$$P(S(x) \leq s | K(x) = k) = \frac{P(K(x) = k, S(x) \leq s)}{P(K(x) = k)} = s$$

не зависит от значений, которые принимает случайная величина $K(x)$. Это означает независимость случайных величин $K(x)$и$S(x)$. Кроме того, из полученного равенства следует равномерность распределения на интервале $(0,1)$ случайной величины $S(x)$. Для сравнения заметим, что предположение постоянной интенсивности смертности на интервале $(k, k+1)$ влечет представление

$${}_sq_{x+k} = 1 - e^{-\mu s} = 1 - p_{x+k}^s,$$

поэтому случайные величины $K(x)$и$S(x)$ будут независимыми в том и только в том случае, если отношение $(1-p_{x+k}^s)/(1-p_{x+k})$ не зависит от k. Это будет справедливо, если,например, $p_{x+k} = p$, в таком случае вероятность

$$P(S(x) \leq s) = (1-p^s)/(1-p).$$

Для равномерного распределения смертей среднее и дисперсия случайных величин $T(x)$и$K(x)$связаны равенствами

$$\overset{o}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}, \quad Var(T(x)) = Var(K(x)) + \frac{1}{12},$$

которые следуют из равномерности распределения случайной величины $S(x)$ на интервале $(0,1)$ и независимости $K(x)$и$S(x)$.

1.2 Аналитические законы смертности.

Для удобного представления законов смертности удобно оперировать не громоздкими таблицами различных характеристик, а простыми формулами, из которых эти таблицы при необходимости можно получить. При этом, конечно, параметры формул должны быть такими, чтобы полученные из них на основе этих формул таблицы соответствовали имеющейся статистике смертности. Кроме удобства использования, полученные на основе статистических данных формулы часто помогают сделать качественные выводы о смертности в интересующем круге людей, что бывает полезным в деле страхования жизни. Приведем в таблице несколько аналитических законов смертности, которые определяются через величину интенсивности смертности. Эти законы называются по фамилиям своих авторов.

Автор	μ_x	$s(x)$	Ограничения
Де Муавр(1729)	$(w-x)^{-1}$	$1-x/w$	$0 \leq x < w$
Гомперц(1825)	Bc^x	$exp(-\frac{B}{\log c}(c^x-1))$	$B > 0, c > 1, x \geq 0$
Мэйкхам(1860)	$A+Bc^x$	$exp(-Ax-\frac{B}{\log c}(c^x-1))$	$B > 0, A > -B, c > 1, x \geq 0$
Вейбулл(1939)	kx^n	$exp(-\frac{k}{n+1}x^{n+1})$	$k > 0, n > 0, x \geq 0$

Из приведенной таблицы легко заметить, что закон Мэйкхама при $A = 0$ превращается в закон Гомперца. Кроме того, в законе Мэйкхама интенсивность смертности разбита на две составляющие. Первая, соответсвующая величине А, не зависит от вораста x, а вторая обусловлена возрастом. Необходимо заметить, что параметры A, B, c невозможно подобрать подходящими для всех возрастов сразу. В частности, для первого года жизни законы смертности другие, чем для других возрастов. Это объясняется особенностями природы младенческой смертности. Для иллюстративной таблицы, приведенной ниже, параметры A, B, c взяты равными $0.001186, 0.0000714, 10^{0.04}$ соответственно.

Таблица смертности для возрастов 30 - 50 лет

x	l_x	μ_x	L_x	q_x	m_x	$a(x)$	$\overset{o}{e}_x$	$l_x\mu_x$
30	93757	0.002157	93650	0.002199	0.002202	0.4808	42.37	202
31	93551	0.002252	93440	0.002299	0.002302	0.4810	41.46	210.75
32	93336	0.002357	93219	0.002408	0.002411	0.4812	40.56	220.05
33	93111	0.002472	92989	0.002528	0.002531	0.4813	39.65	230.22
34	92876	0.002598	92748	0.002659	0.002663	0.4815	38.75	241.34
35	92629	0.002736	92494	0.002803	0.002808	0.4816	37.86	253.49
36	92369	0.002888	92227	0.002961	0.002966	0.4818	36.96	266.77
37	92096	0.003054	91946	0.003134	0.003139	0.4819	36.07	281.27
38	91807	0.003236	91649	0.003324	0.003333	0.4821	35.18	297.11
39	91502	0.003435	91335	0.003532	0.003538	0.4822	34.30	314.39
40	91179	0.003654	91001	0.003760	0.003767	0.4824	33.42	333.25
41	90836	0.003894	90647	0.004010	0.004018	0.4825	32.54	353.79
42	90472	0.004158	90271	0.004284	0.004293	0.4826	31.66	376.19
43	90084	0.004446	89870	0.004584	0.004595	0.4827	30.80	400.58
44	89671	0.004763	89443	0.004913	0.004926	0.4828	29.94	427.12
45	89231	0.005110	88987	0.005274	0.005288	0.4829	29.08	455.98
46	88760	0.005490	88500	0.005669	0.005686	0.4830	28.23	487.34
47	88257	0.005907	87978	0.006103	0.006122	0.4831	27.39	521.40
48	87718	0.006367	87420	0.006578	0.006600	0.4831	26.56	558.34
49	87141	0.006866	86821	0.007098	0.007125	0.4832	25.73	598.37
50	86523	0.007416	86180	0.007669	0.007699	0.4832	24.91	641.71

1.3 Отборочные и предельные таблицы.

Те таблицы смертности, о которых упоминалось выше, называются общими, или агрегированными, поскольку они имеют дело с общей группой населения, независимо от рода занятий, состояния здоровья и т.д. В практической работе часто страховщик имеет дело не с общей группой населения, а со своими клиентами. Относительно этих клиентов происходит отбор, например, с целью исключить лиц, страдающих какими-либо серьезными заболеваниями. При этом часто отбор носит неявный характер. Например, при коллективном страховании жизни можно страховать на небольшой период времени работников, занятых физическим трудом, заранее при этом зная, что на данной работе могут находиться только достаточно здоровые люди. В то же время при продаже полисов по страхованию жизни и здоровья для выезжающих за границу туристов какой-либо отбор провести невозможно, поэтому необходимо иметь дело с агрегированными таблицами. Таблицы смертности, полученные для лиц, прошедших отбор по состоянию здоровья, будем называть отборочными таблицами. Рассмотрим основные понятия и обозначения, связанные с отборочными таблицами. Будем через $[x]+t$ обозначать человека в возрасте $x+t$, который прошел отбор по состоянию здоровья в возрасте x. Для каждого такого человека вероятность умереть в течение ближайшего года равна $q_{[x]+t}$. Таким образом, здесь для использования этого параметра нужно хранить не вектор с координатами $q_x, x = 0,1,2,\ldots$, а матрицу, соответствующую значениям x, t. Так же величинам p_x соответствуют вероятности $p_{[x]+t}$. Более сложный пример-величина $_{n|m}q_{[x]+t}$, соответствующие вероятности умереть на интервале $(x+t+n, x+t+n+m)$ для человека, возраста $x+t$ и прошедшего отбор в возрасте x. Величины $_tq_{[x]+0}$ обозначается просто как $_tq_{[x]}$.

Несмотря на достаточно очевидный факт, что характеристики функции выживания у лиц, прошедших отбор, лучше, нежели у всей группы населения, тем не менее с течением времени эффект отбора исчезает. Поэтому не менее очевидно, что, например, вероятность умереть в течение ближайшего года для человека возраста 55 лет практически такая же как для человека того же возраста, прошедшего самый строгий отбор 30 лет назад. Поэтому введем еще одно понятие. Величина r называется периодом отбора, если для всякого $j>0$ выполнено равенство

$$q_{[x-j]+r+j} \cong q_{[x]+r}.$$

Знак приближенного равенства означает, что эффектом отбора в имеющейся таблице можно пренебречь. В таком случае величина $q_{[x]+r}$считается равной q_{x+r}. Если составить таблицу величин $q_{[x]+t}$, откладывая x по горизонтали и t по вертикали, то строки получившейся таблицы, начиная с $r+1-$ й, принято называть предельной таблицей. В приведенном ниже примере величина r взята равной 2.

$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$
0	$q_{[x-1]}$	$q_{[x]}$	$q_{[x+1]}$
1	$q_{[x-1]+1}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x+1]+1}$
2	q_x	q_{x+1}	q_{x+2}

В общем случае, как уже отмечалось, справедливы неравенства

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_x.$$

Будем обозначать среднее число доживших до возраста x и прошедших в этом возрасте отбор как $l_{[x]}$. Тогда по определению имеют место равенства

$$l_{[x]+r-k} = l_{[x]+r-k-1}p_{[x]+r-k-1}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1,$$

$$_{n|m}q_{[x]+r-k} = \frac{l_{[x]+r-k+n} - l_{[x]+r-k+n+m}}{l_{[x]+r-k}}, \ _tp_{[x]+r-k} = \frac{l_{[x]+r-k+1}}{l_{[x]+r-k}},$$

$$l_{[x]+r-k} = d_{[x]+r-k} + d_{[x]+r-k+1} + d_{[x]+r-k+1} + \ldots.$$

Например, при $r=2$ величина $_2p_{[x]}l_{[x]} = l_{[x]+2} = l_{x+2}$.

Глава 2

Единовременные нетто-премии

Рассмотренные ранее характеристики дожития позволят теперь для различных видов страхования жизни назначать величины страховых премий. Для этого предположим, что если в соответствии со страховым полисом в момент времени t выгодоприобретатель получает страховую сумму величины b_t, где $t-$ длина временного интервала после момента покупки полиса, то стоимость этой величины b_t в нулевой момент, то есть *текущая (современная, настоящая) стоимость* равна $z_t = b_t v_t,\ v_t-$ дисконтирующий множитель. Например, если процентная ставка равна i, а полис предусматривает выплату по смерти величины b, при этом выплаты производятся в момент смерти, то величина $z_t = bv^t$, где $v = 1/(1+i)$. Теперь, если полис обязывает страховщика выплатить страховое возмещение величины в момент смерти страхователя, то текущая величина этого возмещения является случайной величиной $Z = b_T v_T$, где $T = T(x)$ как и ранее - случайное время остаточной жизни. Зависимость b_T от T определяется конкретным договором. Если полис предполагает размер выплат $b_t,\ t \in A$ для некоторого множества $A \in (0, \infty)$, то их *актуарная настоящая величина* равна среднему значению их текущей величины, то есть

$$EZ = \int_A b_t v_t g(t) dt = \int_A b_t v_t \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Величина EZ является величиной текущих обязательств страховщика по отношению к владельцу данного полиса Если страхователь оплачивает полис полностью в момент заключения договора, то будем говорить о *единовременной, или разовой, премии*. Эта премия включает в себя не только указанные выплаты в будущем, но и расходы по заключению договора, ведению полиса и многие другие расходы, которые мы здесь учитывать не будем и поэтому определим *единовременную нетто-премию* как EZ. В страховании жизни как правило страховое возмещение по случаю смерти выплачивается в течение нескольких дней после наступления страхового случая, поэтому в идеале можно рассматривать выплату страховой суммы в момент смерти. С другой стороны, как будет далее показано, при некоторых предположениях выражение для разовой нетто-премии в случае выплаты в момент смерти легко сводится к случаю выплаты в конце года смерти. Поэтому начнем рассмотрение нетто-премий со случая выплаты страховой суммы в конце года смерти. Здесь текущая стоимость выплат по случаю смерти равна случайной величине $Z = b_K v_{K+1}$. Тогда виды страхования жизни различаются видом зависимости b_K от K. Далее считаем $v_{K+1} = v^{K+1}$.

2.1 Основные виды страхования жизни.

Первый вид страхования жизни - *пожизненное страхование.* Здесь b_K постоянно и поэтому можно считать $b_K = 1$. Текущая стоимость страховой выплаты

$$Z = v^{K+1},$$

соответствующая единовременная нетто-премия для такого вида страхования обозначается как A_x :

$$A_x = EZ = Ev^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x q_{x+k}.$$

Дисперсия случайной величины Z равна $Var(Z) = E(Z^2) - A_x^2$, при этом $k-$й момент случайной величины Z вычисляется достаточно легко: для параметра δ, называемого *силой процента(непрерывной процентной ставкой)* и равного $\ln(1+i)$,

$$E(Z^k) = E(e^{-k\delta(K+1)}),$$

последнее выражение является не чем иным, как разовой нетто-премией при увеличенной в k раз силе процента и обозначаемого в актуарной математике как ${}^kA_x$. Таким образом, $Var(Z) = {}^2A_x - A_x^2$.

Рассмотрим далее виды срочного страхования, где выплаты производятся только в пределах определенного срока. Первый вид - $n-$годичное страхование жизни. Здесь

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ 0, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для данного вида страхования разовая нетто-премия обозначается как $A^1_{x:\overline{n}|}$ и вычисляется как

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x q_{x+k}.$$

При этом очевидно

$$A_x = A^1_{x:\overline{\infty}|}.$$

Аналогично случаю пожизненного страхования,

$$VarZ = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2,$$

где как и ранее, ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}$ есть нетто-премия для $n-$годичного страхования жизни с удвоенной силой процента.

Рассмотрим теперь страхование *чистого дожития* до возраста $x+n$, когда страховая выплата производится, если застрахованный прожил n лет после покупки полиса. Здесь

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ v^n, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases} \tag{2.2}$$

В таком случае единовременная нетто-премия равна

$$A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = EZ = v^n \ {}_n p_x,$$

и дисперсия случайной величины Z равна

$$VarZ = v^{2n} \ {}_n p_x (1 - \ {}_n p_x).$$

Следующий вид страхования - n - *годичное смешанное страхование жизни*, когда страхуется как риск смерти в течение ближайших n лет, так и риск дожития до возраста $x+n$. Если страховые суммы по случаю смерти и по дожитию равны b_1 и b_2 соответствено, то текущая стоимость страховой выплаты равна

$$Z = \begin{cases} b_1 v^{K+1}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ b_2 v^n, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Очевидно, что при этом $Z = b_1 Z_1 + b_2 Z_2$, где Z_1, Z_2 - текущие стоимости страховых выплат со страховым возмещением, равным 1, для риска смерти и риска дожития соответственно; поскольку $EZ_1 = A^1_{x:\overline{n}|}$, $EZ_2 = A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}$, то

$$EZ = b_1 A^1_{x:\overline{n}|} + b_2 A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}.$$

В частном случае, когда $b_1 = b_2 = 1$, нетто-премия для смешанного страхования обозначается как $A_{x:\overline{n}|}$:

$$A_{x:\overline{n}|} = EZ = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_k p_x q_{x+k} + v^n \ {}_n p_x.$$

Из определений (2.1) и (2.2) следует, что $Z_1 Z_2 = 0$, поэтому

$$Cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - EZ_1 EZ_2 = -EZ_1 EZ_2 = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}.$$

Отсюда следует, что для дисперсии случайной величины Z справедливо равенство

$$VarZ = b_1^2 VarZ_1 + b_2^2 VarZ_2 - 2 b_1 b_2 A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}},$$

из которого следует, что один полис по смешанному страхованию жизни должен стоить меньше, чем два отдельных полиса по риску смерти и по дожитию.

Рассмотрим теперь *отсроченное на m лет пожизненное страхование.* Здесь современная стоимость страховой выплаты равна

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ v^{K+1}, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия здесь обозначается как ${}_{m|}A_x$ и равна

$${}_{m|}A_x = {}_{m}p_x v^m A_{x+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1} A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m}|},$$

и, как и ранее,

$$VarZ = {}^2_{m|}A_x - {}_{m|}A_x^2,$$

${}^2_{m|}A_x-$ соответствующая разовая нетто-премия при удвоенной силе процента.

До сих пор мы определяли разовые нетто-премии для случая, когда выплаты страхового возмещения производились в конце страхового года. Однако на практике в договорах страхования жизни оговаривается условие выплаты страховой суммы в течение нескольких дней после получения документов об имевшем место страховом случае. Это означает, что фактически можно предполагать, что выплаты производятся в момент смерти, то есть в возрасте $x+T(x)$. Текущая стоимость единичной страховой суммы равна

$$Z = v^T.$$

Разовая нетто-премия для различных видов страхования с выплатой в момент смерти имеет обозначение, аналогичное случаю выплаты в конце года смерти, отличие состоит в том, что над символом A ставится черта. Так, разовая нетто-премия для пожизненного страхования с выплатой в момент смерти обознается как $\overline{A}_x$, а разовая нетто-премия для $n-$годичного смешанного страхования обозначается как $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$, при этом

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Выразим величину разовой премии для случая выплаты в момент смерти через соответствующую величину для случая выплат в конце года смерти. Для этого будем предполагать равномерное распределение смертей на каждом из целочисленных интервалов, свойства такого распределения подробно были рассмотрены в разд. 1.1.

Рассмотрим вид пожизненного страхования. Здесь

$$\overline{A}_x = Ev^T = Ev^{K+S} = Ev^{(K+1)-(1-S)}.$$

Поскольку, как показано в разд. 1.1, случайные величины K и S независимы, то отсюда

$$\overline{A}_x = Ev^{(K+1)} E(1+i)^{1-S} = A_x E(1+i)^{1-S}.$$

Кроме того, так как случайная величина $1-S$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то

$$E(1+i)^{1-S} = \int_0^\infty (1+i)^t dt = \frac{i}{\delta},$$

откуда

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Аналогичные выражения справедливы и для видов срочного страхования. Например, для $n-$годичного смешанного страхования

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \ 1}.$$

Пусть теперь выплаты производятся в конце $m-$й части года, например, в течение месяца или квартала, то есть в момент $K + S_m$, где S_m- случайная величина, для которой при предположении равномерного распределения смертей справедливо

$$P(S_m = k/m) = 1/m,\ \ k = 1, 2, \dots m,$$

причем случайные величины K, S_m независимы. В таком случае для пожизненного страхования текущая стоимость единичной страховой суммы равна

$$Z = v^{K+S_m},$$

а разовая нетто-премия обозначается как $A_x^{(m)}$. При этом разность $1 - S_m$ принимает каждое из значений $\{0, 1/m, \dots 1 - 1/m\}$ с вероятностью $1/m$. Из представления $K + S_m = K + 1 - 1 + S_m$ это влечет

$$Ev^{K+S_m} = Ev^{K+1} Ev^{-(1-S_m)} = A_x \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (1+i)^{k/m} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x,$$

где величина

$$i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1) = \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1/m}$$

называется *номинальной годовой процентной ставкой с выплатами m раз в год, эквивалентной i*. Следовательно, при предположении равномерного распределения смертей имеет место равенство

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x \qquad (2.4)$$

Предельное значение величины $i^{(m)}$ при $m \to \infty$ равно δ, поэтому в пределе получаем

$$A_x^{(m)} \to \frac{i}{\delta} A_x = \overline{A}_x \text{ при } m \to \infty.$$

Для $n-$годичного страхования жизни текущая величина единичной страховой суммы при $m-$разовых выплатах равна

$$Z = \begin{cases} v^{K+S_m}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ 0, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия для такого случая обозначается как $A^{1(m)}_{x:\overline{n}|}$ и равна

$$\frac{i}{i^{(m)}} A^1_{x:\overline{n}|}.$$

Аналогично разовая нетто-премия для $n-$годичного смешаннного страхования обозначается как $A^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ и равна

$$\frac{i}{i^{(m)}} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Рассмотрим теперь *возрастающее* страхование. В данном виде страховая сумма равна $K+1$, текущая стоимость страховой выплаты равна

$$Z = (K+1)v^{K+1};$$

единовременная нетто-премия для пожизненного страхования обозначается как $(IA)_x$ и равна

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}, \tag{2.5}$$

а нетто-премия для $n-$годичного страхования жизни

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}.$$

Для *убывающего n-годичного страхования жизни* страховая сумма равна $n-K$. Тогда текущая стоимость страховой суммы

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ 0, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия в таком случае

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}.$$

Пусть теперь страховая сумма возрастает на единицу каждый год, то есть равна $K+1$, но выплата ее происходит в момент смерти. Тогда текущая стоимость страховой суммы равна

$$Z = (K+1)v^T,$$

разовая нетто-премия обозначается символом $(I\overline{A})_x$ для пожизненного страхования, при этом при гипотезе равномерного распределения смертей

$$(I\overline{A})_x = E[(K+1)v^T] = E[(K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S}] = \frac{i}{\delta}(IA)_x.$$

Если теперь страховая сумма возрастает не раз в год, а m раз в год на величину, равную $1/m$, то текущая стоимость страховой суммы

$$Z = (K + S_m)v^T,$$

тогда разовая нетто-премия имеет обозначение $(I^{(m)}\overline{A})_x$ для пожизненного страхования и для равномерного распределения смертей равна

$$E[(K+S_m)v^T] = E[(K+1)v^T - v^T + S_m(1+i)^{1-S}v^{K+1}] = (I\overline{A})_x - \overline{A}_x + A_x E[S_m(1+i)^{1-S}].$$

Поскольку

$$E[S_m(1+i)^{1-S}] = \sum_{k=1}^{m}(1-\frac{k-1}{m})\int_{(k-1)/m}^{k/m}(1+i)^t dt = \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{m}(1-\frac{k-1}{m})[e^{k\delta/m} - e^{(k-1)\delta/m}].$$

Если обозначить $q = e^{\delta/m}$, то $q^m = 1+i$, и последнее выражение примет вид

$$\frac{1+m}{m\delta}(q^m-1) - \frac{1}{m\delta}\sum_{k=1}^{m}k(q^k - q^{k-1}) = \frac{1+m}{m\delta}(q^m-1) - \frac{1}{m\delta}\sum_{k=1}^{m}(kq^k - (k-1)q^{k-1}) +$$

$$+\frac{1}{m\delta}\sum_{k=1}^{m}q^{k-1} = \frac{1+m}{m\delta}(q^m-1) - \frac{1}{\delta}q^m + \frac{1}{m\delta}\frac{q^m-1}{q-1} = \frac{1}{m\delta}q^m - \frac{1+m}{m\delta} + \frac{1}{m\delta}\frac{q^m-1}{q-1} =$$

$$= \frac{q^{m+1} - q^m - (m+1)(q-1) + q^m - 1}{m\delta(q-1)} = q\frac{q^m-1}{m\delta(q-1)} - \frac{1}{\delta} = \frac{i - d^{(m)}}{\delta d^{(m)}}.$$

Здесь величина $d = d^{(1)} = i/(1+i)$ носит название *дисконта,* или *годовой фактической ставки дисконта,* а величина

$$d^{(m)} = m(1 - (1+i)^{-1/m})$$

называется *номинальной ставкой m -кратного дисконта, эквивалентного d.* Величины $d^{(m)}$ и $i^{(m)}$ связаны соотношением

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + i^{(m)}/m},$$

из которого следует, что

$$d^{(m)} \to \delta \text{ при } m \to \infty.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$(I^{(m)}\overline{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta}A_x + \frac{i - d^{(m)}}{\delta d^{(m)}}A_x \tag{2.6}$$

Если рассмотреть непрерывно возрастающую страховую сумму $b_t = t$, то ее текущая стоимость

$$Z = Tv^t,$$

соответствующая единовременная нетто-премия получается переходом к пределу при $m \to \infty$ в уравнении (2.6) :

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta}A_x + \frac{i-\delta}{\delta^2}A_x.$$

Соотношение, аналогичное (2.6) для $n-$годичного страхования жизни, выводится способом, аналогичным выводу (2.6) : или из (2.6), используя равенства

$$(I^{(m)}\overline{A})_x = (I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(I^{(m)}\bar{A})_{x+n},$$

$$(IA)_x = (IA)^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(IA)_{x+n},\ A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}A_{x+n}.$$

Для $n-$годичного страхования жизни с выплатой страховой суммы в момент смерти в случае, когда страховая сумма уменьшается m раз в год на величину, равную $1/m$, текущая стоимость страховой выплаты равна

$$Z = \begin{cases} (n + 1/m - K - S_m)v^T, & \text{если} \quad T \in [0, n-1) \\ 0, & \text{если} \quad T \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия для такого вида страхования обозначается как $(D^{(m)}\overline{A})^1_{x:\overline{n}|}$. Для ее выражения через уже введенные величины заметим, что случайная величина Z равна разности $Z_1 - Z_2$, где

$$Z_1 = \begin{cases} (n + 1/m)v^T, & \text{если} \quad T \in [0, n-1) \\ 0, & \text{если} \quad T \geq n, \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} (K + S_m)v^T, & \text{если} \quad T \in [0, n-1) \\ 0, & \text{если} \quad T \geq n. \end{cases}$$

При этом $EZ_1 = (n + 1/m)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|},\ EZ_2 = (I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$. Таким образом,

$$(D^{(m)}\bar{A})^1_{x:\bar{n}|} = (n+1/m)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (I^{(m)}\overline{A})^1_{x:\bar{n}|} = \frac{i}{\delta}[(n+1/m)A^1_{x:\overline{n}|} - (IA)^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}] - \frac{i - d^{(m)}}{\delta d^{(m)}}A_x.$$

Последнее равенство справедливо при предположении равномерности смертей.

2.2 Выражения единовременных нетто-премий с переменными выплатами через стандартные нетто-премии

Приведем некоторые интересные соотношения, связывающие разовые нетто-премии с возрастающей страховой суммой с нетто-премией для отсроченного страхования. Рассмотрим сначала случай выплат в конце года. Для этого сначала (2.5) перепишем в виде

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k},$$

после чего, меняя порядок суммирования в последнем равенстве, получаем

$$(IA)_x = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k} = \sum_{j=0}^{\infty}\ {}_{j|}A_x.$$

Для непрерывного случая, заменяя операцию суммирования интегрированием, совершенно аналогично получаем равенство

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\infty}\ {}_{s|}\bar{A}_x ds.$$

Таким же образом перепишем равенство

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k} =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1} v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}.$$

Для непрерывного случая

$$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n\int_0^{n-t} v^t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^n\int_0^{n-s} v^t\ {}_tp_k\mu_{x+t}dt = \int_0^n \bar{A}^1_{x:\overline{n-s}|}ds.$$

2.3 Рекуррентные формулы для единовременных нетто-премий.

Приводимые ниже формулы позволяют не только строить вычислительные аллгритмы для определенияят разовых нетто-премий, но представляют интерес с точки зрения страховой интерпрпетации. Рассмотрим дискретный и непрерывный варианты смешанного $n-$годичного страхования жизни. В первом случае перепишем $A_{x:\overline{n}|}$ в виде

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\frac{l_{x+k}}{l_x}(1-\frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}}) + v^n\ {}_np_x = vq_x + \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x} + v^n\ {}_np_x =$$

$$vq_x + vp_x\left[\sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1}\frac{d_{x+1+k}}{l_{x+1}} + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_{x+1}\right] = vq_x + vp_xA_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Следовательно, для дискретного случая мы получили рекуррентное соотношение

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_xA_{x+1:\overline{n-1}|} \tag{2.7}$$

Для страховой интерпретации умножим равенство (2.7) на $(1+i)l_x$:

$$l_x(1+i)A_{x:\overline{n}|} = d_x + l_{x+1}A_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Теперь полученное равенство можно интерпретировать следующим образом. Сумма разовых нетто-премий, собранная со страхователей возраста x, равна вкладу, который через год вместе с процентами по нему будет равен выплатам по смерти умершим на возрастном интервале $(x, x+1)$ и сумме нетто-премии, собранных с доживших до возраста $x+1$. Далее, разделив последнее равенство на $(1+i)^{x+1}l_x$, получим

$$v^{x+1}A_{x+1:\overline{n-1}|} - v^x A_{x:\overline{n}|} = q_x v^{x+1}(A_{x+1:\overline{n-1}|} - 1).$$

Отсюда

$$v^{x+k}A_{x+k:\overline{n-k}|} - v^{x+k-1}A_{x+k-1:\overline{n-k+1}|} = q_{x+k-1}v^{x+k}(A_{x+k:\overline{n-k}|} - 1),\ \ k = 1, 2, \ldots n.$$

Просуммировав это равенство по k от 1 до n, учитывая $A_{x+n:\overline{0}|} = 1$, получим

$$v^{x+n} - v^x A_{x:\overline{n}|} = -\sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k+1}q_{x+k}(1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}) \Longleftrightarrow$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}q_{x+k}(1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}).$$

Последнее равенство можно интерпретировать в том смысле, что разовая нетто-премия для $n-$годичного страхования жизни складывается из текущих средних доходов выгодоприобретателя от заключенной сделки по страхованию. Здесь текущий средний доход, отнесенный к году $k \in \{0, 1, \ldots n-1\}$ равен $v^{k+1}q_{x+k}(1- A_{x+k:\overline{n-k}|})$, а текущий средний доход при дожитии до возраста $x+n$ равен v^n. Такая интерпретация позволяет разовую премию, выплаченную страхователем, разложить на временные составляющие ту выгоду, что несет данный договор страхователю.

В непрерывном случая аналогом рекуррентных соотношений будет дифференнальное уравнение. Рассмотрим опять случай $n-$годичного смешанного страхования жизни. Для него $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$, поэтому сначала получим выражения для производных каждого из двух слагаемых. Приняв $s = x+t$ в качестве переменной интегрирования, представим $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ в виде

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_x \mu_{x+t}dt = \frac{1}{v^x\ {}_xp_0}\int_x^{x+n} v^s\ {}_sp_0\mu_s ds$$

Дифференцируя данное произведение по x, отсюда получаем

$$\frac{d}{dx}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = (\delta + \mu_x)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \mu_x.$$

Далее, дифференцируя равенство

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n\ {}_np_x$$

по переменной x, выпишем равенство для второго слагаемого:

$$\frac{d}{dx}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n \frac{d}{dx}\ {}_np_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}(\mu_x - \mu_{x+n}).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_{x:\overline{n}|} = (\delta + \mu_x)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - \mu_x + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}(\mu_x - \mu_{x+n}) =$$

$$(\delta + \mu_x)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_x A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} - \mu_x.$$

Полученное равенство означает, что при $n \to \infty$ производная

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = (\delta + \mu_x)\bar{A}_x - \mu_x.$$

Переписав последнее уравнение в виде

$$\delta \bar{A}_x dx = d\bar{A}_x + \mu_x(1 - \bar{A}_x)dx,$$

можно интерпретировать его следующим образом: доход, полученный страховщиком за бесконечно малый отрезок времени dx, складывается из повышения в цене разовой премии за тот же отрезок и дохода выгодоприобретателя в случае смерти застрахованного в течение указанного временного интервала.

2.4 Коммутационные функции.

Коммутационные функции служат для краткой записи актуарных выражений, как то нетто-премий, величин взносов и т.д. в виде некоторых табличных параметров, что позволяет, не прибегая к сложным выкладкам, по соответствующим таблицам определять значения интересущих выражений. Наличие таких таблиц несомненно является большим практическим преимуществом, с другой стороны, как мы увидим далее, параметры этих таблиц зависят от величны процента i, поэтому в случае изменения величины ставки i значения табличных параметров необходимо пересчитывать.

Перепишем равенство для A_x :

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}$$

в виде

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} \Longleftrightarrow v^x l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k},$$

тогда последнее равенство будет выглядеть очень кратко, если ввести в рассмотрение коммутационные функции:

$$D_x = v^x l_x,\ \ C_x = v^{x+1} d_x = D_x v q_x,$$

$$M_x=\sum_{k=0}^{\infty}C_{x+k},\quad R_x=\sum_{k=0}^{\infty}M_{x+k}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{x+k}.$$

В таком случае равенство для A_x будет выглядеть как

$$A_x=\frac{M_x}{D_x}.$$

Имея таблицы перечисленных четырех коммутационных функций, можно значения всех вышеприведенных разовых нетто-премий вычислить по этим таблицам. Например, величины

$$A^1_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x},\quad A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=\frac{D_{x+n}}{D_x},\quad A_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}$$

В более сложном случае возрастающей страховой суммы разовая нетто-премия

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{x+k+1}d_{x+k}/(v^xl_x)=$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_{x+k}}{D_x}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(M_{x+k}-M_{x+n})}{D_x}=\frac{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}}{D_x}$$

Рассмотрим пример. Для стандартного $n-$годичного страхования жизни со страховой суммой, убывающей на единицу в год и выплатой в момент смерти требуется выразить разовую нетто-премию через коммутационные функции. Распределение смертей равномерное.

Для требуемого выражения сначала заметим, что

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\sum_{j=0}^{n-1}A^1_{x:\overline{n-j}|}.$$

Далее из представления $A^1_{x:\overline{n}|}$ для каждого n получим

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{M_x-M_{x+n-j}}{D_x}=\frac{i}{\delta}\frac{nM_x-R_{x+1}+R_{x+n+1}}{D_x}.$$

2.5 Задачи

1. Пусть смертность подчиняется закону $l_x=100-x,\ x\in(0,100)$, а сила процента $\delta=0.1$. Страхователь возраста 50 лет заключает договор на 10-летнее смешанное страхование жизни с выплатами по смерти и по дожитию b_1 и b_2 соответственно. Вычислить $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$, $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$. Принимая $b_1+b_2=b$, определить, при каком отношении b_1/b дисперсия текущих выплат минимальна.

Решение. Пусть Z_1, Z_2– текущие выплаты по смерти и по дожитию соответственно. Тогда

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = EZ_1 = \int_0^n e^{-\delta t}/(100-x)dt = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta(100-x)} = 0.1264,$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = EZ_2 = e^{-\delta n}\frac{100-x-n}{100-x} = 0.2943,$$

$${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1-e^{-2\delta n}}{2\delta(100-x)} = 0.08647, \quad {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = e^{-2\delta n}\frac{100-x-n}{100-x} = 0.1083,$$

$$Cov(Z_1, Z_2) = -\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = -0.0372, VarZ_1 = 0.0705, VarZ_2 = 0.02169.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$Var(b_1Z_1+b_2Z_2) = b_1^2VarZ_1+b_2^2VarZ_2+2b_1b_2Cov(Z_1,Z_2) \to min, \ b_2 = b-b_1 \in (0,b).$$

Ее решением служит

$$b_1^* = \frac{b[VarZ_2 - Cov(Z_1,Z_2)]}{VarZ_1+VarZ_2-2Cov(Z_1,Z_2)} =$$

$$\frac{b[VarZ_2 - Cov(Z_1,Z_2)]}{[VarZ_1 - Cov(Z_1,Z_2)]+[VarZ_2 - Cov(Z_1,Z_2)]} \in (0,b),$$

откуда оптимальное отношение $b_1/b = 0.3535$.

2. Для постоянной интенсивности смертности μ при $x > 0$ и силе процента δ определить выражение для $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$.

Решение. По определению

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt + v^n \ {}_np_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}(1-e^{-(\mu+\delta)n}) + e^{-(\mu+\delta)n}.$$

3. Показать, что $\bar{A}_x$ равна производящей функции моментов случайной величины остаточной жизни $T(x)$ при значении аргумента, равном $-\delta$.

Решение. По определению

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}f_{T(x)}(t)dt = M_{T(x)}(-\delta).$$

4. Пусть случайная величина $T(x)$ имеет гамма-распределение с параметрами α, β. Найти значение $\bar{A}_x$.

Решение. Используем замену $y = (\beta+\delta)x$ для вычисления итеграла в выражении

$$\bar{A}_x = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-(\beta+\delta)x}x^{\alpha-1}dx = \left(\frac{1}{1+\delta/\beta}\right)^\alpha.$$

5. Пусть $b_t = t, \ \mu_{x+t} = \mu, \ \delta_t = \delta$ при всех $t > 0$. Выразить через δ, μ величины $(\bar{I}\bar{A})_x = E(b_Tv^T), \ Var(b_Tv^T)$.

Решение. Используя замену $y = (\mu + \delta)x$, вычислим интеграл:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty te^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu dt = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}\int_0^\infty ye^{-y}dy = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2},$$

откуда

$$^2(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{\mu}{(\mu+2\delta)^2}, \ \ Var(b_T v^T) = \frac{\mu}{(\mu+2\delta)^2} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^4}.$$

6. Известно, что $A_x = 0.3$, $A_{x+10} = 0.4$, $A_{x:\overline{10}|} = 0.5$. Вычислить $A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}}$, $A^1_{x:\overline{10}|}$.

Решение. Из условия имеем два уравнения

$$A^1_{x:\overline{10}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}} = 0.5, \ \ A^1_{x:\overline{10}|} + 0.4A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}} = 0.3$$

относительно $A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}}$, $A^1_{x:\overline{10}|}$. Решая их как систему, находим $A^1_{x:\overline{10}|} = 1/6$, $A_{x:\overset{1}{\overline{10}|}} = 1/3$.

7. Используя предположение равномерного распределения смертей, выразить в терминах коммутационных функций величину $(I\bar{A})_{30:\overline{35}|}$.

Решение. При указанных условиях случайные величины K, S независимы. Поэтому

$$(I\bar{A})_{30:\overline{35}|} = (i/\delta)(IA)_{30:\overline{35}|} = \frac{i}{\delta}\frac{R_{30} - R_{65} - 35M_{35}}{D_{30}}.$$

Глава 3

Аннуитеты в страховании жизни.

Под аннуитетами понимается последовательность регулярно поступающих платежей с заранее оговоренным сроком действия. Таким образом, понятия регулярного взноса и аннуитета совпадают и принято называть взносами те платежи, которые поступают от страхователя к страховщику, а платежи, идущие в адрес страхователя, принято называть аннуитетами. Например, при покупке полиса в договоре страхования клиент может получить не страховую сумму, а пенсию, выплачиваемую в течение определенного периода времени и начиная с некоторого возраста. Естественно, стоимость этой пенсии должна соответствовать страховой сумме. Следовательно, пенсия является не чем иным, как отсроченным на определенный срок анннуитетом. С другой стороны, разовая премия может быть суммой, заплатить которую бывает затруднительно и поэтому страхователь вместо выплаты разовой премии может выплачивать взносы, причем суммарная стоимость этих взносов должна быть эквивалентной разовой премии. Этим обстоятельством объясняется термин "нетто-премия аннуитета", которым мы будем пользоваться. Аннуитеты могут различаться частотой поступающих платежей, сроком действия, величиной. Поэтому, как и для разовых нетто-премий, мы начнем с более простых по периодичности взносов.

3.1 Ежегодные аннуитеты.

Аннуитеты, выплачиваемые ежегодно, разделяются на два вида - авансовые премии, выплачиваемые в начале текущего года, и задолженные, выплачиваемые в конце текущего года. Часто аннуитеты первого вида именуют как аннуитеты -*пренумерандо,* второго вида - *постнумерандо.* Как правило, авансовые аннуитеты выступают как взносы страхователя, регулярно перечисляемые на счет страховой компании. В роли задолженных взносов как правило выступают платежи, производимые на имя страхователя. Рассмотрим аннуитет пренумерандо, выплачиваемый в течение n лет, то есть в моменты $0, 1, \dots n-1$. Величину аннуитета будем считать равной единице.

Тогда текущая стоимость этого аннуитета обозначается как $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ и равна

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Теперь предположим, что тот же аннуитет выплачивается уже в течение всей жизни страхователя, то есть в течение $K = K(x)$ лет в моменты $0, 1, \dots K(x)$. Тогда его текущая стоимость является случайной величиной и равна

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d}.$$

Нетто-премия данного аннуитета, равная его *актуарной настоящей (текущей,современной) величине,* определяется как математическое ожидание его текущей стоимости:

$$E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \frac{1 - A_x}{d}$$

и обозначается как $\ddot{a}_x$. Отсюда следует соотношение

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x,$$

которое означает, что нетто-премия пожизненного годового аннуитета-пренумерандо величины d вместе с разовой премией пожизненного страхования равна 1. Кроме того, из определения нетто-премии аннуитета и из леммы 2 разд. 1.1 следует

$$\ddot{a}_x = E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_kp_x.$$

Отсюда следует важная рекуррентная формула для аннуитетов:

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1} \tag{3.1}$$

Выражение для дисперсии текущей стоимости получается достаточно просто:

$$Var[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = Var\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] = Var[v^{K+1}]/d^2 = [\ {}^2A_x - A_x^2]/d^2.$$

В том случае когда рассматривается аннуитет-постнумерандо, выплачиваемый в течение n лет, его текущая стоимость, обозначаемая как $a_{\overline{n}|}$, равна

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots v^n = v\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{v}{d}(1 - v^n).$$

Пусть теперь аннуитет-постнумерандо выплачивается пожизненно, т.е. жизнь (x) производит единичные платежи в моменты $1, 2, \dots, K$, тогда текущая стоимость пожизненного аннуитета-постнумерандо и его нетто-премия соответственно равны

$$a_{\overline{K}|} = v + v^2 + \dots v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - 1 = \frac{1 - v^{K+1}}{d} - 1 \Rightarrow a_x = \ddot{a}_x - 1,$$

$$a_x = \frac{v - A_x}{d} \Longleftrightarrow v = da_x + A_x.$$

Рассуждая как и в случае взноса-пренумерандо, согласно лемме 2 разд. 1.1 учитывая условие $a_{\overline{0}|} = 0$ получим равенство

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|}\ {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k\ {}_k p_x = \ddot{a}_x - 1.$$

Рассмотрим теперь срочные взносы единичной величины. Для $n-$годичных взносов-пренумерандо их текущая стоимость определяется случайной величиной

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad K \ge n. \end{cases}$$

Нетто-премия этого аннуитета, равная EY, обозначается как $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$. Если учесть, что $Y = (1 - Z)/d$, где случайная величина

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ v^n, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

то можно сразу сказать, что

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}(1 - EZ) = \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n}|}).$$

Отсюда следует равенство, аналогичное случаю пожизненных аннуитетов

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}.$$

Кроме того, величина

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n p_x =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_k p_x q_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} (\ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|})\ {}_k p_x q_{x+k} =$$

$$\ddot{a}_x - \sum_{k=n}^{\infty} (v^n + v^{n+1} + \ldots v^k)\ {}_k p_x q_{x+k} = \ddot{a}_x - v^n\ {}_n p_x \sum_{k=n}^{\infty} (1 + v^2 + \ldots v^{k-n})\ {}_{k-n} p_{x+n} q_{x+n+k} =$$

$$\ddot{a}_x - v^n\ {}_n p_x \ddot{a}_{x+n} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_k p_x - \sum_{k=n}^{\infty} v^k\ {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x.$$

Заметим, что для получения выражения для $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ можно было непосредственно использовать лемму 2 из разд. 1.1 Именно, обозначим

$$z(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1}|},\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad z(k) = \ddot{a}_{\overline{n}|},\ k \ge n, \quad g(k) =\ {}_k p_x q_{x+k} = G(k) - G(k-1).$$

Тогда

$$z(0)=1,\ \Delta z(k)=v^{k+1}, k=0,1,\dots n-2,\ \Delta z(k)=0, k\geq n-1, 1-G(k)=\ {}_{k+1}p_x.$$

Применяя указанную лемму, теперь получим

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=1+\sum_{k=0}^{n-2}v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x=\sum_{k=0}^{n-1}v^k\ {}_kp_x$$

Для задолженных аннуитетов текущая стоимость $n-$годичного аннуитета определяемая как случайная величина

$$Y_1=\begin{cases} a_{\overline{K}|}, & \text{если}\quad 0\leq K<n\\ a_{\overline{n}|}, & \text{если}\quad K\geq n\end{cases}$$

аналогично случаю аннуитетов пренумерандо получается равенство для разовой нетто-премии такого аннуитета:

$$E(Y_1)=a_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=1}^{n}v^k\ {}_kp_x.$$

Для этого достаточно обозначить $z(0)=0, z(k)=a_{\overline{k}|}, k=1,2,...,n, z(k)=a_{\overline{n}|}, k\geq n$ и воспользоваться леммой 2 из разд. 1.1

Для разовых нетто-премий аннуитетов-пренумерандо и постнумерандо имеет место равенство

$$v\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n-1}|}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\ {}_kp_x-\sum_{k=1}^{n-1}v^k\ {}_kp_x=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}(\ {}_{k+1}p_x-\ {}_kp_x)+v^n\ {}_{n-1}p_x\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow A_{n:\overline{x}|}=v\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n-1}|}.$$

В случае авансовых взносов выражение для дисперсии текущих выплат получается из выражений разовых нетто-премий срочного смешанного страхования:

$$VarY=\frac{1}{d^2}VarZ=\frac{1}{d^2}(\ {}^2A_{x:\overline{n}|}-A^2_{x:\overline{n}|}).$$

Рассмотрим случай отсроченных на m лет взносов, которые начинают выплачиватся по достижении страхователем возраста $x+m$. Из их определения следует, что их текущая величина равна разности текущих величин пожизненных взносов и срочных $m-$годичных взносов. Следовательно, нетто-премия такого аннуитета, обозначаемая как ${}_{m|}\ddot{a}_x$, равна

$${}_{m|}\ddot{a}_x=\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{m}|}=\sum_{k=m}^{\infty}v^k\ {}_kp_x=\frac{A_{x:\overline{m}|}-A_x}{d}.$$

Указанную нетто-премию можно представить как

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} (v^m + v^{m+1} + \dots v^k)\ {}_kp_x q_{x+k} = A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} \ddot{a}_{x+m}. $$

Поскольку

$$ \ddot{a}_{x+m} = \frac{1 - A_{x+m}}{d}, $$

то справедливо представление

$$ A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} = d \cdot {}_{m|}\ddot{a}_x + {}_{m|}A_x. $$

Величина ${}_{m|}\ddot{a}_x$ равна среднему значению текущей стоимости Y, где случайная величина

$$ Y = I \cdot (v^m + v^{m+1} + \dots v^K), $$

а случайная величина

$$ I = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le K < m \\ 1, & \text{если} \quad K \ge m. \end{cases} $$

Для вычисления дисперсии случайной величины Y представим ее в виде

$$ Y = I \cdot v^m \frac{1 - Z}{d} \Longleftrightarrow Iv^m \cdot Z + d \cdot Y = I \cdot v^m, $$

случайная величина $Z = v^{K-m+1}$, представляет собой текущую стоимость выплат по договору бессрочного страхования жизни для $(x + m)$, т.е.

$$ E[Y] = E[E[Y|I]] = E[Y|I = 1]P(I = 1) = v^m\ {}_mp_x \cdot \frac{1 - A_{x+m}}{d} = E[X] \cdot \frac{1 - A_{x+m}}{d}. $$

Здесь случайная величина $X-$ текущая стоимость полиса по страхованию дожития с единичной страховой суммой:

$$ X = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le K < m \\ v^m, & \text{если} \quad K \ge m, \end{cases} $$

для которой $Var[X] = v^{2m} \cdot_m p_x \cdot_m q_x$.

Отсроченные на m лет взносы представляют собой частный случай платежей, которые начинают выплачиваться с возраста $x + m$ в течение n лет. Их настоящая величина равна разности текущих величин взносов на сроки $m + n$ и m лет. Нетто-премия такого аннуитета обозначается как ${}_{m|n}\ddot{a}_x$ и равна

$$ {}_{m|n}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k\ {}_kp_x = \ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_{x:\overline{m+n}|}}{d}. $$

Для вычисления дисперсии настоящей величины таких взносов представим ее в виде случайной величины $Y_{m,n} = Iv^m \frac{1-Z}{d}$, где как и ранее

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le K < m \\ 1, & \text{если} \quad K \ge m, \end{cases}$$

а случайная величина

$$Z = \begin{cases} v^{K+1-m}, & \text{если} \quad m \le K < m+n \\ v^n, & \text{если} \quad K \ge m+n \end{cases}$$

является текущей стоимостью выплат по договору смешанного страхования для $(x+m)$ сроком на n лет:

$$E[Y_{m,n}] = E[E[Y_{m,n}|I]] = E[Y_{m,n}|I=1]P(I=1) = v^m \ {}_mp_x \frac{1 - A_{x+m:\overline{n}|}}{d},$$

из которого и равенства $v^m \ {}_mp_x A_{x+m:\overline{n}|} = \ {}_{m|n}A_x$ следует разложение

$$A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} = d \cdot \ {}_{m|n}\ddot{a}_x + \ {}_{m|n}A_x.$$

Пусть, как и ранее, случайная величина X_m- текущая стоимость выплат по договору дожития на срок m лет: $E[X_m] = v^m \ {}_mp_x, \quad Var[X_m] = v^{2m} \ {}_mp_x \ {}_mq_x$. Поскольку

$$E[Y_{m,n}^2] = E[Y_{m,n}^2|I=1] \ {}_mp_x = \frac{v^{2m} \ {}_mp_x}{d^2} E[1 + Z^2 - 2Z|I=1] =$$

$$= \frac{v^{2m} \ {}_mp_x}{d^2}(1 + \ {}^2A_{x+m:\overline{n}|} - 2A_{x+m:\overline{n}|}),$$

то

$$Var[Y_{m,n}] = v^{2m} \ {}_mp_x \frac{1 - 2A_{x+m:\overline{n}|} + \ {}^2A_{x+m:\overline{n}|}}{d^2} - v^{2m} \ {}_mp_x^2 \frac{1 - 2A_{x+m:\overline{n}|} + A_{x+m:\overline{n}|}^2}{d^2} =$$

$$= \frac{Var[X_m](1 - A_{x+m:\overline{n}|})^2 + E[X_m^2]Var[Z]}{d^2}.$$

В частности, если $n = \infty$, то в этом случае получается случай отсроченных на m лет аннуитетов, для которых справедливы равенства

$$A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} = d \cdot \ {}_{m|}\ddot{a}_x + \ {}_{m|}A_x, \quad Var[Y] = \frac{Var[X_m](1 - A_{x+m})^2 + E[X_m^2]Var[Z]}{d^2}.$$

Аналогично рассматривается случай аннуитетов-постнумерандо. Так, для отсроченных на m лет $n-$годичных аннуитетов их текущая стоимость Y представляется как

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le K \le m, \\ v^{m+1} + \ldots + v^K, & \text{если} \quad K \in \{m+1, m+2, \ldots, m+n\}, \\ v^{m+1} + \ldots + v^{m+n}, & \text{если} \quad K \ge m+n. \end{cases}$$

при этом нетто-премия такого аннуитета обозначается как ${}_{m|n}a_x$ и равна

$$ {}_{m|n}a_x = E[Y] = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k \ {}_k p_x = {}_{m+1|n}\ddot{a}_x, $$

теперь дисперсию случайной величины Y легко вычислить аналогично случаю аннуитетов пренумерандо с заменой m на $m+1$.

Как уже было сказано, отсроченные на определенный срок аннуитеты реализуются в виде пенсий при достижении соответствующего возраста. При этом для получения этой пенсии страхователь платит регулярные взносы в в течение заранее обусловленного периода времени; кроме того, величина годового взноса должна находиться в соответствии с величиной будущей пенсии. Далее вопрос о величине взноса, соответствующей будущему страховому вознаграждению, будет рассмотрен. Пока только отметим, что на практике приведенные здесь виды страховых аннуитетов применяются в сочетании друг с другом.

Следует заметить, что в выражениях цены аннуитета в виде суммы присутствуют слагаемые вида $v^k \ {}_k p_x = A_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}$. Например, для $-$годичного аннуитета

$$ \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} A_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}. $$

Это означает, что цена аннуитета равна соответствующей сумме нетто-премий чистого дожития. Для удобства обозначим величину $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ как ${}_nE_x$. Определим теперь *аккумулированную величину* $n-$годичного аннуитета-пренумерандо в конце срока как отношение

$$ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. $$

Если величина $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ характеризует ценность $n-$годичного аннуитета с точки зрения момента возраста x, то показатель $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ определяет ту же ценность в будущем, то есть через n лет. Величина $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ несложно преобразуется к виду

$$ \ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_kE_x}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}}. $$

В дополнение к введенным ранее коммутационным функциям рассмотрим функцию $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$, тогда легко видеть, что цена аннуитета может быть кратко выражена через эти функции. Например,

$$ \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}, \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. $$

3.2 Кратные аннуитеты

Здесь мы рассмотрим аннуитеты в которых выплаты производятся m раз в год и при этом величина каждой выплаты равна $1/m$, поэтому годовая выплата по-прежнему равна единице. По условию выплаты на $(k+1)-$м году осуществляются в моменты $k, k+1/m, \ldots k+(m-1)/m$ для аннуитета-пренумерандо и соответственно в моменты $k+1/m, k+2/m, \ldots k+1$ для случая постнумерандо. Для каждой пары $n, s,\ s \geq 1$ неотрицательных целых чисел текущая цена аннуитета-пренумерандо, выплачиваемого в течение срока $n+s/m$, равна

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n+s/m}|} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+j/m} + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s-1} v^{n+j/m} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{v^k(1-v)}{m(1-v^{1/m})} + v^n\frac{1-v^{s/m}}{m(1-v^{1/m})} = \frac{1-v}{m(1-v^{1/m})}\frac{1-v^n}{1-v} + v^n\frac{1-v^{s/m}}{m(1-v^{1/m})} = \frac{1-v^{n+s/m}}{d^{(m)}}.$$

Следовательно, если мы рассмотрим пожизненный аннуитет-пренумерандо с $m-$разовыми выплатами, то его текущая стоимость как случайная величина равна

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+S_m}|} = \frac{1-v^{K+S_m}}{d^{(m)}}.$$

Здесь как и ранее, случайная величина $K = [T(x)]$, а случайная величина $S_m = ([m(T-K)]+1)/m \in \{1/m, \ldots (m-1)/m, 1\}$. Отсюда нетто-премия данного аннуитета как среднее значение его текущей стоимости равна

$$\ddot{a}^{(m)}_x = E\ddot{a}_{\overline{K+S_m}|} = \frac{1-A^{(m)}_x}{d^{(m)}}.$$

Отсюда получаем соотношение, обобщающее случай $m = 1$:

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_x + A^{(m)}_x. \tag{3.2}$$

Разовая нетто-премия такого аннуитета обозначается как $\ddot{a}^{(m)}_x$. Для ее вычисления в явном виде введем обозначения: $P(T(x) \in (k+s/m-1/m, k+s/m) = p_{k,s}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots, m$; тогда

$$\ddot{a}^{(m)}_x = E[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+S_m}|}] = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+j/m} \cdot {}_{k+j/m}p_x$$

Если аннуитет является срочным на n лет, то в таком случае его текущая стоимость

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+S_m}|} = \begin{cases} (1-v^{K+S_m})/d^{(m)}, & \text{если} \quad K+S_m < n \\ (1-v^n)/d^{(m)}, & \text{если} \quad K+S_m \geq n \end{cases}$$

определяет нетто-премию

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A^{(m)}_{x:\overline{n}|}}{d^{(m)}}.$$

Это равенство эквивалентно

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} + A^{(m)}_{x:\overline{n}|}.$$

Полученное равенство при $n \to \infty$ превращается в (3.2).

Рассмотрим *отсроченный на q лет n-годичный аннуитет с выплатами m раз в год.* Для него нетто-премия равна

$${}_{q|n}\ddot{a}^{(m)}_{x} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{q+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{q}|} = \frac{A^{(m)}_{x:\overline{q}|} - A^{(m)}_{x:\overline{q+n}|}}{d^{(m)}}.$$

При этом текущая стоимость такого аннуитета есть разность случайных величин $Z - Y$, где $Z-$ текущая стоимость $q+n-$ годичного аннуитета, а $Y-$ аналогичная стоимость $q-$ годичного аннуитета.

Получим выражения для аннуитетов с $m-$кратными выплатами через аннуитеты с годовыми выплатами. Рассмотрим сначала случай пожизненных аннуитетов. Выразим величину $\ddot{a}^{(m)}_x$ из равенства (3.2) :

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}[A^{(m)}_x - A_x].$$

Если предполагать равномерное распределение смертей на каждом целочисленном возрастном интервале, то из равенства (2.4) получим

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{A_x}{d^{(m)}}[\frac{i}{i^{(m)}} - 1] = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1 - d\ddot{a}_x}{d^{(m)}}[\frac{i}{i^{(m)}} - 1] = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m),$$

где коэффициенты

$$\alpha(m) = id/(i^{(m)}d^{(m)}), \quad \beta(m) = (i - i^{(m)})/(i^{(m)}d^{(m)}).$$

Коэффициенты $\alpha(m), \beta(m)$ при малых процентных ставках вычисляются достаточно легко. Поскольку выражение для

$$\alpha(m) = \frac{i^2}{1+i} \cdot \frac{(1+i)^{1/m}}{m^2[(1+i)^{1/m} - 1]^2} = \frac{(e^{\delta} - 1)^2}{e^{\delta}}\frac{e^{\delta/m}}{[m(e^{\delta/m} - 1)]^2} = \frac{f(1)}{f(1/m)} = g(\delta),$$

где функции

$$f(x) = \frac{(e^{\delta\cdot x} - 1)/x]^2}{e^{\delta\cdot x}},\ g(\delta) = \frac{e^{\delta/m}}{e^{\delta}}\frac{1 + \delta + \gamma(\delta)}{1 + \delta/m + \gamma(\delta/m)},\ \gamma(\delta) \cong (\delta)^2.$$

при этом

$$g(0) = 1,\ g'(0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha(m) = 1 + o(\delta).$$

Аналогично из представления коэффициента

$$\beta(m) = \frac{0.5(1 - 1/m) + \psi(\delta)/\delta^2 - \psi(\delta/m)/\delta^2}{(1 + 0.5\delta/2m)^2},\ \psi(\delta) \cong \delta^3$$

следует, что

$$\beta(m) = 0.5(1 - 1/m) + o(1),$$

таким образом, при малых величинах δ коэффициенты

$$\alpha(m) \cong 1,\ \beta \cong \frac{1}{2}(1 - 1/m).$$

Для отсроченных на целое число n лет аннуитетов с $m-$разовыми выплатами полученные выражения позволяют написать равенство

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ _nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)} = \ _nE_x[\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)]$$

Отсюда нетто-премия для $n-$годичных аннуитетов-пренумерандо

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \ _nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) - \ _nE_x[\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)] =$$

$$\alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - \ _nE_x).$$

При сделанном предположении равномерного распределения смертей полученные формулы позволяют представить нетто-премии для аннуитетов с $m-$разовыми выплатами выразить сначала через разовые нетто-премии соответствующих видов страхования, а затем через коммутационные числа:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\frac{1 - A_x}{d} - \beta(m) = \alpha(m)\frac{D_x - M_x}{dD_x} - \beta(m),$$

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left[\alpha(m)\frac{D_{x+n} - M_{x+n}}{dD_{x+n}} - \beta(m)\right],$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\left[\frac{D_x - M_x + M_{x+n} - D_{x+n}}{dD_x}\right] - \beta(m)(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}).$$

3.3 Непрерывные аннуитеты

Непрерывные аннуитеты получаются из аннуитетов с $m-$ разовыми выплатами при неограниченном увеличениии m. Так,текущая стоимость непрерывного пожизненного аннуитета равна

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T v^t dt.$$

Таким образом, в течение бесконечно малого промежутка времени dt здесь выплачивается сумма, равная dt, ее современная стоимость равна $v^t dt$. В более общем случае, если в момент времени t уровень выплат равен b_t, то текущая стоимость пожизненного аннуитета равна

$$\int_0^\infty b_t v^t dt.$$

Нетто-премия непрерывного пожизненного аннуитета равна

$$\bar{a}_x = E(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T|}}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

В соответствии с леммой 1 последнее выражение равно

$$\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x dt.$$

С другой стороны, случайную величину текущей стоимости пожизненного аннуитета можно представить как

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta},$$

откуда нетто-премия $\bar{a}_x = (1 - A_x)/\delta$, что дает равенство $1 = \delta \bar{a}_x + A_x$, которое является непрерывным аналогом равенства (3.2). При этом дисперсия текущей стоимости

$$Var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = Var(\frac{1 - v^T}{\delta}) = \frac{1}{\delta^2} Var(v^T) = \frac{1}{\delta^2}(\ {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2).$$

Рассмотрим следующий

Пример 3.1.

При предположении постоянной интенсивности смертности $\mu = 0.06$, и неизменной непрерывной процентной ставки $\delta = 0.1$ найти:

а.выражение для текущей стоимости пожизненного аннуитета,

б.его нетто-премию,

в.дисперсию текущей стоимости и

г.вероятность того, что текущая стоимость аннуитета превысит величину нетто-премии.

а.Величина текущей стоимости

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \int_0^T e^{-0.1t} dt = 10 - 10e^{-0.1T}.$$

б.Нетто-премия

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-0.1t} e^{-0.06} dt = \int_0^\infty e^{-0.16} dt = 6.25.$$

в.

$$\bar{A}_x = E(e^{-0.01T}) = \int_0^\infty e^{-0.1t} e^{-0.06t} 0.06 dt = 3/8 = 0.375,$$

$$^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-0.2t} e^{-0.06t} 0.06 dt = 3/13 = 0.2308 \Rightarrow$$

$$Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = 100(0.2308 - 0.375^2) = 9.0144.$$

г.Искомая вероятность $P(\bar{a}_{\overline{T}|} > 2\bar{a}_x)$ равна

$$P(\frac{1-v^T}{0.1} > 6.25) = P(e^{-0.1T} < 0.375) = P(T > -10\log 0.375) =$$

$$P(T > 9.8083) = \int_{9.8083}^\infty e^{-0.06t} 0.06 dt = 0.5552.$$

Для $n-$годичного непрерывного аннуитета величина текущей стоимости равна

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{если} \quad 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad T \ge n. \end{cases}$$

Интегрируя по частям, получим выражение для нетто-премии:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = EY = \int_0^n \bar{a}_{\overline{T}|}\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x = \int_0^n v^t\ {}_tp_x dt.$$

Из вида случайной величины Y следует, что

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = EY = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}).$$

Кроме того, выражение для дисперсии величины текущей стоимости непрерывного $n-$годичного аннуитета будет

$$Var(Y) = \frac{1}{\delta^2}(\ {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\delta^2}[1 - 2\delta\ {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2] =$$

$$\frac{2}{\delta}[\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \ {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}] - \bar{a}^2_{x:\overline{n}|}.$$

Для отсроченного на n лет непрерывного аннуитета нетто-премия равна

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\ {}_tp_x dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x dt - \int_0^n v^t\ {}_tp_x dt = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_x}{\delta}.$$

При этом текущая стоимость отсроченного аннуитета равна

$$Y = \begin{cases} 0 = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{если} \quad 0 \le T < n \\ v^n \bar{a}_{\overline{T-n}|} = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad T \ge n. \end{cases}$$

Заметим, что нетто-премия

$${}_{n|}\bar{a}_x = \ {}_nE_x \bar{a}_{x+n}.$$

Получим выражения, связывающие нетто-премии непрерывных аннуитетов с соответствующими дискретными аналогами. Как и ранее, будем предполагать равномерное распределение смертей на каждом целочисленном интервале. Рассмотрим пожизненный аннуитет, для него непрерывная нетто-премия равна

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} = \frac{1-(i/\delta)A_x}{\delta} = \frac{\delta - iA_x}{\delta^2} = \frac{\delta - i}{\delta^2} + \frac{id}{\delta^2}\ddot{a}_x.$$

Аналогичным образом можно аппроксимировать непрерывные аннуитеты других видов.

До сих пор мы предполагали, что начальный возраст является целым числом. Если данное предположение не выполняется, то есть начальный возраст равен $x+u,\ x \in \{1,2,\ldots\}, u \in [0,1)$, нетто-премия

$$\ddot{a}_{x+u} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k+u}}{l_{x+u}}.$$

Если предположение равномерного распределения смертей нами принимается, то отношение

$$\frac{l_{x+k+u}}{l_{x+u}} = \frac{l_{x+k+u}}{l_{x+k}}\frac{l_{x+k}}{l_x}\frac{l_x}{l_{x+u}} = {}_kp_x\frac{l_{x+k+u}}{l_{x+k}}\frac{l_x}{l_{x+u}} = \frac{{}_kp_x(1-uq_{x+k})}{1-uq_x}.$$

Отсюда и в силу (3.1)

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{1}{1-uq_x}\sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x(1-uq_{x+k}) = \frac{\ddot{a}_x}{1-uq_x} - \frac{u(1+i)A_x}{1-uq_x} =$$

$$\frac{\ddot{a}_x}{1-uq_x} - \frac{u(1+i)(1-d\ddot{a}_x)}{1-uq_x} = \frac{(1+iu)\ddot{a}_x - (1+i)u}{1-uq_x} =$$

$$\frac{(1+i)\ddot{a}_x + (iu-i)\ddot{a}_x - (1+i)u}{1-uq_x} = \frac{1+i+p_x\ddot{a}_{x+1} + i(u-1)\ddot{a}_x - (1+i)u}{1-uq_x} =$$

$$\frac{(1-u)(1+i-i\ddot{a}_x) + p_x\ddot{a}_{x+1}}{1-uq_x}.$$

Представив равенство (3.1) в виде

$$1+i-i\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - p_x\ddot{a}_{x+1},$$

из последнего равенства получаем

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{(1-u)(\ddot{a}_x - p_x\ddot{a}_{x+1}) + p_x\ddot{a}_{x+1}}{1-uq_x} = \frac{(1-u)\ddot{a}_x + up_x\ddot{a}_{x+1}}{1-uq_x}. \tag{3.3}$$

При малых значениях q_x величина

$$\ddot{a}_{x+u} \cong (1-u)\ddot{a}_x + u\ddot{a}_{x+1}.$$

Представление (3.3) влечет за собой соответствующее представление для разовой нетто-премии. Именно, из равенства выражая $\ddot{a}_x,\ \ddot{a}_{x+u}$ из равенства (3.2) при $m = 1$, равенство (3.3) запишем в виде

$$A_{x+u} = \frac{(1-u)A_x + up_xA_{x+1}}{1-uq_x}.$$

Рассмотрим

Пример 3.2. Требуется показать, что для любого закона смертности справедливы неравенства

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{\overset{\circ}{e}_x}|},\ a_x < a_{\overline{e_x}|}.$$

Решение. Для обоснования первого неравенства рассмотрим функцию $f(t) = \bar{a}_{\overline{t}|}$. Тогда условие

$$f''(t) = -\delta e^{-\delta t} < 0$$

означает строгую вогнутость этой функции, для которой неравенство Йенсена влечет

$$\bar{a}_x = E(\bar{a}_{\overline{T}|}) < \bar{a}_{\overline{E(T)}|} = \bar{a}_{\overline{\overset{\circ}{e}_x}|}.$$

Для второго неравенства рассмотрим функцию $f(t) = (1-v^t)/i$. Тогда эта функция дифференцируема и так же строго вогнута:

$$f''(t) = -\frac{\delta^2}{i}v^t < 0.$$

Тогда неравенство Йенсена дает:

$$a_x = E(a_{\overline{K}|}) \leq a_{\overline{E(K)}|} = a_{\overline{e_x}|}.$$

3.4 Взносы с возвратом

Рассмотрим ситуацию, когда страхователь выплачивает аннуитет-пренумерандо m раз в год. При этом каждая выплата соответствует страховой защите на текущей $m-$й части года. Если страхователь умирает в течение этой $m-$й части года, то фактически получается, что он переплатил за период продолжительности $K+(J+1)/m-T$. Поэтому представляется справедливым возвращение той части взноса, которая соответствует данному отрезку, то есть $(T, K+(J+1)/m)$. Здесь, как и ранее, случайная величина J определяется из условия $T \in (K+J/m, K+(J+1)/m)$. Для того, чтобы определить величину возврата, будем рассматривать взнос с условием возвращения как непрерывный взнос величины $P = (1/m)\cdot(1/\bar{a}_{\overline{1/m}|})$. Поэтому относительно момента последнего взноса текущая стоимость этого потока непрерывных выплат в течение $1/m-$й части года равна

$$P\int_0^{1/m} v^t dt = 1/m.$$

Кроме того, аналогичная текущая стоимость этого потока непрерывных выплат на интервале длины $T-K-J/m$ равна

$$P\bar{a}_{\overline{T-K-J/m|}} = P\frac{1-v^{T-K-J/m}}{\delta} = \frac{1}{m}\frac{\delta}{1-v^{1/m}}\frac{1-v^{T-K-J/m}}{\delta} = \frac{1-v^{T-K-J/m}}{d^{(m)}}.$$

Таким образом, величина возвращаемой части взноса равна

$$\frac{1}{m}\left(1-\frac{1-v^{T-K-J/m}}{1-v^{1/m}}\right) = \frac{1}{m}\frac{v^{T-K-J/m}-v^{1/m}}{1-v^{1/m}} = \frac{v^{T-K-J/m}-v^{1/m}}{d^{(m)}}.$$

Нетрудно видеть, что если случайная величина $T=K+J/m$, то возвращается весь взнос величины $1/m$, а если $T=K+(J+1)/m$, то не возвращается ничего. Если значение m велико, а величина i наоборот мала, то практически можно считать величину возвращенного взноса равной $K+(J+1)/m-T$. Возникающая погрешность при таком вычислении величины возврата, равная

$$(v^{T-K-J/m}-v^{1/m})/d^{(m)}-(K+(J+1)/m-T),$$

принимает максимальное значение при значении разности

$$T-K-J/m = -\ln(d^{(m)}/\delta)/\delta.$$

Например, при $m=12$, $i=0.06$ это значение равно 0.0416, а при $m=4$, $i=0.1$ оно равно 0.1245. Заметим, что в обоих случаях эти величины положительны. Это означает, что применять приближенное вычисление возврата выгодно страховой компании, но не страхователю. Кроме того, в обоих случаях относительная погрешность равна почти 50%.

Как уже было сказано, для страхователя взнос с условием возврата эквивалентен выплате непрерывного взноса величины $P=\delta/d^{(m)}$. Поэтому разовая нетто-премия бессрочного взноса с возвратом, обозначаемая как $\ddot{a}_x^{\{m\}}$, равна $P\bar{a}_x$:

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x. \tag{3.4}$$

Текущая стоимость возвращенной части взноса относительно возраста x равна

$$Z = v^T\frac{\bar{a}_{\overline{K+(J+1)/m-T|}}}{m\bar{a}_{\overline{1/m|}}} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\frac{v^T-v^{K+(J+1)/m}}{\delta} = \frac{v^T-v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}.$$

Следовательно, ее разовая нетто-премия равна

$$A^{(m)PR} = E[Z] = (\overline{A}_x - A_x^{(m)})/d^{(m)}.$$

Замечание. Выражение для $A^{(m)PR}$ в терминах разовых нетто-премий бессрочных аннуитетов есть

$$A^{(m)PR} = \frac{1-\delta\bar{a}_x-1+d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x.$$

При предположении постоянной интенсивности смертности та же нетто-премия равна

$$A^{(m)PR} = \frac{(i/\delta)A_x - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \frac{(i/\delta)(1-d\ddot{a}_x) - 1 + d^{(m)}\ddot{a}_x^{\{m\}}}{d^{(m)}} =$$

$$\frac{(i/\delta) - 1 + d^{(m)}(\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)) - (id/\delta)\ddot{a}_x}{d^{(m)}} =$$

$$\left(\alpha(m) - \frac{d}{d^{(m)}}\frac{i}{\delta}\right)\ddot{a}_x - \frac{\beta(m) + 1 - (i/\delta)}{d^{(m)}}.$$

3.5 Задачи

1. Найти выражение для $Cov[\delta a_{\overline{T|}}, v^T]$.

$$Cov[\delta a_{\overline{T|}}, v^T] = E(\delta a_{\overline{T|}} v^T) - E(\delta a_{\overline{T|}})E(v^T) = E(v^T - v^{2T}) - E(1-v^T)E(v^T) =$$

$$-\ {}^2\bar{A}_x + \bar{A}_x^2 = -Var v^T.$$

2. Доказать равенство

$$\delta(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T|}} + Tv^T = \bar{a}_{\overline{T|}}.$$

Решение. Интегрирование по частям дает

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \int_0^T e^{-\delta t}dt = tv^t\big|_0^T + \delta\int_0^T tv^t dt = Tv^T + \delta(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T|}}.$$

3. Выразить величину ${}^2A_x$ через нетто-премию пожизненного аннуитета.
Решение. Равенство $1 = d\ddot{a}_x + A_x$ представим для удвоенной силы процента как

$${}^2A_x = 1 -\ {}^2\ddot{a}_x + \frac{1}{e^{2\delta}}\ {}^2\ddot{a}_x \Longleftrightarrow\ {}^2A_x = 1 - (1-v^2)\ {}^2\ddot{a}_x = 1 - (2d - d^2)\ddot{a}_x.$$

4. Выразить производную $d\ddot{a}_x/di$ в терминах нетто-премий пожизненных аннуитетов.
Решение. Из равенства для производной члена ряда

$$\frac{d}{di}(v^k\ {}_kp_x) = -kv^{k+1}\ {}_kp_x$$

следует, что

$$\frac{d}{di}\ddot{a}_x = -v(Ia)_x.$$

5. Доказать равенство

$$\alpha(m) - \beta(m)d = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}.$$

Решение. Поскольку $\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = d/d^{(m)}$, то исходное равенство эквивалентно каждому из нижеприведенных равенств

$$\alpha(m) - \beta(m)d = \frac{d}{d^{(m)}} \Longleftrightarrow \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}d + \frac{i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}d \Longleftrightarrow 0 = 0.$$

Глава 4

Регулярные премии

Ранее единовременные нетто-премии определялись как среднее значение текущих страховых выплат. Тем самым подразумевалось, что, если отвлечься от рисковой надбавки, от надбавок, связанным с необходимостью вести текущие дела, платить налоги и т. д., страхователь за будущее страховое вознаграждение должен заплатить указанную премию. Таким образом, при определении нетто-премии мы исходили из равенства средних текущих обязательств страхователя и страховщика. Как уже было рассмотрено ранее, страхователь вместо выплаты разовой премии выплачивать регулярные взносы определенной величины. При этом размер данного взноса будем назвать *регулярной премией*.

4.1 Принцип эквивалентности

Введем понятие *случайной величины убытка* как разности между текущей стоимостью страховых выплат и текущей стоимостью премий и обозначать как L. Например, для рассмотренных ранее разовых премий в случае пожизненного страхования с единичной выплатой в момент смерти величина $L = v^T - A_x$. При этом величина A_x определена нами из условия

$$E(L) = 0. \tag{4.1}$$

Аналогично обстоит дело с другими выше рассмотренными видами страхования. Условие (4.1) будем называть принципом эквивалентности и в дальнейшем использовать для определения нетто-премий в регулярном случае.

4.2 Ежегодные нетто-премии

Рассмотрим полностью дискретный случай, когда страховая сумма выплачивется в конце года смерти, взносы страхователя выплачиваются в начале года. Величина годового взноса будет определена из условия (4.1) для каждого вида страхования. Так, пусть единичная страховая выплата для пожизненного страхования производится в конце года смерти, а страхователь выплачивает в начале каждого года премию величины P_x, тогда случайная величина L определяется как

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}},\ K = 0, 1, 2, \dots,$$

и принцип эквивалентности дает

$$E(L) = A_x - P_x \ddot{a}_x = 0, \Longleftrightarrow P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Случайную величину L можно теперь представить в виде

$$L = v^{K+1} - P_x \frac{1 - v^{K+1}}{d} = (1 + \frac{A_x}{\ddot{a}_x}) v^{K+1} - \frac{A_x}{d\ddot{a}_x} = (\frac{1}{d\ddot{a}_x}) v^{K+1} - \frac{A_x}{d\ddot{a}_x},$$

откуда выражение для дисперсии вытекает как

$$Var(L) = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2}.$$

В общем случае функция потерь выглядит как разность

$$b_{K+1} v_{K+1} - PY,$$

где $b_{K+1},\ v_{K+1}-$ соответственно страховая сумма и дисконтирующая функция, а $P,\ Y-$ подлещая определению нетто-премия и текущая стоимость рассматриваемого аннуитета.

Рассмотрим $n-$годичное смешанное страхование жизни с единичной страховой суммой и выплатами ежегодной премии-пренумерандов течение h лет. Здесь величина потерь

$$L = Z - PY,$$

случайные величины Z, Y равны

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ v^n, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & \text{если} \quad 0 \le K < h \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & \text{если} \quad K \ge h. \end{cases}$$

В таком случае условие (4.1) дает

$$P = {}_hP_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}}$$

Пусть теперь страховым вознаграждением является отсроченный на n лет пожизненный аннуитет, а страховые премии выплачиваются в течение $h < n$ лет. Тогда случайная величина $L = Z - PY$, определяется по случайным величинам Z, Y :

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}}, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < h \\ \ddot{a}_{\overline{h}|}, & \text{если} \quad K \ge h, \end{cases}$$

Нетто-премия для данного случая равна

$$P = {}_hP({}_{n|}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}.$$

Из приведенных случаев видно, что общий принцип обозначений для регулярных нетто-премий состоит в том, что префикс у символа P служит для характеристики взносов страхователя, а индекс, или в сложных случаях типа последнего приведенного выше, в скобках - для описания страхового вознаграждения.

Рассмотрим случайную величину потерь для страхования чистого дожития до возраста $x+n$, при условии выплат взносов в начале каждого года. Здесь убыток

$$L = \begin{cases} -P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ v^n - P\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

откуда ежегодная нетто-премия для страхования чистого дожития с выплатами взносов в течение n лет равна

$$P = P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Из равенства $A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ получаем, что ежегодная нетто-премия для смешанного страхования жизни равна сумме нетто премий для $n-$годичного страхования и чистого дожития:

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

4.3 Кратные премии

Здесь мы рассмотрим случай, когда премии выплачиваются m раз в год, при этом размер одной выплаты равен $m-$ части годовой премии. В таком случае годовая премия обозначается в зависимости от вида страхования как

$$P_x^{(m)}, P_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \ {}_hP({}_{n|}\ddot{a}_x)^{(m)},$$

то есть прибавлением верхнего индекса $^{(m)}$ к соответствующей годовой нетто-премии с выплатой один раз в год. При этом принцип вычисления таких премий ничем не отличается от случая годовых выплат. Например, ежегодная нетто-премия для смешанного страхования жизни равна

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}.$$

Сравним величины годовых премий в случае $m-$разовых и ежегодных выплат. Рассмотрим случай пожизненного страхования. Здесь имеем равенство

$$A_x = P_x \ddot{a}_x = P_x^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} = P_x^{(m)}(\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)),$$

откуда

$$P_x^{(m)} = \frac{P_x \ddot{a}_x}{\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)} = \frac{P_x}{\alpha(m) - \beta(m)/\ddot{a}_x} < P_x.$$

Аналогичные неравенства справедливы и для других видов страхования.

Рассмотрим пример. Страхователь возраста 35 лет покупает полис 2 - хгодичного смешанного страхования жизни с общей страховой суммой 10000. Выплата по случаю смерти в конце года смерти, взносы-пренумерандо полугодовые, норма доходности $i = 0.1$. Требуется вычислить годовую нетто-премию, предполагая равномерное распределение смертей на каждом возрастном целочисленном интервале и пользуясь таблицей на стр. 15. Как изменится эта нетто-премия, если выплаты по смерти будут в момент смерти?

Сначала вычислим

$$\ddot{a}_{35:\overline{2}|} = 1 + (1.1)^{-1}\frac{l_{36}}{l_{35}} = 1 + \frac{92369}{1.1 \times 92629} = 1.9065,$$

$$A^1_{35:\overline{2}|} = \frac{l_{35} - l_{36}}{1.1 \times l_{35}} + \frac{l_{36} - l_{37}}{1.1^2 \times l_{35}} = \frac{92629 - 92369}{1.1 \times 92629} + \frac{92369 - 92096}{1.1^2 \times 92629} = 0.004987,$$

$$A_{35:\overset{1}{\overline{2}|}} = \frac{l_{37}}{1.1^2 \times l_{35}} = \frac{92096}{1.1^2 \times 92629} = 0.821691,$$

$$\alpha(2) = \frac{0.1 \times 0.1/1.1}{2(\sqrt{1.1} - 1)2(1 - \sqrt{1/1.1})} = 1.000568, \;\; \beta(2) = \sqrt{1.1}/4 = 0.262202.$$

Отсюда следует, что

$$\ddot{a}^{(2)}_{35:\overline{2}|} = \alpha(2)\ddot{a}_{35:\overline{2}|} - \beta(2)[1 - A_{35:\overset{1}{\overline{2}|}}] = 1.000568 \times 1.9065 - 0.262202(1 - 0.821691) = 1.86083,$$

и значение искомой нетто-премии равно

$$10000P(A_{35:\overline{2}|})^{(2)} = A_{35:\overline{2}|}/\ddot{a}^{(2)}_{35:\overline{2}|} = 10000(0.004987 + 0.821691)/1.86083 = 4442.52.$$

Для сравнения нетто-премия в случае годовых взносов равна

$$10000P(A_{35:\overline{2}|}) = 10000(0.004987 + 0.821691)/1.9065 = 4336.1.$$

Для выплат в момент смерти величин премии

$$10000P(\bar{A}_{35:\overline{2}|})^2 = (1.049206 \times 0.004987 + 0.821691)/1.86083 = 4443.84,$$

как видно отсюда, изменится очень незначительно. Это объясняется тем, что для выбранного возраста показатели смертности низки и выплаты по смерти не влияют существенно на премию.

4.4 Задачи

1. Страховщик продает полис по 4-хгодичному страхованию жизни клиенту, для которого вероятности смерти на первых четырех годах равны соответственно 0.125, 0.125, 0.25 и 0.5. Страховая сумма, равная 1, выплачивается в конце года смерти, а страховая премия величины P вносится в начале каждого из четырех лет при условии дожития. Требуется определить величину P и дисперсию случайной величины ущерба, если значение $i = 0.1$.

Решение. Для решения задачи рассмотрим таблицу

k	v^{k+1}	$\ddot{a}_{\overline{k+1}\vert}$	$P(K=k)$
0	0.909	1	0.125
1	0.826	1.909	0.125
2	0.751	2.735	0.25
3	0.683	3.487	0.5

Из данной таблицы, согласно условию баланса $EL = E[v^{K+1}] - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = 0$, получаем $P = E[v^{K+1}]/E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = 0.3058$. Теперь $Var(L) = E[L^2] = 0.122$.

2. Докажите, что если интенсивность смертности μ_x возрастает с возрастом x, то величина $\overline{P}(\overline{A}_x) > \mu_x$.

Решение. Поскольку

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt > \mu_x \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x dt = \mu_x \overline{a}_x,$$

то $\overline{P}(\overline{A}_x) = \overline{A}_x / \overline{a}_x > \mu_x$.

3. Докажите равенство

$${}_{20}P^1_{x:\overline{30}|} - P^1_{x:\overline{20}|} = \ {}_{20}P(\ {}_{20|10}A_x).$$

Решение. Требуемое равенство получается делением на $\ddot{a}_{x:\overline{20}|}$ равенства

$$A^1_{x:\overline{30}|} = A^1_{x:\overline{20}|} + \ {}_{20|10}A_x.$$

4. Докажите равенство

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{n}|}} = P^1_{x:\overline{n}|} + d.$$

Решение. Требуемое равенство получается из цепочки эквивалентных равенств

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{n}|}} = P^1_{x:\overline{n}|} + d \Longleftrightarrow \frac{1 - \ {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^1_{x:\overline{n}|} + d \Longleftrightarrow$$

$$1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ {}_nE_x = P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \Longleftrightarrow A^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|},$$

поскольку $1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}$.

5. Определите значение $P^1_{x:\overline{n}|}$, если известно, что $_nP_x = 0.04625$, $P_{x:\overline{n}|} = 0.06$, $A_{x+n} = 0.725$.

Решение. Поскольку $A_x = {}_nP_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, то, переписав равенство

$$A_x = P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}A_{x+n}$$

в виде $_nP_x = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}A_{x+n}$ и учитывая, что $P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = 0.06$, получаем $P^1_{x:\overline{n}|} = 0.01$.

6. Страхователь в возрасте x покупает полис бессрочного страхования жизни со страховой суммой равной 1. Выплата по смерти производится в конце года смерти, срок уплаты премий - начало каждого года в течение всей жизни. Найдите величину годовой премии в следующих случаях:

а. $M_x = 100$, $N_x = 2000$.

б. $M_x = 100$, $i = 0.0526$, $D_x = 200$.

в. $M_x = 100$, $N_x = 2000$, $D_x = 200$, а премии уплачиваются в начале каждого месяца.

Решение. а. Поскольку $A_x = M_x/D_x$, $\ddot{a}_x = N_x/D_x$, то величина $P_x = M_x/N_x = 0.05$.

б. $P_x = A_x/\ddot{a}_x = dA_x/(1 - A_x) = 0.0499\frac{M_x/D_x}{1-M_x/D_x} = 0.0499$.

в. $P_x^{(12)} = A_x/\ddot{a}_x^{(12)} = A_x/(\alpha(12)\ddot{a}_x - \beta(12))$. Нужные коэффициенты найдем из равенства $1 = d\ddot{a}_x + A_x = d(N_x/D_x) + M_x/D_x$, откуда $d = 0.05$, $i = 1/19 = 0.0526316$, $i^{(12)} = 0.051403$, $d^{(12)} = 0.0511836$, $\alpha(12) = id/(i^{(12)}d^{(12)}) = 1.000224$, $\beta(12) = (i - i^{(12)})/(i^{(12)}d^{(12)}) = 0.4669724$. Теперь

$$P_x^{(12)} = \frac{M_x/D_x}{\alpha(12)N_x/D_x - \beta(12)} = 0.0524368.$$

7. Страхователь в возрасте x покупает полис страхования жизни на срок n лет со страховой суммой равной 1. Годовая премия - пренумерандо за первый год равна P, за последующие годы - $2P$. Требуется определить значение P, если $M_x = 100$, $M_{x+n} = 75$, $N_x = 2000$, $D_x = 200$, $N_{x+n} = 1500$.

Решение. Величина P получается из равенства $A^1_{x:\overline{n}|} = 2P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - P$, из которого

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{2(N_x - N_{x+n}) - D_x} = 0.03125.$$

Литература

[1] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbit. Actuarial Mathematics. - The Sociaty of Actuaries, 1986.

[2] Х. Гербер. Математика страхования жизни. - М., "Мир", 1995.

[3] Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Введение в актуарную математику. - М.,ФАЦ МГУ, 1994.

[4] R.E. Beard, T. Pentik*ä*inen, E. Pesonen. Risk Theory. The stochastic Basis of Insurance(2nd ed.)London:methuen, 1977.

[5] А.П. Архипов и др. Основы страховой деятельности. - М., Бек, 1999.

[6] Д. Бланд. Страхование: Принципы и практика.(пер. с англ.) - М., "Финиансы и статистика", 1998.