Л.С.ПОНТРЯГИН,
В.Г.БОЛТЯНСКИЙ, Р.В.ГАМКРЕЛИДЗЕ,
Е.Ф.МИЩЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. С. ПОНТРЯГИН,
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ,
Е. Ф. МИЩЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.193
П 56
УДК 519.6

Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. **Математическая теория оптимальных процессов.— 4-е изд.— М.:** «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 392 с.

Книга содержит изложение теории оптимальных процессов, основным стержнем которой является принцип максимума. Этот принцип позволяет решать ряд задач математического и прикладного характера, которые являются вариационными, но не укладываются в классическую схему вариационного исчисления. Между тем к задачам такого неклассического типа приводят многие вопросы техники. Книга представляет интерес не только как математическая монография, посвященная изложению новой теории, но и как руководство, которым могут пользоваться инженер и конструктор.

Первое издание книги (1961 г.) подвело итог исследованиям, удостоенным Ленинской премии.

Лев Семенович Понтрягин, Владимир Григорьевич Болтянский, Реваз Валерианович Гамкрелидзе, Евгений Фролович Мищенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Редакторы *Н. Х. Розов, М. М. Горячая.*

Техн. редактор *Е. В. Морозова* Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 12370

Подписано к печати 16.12.82. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20,58. Уч.-изд. л. 18.66. Тираж 10 600 экз. Заказ № 2637 Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Печать с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, в типографии № 2 изд-ва «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 10.

П $\frac{1702070000-038}{053(02)-83}$ 19-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Физические процессы, имеющие место в технике, как правило **управляемы**, т. е. могут осуществляться различными способами в зависимости от воли человека. В связи с этим возникает вопрос о нахождении наилучшего в том или другом смысле или, как говорят, *оптимального* управления процессом. Речь может идти, например, об оптимальности в смысле быстродействия, т. е. о достижении цели процесса за кратчайшее время, о достижении этой цели с минимальной затратой энергии и т. п. Математически сформулированные, эти вопросы являются задачами **вариационного исчисления**, которое и обязано им своим возникновением. В классическом вариационном исчислении нет, однако, решения целого ряда вариационных задач, важных для современной техники. Коллективу авторов этой книги принадлежит излагаемое здесь решение значительного числа таких вариационных задач неклассического типа. Решение это в существенных чертах объединяется одним общим математическим приемом, который мы называем **принципом максимума**. Следует заметить, что все основные необходимые условия классического вариационного исчисления с обыкновенными производными следуют из принципа максимума (см. главу 5).

Мы рассматриваем здесь такие управляемые процессы, каждый из которых может быть описан системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r), \quad i = 1, \ldots, n; \quad (1)$$

здесь $x^1, \ldots, x^n$ — величины, характеризующие процесс, т. е. фазовые координаты управляемого объекта, определяющие его состояние в каждый момент времени t; $u^1, \ldots, u^r$ — параметры управления, определяющие ход процесса, и t — время. Для того чтобы ход управляемого процесса (1) был определен на некотором отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, достаточно, чтобы на этом отрезке времени были заданы (как функции времени) параметры управления $u^1, \ldots, u^r$:

$$u^j = u^j(t), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{2}$$

Тогда при заданных начальных значениях

$$x^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

решение системы (1) определяется однозначно. Подлежащая решению вариационная задача, связанная с управляемым процессом (1), заключается в следующем. Рассматривается интегральный функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r)\, dt, \tag{4}$$

где $f^0(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r)$ — заданная функция. Для каждого управления (2), заданного на некотором отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, однозначно определяется ход управляемого процесса, и интеграл (4) принимает определенное значение. Допустим, что существуют управления (2), переводящие управляемый объект из заданного начального фазового состояния (3) в предписанное конечное фазовое состояние

$$x^i(t_1) = x_1^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Требуется отыскать управление

$$\bar{u}^j(t), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{6}$$

которое осуществляет переход управляемого объекта из состояния (3) в состояние (5) таким образом, чтобы функционал (4) имел минимальное значение. При этом моменты времени t_0 и t_1 в рассматриваемой постановке задачи не фиксируется, а требуется только, чтобы в начальный момент времени объект находился в состоянии (3), а в конечный момент — в состоянии (5) и чтобы функционал (4) достигал минимума. (Случай, когда моменты времени t_0, t_1 фиксированы, также представляет интерес; он легко сводится к задачам, упоминаемым в этом введении, см. § 8.) В частном случае, когда функция $f^0(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r)$, определяющая функционал (4), тождественно равна единице, функционал (4) имеет величину $t_1 - t_0$, и наша вариационная задача превращается в оптимальную задачу быстродействия.

В технических задачах, где параметры управления $u^1, \ldots, u^r$ определяют, например, положение рулей машины, эти параметры не могут принимать произвольных значений, а подчинены некоторым ограничениям. По самому устройству описываемого системой (1) механизма параметр u^1 может, скажем, принимать лишь значения, удовлетворяющие условию

$$|u^1| \leqslant 1. \tag{7}$$

Или, например, если параметры u^1, u^2 характеризуют векторную величину на плоскости, модуль которой не превосходит единицы, а направление произвольно, то эти параметры подчинены условию

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant 1. \tag{8}$$

Вообще следует считать, что точка $(u^1, \ldots, u^r)$ должна принадлежать некоторому множеству U пространства с координатами $u^1, \ldots, u^r$, причем выбор этого множества U отражает специфику объекта (1). Множество U («область управления») в математической постановке задачи считается произвольным, но для технических задач особенно важен и характерен случай замкнутого множества U (ср. неравенства (7), (8)). Это условие означает, что для руля допустимы и его крайние положения (значения $u^1 = \pm 1$ в неравенстве (7) или граничные точки круга (8)), могущие, в частности, давать оптимальное управление. Именно это обстоятельство делает рассматриваемую вариационную задачу неклассической, так как в классическом вариационном исчислении варьируемые параметры не могут удовлетворять неравенствам типа (7), (8), включающим и равенства.

Особенно ярко демонстрирует неклассический характер нашей вариационной задачи оптимальная задача по быстродействию для системы (1), правые части которой являются линейными функциями относительно переменных $x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r$ с постоянными коэффициентами, а множество U представляет собой замкнутый выпуклый многогранник, например *куб*, определяемый неравенствами:

$$|u^j| \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, r.$$

В этом случае оказывается, что оптимальное управление (6) осуществляется точкой $(u^1(t), \ldots, u^r(t))$, поочередно находящейся в различных вершинах многогранника U. Правила, согласно которым управляющая точка переходит скачками из одной вершины в другую, и дают закон оптимального управления. Эта линейная вариационная задача, имеющая важные технические приложения, решается на основе общих методов в главе 3. Классические же методы для решения такой задачи совершенно неприменимы.

Из сказанного о перескоках оптимально управляющей точки с вершины на вершину многогранника U следует, что класс допустимых управлений (2) нельзя считать состоящим из непрерывных функций. Мы предполагаем обычно, что он состоит из *кусочно-непрерывных* функций. Фазовые координаты $x^1, \ldots, x^n$ считаются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми функциями времени. В этих предположениях необходимые условия оптимальности формулируются в виде *принципа максимума* (см. главу 1), который доказывается в главе 2.

Если рассматриваемый объект представляет собой механическую систему, то часть $x^1, \ldots, x^k$ фазовых координат описывает ее геометрическое состояние, а часть $x^{k+1}, \ldots, x^{2k}$ $(2k = n)$ — ее скорость. В некоторых задачах целью управляемого процесса в этом случае может быть не попадание объекта в определенную точку $(x_1^1, \ldots, x_1^n)$ фазового пространства, а прибытие механической системы в определенное пространственное положение $(x_1^1, \ldots, x_1^k)$ при произвольных скоростях в конце процесса. Таким обазом, здесь имеет место вариационная задача об оптимальном переходе объекта из определенной начальной точки $x_0^1, \ldots, x_0^n$ фазового пространства в произвольную точку k-мерной плоскости, определяемой уравнениями

$$x^1 = x_1^1, \ldots, x^k = x_1^k.$$

Мы видим, что ранее сформулированная оптимальная задача не охватывает ряда важных проблем. Ввиду этого в § 6 главы 1 разбирается вопрос об оптимальном переходе объекта с некоторого начального многообразия M_0 точек фазового пространства на некоторое конечное многообразие M_1, причем размерности многообразий M_0 и M_1 произвольны (в частности, когда они обе равны нулю, мы получаем первоначальную задачу).

Совершенно ясно, что не только управляющие параметры объекта, но и его фазовые координаты, по самому характеру технической задачи, должны иногда подчиняться некоторым ограничениям. Если, например, речь идет о движении самолета и x^1 обозначает его высоту над землей, то должно быть выполнено неравенство $x^1 \geqslant h > 0$, где h — минимальная допустимая высота полета. Неравенство $x^1 \geqslant h$ вовсе не вытекает из свойств системы уравнений (1) и из неравенств, налагаемых на управляющие параметры, а является совершенно независимым. Задача об оптимальном управлении объектом, при котором изображающая его точка фазового пространства должна все время оставаться в некоторой замкнутой области G фазового пространства, решается в главе 6. Предполагается при этом, что область G имеет кусочно-гладкую границу. Движение объекта в этих условиях протекает частично внутри области G, подчиняясь там обычному принципу максимума, частично же по границе области G, подчиняясь там усложненному принципу максимума. Переходы от кусков траекторий, проходящих внутри G, к кускам траекторий, проходящим по границе области G, подчиняются своеобразным правилам, напоминающим законы преломления света и в некотором смысле обобщающим их.

До сих пор речь шла об оптимальном управлении, приводящем объект в заданную точку или на заданное подмногообразие фазового пространства. Задачей оптимального управления может быть, однако, и задача об оптимальном попадании в движущуюся точку фазового пространства. Допустим, что в фазовом пространстве имеется движущаяся точка

$$x^i = \theta^i(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Тогда возникает задача об оптимальном приведении объекта (1) в совпадение с движущейся точкой (9). Эта задача легко сводится к рассмотренной. Достаточно ввести новые переменные, положив

$$y^i = x^i - \theta^i(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

В результате этого преобразования управляемая система (1) превращается в новую, правда, уже не автономную, а целью управляемого процесса становится приведение нового объекта $(y^1, \ldots, y^n)$ в неподвижную точку $(0, \ldots, 0)$ фазового пространства. Так как основные результаты легко распространяются и на неавтономные управляемые процессы (см. § 7), то задача оказывается решенной.

Здесь мы считали, что движение преследуемой точки (9) определено заранее на протяжении всего рассматриваемого промежутка времени. Совершенно новый и практически важный вопрос возникает, когда движение преследуемого объекта не известно заранее, а сведения о нем поступают только с течением времени. Для того чтобы решать такую задачу о преследовании объекта, нужно иметь некоторые данные о его поведении. Весьма важным представляется случай, когда преследуемый объект является управляемым, так что его движение описывается системой уравнений

$$\frac{dz^i}{dt} = g^i(z^1, \ldots, z^n, v^1, \ldots, v^s), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

Задача заключается в том, чтобы, зная технические возможности преследуемого объекта, т. е. систему уравнений (10), и его положение в каждый данный момент времени, определить управление преследующего объекта в тот же момент времени так, чтобы преследование осуществлялось оптимальным образом. В такой постановке задача рассматривается в теории дифференциальных игр, которая здесь не затрагивается. В главе 7 решается другая задача преследования. Предполагается, что в начальный момент положение преследуемого объекта известно, а дальнейшее его поведение описывается вероятностным образом, именно, процесс его движения считается марковским. В этих предположениях ищется такое управление преследующего объекта (1), при котором встреча некоторой малой окрестности объекта (1) с преследуемым объектом является наиболее вероятной.

* * *

За семь лет, прошедших с первого издания этой книги, принцип максимума оправдал себя, найдя многочисленные приложения. Поэтому уже здесь стоит остановиться в нескольких словах на его характере, происхождении и доказательстве. Для определенности ограничимся задачей быстродействия. Именно для этого случая принцип максимума был в качестве гипотезы высказан Л. С. Понтрягиным.

Суть его заключается в следующем. Каждому допустимому уравнению $u^1(t), \ldots, u^r(t)$, заданному на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и произвольному постоянному вектору ψ фазового пространства определенным образом ставится в соответствие функция

$$H(t, u^1, \ldots, u^r)$$

переменного t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и допустимых управляющих параметров. Оказывается, что если взятое управление оптимально, то существует такое значение вектора $\psi \neq 0$, что при каждом фиксированном значении t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, величина H, рассматриваемая как функция допустимых значений управляющих параметров, достигает своего максимума при $u^j = u^j(t)$, $j = 1, \ldots, r$. Из этого видно, что, имея дело с принципом максимума, приходится сравнивать между собой не только близкие одно к другому управления. В этом его отличие от классических теорем вариационного исчисления, сила и некоторая трудность доказательства.

Первое доказательство принципа максимума было дано Р. В. Гамкрелидзе для линейных управляемых систем. Он же построил полную теорию этих систем. Идея его доказательства следующая: будем считать, что рассматриваемое оптимальное управление переводит точку x_0 в точку x_1. Если вместо оптимального управления взять произвольное допустимое управление, заданное на прежнем отрезке, то оно переведет точку x_0 в некоторую точку $x(t_1)$. Ввиду линейности совокупность всех получаемых так точек $x(t_1)$ образует выпуклое тело P. Из оптимальности исходного управления вытекает, что точка x_1 лежит на границе этого тела. Таким образом, существует опорная плоскость к телу P, проходящая через точку x_1, а вектор ψ, перпендикулярный к этой плоскости и направленный от тела P, и является тем, который используется при построении функции H.

Для нелинейной управляемой системы множество всех точек $x(t_1)$, получаемых с помощью всевозможных допустимых управлений, невыпукло и необозримо. Использование для линеаризации задачи управлений, мало отличающихся от оптимального управления, не соответствует характеру принципа максимума. В общем, нелинейном случае принцип максимума доказал В. Г. Болтянский, который вслед за тем построил основы нелинейной теории оптимального управления. Именно, он удачно выбрал класс управлений для сравнения с оптимальным, применив вариации Макшейна, т. е. рассмотрев те допустимые управления, которые отклоняются от оптимального лишь на конечном числе малых интервалов времени, но на каждом интервале отклоняются произвольно. Этим самым задача была линеаризована: множество точек $x(t_1)$, соответствующих указанным управлениям, хотя и невыпукло, но близко к выпуклому, так что возникла возможность построения опорной плоскости и перпендикулярного к ней вектора ψ.

Ноябрь 1968 года *Л. Понтрягин*

ГЛАВА 1

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Допустимые управления

Мы будем рассматривать поведение объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется n действительными числами $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (например, координатами и скоростями). Векторное пространство X векторной переменной $x = (x^1, \ldots, x^n)$ является фазовым пространством рассматриваемого объекта. Поведение (движение) объекта заключается (с математической точки зрения) в том, что переменные $x^1, \ldots, x^n$ меняются с течением времени. Предполагается, что движением объекта можно управлять, т. е. что объект снабжен некоторыми «рулями», от положения которых зависит движение объекта. Положения «рулей» характеризуются точками u некоторой *области управления* U, которая может быть любым множеством некоторого r-мерного евклидова пространства E_r; задание точки $u = (u^1, u^2, \ldots, u^r) \in U$ равносильно заданию системы числовых параметров $u^1, u^2, \ldots, u^r$. В приложениях важен случай, когда U является замкнутой областью пространства E_r. В частности, область управления U может быть *кубом* r-мерного пространства переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$:

$$|u^j| \leqslant 1, \; j = 1, 2, \ldots, r, \tag{1}$$

или каким-либо другим замкнутым ограниченным множеством этого r-мерного пространства. Физический смысл рассмотрения замкнутой и ограниченной (в пространстве переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$) области управления U ясен: управляющими параметрами $u^1, u^2, \ldots, u^r$ могут служить количество подаваемого в двигатель топлива, температура, сила тока, напряжение и т. п., которые не могут принимать сколь угодно больших значений. Кроме того, в силу технической конструкции управляющей части объекта, между управляющими параметрами u^1, $u^2, \ldots, u^r$ могут существовать связи, выражаемые одним или несколькими уравнениями вида $\varphi(u^1, u^2, \ldots, u^r) = 0$. В этом случае область управления U может геометрически иметь более или менее сложный характер. Если, например, имеются два управляющих параметра u^1, u^2, которые в силу конструкции объекта имеют вид $u^1 = \cos\varphi$, $u^2 = \sin\varphi$, где φ — некоторый (произвольно задаваемый) угол, то областью управления будет окружность

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 = 1. \tag{2}$$

В дальнейшем мы просто будем говорить об *области управления* U и ее точках $u \in U$ и будем представлять себе U в виде некоторого множества в пространстве переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$, считая его «точкой» u произвольную входящую в U систему управляющих параметров $u = (u^1, u^2, \ldots, u^r)$ (см., например, (1) или (2)).

Каждую функцию $u = u(t)$, определенную на некотором отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ времени t и принимающую значения в области управления U, мы будем называть *управлением*. Так как U есть множество в пространстве управляющих параметров $u^1, u^2, \ldots, u^r$, то каждое управление

$$u(t) = (u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t))$$

является вектор-функцией (заданной на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$), значения которой лежат в области управления U. В дальнейшем, в зависимости от характера поставленной задачи, мы будем накладывать на управление $u(t)$ различные условия (кусочной непрерывности, кусочной дифференцируемости и т. п.). Управления, удовлетворяющие этим условиям, будем называть допустимыми управлениями. *В этой главе мы будем считать допустимыми управлениями произвольные* кусочно-непрерывные управления (со значениями в области управления U), т. е. такие управления $u = u(t)$, каждое из которых непрерывно для всех рассматриваемых t, за исключением лишь конечного числа моментов времени, где функция $u(t)$ может терпеть разрывы первого рода. Во избежание недоразумений отметим, что, по определению разрывов первого рода, в точке разрыва τ предполагается существование конечных пределов

$$u(\tau - 0) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t < \tau}} u(t), \quad u(\tau + 0) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t > \tau}} u(t).$$

Из этого, в частности, следует, что всякое управление $u(t)$ ограничено (даже если область U не является ограниченной).

Значение кусочно-непрерывного управления $u(t)$ в точке разрыва не играет сколько-нибудь существенной роли в дальнейшем. Однако для определенности нам удобно предполагать, что в каждой точке разрыва τ значение управления $u(t)$ равно пределу слева:

$$u(\tau) = u(\tau - 0), \tag{3}$$

и что каждое рассматриваемое управление $u(t)$ непрерывно в концах отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, на котором оно задано.

Итак, *допустимым управлением* мы условимся в этой главе называть всякую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, со значениями в области управления U, удовлетворяющую условию (3) в точках разрыва и непрерывную в концах отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, на котором она задана. Кусочно-непрерывные управления соответствуют предположению о «безынерционности» рулей, так как значения функции $u(t)$ могут (в момент разрыва) мгновенно перескакивать из одной точки области управления в другую. Этот класс допустимых управлений, по-видимому, наиболее интересен для технических применений развиваемой здесь теории.

§ 2. Постановка основной задачи

Мы будем предполагать, что закон движения объекта (и закон воздействия «рулей» на это движение) записывается в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r) = f^i(x, u), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \tag{5}$$

где $f(x, u)$ — вектор с координатами

$$f^1(x, u),\ f^2(x, u), \ldots,\ f^n(x, u).$$

Функции f^i определены для любых значений векторной переменной $x \in X$ и для значений u, принадлежащих области управления U. Они предполагаются непрерывными по совокупности переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, u$ и непрерывно дифференцируемыми по $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Иначе говоря, функции

$$f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u)}{\partial x^j};$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

определены и непрерывны на прямом произведении $X \times U$.

Заметим, что система (4) *автономна*, т. е. правые ее части не зависят явно от времени t. Случай, когда правые части зависят от t, мы обсудим ниже (см. § 7).

Если задан закон управления, т. е. выбрано некоторое допустимое управление $u = u(t)$, то уравнение (5) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \tag{6}$$

откуда (при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$) однозначно определяется закон движения объекта $x = x(t)$, т. е. решение уравнения (6), определенное на некотором отрезке времени. Именно, если управление $u(t)$ задано на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ — его точки разрыва (первого рода), причем $t_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots \ldots < \theta_k < t_1$, то мы рассмотрим сначала уравнение (6) на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$, где оно имеет непрерывную правую часть. Обозначим через $x(t)$ решение этого уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Если это решение определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ и имеет в точке θ_1 значение $x(\theta_1)$, то мы можем рассмотреть уравнение (6) на отрезке $\theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2$, воспользовавшись начальным значением $x(\theta_1)$. Это решение также обозначим через $x(t)$. Таким образом, построенное решение $x(t)$ непрерывно во всех точках своего определения и, в частности, в «точке сопряжения» θ_1. Если теперь решение $x(t)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_2$ и имеет в точке θ_2 значение $x(\theta_2)$, то мы можем рассмотреть уравнение (6) на отрезке $\theta_2 \leqslant t \leqslant \theta_3$, воспользовавшись начальным значением $x(\theta_2)$ и т. д. Полученное таким образом решение $x(t)$ уравнения (6) является непрерывным и кусочно-дифференцируемым; именно, во всех точках, кроме $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, решение $x(t)$ (там, где оно определено) является непрерывно дифференцируемым. Построенное решение $x(t)$ мы будем называть решением системы (4) (или уравнения (5)), *соответствующим* управлению $u(t)$ при начальном условии $x(t_0) = x_0$. Это решение может не быть определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ задания управления $u(t)$ (оно может уйти в бесконечность).

Мы будем говорить, что допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *переводит* фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, если соответствующее ему решение $x(t)$ уравнения (5) (или, что то же, (6)), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и проходит в момент t_1 через точку x_1, т. е. удовлетворяет также конечному условию $x(t_1) = x_1$.

Предположим теперь, что задана еще одна функция $f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n, u) = f^0(x, u)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, на всем пространстве $X \times U$. Тогда основная задача (отыскание оптимальных управлений) может быть сформулирована следующим образом.

В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{7}$$

принимает наименьшее возможное значение; здесь $x(t)$ — решение уравнения (5) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующее управлению $u(t)$, а t_1 — момент прохождения этого решения через точку x_1.

Отметим, что (при фиксированных x_0, x_1) верхний и нижний пределы t_0, t_1 в интеграле (7) не являются фиксированными числами, а зависят от выбора управления $u(t)$, переводящего фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 (эти пределы определяются из соотношений $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$). О решении задачи для случая закрепленных пределов мы будем говорить ниже (см. § 8).

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной выше задачи, называется *оптимальным управлением, соответствующим переходу из положения x_0 в положение x_1*, а соответствующая траектория $x(t)$ — *оптимальной траекторией*. Таким образом, основная задача заключается в отыскании оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Важным частным случаем поставленной выше оптимальной задачи является случай, когда

$$f^0(x, u) \equiv 1.$$

В этом случае функционал (7) принимает вид:

$$J = t_1 - t_0, \tag{8}$$

и оптимальность управления $u(t)$ означает *минимальность времени перехода из положения x_0 в положение x_1*. Задачу отыскания оптимальных управлений (и траекторий) в этом случае мы будем называть **задачей об оптимальном быстродействии**.

Для формулировки доказательства необходимого условия оптимальности нам будет удобно дать иную формулировку поставленной выше задачи. Именно, добавим к фазовым координатам $x^1, x^2, \ldots, x^n$, меняющимся по закону (4), еще одну координату x^0, закон изменения которой имеет вид

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n, u),$$

где f^0 — функция, участвующая в определении функционала J (см. (7)). Иначе говоря, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r) = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

правые части которой не зависят от переменного x^0. Вводя в рассмотрение вектор

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x^0, x)$$

$(n+1)$-мерного векторного пространства $\mathbf{X}$, мы можем систему (9) переписать в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \tag{10}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ — вектор пространства $\mathbf{X}$, имеющий координаты $f^0(x, u), \ldots, f^n(x, u)$. Заметим, что вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ не зависит от координаты x^0 вектора $\mathbf{x}$.

Пусть теперь $u(t)$ — некоторое допустимое управление, переводящее x_0 в x_1, а $x = x(t)$ — соответствующее решение уравнения (5) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Обозначим через $\mathbf{x}_0$ точку $(0, x_0)$, т. е. точку пространства $\mathbf{X}$, имеющую координаты $0, x_0^1, \ldots, x_0^n$, где $x_0^1, \ldots, x_0^n$ — координаты точки x_0 в пространстве X. Тогда ясно, что решение уравнения (10), соответствующее управлению $u(t)$, с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и имеет вид

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t))\, dt,$$

$$x = x(t).$$

В частности, при $t = t_1$ мы получим

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt = J, \quad x = x_1,$$

т. е. решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (10) с начальным условием $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ проходит при $t = t_1$ через точку $\boldsymbol{x} = (J, x_1)$. Иначе говоря, обозначив через П прямую линию, проходящую в пространстве X через точку $\boldsymbol{x} = (0, x_1)$ параллельно оси x^0 (эта прямая П образована всеми точками (ξ, x_1), где число ξ произвольно; рис. 1), мы

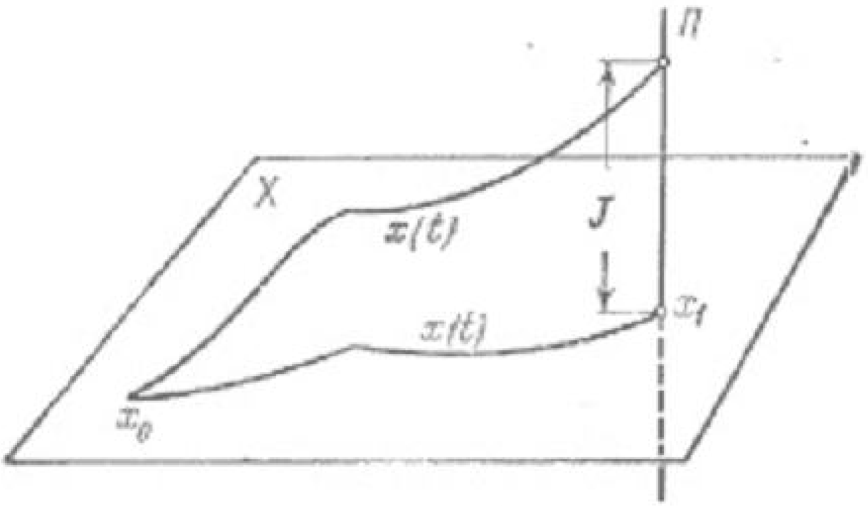

Рис. 1.

можем сказать, что решение $\boldsymbol{x}(t)$ проходит в момент $t = t_1$ через точку, лежащую на прямой П и имеющую координату $x^0 = J$. Обратно, если $u(t)$ — такое допустимое управление, что соответствующее ему решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (10) с начальным условием $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 = (0, x_0)$ проходит в некоторый момент t_1 через точку $\boldsymbol{x}_1 \in П$ с координатой $x^0 = J$, то управление $u(t)$ переводит (в пространстве X) фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, причем функционал (7) принимает значение J.

Таким образом, мы можем сформулировать поставленную выше оптимальную задачу в следующем эквивалентном виде.

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве X даны точка $\boldsymbol{x}_0 = (0, x_0)$ и прямая П, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $(0, x_1)$. Среди всех допустимых *управлений $u = u(t)$, обладающих тем свойством, что соответствующее решение $x(t)$ уравнения* (10) *с начальным условием $x(t_0) = x_0$ пересекает прямую* Π, *найти такое, для которого точка пересечения с прямой* Π *имеет наименьшую координату x^0.*

Эту задачу мы и будем решать. Термины «оптимальное управление» и «оптимальная траектория» мы сохраним и для задачи в этой новой формулировке.

Отметим некоторые простые свойства оптимальных управлений и траекторий, непосредственно вытекающие из формулировки основной задачи. Прежде всего, из автономности системы (9) вытекает, что при сдвиге вдоль оси t (рис. 2) свойства управлений не меняются.

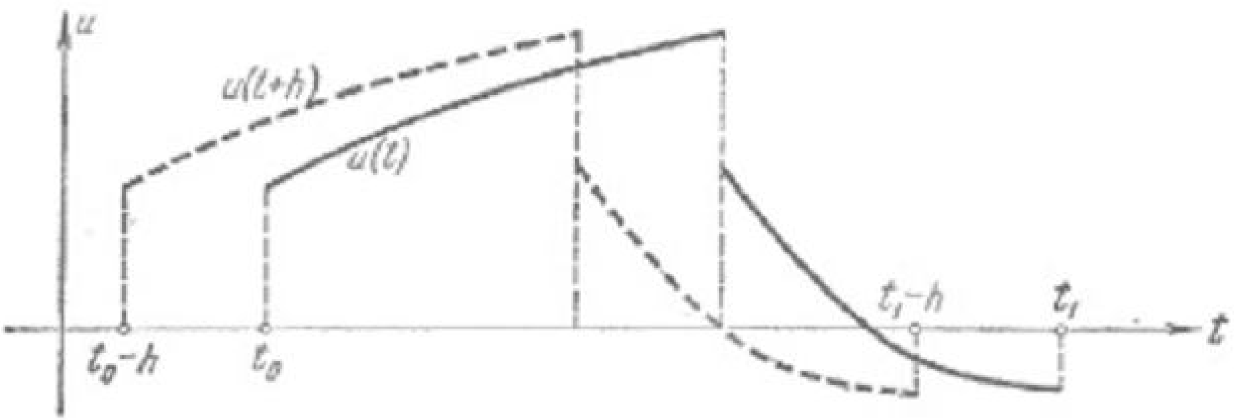

Рис. 2

Иначе говоря, если управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводит фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 и придает функционалу (7) значение J, то при любом действительном h управление $u(t+h)$, $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_1 - h$, также переводит фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 и придает функционалу (7) то же значение J. Это позволяет перемещать начальную точку t_0 отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, на котором задано управление $u(t)$, в любую точку оси времени.

Далее, если $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — конечная система точек фазового пространства X и если существует управление $u_i(t)$, переводящее фазовую точку из положения x_{i-1} в положение x_i и придающее функционалу (7) значение J_i, $i = 1, \ldots, k$, то существует управление $u(t)$, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_k и придающее функционалу (7) значение $J_1 + J_2 + \ldots + J_k$.

В самом деле, в силу возможности сдвигать управления вдоль оси времени, мы можем считать, что отрезки, на которых определены управления $u_i(t)$, непосредственно примыкают один к другому (рис. 3), т. е. что управление $u_i(t)$ задано на отрезке $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, где $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$. Обозначим через $u(t)$ управление, заданное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_k$ и совпадающее на полуинтервале $t_{i-1} < t \leqslant t_i$ с управлением $u_i(t)$, т. е. «объединение» всех управлений $u_i(t)$. Непосредственно проверяется, что управление $u(t)$ переводит фазовую точку из положения x_0 в положение x_k и придает функционалу (7) значение $J_1 + J_2 + \ldots + J_k$. Заметим, что указанная операция «объединения» нескольких управлений была бы невозможна в классе **непрерывных** управлений (ибо в точках $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ построенное управление $u(t)$ может иметь разрывы первого рода, даже если управления $u_i(t)$ были непрерывными; рис. 3).

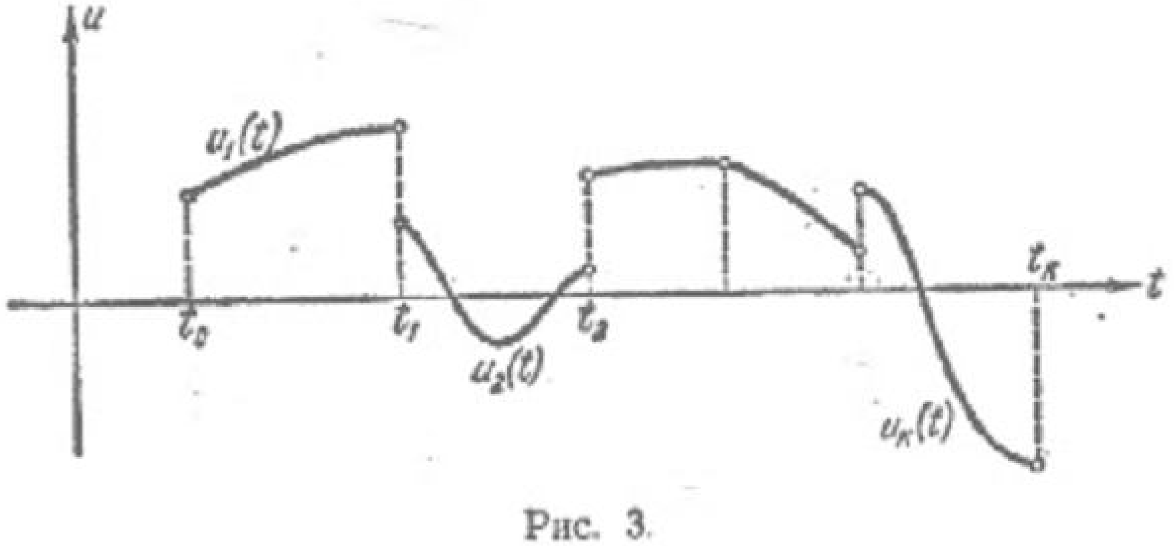

Рис. 3.

Из сказанного выше легко следует, что *всякий кусок оптимальной траектории также является оптимальной траекторией* (и аналогично для оптимальных управлений). Более точно, пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, соответствующее переходу из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория. Тогда, если $t_0 \leqslant \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1$, то управление $u(t)$, рассматриваемое на отрезке $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, является оптимальным управлением, соответствующим переходу из положения $x(\tau_0)$ в положение $x(\tau_1)$, а $x(t)$, $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, является соответствующей оптимальной траекторией (рис. 4). В самом деле, обозначим значения интеграла (7), взятого по отрезкам $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $\tau_0 \leqslant \leqslant t \leqslant \tau_1$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant t_1$, соответственно через J_1, J_2, J_3. Тогда управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, придает функционалу (7) значение $J = J_1 + J_2 + J_3$. Если бы управление $u(t)$, рассматриваемое на отрезке $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, не было оптимальным, то существовало бы некоторое управление $v(t)$, переводящее фазовую точку из положения $x(\tau_0)$ в положение $x(\tau_1)$ и придающее функционалу (7) значение $J_2' < J_2$. Но тогда мы получили бы управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 и придающее функционалу (7) значение $J_1 + J_2' + J_3 < J$, что противоречит оптимальности управления $u(t)$, $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_1$.

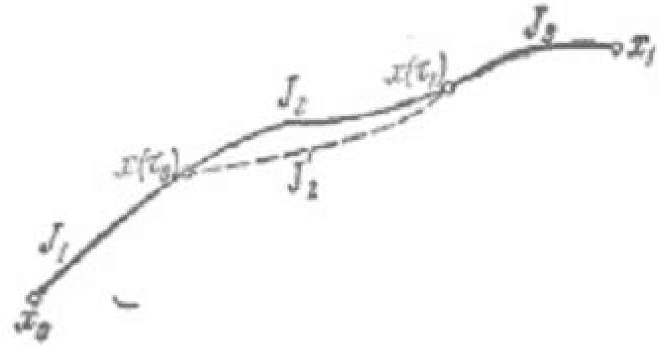

Рис. 4.

§ 3. Принцип максимума

Переходим теперь к формулировке теоремы, дающей решение поставленной основной задачи. (Доказательство этой теоремы приведено во второй главе.) Для формулировки теоремы, кроме основной системы уравнений (9):

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

мы рассмотрим еще одну систему уравнений относительно вспомогательных (дополнительно рассматриваемых) переменных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i} \psi_\alpha, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Если мы выбрали некоторое допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и имеем соответствующую фазовую траекторию $x(t)$ системы (11) с начальным условием $x(t_0)=x_0$, то система (12) принимает вид

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^\alpha(x(t),u(t))}{\partial x^i}\psi_\alpha,\quad i=0,1,\ldots,n. \tag{13}$$

Эта система линейна и однородна; поэтому при любых начальных условиях для ψ_i она допускает единственное решение

$$\psi=(\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n)$$

(определенное на всем отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, на котором определены управление $u(t)$ и траектория $x(t)$). Как и решение $x(t)$ системы (11), решение системы (13) состоит из непрерывных функций $\psi_i(t)$, имеющих всюду, кроме конечного числа точек (а именно, точек разрыва управления $u(t)$), непрерывные производные по t. Всякое решение системы (13) (при любых начальных условиях) мы будем называть решением системы (12), *соответствующим* выбранному управлению $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$.

Мы теперь объединим системы (11), (12) одной записью, для чего рассмотрим следующую функцию $\mathscr{H}$ переменных $x^1,\ldots,x^n,\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_n,u^1,\ldots,u^r$:

$$\mathscr{H}(\psi,x,u)=(\psi,f(x,u))=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(x,u).$$

Непосредственно проверяется, что написанные выше системы (11) и (12) могут быть с помощью этой функции $\mathscr{H}$ записаны в виде следующей гамильтоновой системы:

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\psi_i},\qquad i=0,1,\ldots,n, \tag{14}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^i},\quad i=0,1,\ldots,n. \tag{15}$$

Итак, взяв произвольное допустимое (т. е. кусочно-непрерывное) управление $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, и начальное условие $x(t_0)=x_0$, мы можем найти *соответствующую* (т. е. удовлетворяющую системе (14)) траекторию $x(t)=(x^0(t),x^1(t),\ldots,x^n(t))$. После этого мы можем находить *соответствующую* функциям $u(t)$ и $x(t)$ решения

$$\psi(t) = (\psi_0(t),\ \psi_1(t),\ \ldots,\ \psi_n(t))$$

системы (15). Еще раз подчеркнем, что вектор-функции $x(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и всюду, кроме конечного числа точек, имеют непрерывные производные по t.

При фиксированных (постоянных) значениях ψ и x функция $\mathscr{H}$ становится функцией параметра $u \in U$; точную верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через $\mathscr{M}(\psi, x)$:

$$\mathscr{M}(\psi, x) = \sup_{u \in U} \mathscr{H}(\psi, x, u).$$

Если точная верхняя грань значений непрерывной функции $\mathscr{H}$ достигается в некоторой точке области управления U, то $\mathscr{M}(\psi, x)$ есть *максимум* значений функции $\mathscr{H}$ при фиксированных ψ и x. Поэтому нижеследующую теорему 1 (необходимое условие оптимальности), главным содержанием которой является равенство (16), мы называем принципом максимума.

Теорема 1. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$ (см. (14)), исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходит в момент t_1 через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ (см. (15)), что:*

1° *при любом t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t)); \tag{16}$$

2° *в конечный момент t_1 выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \quad \mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1)) = 0. \tag{17}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (14), (15) *и условию* 1°, *то функции $\psi_0(t)$ и $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ переменного t являются постоянными, так что проверку соотношений* (17) *можно проводить не обязательно в момент t_1, а в любой момент*

t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. (Доказательство теоремы 1 приводится в гл. 2.)

Выведем теперь из теоремы 1 аналогичное необходимое условие для оптимальности по быстродействию. Для этого в теореме 1 следует положить $f^0(x, u) = 1$. Функция $\mathscr{H}$ принимает в этом случае вид

$$\mathscr{H} = \psi_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x, u).$$

Вводя n-мерный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ и функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x, u),$$

мы можем записать уравнения (4) и (12) (кроме уравнения (12) для $i = 0$, которое теперь не нужно) в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

При фиксированных значениях ψ и x функция H становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через $M(\psi, x)$:

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u).$$

В силу соотношения $H(\psi, x, u) = \mathscr{H}(\psi, x, u) - \psi_0$ мы получаем

$$M(\psi, x) = \mathscr{M}(\psi, x) - \psi_0,$$

и потому условия (16) и (17) принимают теперь вид

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \geqslant 0.$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)$ — соответствующая траектория (см. (18)), так что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Для оптимальности (по быстродействию) управления $u(t)$ и траекто-*

рии $x(t)$ *необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции* $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots \ldots, \psi_n(t))$, *соответствующей функциям* $u(t)$ *и* $x(t)$ *(см. (19)), что:*

1° *для всех* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *функция* $H(\psi(t), x(t), u)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума*

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)); \tag{20}$$

2° *в конечный момент* t_1 *выполнено соотношение*

$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geqslant 0. \tag{21}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют системе* (18), (19) *и условию* 1°, *то функция* $M(\psi(t), x(t))$ *переменного* t *постоянна, так что проверку соотношения* (21) *можно проводить не обязательно в момент* t_1, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

§ 4. Обсуждение принципа максимума *)

Теорема 1 позволяет из всех траекторий, начинающихся в точке x_0 и кончающихся в некоторой точке прямой П, и соответствующих им управлений выделить лишь отдельные, вообще говоря, изолированные траектории и управления, удовлетворяющие всем сформулированным условиям. Действительно, мы имеем $2n+3$ соотношений (14), (15), (16) между $2n+3$ переменными **) x^α, ψ_α, u, т. е. имеем «полную систему соотношений»

*) Этот параграф имеет своей целью показать «достаточность» системы соотношений, указанной в теореме 1, для решения поставленной оптимальной задачи. Приводимые в этом параграфе рассуждения не претендуют на строгость и нигде в дальнейшем не используются.

**) Напомним, что «одна» переменная u может распадаться на несколько отдельных переменных, например, может быть точкой r-мерного векторного пространства; в этом случае условие максимума (16) также можно считать содержащим r отдельных соотношений. Если, например, максимум достигается во внутренней точке области управления U (расположенной в r-мерном пространстве переменных $u^1, \ldots, u^r$), то для выполнения условия максимума (16) для определения всех этих переменных. Так как, далее, соотношение (16) конечное (не дифференциальное), а дифференциальные уравнения мы имеем в количестве $2n+2$ (соотношения (14) и (15)), то решения системы уравнений (14), (15), (16) зависят, вообще говоря, от $2n+2$ параметров (начальных условий). Однако один из этих параметров является несущественным, так как функции $\psi_\alpha(t)$ определены лишь с точностью до общего множителя (ибо функция $\mathscr{H}$ однородна относительно ψ). Кроме того, один из параметров связан условием, что в момент t_0 величина

$$\max_{u \in U} \mathscr{H}(\psi(t_0), x(t_0), u)$$

обращается в нуль.

Итак, все многообразие решений системы (14), (15), (16) зависит от $2n$ параметров. Этими $2n$ параметрами следует распорядиться так, чтобы траектория $x(t)$ проходила при *заданном* $t=t_0$ через точку x_0, а при *каком-нибудь* $t_1 > t_0$ проходила через точку на прямой П. Число $t_1 - t_0$ также является параметром, так что всего у нас имеется $2n+1$ существенных параметров. Условие прохождения траектории через точку x_0 и прямую П дает $2n+1$ соотношений. Следовательно, можно ожидать, что имеются лишь отдельные, изолированные траектории, соединяющие точку x_0 с прямой П и удовлетворяющие условиям, указанным в теореме 1. Лишь эти отдельные, изолированные траектории и могут

необходимо обращение в нуль r частных производных:

$$\left.\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u)}{\partial u^j}\right|_{u=u(t)} = 0, \qquad j = 1, \ldots, r;$$

если максимум достигается на $(r-1)$-мерной грани области управления U, то должно выполняться условие принадлежности точки $u(t)$ этой грани (это дает одно соотношение) и должны обращаться в нуль частные производные функции $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u)$ по всем направлениям в этой грани (это дает еще $r-1$ соотношений). Аналогичное положение вещей имеет место и на гранях меньшего числа измерений (или на искривленных частях границы области управления U). Таким образом, во всех случаях можно считать, что если область управления U является r-мерной, то условие максимума (16) содержит r соотношений.

оказаться оптимальными (ибо указанные в теореме 1 условия **необходимы** для оптимальности).

Если, в частности, условиям теоремы 1 удовлетворяет лишь **одна** траектория, соединяющая точку x_0 с точкой прямой П, а из технических соображений, приведших к постановке оптимальной задачи, «ясно», что оптимальная траектория должна существовать, то можно надеяться, что найденная траектория как раз и является оптимальной. Следует, однако, отметить, что *математически* вопрос о существовании оптимальной траектории представляется очень важным и трудным. В частном случае оптимальности по быстродействию для *линейных* систем (4) он решается в третьей главе.

§ 5. Примеры. Задача синтеза

В этом параграфе мы рассмотрим применение принципа максимума к решению некоторых простых задач об оптимальных быстродействиях. Из рассмотрения этих примеров выясняется новая важная постановка задачи об оптимальных процессах — *задача синтеза* оптимальных управлений.

Пример 1

Рассмотрим уравнение $\frac{d^2x}{dt^2}=u$, где u — вещественный управляющий параметр, подчиненный условию $|u|\leqslant 1$. В фазовых координатах $x^1=x$, $x^2=\frac{dx}{dt}$ это уравнение переписывается в виде следующей системы:

$$\frac{dx^1}{dt}=x^2, \quad \frac{dx^2}{dt}=u. \tag{22}$$

Рассмотрим (для фазовой точки, движущейся по закону (22)) задачу о быстрейшем попадании в начало координат $(0, 0)$ из заданного начального состояния x_0. Иначе говоря, мы будем рассматривать задачу об оптимальном быстродействии в случае, когда конечным положением служит начало координат: $x_1=(0, 0)$.

Функция H в рассматриваемом случае имеет вид

$$H=\psi_1 x^2+\psi_2 u. \tag{23}$$

Далее, для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2 мы получаем систему уравнений (см. (19), (23))

$$\frac{d\psi_1}{dt}=0, \quad \frac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1,$$

откуда $\psi_1=c_1$, $\psi_2=c_2-c_1t$ (c_1, c_2 — постоянные). Соотношение (20) даст нам (учитывая (23) и условие $-1\leqslant u\leqslant 1$)

$$u(t)=\operatorname{sign}\psi_2(t)=\operatorname{sign}(c_2-c_1t). \tag{24}$$

Из (24) следует, что *каждое оптимальное управление* $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, *является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения* ± 1 *и имеющей не более двух интервалов постоянства* (ибо линейная функция c_2-c_1t не более одного раза меняет знак на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$). Обратно, любая такая функция $u(t)$ может быть получена из соотношения (24) при некоторых значениях постоянных c_1, c_2.

Для отрезка времени, на котором $u\equiv 1$, мы имеем (в силу системы (22))

$$x^2=t+s^2, \quad x^1=\frac{t^2}{2}+s^2t+s^1=\frac{1}{2}(t+s^2)^2+\left(s^1-\frac{(s^2)^2}{2}\right)$$

(s^1, s^2 — постоянные интегрирования), откуда получаем

$$x^1=\frac{1}{2}(x^2)^2+s, \tag{25}$$

где $s=s^1-\frac{1}{2}(s^2)^2$ — постоянная. Таким образом, кусок фазовой траектории, для которого $u\equiv 1$, представляет собой дугу параболы (25). Семейство парабол (25) показано на рис. 5, a).

Аналогично, для отрезка времени, на котором $u\equiv -1$, мы имеем

$$x^2=-t+s'^2,$$
$$x^1=-\frac{t^2}{2}+s'^2t+s'^1=-\frac{1}{2}(-t+s'^2)^2+\left(s'^1+\frac{1}{2}(s'^2)^2\right),$$

откуда получаем

$$x^1=-\frac{1}{2}(x^2)^2+s'. \tag{26}$$

Семейство парабол (26) показано на рис. 5, *б*). По параболам (25) фазовые точки движутся снизу вверх (ибо $\frac{dx^2}{dt} = u = +1$), а по параболам (26) — сверху вниз $\left(\frac{dx^2}{dt} = -1\right)$.

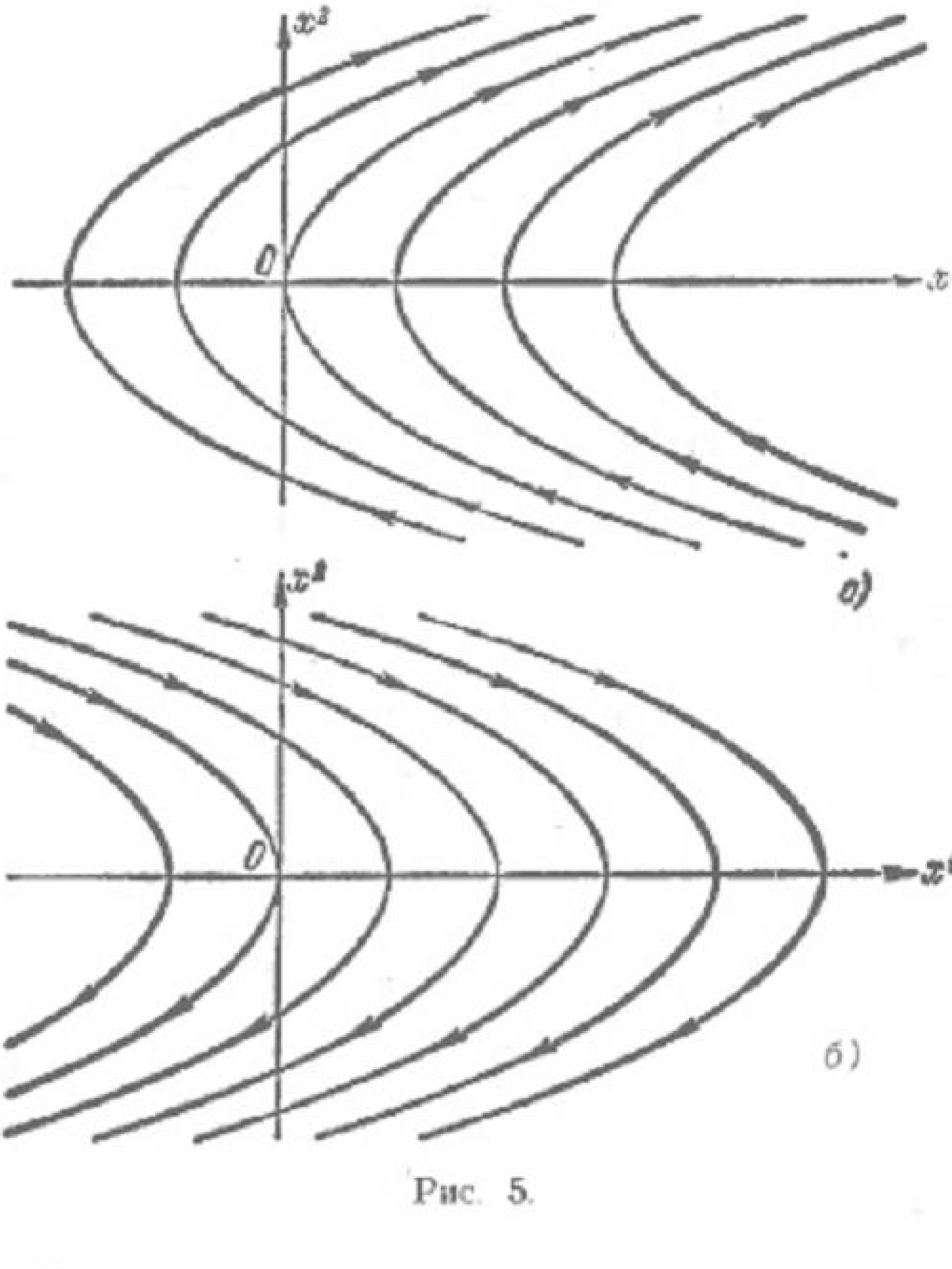

Рис. 5.

Как было указано выше, каждое оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства. Если управление $u(t)$ сначала, в течение некоторого времени, равно $+1$, а затем равно -1, то фазовая траектория состоит из двух кусков парабол (рис. 6, *а*)), примыкающих друг к другу, причем второй из этих кусков лежит на той из парабол (26), которая проходит через начало координат (ибо искомая траектория должна вести в начало координат). Если же, наоборот, сначала $u = -1$, а затем $u = +1$, то фазовая кривая заменяется центрально симметричной (рис. 6, *б*)).

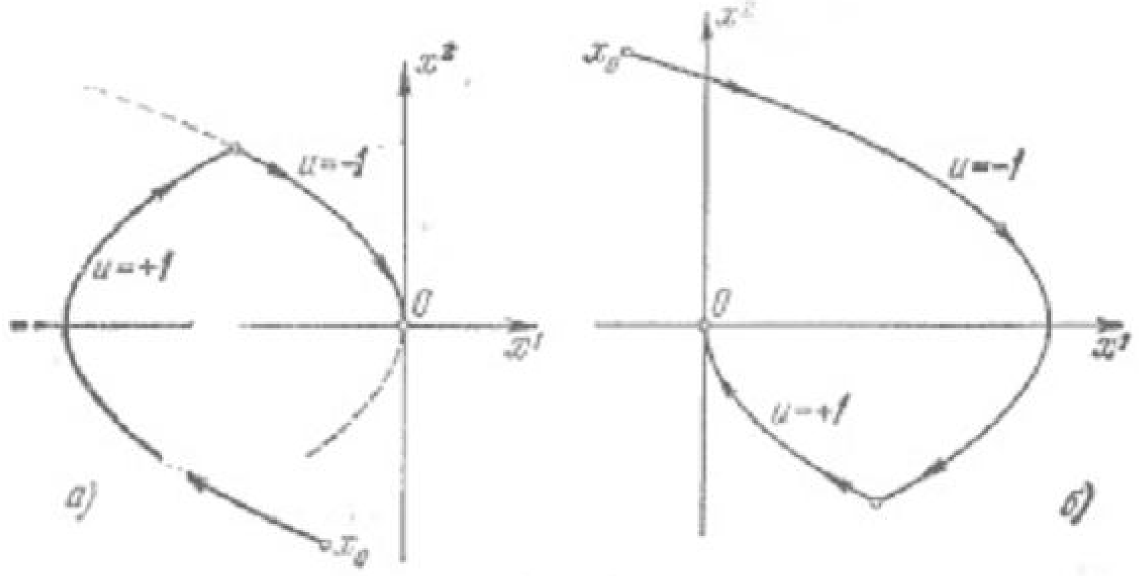

Рис. 6.

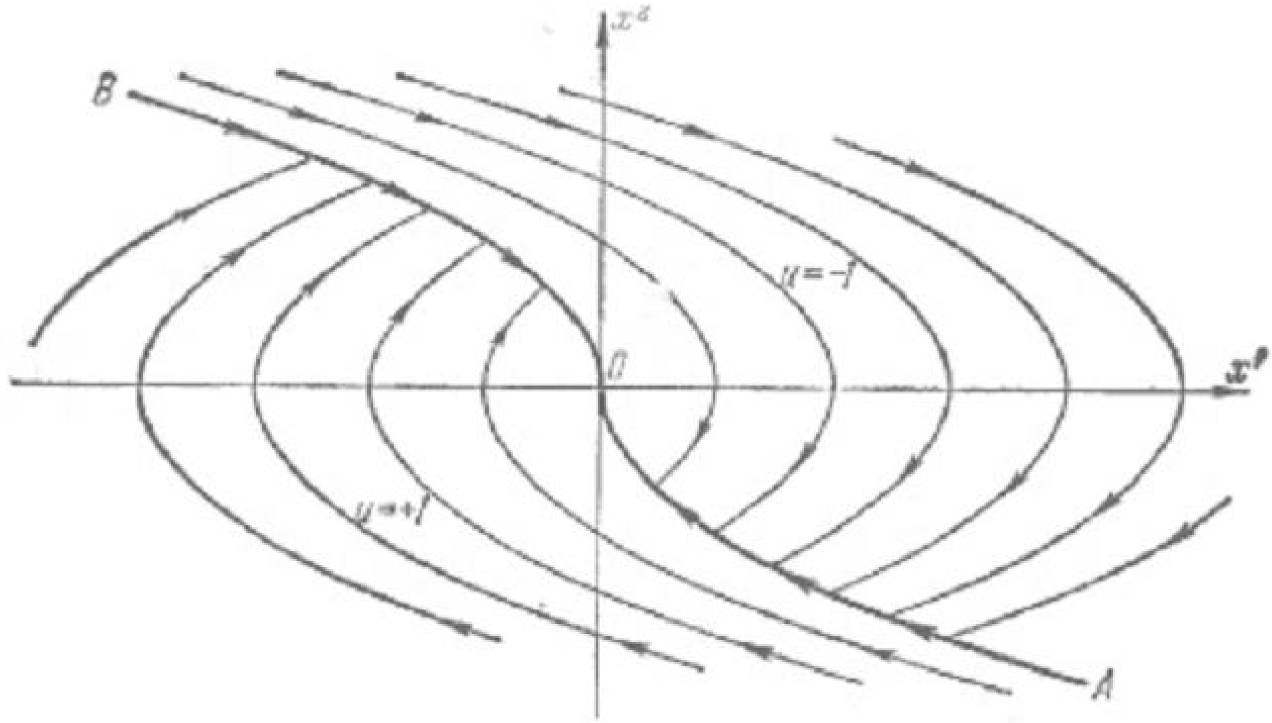

Рис. 7.

На рис. 6 надписаны на дугах парабол соответствующие значения управляющего параметра u. На рис. 7 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий (AO — дуга параболы $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2$, расположенная в нижней полуплоскости; BO — дуга параболы

$x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2$, расположенная в верхней полуплоскости). Фазовая точка движется по проходящей через начальную точку x_0 дуге параболы (26), если точка x_0 расположена выше линии AOB, и по дуге параболы (25), если точка x_0 расположена ниже этой линии. Иначе говоря, если начальное положение x_0 расположено **выше** линии AOB, то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u = -1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу AO; в момент попадания на дугу AO значение u переключается и становится равным $+1$ вплоть до момента попадания в начало координат. Если же начальное положение x_0 расположено **ниже** линии AOB, то u должно быть равно $+1$ до момента попадания на дугу BO, а в момент попадания на дугу BO значение u переключается и становится равным -1.

Итак, согласно теореме 2, *только описанные выше траектории могут быть оптимальными*, причем из проведенного исследования видно, что из каждой точки фазовой плоскости исходит **только одна** траектория, ведущая в начало координат, которая может быть оптимальной (т. е. задание начальной точки x_0 однозначно определяет соответствующую траекторию). Если бы мы были уверены в том, что оптимальная траектория всегда (т. е. для любой начальной точки x_0) **существует**, то могли бы с уверенностью сказать, что все найденные траектории являются оптимальными. В главе 3 мы сформулируем **теорему существования** для линейных систем оптимального быстродействия, из которой вытекает, в частности, что в рассматриваемом примере для любой начальной точки x_0 существует оптимальная траектория (см. стр. 147). Таким образом, найденные траектории (рис. 7) являются оптимальными, и других оптимальных траекторий, ведущих в начало координат, не существует.

Полученное в рассмотренном примере решение оптимальной задачи можно истолковать следующим образом. Обозначим через $v(x^1, x^2) = v(x)$ функцию, заданную на плоскости x^1, x^2 так:

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{ниже линии } AOB \text{ и на дуге } AO, \\ -1 & \text{выше линии } AOB \text{ и на дуге } BO. \end{cases}$$

Тогда на каждой оптимальной траектории значение $u(t)$ управляющего параметра (в произвольный момент t) равно $v(x(t))$, т. е. равно значению функции v в той точке, в которой в момент t находится фазовая точка, пробегающая оптимальную траекторию:

$$u(t)=v(x(t)).$$

Это означает, что, заменив в системе (22) величину u функцией $v(x)$, мы получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt}&=x^2,\\ \frac{dx^2}{dt}&=v(x^1,\ x^2), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

решение которой (при произвольном начальном состоянии x_0) дает оптимальную фазовую траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, система (27) представляет собой систему дифференциальных уравнений (с разрывной правой частью) для нахождения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат.

Пример 2

Рассмотрим уравнение $\frac{d^2x}{dt^2}+x=u,\quad |u|\leqslant 1$. Это уравнение эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt}&=x^2,\\ \frac{dx^2}{dt}&=-x^1+u, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

для которой мы, как и в первом примере, изучим задачу о быстрейшем попадании в начало координат. Функция H имеет вид

$$H=\psi_1x^2-\psi_2x^1+\psi_2u. \tag{29}$$

Далее, для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2 мы получаем систему уравнений (см. (19), (29))

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt}&=\psi_2,\\ \frac{d\psi_2}{dt}&=-\psi_1, \end{aligned}\right\}$$

откуда $\psi_2 = A\sin(t-\alpha_0)$, где $A>0$ и α_0 — некоторые постоянные. Соотношение (20) дает нам (учитывая (29) и условие $|u|\leqslant 1$)

$$u = \operatorname{sign}\psi_2 = \operatorname{sign}(A\sin(t-\alpha_0)) = \operatorname{sign}(\sin(t-\alpha_0)). \tag{30}$$

Отсюда следует, что функция $u(t)$ получается из функции $\operatorname{sign}(\sin t)$, равной поочередно $+1$ и -1 на интервалах длины π, при помощи сдвига на некоторый отрезок α_0 (рис. 8).

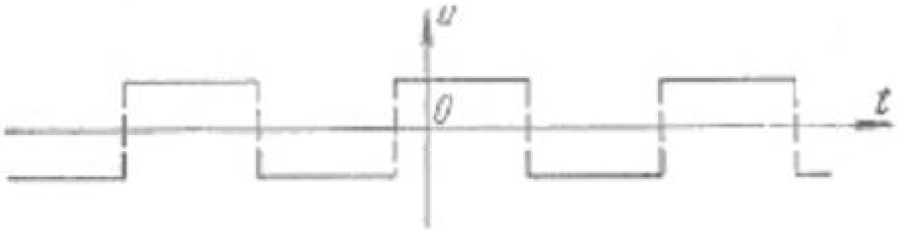

Рис. 8.

Для изучения кусков траекторий, соответствующих отрезкам времени, на которых $u=1$ и $u=-1$, мы рассмотрим вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

(получающуюся из системы (28) при $u=0$). Произвольное решение этой системы может быть записано в виде

$$x^1 = -R\cos(t+\gamma), \quad x^2 = R\sin(t+\gamma), \tag{32}$$

где R и γ — постоянные ($R\geqslant 0, 0\leqslant\gamma<2\pi$). Таким образом, фазовыми траекториями являются окружности с центром в начале координат:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = R^2 \tag{33}$$

(рис. 9, a)). Из (32) видно, что движение фазовой точки по окружности (33) совершается по часовой стрелке, причем равномерно, с линейной скоростью $2\pi R$ (один оборот за время 2π). Отметим, в частности, что за промежуток времени, имеющий длину π, фазовая точка, двигаясь по часовой стрелке, описывает ровно половину окружности (33).

При $u=1$ система (28) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt}&=x^2,\\ \frac{dx^2}{dt}&=-x^1+1,\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

или, иначе,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(x^1-1)}{dt}&=x^2,\\ \frac{dx^2}{dt}&=-(x^1-1).\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

Вспоминая соотношения (31) и (33), мы находим, что фазовые траектории системы (35) (или, что то же самое, системы (34)) представляют собой окружности

$$(x^1-1)^2+(x^2)^2=R^2,\tag{36}$$

т. е. окружности с центром в точке O_1, имеющей координаты $(1, 0)$. Эти окружности фазовая точка, движущаяся по закону (34) (т. е. по закону (28) при $u=1$), пробегает по часовой стрелке, обходя за время π ровно половину окружности (рис. 9, *б*)).

Аналогично, при $u=-1$ система (28) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt}&=x^2,\\ \frac{dx^2}{dt}&=-x^1-1;\end{aligned}\right\}$$

ее фазовыми траекториями являются окружности

$$(x^1+1)^2+(x^2)^2=R^2\tag{37}$$

с центром в точке O_{-1}, имеющей координаты $(-1, 0)$. По этим окружностям фазовая точка движется по часовой стрелке, проходя ровно половину окружности за время π (рис. 9, *в*)).

Как было указано выше, каждое оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, получающейся из функции $\operatorname{sign}(\sin t)$, равной поочередно $+1$ и -1 на интервалах длины π, при помощи сдвига на некоторый отрезок α_0 (рис. 8). Если оптимальное управление $u(t)$ имеет вид, показанный на рис. 10, т. е. поочередно равно $+1$ и -1 на интервалах (t_0, α), $(\alpha,\ \pi+\alpha)$, $(\pi+\alpha,\ 2\pi+\alpha)$, ... и, в заключение, на

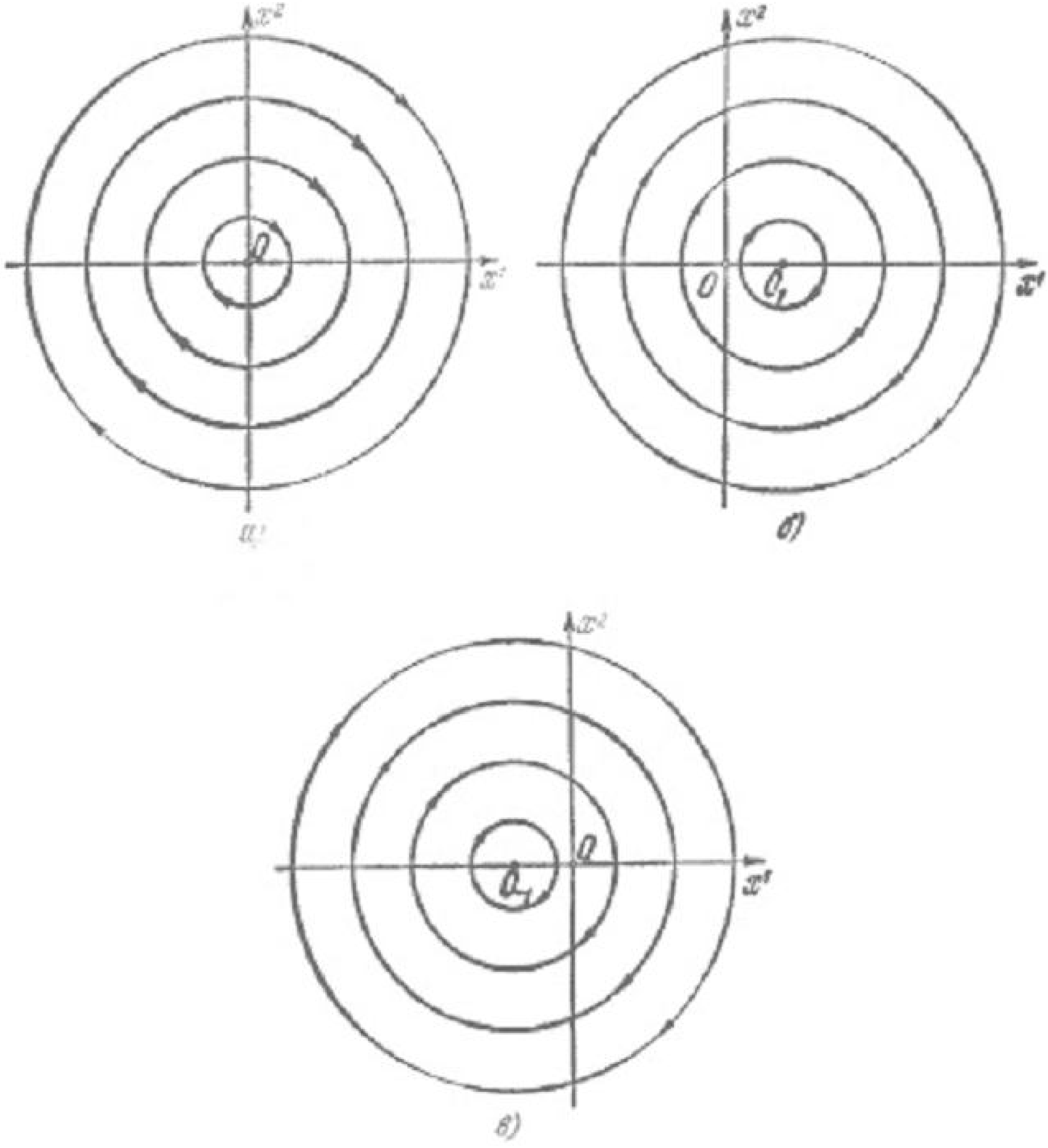

Рис. 9.

некотором интервале длины $\beta < \pi$ равно $+1$, то соответствующая оптимальная траектория может быть построена следующим образом.

В течение заключительного отрезка времени (длины β) фазовая точка движется по окружности вида (36) (ибо $u = 1$ на этом отрезке времени), причем по той из этих окружностей, которая проходит через начало координат (ибо искомая траектория должна вести в начало координат). Такой окружностью является окружность

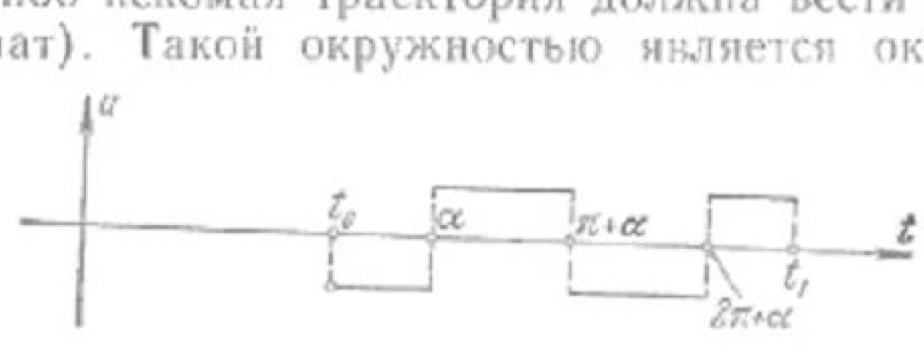

Рис. 10

радиуса 1 с центром в точке O_1 (рис. 11а). По этой окружности фазовая точка попадает в начало координат, проходя дугу, *меньшую половины окружности* (ибо $\beta < \pi$). Таким образом, обозначив нижнюю полуокружность этой окружности через M_1O, мы найдем, что заключительный кусок фазовой траектории представляет собой некоторую дугу AO полуокружности M_1O.

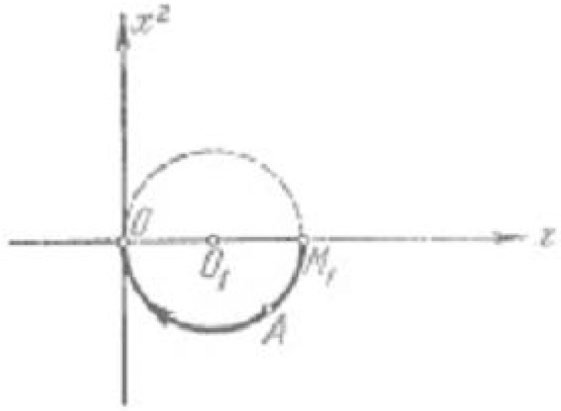

Рис. 11а

Далее, в положение A фазовая точка попала, двигаясь в течение отрезка времени, имеющего длину π, под воздействием управления $u = -1$ (см. рис. 10), т. е. предыдущий кусок фазовой траектории представляет собой полуокружность BA с центром в точке O_{-1}, кончающуюся в точке A (рис. 11б). Так как дуга BA равна полуокружности, то точка B симметрична A относительно центра O_{-1}, и потому точка B лежит на полуокружности N_1N_2, симметричной полуокружности OM_1 относительно центра O_{-1}. Точно так же предшествующая дуге BA дуга CB, соответствующая отрезку времени длины π, на котором $u = 1$, равна полуокружности с центром O_1, и потому точка C лежит на полуокружности M_2M_3, которая симметрична полуокружности N_1N_2 относительно центра O_1 (рис. 11в), и т. д. Таким образом, соответствующая фазовая траектория имеет вид, показанный на рис. 11в (начальный кусок фазовой траектории будет меньше половины окружности, если только $0 < \alpha - t_0 < \pi$; см. рис. 10).

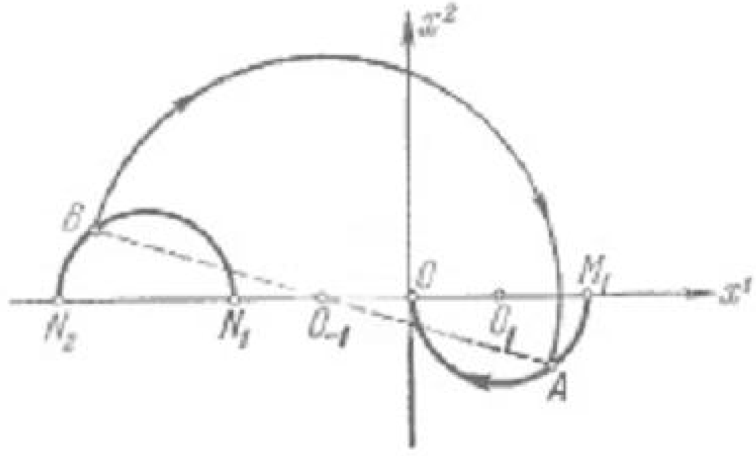

Рис. 11б.

Фазовая траектория, соответствующая оптимальному управлению $u(t)$, которое на заключительном отрезке

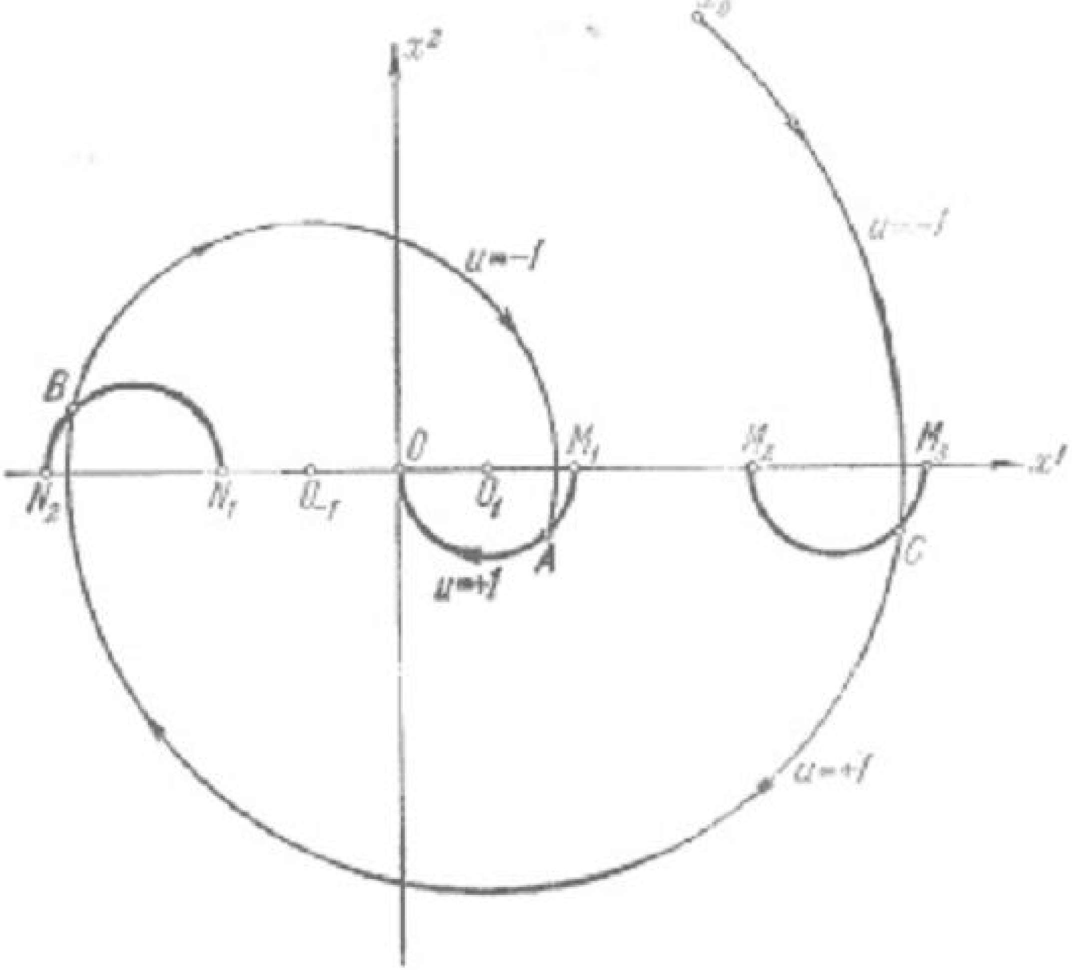

Рис. 11в.

длины β равно -1 (а не $+1$), получается из траектории, изображенной на рис. 11в, с помощью центральной симметрии (рис. 12). Для такой траектории точки «стыка» дуг окружностей будут лежать на полуокружностях ON_1, M_1M_2, N_2N_3, ..., симметричных (относительно начала координат) полуокружностям OM_1, N_1N_2, M_2M_3, ...

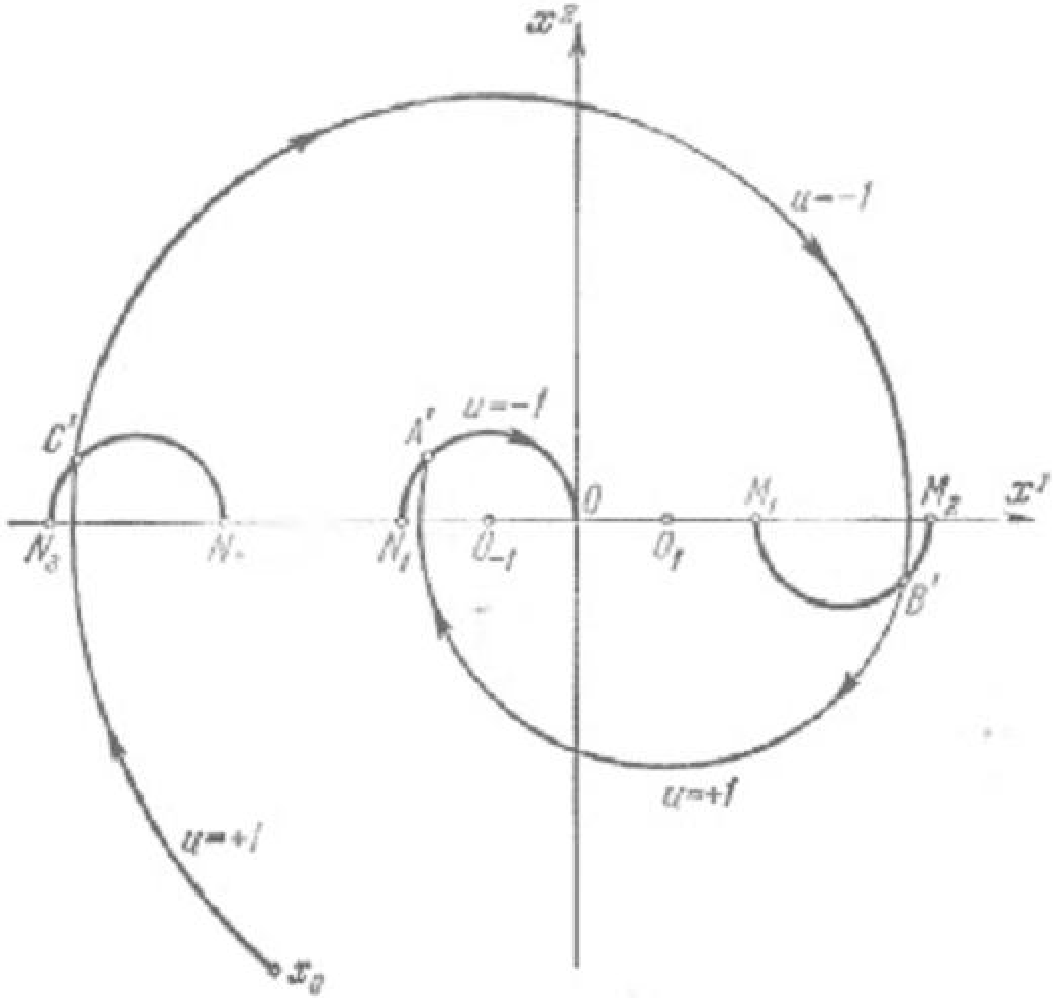

Рис. 12.

Объединяя оба эти случая (рис. 11в и 12) вместе, получаем всю картину поведения фазовых траекторий (рис. 13). На рис. 13 надписаны на дугах фазовых траекторий соответствующие значения управляющего параметра u. Из рис. 13 видно, что если начальная точка x_0 расположена выше линии ... $M_3M_2M_1ON_1N_2N_3$ ..., составленной из бесконечного числа полуокружностей радиуса 1, то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u=-1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу ... $M_3M_2M_1O$; в момент попадания на эту дугу значение u переключается и остается равным $+1$ (фазовая точка при этом движется ниже линии ... $M_3M_2M_1ON_1N_2N_3$ ...) до момента попадания на дугу $ON_1N_2N_3 \ldots$; затем точка снова движется выше линии $\ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3 \ldots$ под воздействием управления $u = -1$ и т. д. Последний кусок фазовой траектории (ведущий в начало координат) представляет собой дугу полуокружности M_1O или полуокружности N_1O. Совершенно аналогично движется точка и в том

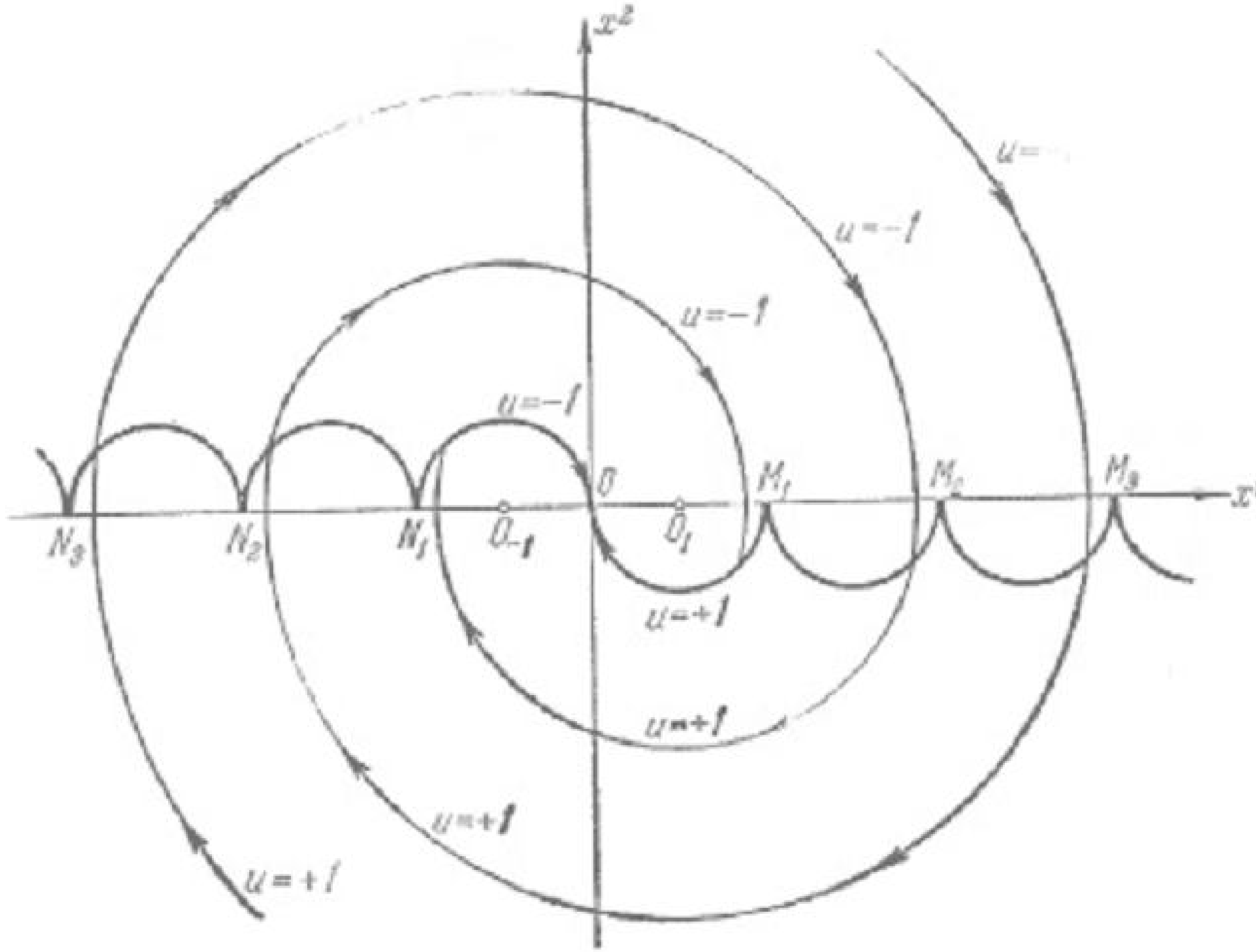

Рис. 13.

случае, если начальная точка x_0 расположена ниже линии $\ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3 \ldots$: выше этой линии фазовая точка движется под воздействием управления $u = -1$, а ниже этой линии — под воздействием управления $u = +1$.

Итак, согласно теореме 2, только указанные траектории могут быть оптимальными, причем из проведенного исследования видно, что из каждой точки фазовой плоскости исходит только одна траектория, ведущая в начало координат, которая может быть оптимальной. Из теоремы существования, доказываемой в главе 3, вытекает, что в рассматриваемом примере для любой начальной точки x_0 существует оптимальная траектория (см. стр. 147). Таким образом, найденные траектории (рис. 13) являются оптимальными, и других оптимальных траекторий, ведущих в начало координат, не существует.

Как и в первом примере, полученное решение оптимальной задачи можно истолковать следующим образом. Обозначим через $v(x^1, x^2) = v(x)$ функцию, заданную на плоскости x^1, x^2 соотношениями:

$$v(x) = \begin{cases} +1 \text{ ниже линии } \ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3 \ldots \\ \quad\text{и на дуге } \ldots M_3M_2M_1O; \\ -1 \text{ выше линии } \ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3 \ldots \\ \quad\text{и на дуге } ON_1N_2N_3 \ldots \end{cases}$$

Тогда вдоль каждой оптимальной траектории $x(t)$ соответствующее оптимальное управление $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = v(x(t)).$$

Это, как и выше, означает, что, заменив в системе (28) величину u функцией $v(x)$, мы получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 + v(x^1, x^2), \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

решение которой (при произвольном начальном состоянии x_0) дает оптимальную фазовую траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, система (38) представляет собой систему дифференциальных уравнений (с разрывной правой частью) для нахождения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат.

Пример 3

Рассмотрим теперь систему с двумя управляющими параметрами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2 + u^1, \\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 + u^2, \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

причем величины u^1, u^2 подчиним условиям $|u^1| \leqslant 1$, $|u^2| \leqslant 1$. Для этой системы мы, как и в двух первых примерах, изучим задачу о быстрейшем попадании в начало координат. Выпишем функцию H

$$H = \psi_1 (x^2 + u^1) + \psi_2 (-x^1 + u^2) \tag{40}$$

и вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1. \end{aligned}\right\}$$

Из этой системы мы получаем

$$\psi_1 = A \sin (t + \alpha),$$
$$\psi_2 = A \cos (t + \alpha),$$

где A и α — постоянные; $A > 0$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Соотношение (20) дает нам теперь (учитывая (40) и условия $|u^1| \leqslant 1$, $|u^2| \leqslant 1$)

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= \operatorname{sign} \psi_1 = \operatorname{sign} (A \sin (t + \alpha)) = \operatorname{sign} (\sin (t + \alpha)), \\ u^2 &= \operatorname{sign} \psi_2 = \operatorname{sign} (A \cos (t + \alpha)) = \operatorname{sign} (\cos (t + \alpha)). \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Таким образом, в случае оптимального управления каждый из управляющих параметров u^1, u^2 является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $+1$ и -1. Из рассмотрения системы (39) мы легко заключаем, что куски фазовых траекторий, соответствующие отрезкам времени, на которых $u^1 = 1$, $u^2 = 1$, представляют собой дуги окружностей с центром в точке $O_{1,1}$, имеющей координаты $(1, -1)$. Аналогично при $u^1 = 1$, $u^2 = -1$ и т. д., как это указано в следующей таблице:

Постоянные значения управляющих параметров на некотором отрезке времени	Центры окружностей, являющихся соответствующими фазовыми траекториями системы (39)
$u^1 = 1$, $u^2 = 1$	Точка $Q_{1,1}$ с координатами $(1, -1)$
$u^1 = -1$, $u^2 = 1$	Точка $Q_{-1,1}$ с координатами $(1, 1)$
$u^1 = -1$, $u^2 = -1$	Точка $Q_{-1,-1}$ с координатами $(-1, 1)$
$u^1 = 1$, $u^2 = -1$	Точка $Q_{1,-1}$ с координатами $(-1, -1)$

Во всех случаях движение по соответствующим фазовым траекториям (окружностям) совершается по часовой стрелке, причем равномерно, со скоростью один оборот за время 2π. В частности, за время, равное $\frac{\pi}{2}$, фазовая точка пробегает четверть окружности.

Из (41) следует, что в тот момент, когда аргумент $t+\alpha$ проходит через точки $k\frac{\pi}{2}$ (k — произвольное целое число), один из управляющих параметров u^1, u^2 меняет знак (так как в каждой из этих точек либо синус, либо косинус проходит через нуль). Иначе говоря, в моменты времени, для которых $t+\alpha=k\frac{\pi}{2}$, происходит смена значений управляющих параметров u^1, u^2, т. е. происходит смена центра окружности, по которой движется фазовая точка. Такая смена центра происходит через каждые $\frac{\pi}{2}$ единиц времени, так что фазовая траектория составлена из четвертей окружностей с центрами $O_{1,1}$; $O_{-1,1}$; $O_{-1,-1}$; $O_{1,-1}$. Исключение составляют только первый и последний куски фазовой траектории: они могут оказаться меньшими, чем четверть окружности.

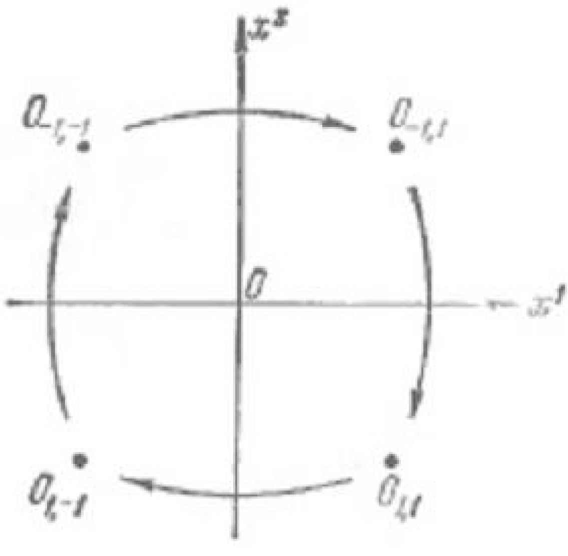

Рис. 14.

Далее, нетрудно понять, в каком порядке происходит смена центров. Если при возрастании t аргумент $t+\alpha$ проходит через значение $t+\alpha=2k\pi$ (k — целое число), то непосредственно перед этим моментом выполнялись соотношения $u^1=-1$, $u^2=+1$ (см. (41)), т. е. движение происходило по дуге с центром $O_{-1,1}$, а после этого момента выполняются соотношения $u^1=+1$, $u^2=$ $=+1$, т. е. движение происходит по дуге с центром $O_{1,1}$. Иначе говоря, центр $O_{-1,1}$ сменяется центром $O_{1,1}$. Аналогично, центр $O_{1,1}$ сменяется центром $O_{1,-1}$ (при прохождении аргумента $t+\alpha$ через значение $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

(см. (41)), центр $O_{1,-1}$ сменяется центром $O_{-1,-1}$, а центр $O_{-1,-1}$ — центром $O_{-1,1}$. На рис. 14 стрелки указывают порядок смены центров.

Теперь уже нетрудно представить себе поведение фазовых траекторий. Для этого мы проведем следующее вспомогательное построение. Рассмотрим окружность с центром $O_{-1,1}$, проходящую через начало координат, и обозначим через OM_1 дугу этой окружности, расположенную под осью абсцисс (дуга OM_1 равна, очевидно, четверти окружности). Далее, обозначим через M_1M_2 дугу, равную OM_1 и получающуюся из нее переносом на отрезок OM_1; аналогично построим дугу M_2M_3 и т. д. (рис. 15). Заметим, что абсциссы точек M_1, M_2, M_3 ... равны соответственно 2, 4, 6, ... Повернув теперь линию $OM_1M_2M_3$ ..., составленную из равных четвертей окружностей, на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ вокруг начала координат, мы получим изображенные на рис. 16 линии $ON_1N_2N_3$ ..., $OP_1P_2P_3$ ..., $OQ_1Q_2Q_3$ ...

Теперь начнем строить фазовую траекторию. Возьмем оптимальное управление (имеющее на некотором конечном отрезке времени вид (41)) и предположим для определенности, что на *последнем* участке постоянства, имеющем длину $\beta < \frac{\pi}{2}$, управляющие параметры принимают значения $u^1 = +1$, $u^2 = +1$. Соответствующий кусок фазовой траектории (рис. 17, *а*)) представляет собой некоторую дугу AO четверти окружности Q_1O (ибо этот кусок лежит на окружности с центром $O_{1,1}$ и оканчивается в начале координат, а длина этого куска не превосходит четверти окружности). Согласно сказанному выше, центру $O_{1,1}$ предшествует центр $O_{-1,1}$ (рис. 14), и потому участок фазовой траектории, предшествующий точке A, является четвертью окружности с центром $O_{-1,1}$ (дуга BA на рис. 17, *б*)). Управляющие параметры имеют на этом участке значения $u^1 = -1$, $u^2 = +1$. Так как точка A находилась на дуге Q_1O, то точка B будет находиться на дуге, получающейся из Q_1O поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг точки $O_{-1,1}$, т. е. на дуге M_1M_2.

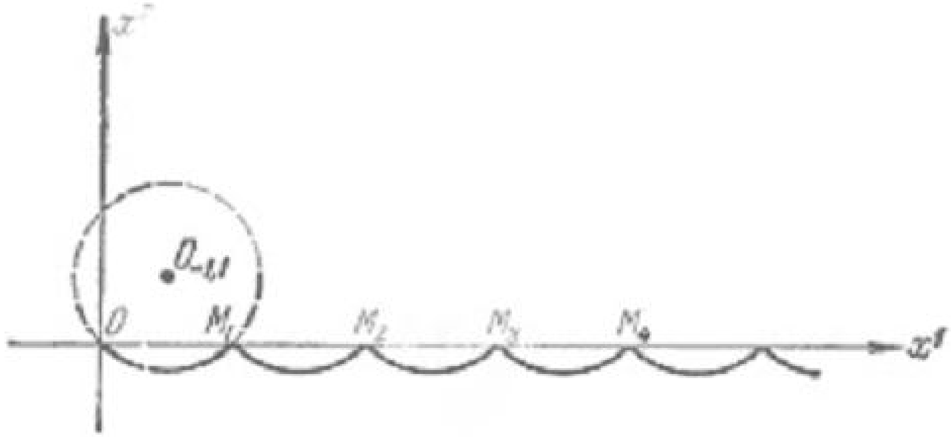
x^2
$O_{-1,1}$
O
M_1
M_2
M_3
M_4
x^1

Рис. 15.

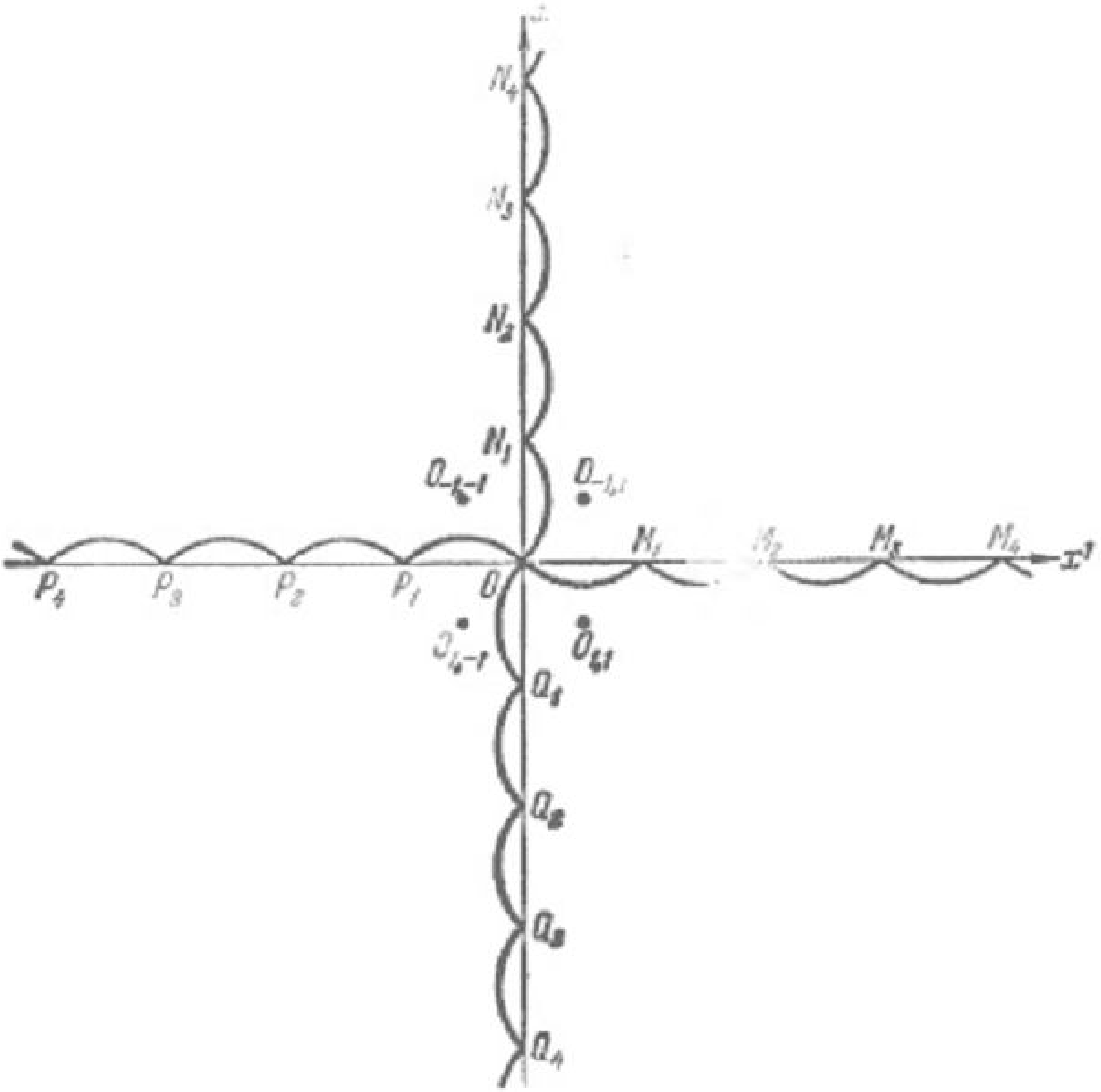
N_4
N_3
N_2
N_1
$O_{-1,-1}$
$O_{-1,1}$
P_4
P_3
P_2
P_1
O
M_1
M_2
M_3
M_4
x^1
$O_{1,-1}$
$O_{1,1}$
Q_1
Q_2
Q_3
Q_4

Рис. 16.

Далее, центру $O_{-1,1}$ предшествует центр $O_{-1,-1}$, и потому кусок фазовой траектории, предшествующий точке

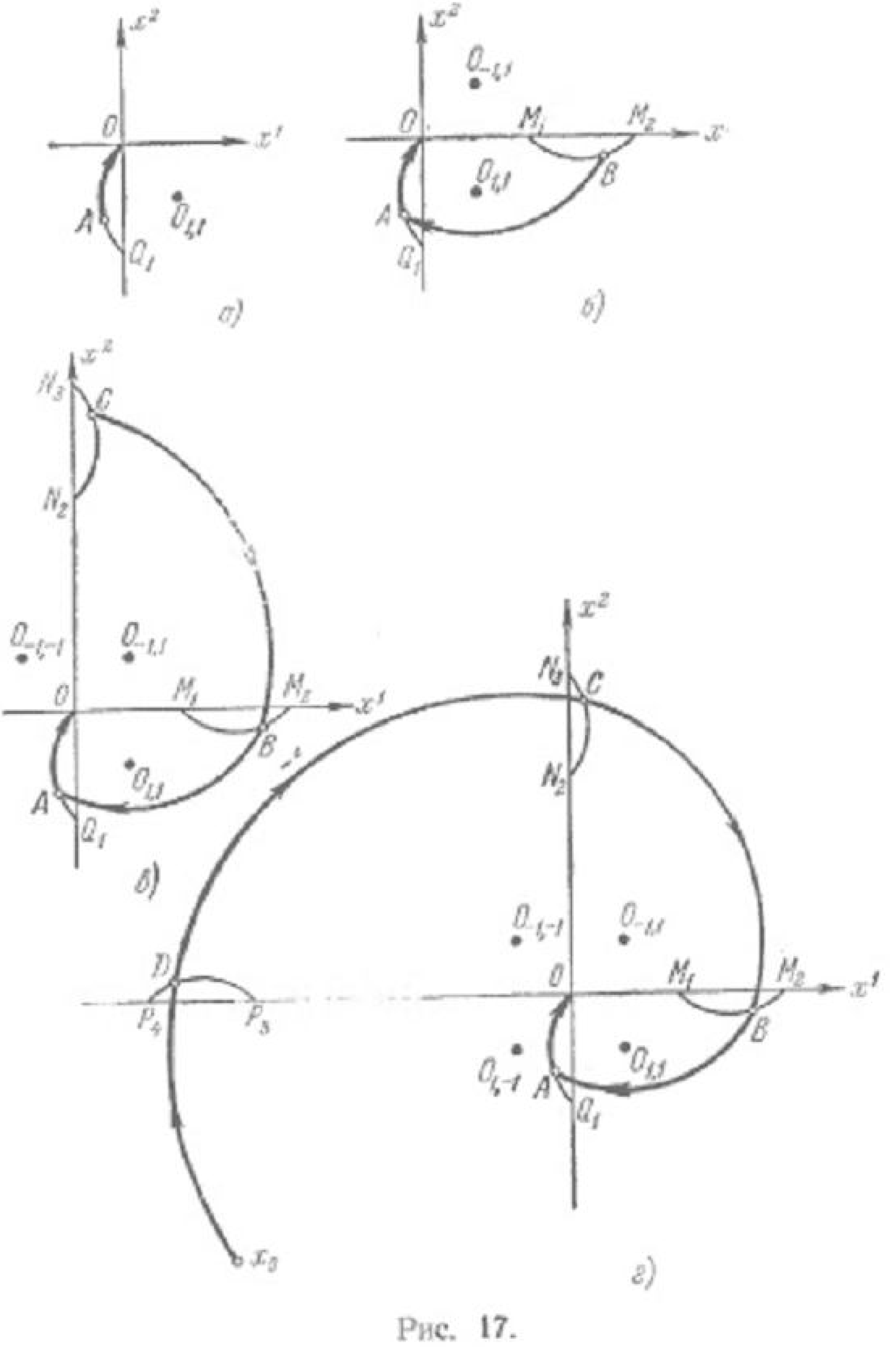

Рис. 17.

B, представлял собой четверть окружности с центром в точке $O_{-1,-1}$ (дуга CB на рис. 17, в)). Управляющие параметры имеют значения $u^1 = -1$, $u^2 = -1$. Так как точка B находилась на дуге M_1M_2, то точка C будет находиться на дуге, получающейся из M_1M_2 поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг точки $O_{-1,-1}$, т. е. на дуге N_2N_3. Продолжая таким образом, можно вычертить всю фазовую

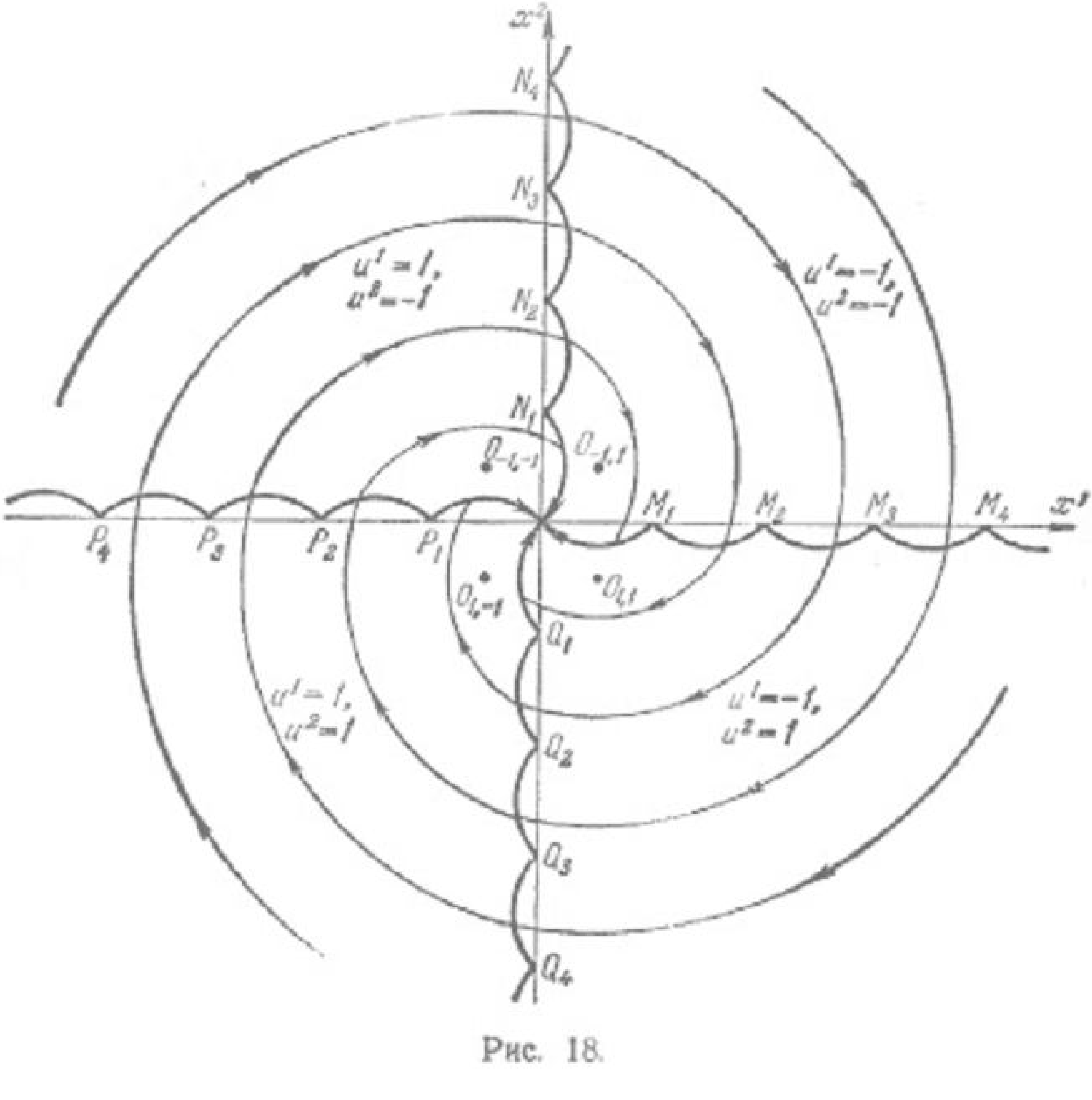

Рис. 18.

траекторию. На рис. 17, *г*) показана фазовая траектория, составленная из трех дуг, являющихся четвертями окружностей, и двух дуг (начальной и конечной), каждая из которых меньше четверти окружности.

Если бы мы предположили, что на последнем участке постоянства управляющие параметры принимают не значения $u^1=+1$, $u^2=+1$, а значения $u^1=-1$, $u^2=+1$ или значения $u^1=-1$, $u^2=-1$ или, наконец, значения $u^1 = +1$, $u^2 = -1$, то построили бы аналогичные фазовые траектории, получающиеся из траектории, изображенной на рис. 17, г), поворотом на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Четыре получающиеся таким образом фазовые траектории изображены на рис. 18.

Анализируя значения управляющих параметров на отдельных кусках всех получающихся таким образом фазовых траекторий, мы приходим к следующему выводу. Линии $OM_1M_2M_3 \ldots$, $ON_1N_2N_3 \ldots$, $OP_1P_2P_3 \ldots$,

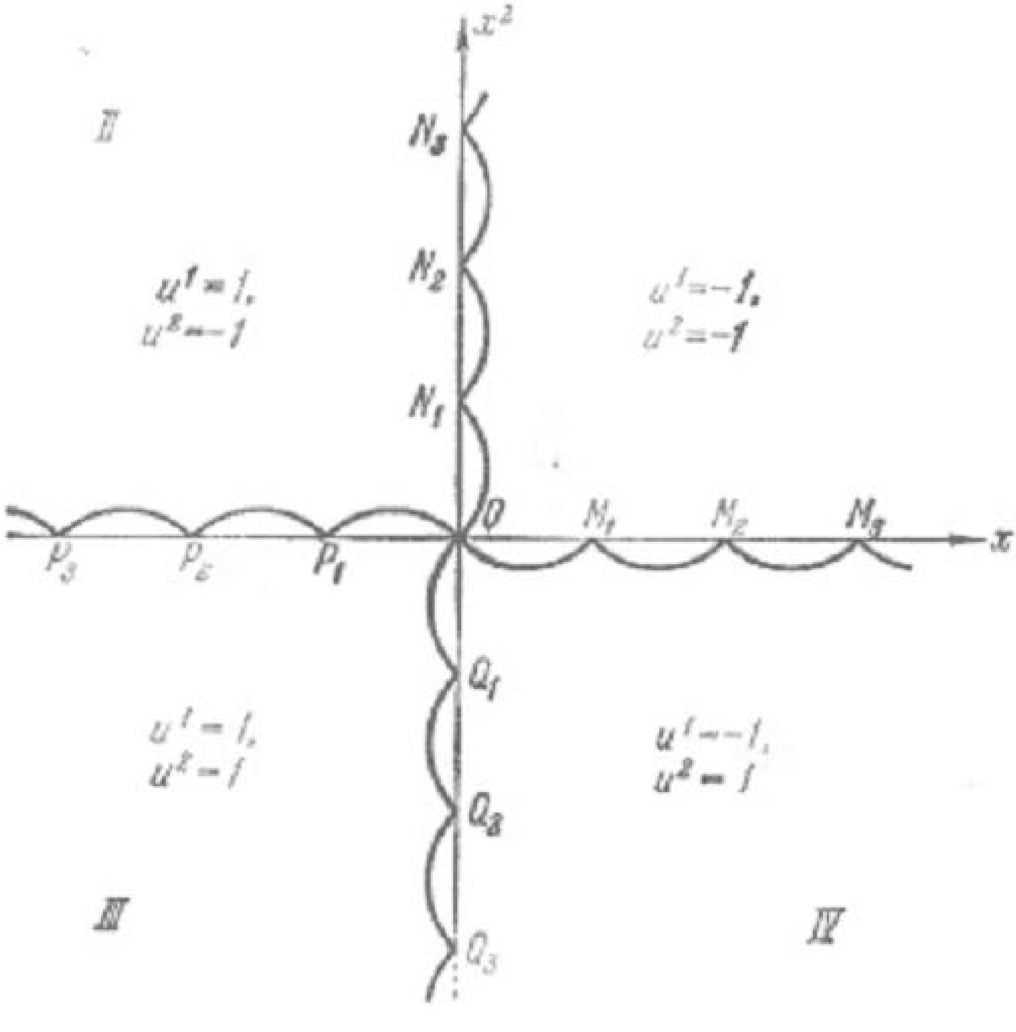

Рис. 19.

$OQ_1Q_2Q_3 \ldots$ разбивают плоскость на четыре части, четыре «криволинейных квадранта», которые мы обозначим римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 19). На кусках фазовых траекторий, расположенных в «квадранте» I, управляющие параметры принимают значения $u^1 = -1$, $u^2 = -1$. Под действием этого управления фазовая точка достигает линии $OM_1M_2M_3 \ldots$, и в момент попадания на эту линию значения управляющих параметров переключаются и становятся равными $u^1=-1$, $u^2=+1$. Под действием этого управления фазовая точка движется в «квадранте» IV и достигает линии $OQ_1Q_2Q_3\ldots$, причем в момент попадания на эту линию управляющие параметры принимают значения $u^1=+1$, $u^2=+1$ и т. д. Все эти факты собраны в следующей таблице:

в «квадранте» I и на линии $ON_1N_2\ldots$	$u^1=-1,\quad u^2=-1$
в «квадранте» II и на линии $OP_1P_2\ldots$	$u^1=+1,\quad u^2=-1$
в «квадранте» III и на линии $OQ_1Q_2\ldots$	$u^1=+1,\quad u^2=+1$
в «квадранте» IV и на линии $OM_1M_2\ldots$	$u^1=-1,\quad u_2=+1$

Итак, согласно теореме 2, только найденные траектории могут быть оптимальными, причем из проведенного исследования видно, что из каждой точки фазовой плоскости исходит только одна траектория, ведущая в начало координат, которая может быть оптимальной. Из теоремы существования (гл. 3) вытекает, что в рассматриваемом примере для любой начальной точки x_0 существует оптимальная траектория (см. стр. 147). Таким образом, найденные траектории (рис. 18) являются оптимальными, и других оптимальных траекторий, ведущих в начало координат, не существует.

Как и в двух первых примерах, полученное решение оптимальной задачи можно истолковать следующим образом. Построим на плоскости x^1, x^2 две функции $v^1(x^1,x^2)$ и $v^2(x^1,x^2)$:

$$v^1(x^1,\ x^2)=\begin{cases} +1 & \text{левее линии} \ \ldots\ Q_3Q_2Q_1ON_1N_2N_3\ldots \\ & \text{и на дуге} \ \ldots\ Q_3Q_2Q_1O, \\ -1 & \text{правее линии} \ \ldots\ Q_3Q_2Q_1ON_1N_2N_3\ldots \\ & \text{и на дуге} \ \ldots\ N_3N_2N_1O; \end{cases}$$

$$v^2(x^1,\ x^2)=\begin{cases} +1 & \text{ниже линии} \ \ldots\ P_3P_2P_1OM_1M_2M_3\ldots \\ & \text{и на дуге} \ \ldots\ M_3M_2M_1O, \\ -1 & \text{выше линии} \ \ldots\ P_3P_2P_1OM_1M_2M_3\ldots \\ & \text{и на дуге} \ \ldots\ P_3P_2P_1O. \end{cases}$$

Тогда вдоль каждой оптимальной траектории $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ соответствующее оптимальное управление $u(t) = (u^1(t), u^2(t))$ имеет вид

$$u^1(t) = v^1(x^1(t),\ x^2(t)), \qquad u^2(t) = v^2(x^1(t),\ x^2(t)).$$

Это означает, что, заменив в системе (39) величины u^1, u^2 функциями $v^1(x^1, x^2)$, $v^2(x^1, x^2)$, мы получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2 + v^1(x^1,\ x^2), \\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 + v^2(x^1,\ x^2), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

решение которой (при произвольном начальном состоянии x_0) дает оптимальную фазовую траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, система (42) представляет собой систему дифференциальных уравнений (с разрывными правыми частями) для нахождения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат.

Задача синтеза оптимальных управлений

Рассмотренные выше примеры показывают, что решение задачи об оптимальных управлениях естественно ожидать в следующей форме. Будем решать оптимальную задачу в общей постановке (см. (9)), рассматривая всевозможные начальные состояния x_0 и каждый раз предписывая в качестве конечного состояния начало координат O пространства X. Тогда (насколько можно судить по разобранным выше примерам) *существует такая функция $v(x)$, заданная в фазовом пространстве X и принимающая значения в области управления U, что уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ v(x)) \tag{43}$$

(ср. (5)) определяет все оптимальные траектории, ведущие в начало координат. Иначе говоря, оптимальное управление оказывается естественным искать не в форме $u = u(t)$, а в форме $u = v(x)$, т. е. искомое оптимальное управление в каждый момент зависит лишь от того,

в какой точке пространства находится в данный момент фазовая точка. Это и понятно: ведь если мы уже попали в фазовую точку x, то и дальнейшее движение (из точки x в O) должно быть оптимальным (ибо часть оптимальной траектории сама является оптимальной траекторией, см. стр. 22). Поэтому значение оптимального управления $u(t)$ в момент прохождения фазовой точкой положения x зависит только от x, а не от того, в какой точке начиналось движение и сколько времени фазовая точка уже двигалась, прежде чем попала в положение x. Формулы (27), (38), (42) как раз и дают решение разбиравшихся оптимальных задач в форме дифференциального уравнения (43) с разрывной правой частью. (Если область управления U является множеством r-мерного пространства переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$, то задание одной векторной функции $v(x)$ равносильно заданию r скалярных функций $u^1 = v^1(x), \ldots, u^r = v^r(x)$; ср. формулы (42).)

Функцию $v(x)$, дающую уравнение оптимальных траекторий в форме (43), мы будем называть *синтезирующей функцией*, а задачу нахождения синтезирующей функции (если таковая существует хотя бы в достаточно малой окрестности начала координат) будем называть *задачей синтеза* оптимальных управлений. В разобранных выше примерах синтезирующие функции были *кусочно-непрерывными*.

Знание синтезирующей функции позволяет считать задачу оптимального попадания в начало координат м а т е м а т и ч е с к и решенной до конца. В самом деле, если рассматриваемый технический объект будет снабжен измерительным прибором, замеряющим фазовые состояния, и исполнительным механизмом, ставящим рули в положение $u = v(x)$, где $v(x)$ — синтезирующая функция (предполагаемая известной), то интересующий нас объект будет двигаться оптимально. Если функция $v(x)$ имеет сложный вид, то для нахождения нужного положения рулей $u = v(x)$, по-видимому, целесообразно применять (универсальные или специализированные) быстродействующие вычислительные устройства. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к обширной монографии А. А. Фельдбаума «Вычислительные устройства в автоматических системах», Физматгиз, Москва, 1959 (см. гл. XIII).

В общем случае задача синтеза (т. е. вопрос о существовании синтезирующей функции и ее отыскании) не решена. В частном случае линейных систем и оптимальности, понимаемой в смысле быстродействия, эта задача будет обсуждаться ниже в третьей главе.

§ 6. Задача с подвижными концами и условия трансверсальности

Для формулировки и решения дальнейших задач об отыскании оптимальных управлений нам будут необходимы некоторые геометрические понятия. Для удобства читателя мы напомним здесь определения этих понятий.

Пусть $f(x)=f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — некоторая действительная скалярная функция, заданная в какой-либо области G евклидова *) пространства X с ортогональными координатами $x^1, \ldots, x^n$. Если функция f имеет в области G первые частные производные по переменным $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$, то в каждой точке x области G определен вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right),$$

называемый *градиентом* функции $f(x)$ и обозначаемый символом $\operatorname{grad} f(x)$.

Множество S всех точек $x=(x^1, \ldots, x^n)$, удовлетворяющих соотношению

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n)=0, \tag{44}$$

мы будем называть *гиперповерхностью* пространства X, а соотношение (44) — *уравнением* этой гиперповерхности. Будем теперь считать, что левая часть уравнения (44) имеет непрерывные частные производные по переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Точка $x \in S$, удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^1}=\frac{\partial f(x)}{\partial x^2}=\ldots=\frac{\partial f(x)}{\partial x^n}=0$$

---

*) Можно не предполагать пространство X евклидовым, но тогда вводимый ниже вектор $\operatorname{grad} f(x)$ следует считать *ковариантным*.

(т. е. точка, в которой вектор $\operatorname{grad} f(x)$ обращается в нуль), называется *особой точкой* гиперповерхности S. Прочие точки, принадлежащие гиперповерхности S (т. е. точки, в которых $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$), называются ее *неособыми точками.* Гиперповерхность, определяемая уравнением (44) с непрерывно дифференцируемой левой частью и не содержащая особых точек, называется *гладкой гиперповерхностью.* Все гиперповерхности, рассматриваемые в дальнейшем, предполагаются гладкими.

При $n = 2$ уравнение (44) принимает вид

$$f(x^1, x^2) = 0,$$

и понятие гладкой гиперповерхности сводится в этом случае к понятию *гладкой линии* (на плоскости переменных x^1, x^2). При $n = 3$ уравнение (44) принимает вид

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

и понятие гладкой гиперповерхности сводится в этом случае к понятию *гладкой поверхности* (в пространстве переменных x^1, x^2, x^3).

Если уравнение (44) линейно, т. е. имеет вид

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + b = 0, \tag{45}$$

то отсутствие особых точек означает, что хотя бы один из коэффициентов a_i отличен от нуля.

В этом случае гиперповерхность, определяемая уравнением (45), называется *гиперплоскостью.*

При $n = 2$ гиперплоскость представляет собой *прямую линию* (на плоскости), а при $n = 3$ — *плоскость* (в трехмерном пространстве).

Пусть x_0 — произвольная точка гладкой гиперповерхности S, определяемой уравнением (44). Вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ (или любой коллинеарный ему вектор), называется *нормальным вектором* (или просто *нормалью*) гиперповерхности S в точке x_0. В случае гиперплоскости (см. (45)) нормальные векторы во всех точках одинаковы, т. е. имеется один единственный нормальный вектор

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Всякая гиперплоскость однозначно определяется заданием нормального вектора и одной точки, принадлежащей этой гиперплоскости. Если S — гладкая гиперповерхность с уравнением (44) и x_0 — некоторая ее точка, то гиперплоскость, проходящая через точку x_0 и имеющая вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ своей нормалью, называется *касательной гиперплоскостью* гиперповерхности S в точке x_0. Каждый вектор, начинающийся в точке x_0 и лежащий в касательной гиперплоскости, называется *касательным вектором* гиперповерхности S в точке x_0. Иначе говоря, вектор, начинающийся в точке x_0, тогда и только тогда является касательным вектором гиперповерхности S, когда он ортогонален вектору $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Пусть теперь

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_k$$

— гладкие гиперповерхности, заданные в пространстве X соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} f_1(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) &= 0, \\ f_2(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots \\ f_k(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n) &= 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Пересечение M всех этих гиперповерхностей (т. е. множество всех точек $x \in X$, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям (46)) называется $(n-k)$-*мерным* (*гладким*) *многообразием* в X, если выполнено следующее условие: в каждой точке $x \in M$ векторы

$$\operatorname{grad} f_1(x), \quad \operatorname{grad} f_2(x), \ \ldots, \ \operatorname{grad} f_k(x) \tag{47}$$

линейно независимы. Таким образом, по определению, r-мерное многообразие в X задается системой $n-r$ уравнений. В частности, $(n-1)$-мерное многообразие задается о д н и м уравнением. Таким образом, $(n-1)$-мерные многообразия пространства X совпадают с гиперповерхностями. Одномерные многообразия называются также *линиями*. Заметим еще, что условие независимости векторов (47) равносильно требованию, чтобы ранг функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_k(x)}{\partial x^1} & \frac{\partial f_k(x)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f_k(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix} \tag{48}$$

был максимальным (т. е. был равен k).

Если уравнения (46), определяющие $(n-k)$-мерное многообразие M, линейны, то многообразие M называется $(n-k)$-мерной *плоскостью* пространства X. Иначе говоря, $(n-k)$-мерная плоскость представляет собой пересечение k гиперплоскостей, нормальные векторы которых линейно независимы. Одномерные плоскости называются также *прямыми линиями*.

Пусть M — гладкое $(n-k)$-мерное многообразие, определенное в пространстве X уравнениями (46), и x — некоторая его точка. Обозначим через L_i касательную гиперплоскость к гиперповерхности $f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$ в точке x $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Пересечение гиперплоскостей $L_1, L_2, \ldots, L_k$ представляет собой $(n-k)$-мерную плоскость, называемую *касательной плоскостью* многообразия M в точке x. Вектор, исходящий из точки x, тогда и только тогда лежит в касательной плоскости (т. е. является *касательным вектором* многообразия M в точке x), когда он ортогонален всем векторам (47).

Наконец, отметим еще один простой факт, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Пусть

$$x^i = \varphi^i(\xi), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

— параметрическая запись некоторой линии в пространстве X или, в векторной форме, $x = \varphi(\xi)$. Касательный вектор этой линии в точке, соответствующей значению $\xi = \xi_0$, имеет вид

$$\left(\frac{d\varphi^1(\xi_0)}{d\xi}, \frac{d\varphi^2(\xi_0)}{d\xi}, \ldots, \frac{d\varphi^n(\xi_0)}{d\xi}\right) = \frac{d\varphi(\xi_0)}{d\xi}. \tag{50}$$

Если линия (49) лежит целиком на гладком многообразии M (некоторого числа измерений), то касательный вектор (50) этой линии является также касательным вектором многообразия M в точке $\varphi(\xi_0)$. Обратно, если задан касательный вектор многообразия M в точке $x_0 \in M$, то существует на многообразии M линия, проходящая через точку x_0 и имеющая заданный вектор своим касательным вектором. Иначе говоря, вектор, исходящий из произвольной точки $x_0 \in M$, тогда и только тогда является касательным вектором многообразия M, когда он касается некоторой линии, лежащей на M.

Перейдем теперь к формулировке задачи оптимального управления с подвижными концами. Пусть S_0 и S_1 — гладкие многообразия произвольных (но меньших, чем n) размерностей r_0, r_1, расположенные в пространстве X. Поставим задачу: *найти допустимое управление $u(t)$, которое переводит фазовую точку из некоторого (заранее не заданного) положения $x_0 \in S_0$ в некоторое положение $x_1 \in S_1$ и при этом придает функционалу* (7) *минимальное значение* (рис. 20). Эту задачу мы и будем

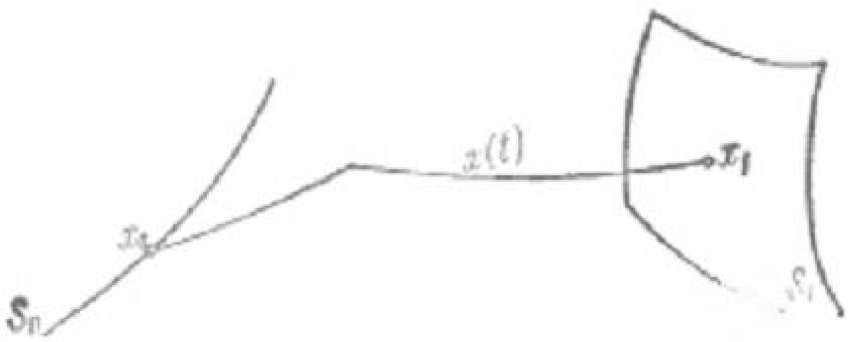

Рис. 20.

называть оптимальной задачей с *подвижными концами*. Если оба многообразия S_0, S_1 вырождаются в точки, то задача с подвижными концами обращается в прежнюю, уже рассмотренную нами задачу (задачу с *закрепленными концами*).

Ясно, что если бы точки x_0, x_1 были известны, то мы имели бы задачу с закрепленными концами. Поэтому управление $u(t)$, оптимальное в смысле задачи с подвижными концами, оптимально и в прежнем смысле, т. е. принцип максимума (теоремы 1, 2) остается в силе и для задачи со свободными концами.

Однако нужно в этом случае иметь еще соотношения, из которых можно было бы определить положение точек x_0, x_1 на многообразиях S_0, S_1. Такими соотношениями и являются формулируемые в этом параграфе *условия трансверсальности*. Эти условия позволяют написать r_0+r_1 соотношений, включающих координаты концевых точек x_0 и x_1. Так как, с другой стороны, число неизвестных параметров (по сравнению с задачей с закрепленными концами) также увеличилось на r_0+r_1 (ибо положение точки x_0 на r_0-мерном многообразии S_0 характеризуется r_0 параметрами, а положение точки $x_1 \in S_1$ характеризуется r_1 параметрами), то вместе с принципом максимума условия трансверсальности образуют «достаточную» систему соотношений для решения поставленной оптимальной задачи с подвижными концами.

Приведем теперь формулировку условий трансверсальности. Пусть $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ — некоторые точки, а T_0 и T_1 — касательные плоскости многообразий S_0 и S_1, проведенные в этих точках. Плоскости T_0 и T_1 расположены в пространстве X и имеют размерности соответственно r_0, r_1. Пусть, далее, $u(t)$, $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — решение оптимальной задачи с закрепленными концами x_0 и x_1. Наконец, пусть $\psi(t)$ — вектор, существование которого утверждается в теореме 1. Мы будем говорить, что вектор $\psi(t)$ *удовлетворяет условию трансверсальности* в правом конце траектории $x(t)$ (т. е. в точке $x(t_1)$), если вектор $\psi(t_1)=(\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \ldots, \psi_n(t_1))$ ортогонален плоскости T_1. Иначе говоря, *условие трансверсальности означает, что для любого вектора* $\theta=(\theta^1, \theta^2, \ldots$ $\ldots, \theta^n)$, *принадлежащего* (*или параллельного*) *плоскости* T_1, *выполнено соотношение* $(\psi(t_1), \theta)=0$. Аналогичный смысл имеет условие трансверсальности в л е в о м конце траектории $x(t)$ (нужно лишь заменить t_1 и T_1 на t_0 и T_0 соответственно). Ясно, что условие трансверсальности в правом конце траектории $x(t)$ содержит r_1 независимых соотношений, ибо в равенство $(\psi(t_1), \theta)=$ $=0$ достаточно подставить r_1 линейно независимых векторов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{r_1}$, расположенных в плоскости T_1.

Условие трансверсальности в левом конце содержит r_0 независимых соотношений.

Пользуясь условиями трансверсальности, можно сформулировать теперь решение задачи с подвижными концами.

Теорема 3. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление, переводящее фазовую точку из некоторого положения $x_0 \in S_0$ в положение $x_1 \in S_1$, а $\boldsymbol{x}(t)$ — соответствующая траектория (исходящая из точки $\boldsymbol{x}_0 = (0, x_0)$). Для того чтобы $u(t)$ и $\boldsymbol{x}(t)$ давали решение оптимальной задачи с подвижными концами, необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{\psi}(t)$, удовлетворяющей условиям, указанным в теореме 1, и, кроме того, условию трансверсальности в обоих концах траектории $\boldsymbol{x}(t)$.*

Разумеется, если одно из многообразий S_0, S_1 вырождается в точку, то условие трансверсальности в соответствующем конце траектории $\boldsymbol{x}(t)$ заменяется условием прохождения траектории $x(t)$ через эту точку.

Для случая оптимальности по быстродействию в формулировке теоремы 3 решение $\boldsymbol{x}(t)$ заменяется на $x(t)$, а ссылка на теорему 1 заменяется ссылкой на теорему 2.

Приведем элементарные примеры решения задач с подвижными концами.

Пример 1

Рассмотрим для точки, движущейся по закону (22) (с тем же ограничением $|u| \leqslant 1$), задачу о быстрейшем попадании на ось x^2 из заданного начального состояния x_0. В этом случае мы имеем задачу с подвижным правым концом: многообразие S_0 вырождается в точку x_0, а многообразием S_1 служит $x^1 = 0$. Вектор $\theta = (\theta^1, \theta^2)$, касающийся многообразия S_1 (в любой его точке), имеет вид $\theta = (0, \theta^2)$, где $\theta^2 \neq 0$ и, следовательно, условие трансверсальности в правом конце записывается в форме $0\psi_1(t_1) + \theta^2\psi_2(t_1) = 0$, откуда $\psi_2(t_1) = 0$. Так как по-прежнему функция $\psi_2(t)$ линейна (см. стр. 30), то из соотношения $\psi_2(t_1) = 0$ вытекает, что $\psi_2(t)$ сохраняет постоянный знак при $t_0 \leqslant t < t_1$. Таким образом (см. (24)), в этом случае каждое оптимальное управление

$u(t)$ постоянно и равно $+1$ или -1, и потому оптимальными могут быть только движения по параболам (25), (26) (без переключений).

Предположим сначала, что начальное фазовое состояние x_0 находится справа от прямой $x^1 = 0$. Согласно сказанному выше, через точку x_0 проходят только две фазовые траектории, которые могут оказаться оптимальными: траектория (25), по которой движение происходит снизу вверх, и траектория (26), по которой движение происходит сверху вниз (рис. 21). Если точка x_0 расположена выше линии AO (см. рис. 7), то, двигаясь по параболе (25), фазовая точка не попадет на ось $x^1 = 0$ (рис. 22а), и потому оптимальным может быть только движение по параболе (26). Если же точка x_0 расположена на линии AO или ниже нее, то оба движения (25), (26), приводят фазовую точку на ось $x^1 = 0$ (рис. 22б). Итак, в этом случае имеются две траектории, удовлетворяющие принципу максимума.

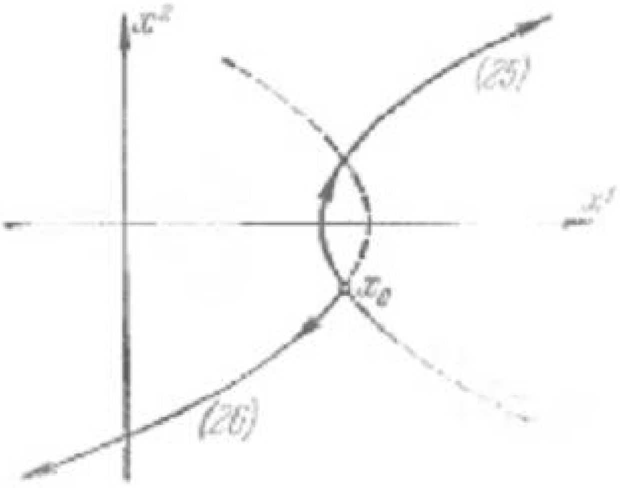

Рис. 21

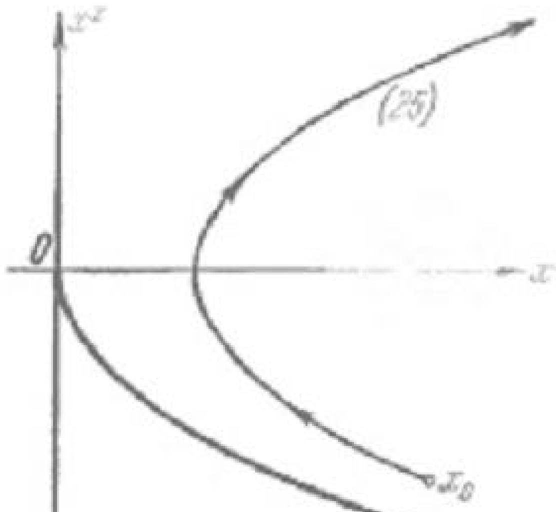

Рис. 22а.

Однако легко видеть, что время движения по этим траекториям из точки x_0 до оси $x^1 = 0$ различно. Действительно, проведя касательные к параболам (25) и (26) в точке x_0, мы легко найдем (см. рис. 23), что $Q_0Q_2 > Q_0P_2 = Q_0P_1 > Q_0Q_1$, а так как при $u = \pm 1$ время движения по дуге параболы равно разности ординат (см. второе уравнение (22)), то движение по дуге x_0Q_2 происходит дольше, чем по дуге x_0Q_1. Таким образом, и в этом случае оптимальным может быть только движение по траектории (26). Итак, в правой полуплоскости оптимальными могут быть только движения по параболам (26), т. е. движения, совершающиеся при $u=-1$.

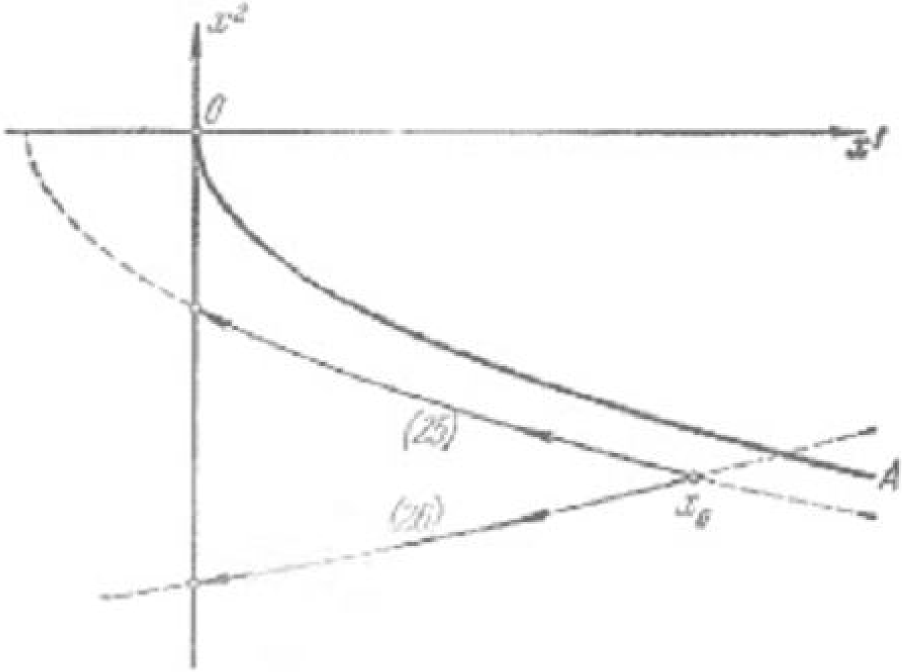

Рис. 22б.

Аналогично, слева от оси $x^1=0$ оптимальными могут быть только движения по параболам (25), т. е. движения, совершающиеся при $u=+1$.

Это и дает синтез оптимальных управлений: положив

$$v(x^1, x^2)=\begin{cases} +1 & \text{при} \quad x^1<0, \\ -1 & \text{при} \quad x^1>0, \end{cases}$$

мы получим совокупность всех оптимальных траекторий из системы

$$\frac{dx^1}{dt}=x^2, \qquad \frac{dx^2}{dt}=v(x^1, x^2) \tag{51}$$

(ср. (27)). Фазовая картина оптимальных траекторий изображена на рис. 24. Уравнения (51) можно, впрочем, считать очевидными (например, с механической точки зрения).

Пример 2

Рассмотрим для точки, движущейся по закону (28) (с тем же ограничением $|u|\leqslant 1$), задачу о быстрейшем

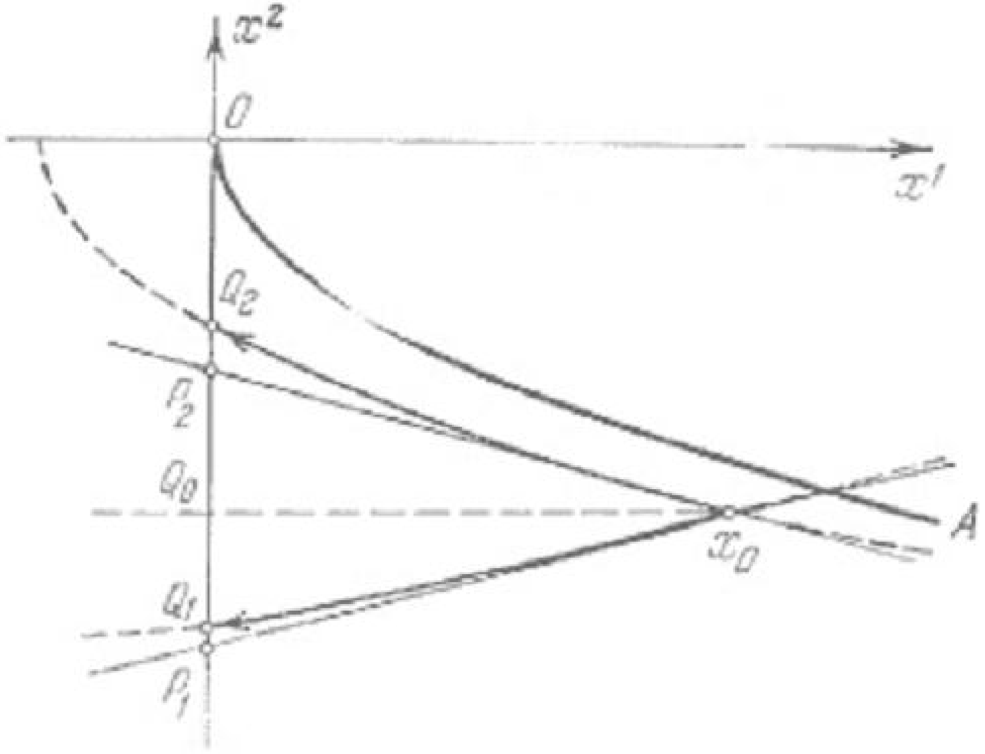

Рис. 23.

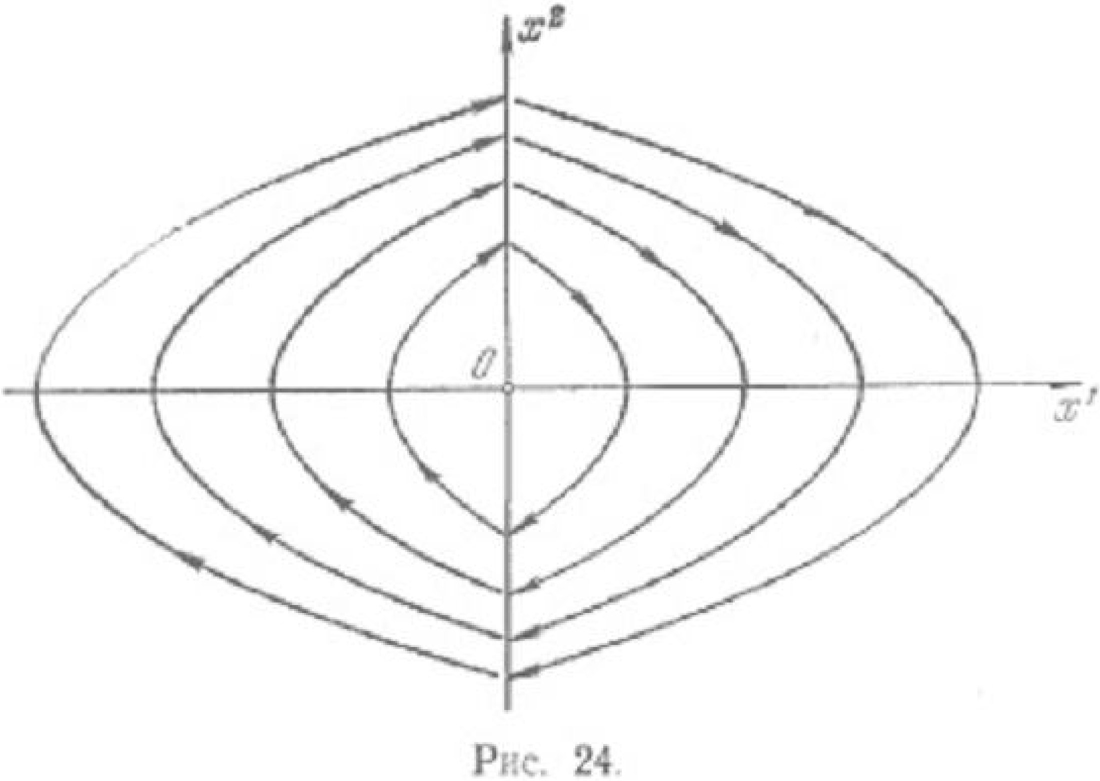

Рис. 24.

попадании на окружность

$$(x^1)^2+(x^2)^2=R^2 \tag{52}$$

из заданного начального состояния x_0, находящегося вне этой окружности. В этом случае мы также имеем задачу с подвижным правым концом: многообразием S_1 служит окружность (52). Пусть $x_1=(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ — произвольная точка окружности (52). Найдем оптимальную

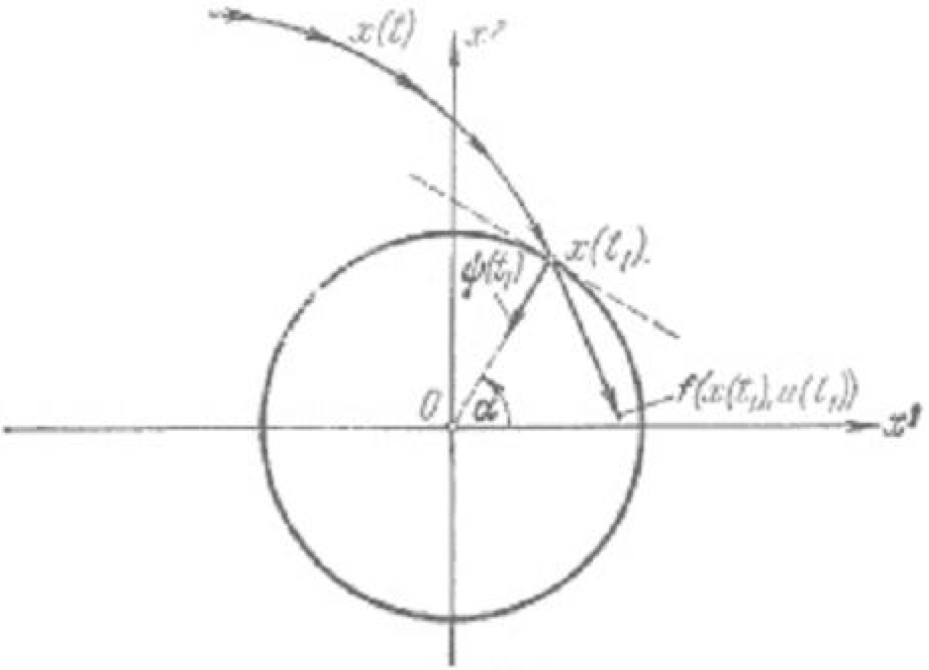

Рис. 25.

траекторию, дающую решение поставленной задачи с подвижным правым концом и оканчивающуюся в точке x_1.

В качестве $\psi(t_1)$, т. е. вектора, нормального к окружности (52) в точке x_1 (в силу условий трансверсальности), мы должны взять один из двух векторов $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, первый из которых направлен внутрь окружности, а второй — в обратную сторону. Так как искомая оптимальная траектория должна подходить к точке x_1, располагаясь в н е окружности (52), то вектор фазовой скорости $f(x(t_1), u(t_1))$ в точке $x(t_1)=x_1$ будет направлен либо внутрь окружности (52), либо по касательной к этой окружности в точке x_1 (рис. 25). Вспоминая теперь, что скалярное произведение

$$(\psi(t_1),\ f(x(t_1),\ u(t_1)))=H(\psi(t_1),\ x(t_1),\ u(t_1)) \tag{53}$$

должно быть неотрицательным (см. теорему 2 и, в частности, соотношение (21)), мы находим, что в качестве $\psi(t_1)$ следует взять вектор $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$, направленный по радиусу внутрь окружности. (Если вектор фазовой скорости $f(x(t_1), u(t_1))$ окажется направленным по касательной к окружности, то скалярное произведение (53) будет равно нулю, и потому в качестве $\psi(t_1)$ можно взять как вектор, направленный внутрь окружности, так и противоположно направленный вектор; в целях единообразия мы и в этом случае условимся считать $\psi(t_1)$ направленным внутрь окружности.) Итак, мы имеем:

$$\psi(t_1) = (-\cos\alpha, \ -\sin\alpha).$$

Вспоминая теперь систему уравнений (см. стр. 34)

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2, \qquad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1$$

для нахождения вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, мы получаем окончательно

$$\psi_1(t) = -\cos(t - t_1 - \alpha), \ \psi_2(t) = \sin(t - t_1 - \alpha), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Соотношение (20) дает нам (учитывая (29) и условие $|u| \leqslant 1$):

$$u = \operatorname{sign}\psi_2 = \operatorname{sign}(\sin(t - t_1 - \alpha)). \tag{54}$$

Если угол α удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \alpha < \pi$, то на отрезке $t_1 - (\pi - \alpha) \leqslant t \leqslant t_1$ управление

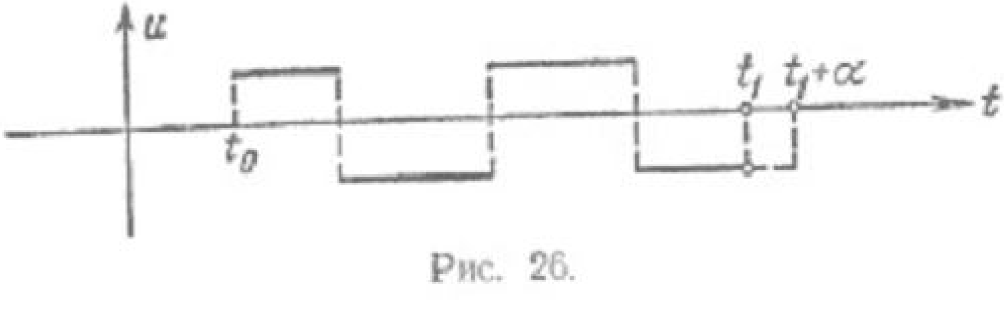

Рис. 26.

$u(t)$ будет, в силу (54), равно -1, а перед этим будет попеременно равно $+1$ и -1 на отрезках длины π (рис. 26). Таким образом, последний кусок фазовой траектории (оканчивающийся в точке x_1) представляет собой дугу окружности с центром в точке $(-1, 0)$, причем эта дуга соответствует центральному углу $\pi-\alpha$, а предшествующие куски фазовой траектории являются полуокружностями попеременно с центрами в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$. Вид фазовой траектории показан на рис. 27. Если же угол α удовлетворяет неравенствам

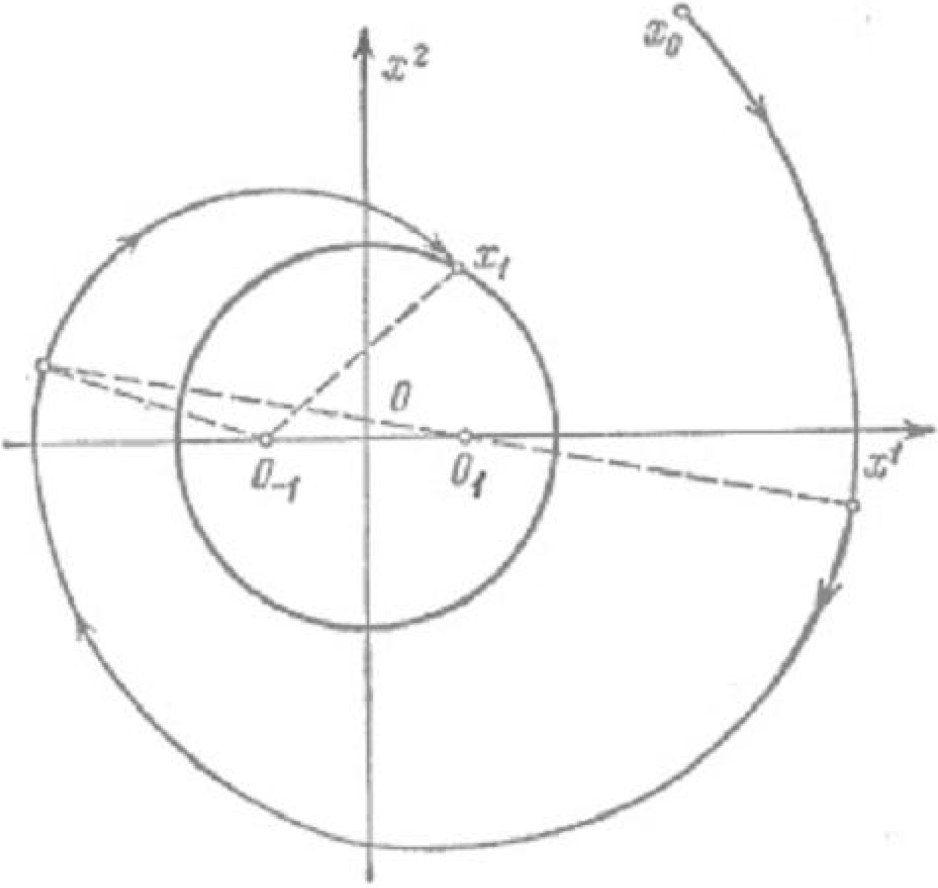

Рис. 27.

$\pi \leqslant \alpha < 2\pi$, то траектория, изображенная на рис. 27, заменяется центрально симметричной. Легко видеть (см. рис. 28), что при $0 \leqslant \alpha < \pi$ конец B последней дуги BA рассматриваемой оптимальной траектории расположен на окружности радиуса 1 с центром в точке $(-R-1, 0)$. При изменении α от 0 до π точка B описывает половину N_2N_1 этой окружности, расположенную над осью абсцисс. Далее, предыдущий кусок CB оптимальной траектории представляет собой полуокружность с центром в точке $(1,0)$, и потому конец C этой полуокружности лежит на полуокружности M_2M_3, которая симметрична N_1N_2 относительно центра $(1,0)$. Продолжая таким образом, мы и получим всю фазовую траекторию (рис. 29). Аналогично строится центрально

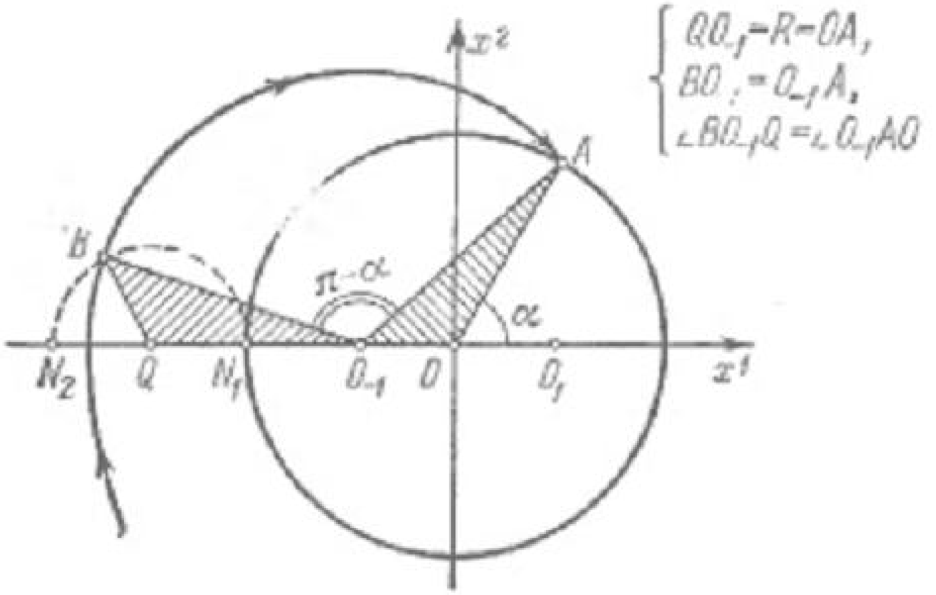
x^2
$QO_{-1}=R=OA,$
$BO_{-1}=O_{-1}A,$
$\angle BO_{-1}Q=\angle O_{-1}AO$
A
B
$\pi-\alpha$
α
N_2
Q
N_1
O_{-1}
O
O_1
x^1

Рис. 28.

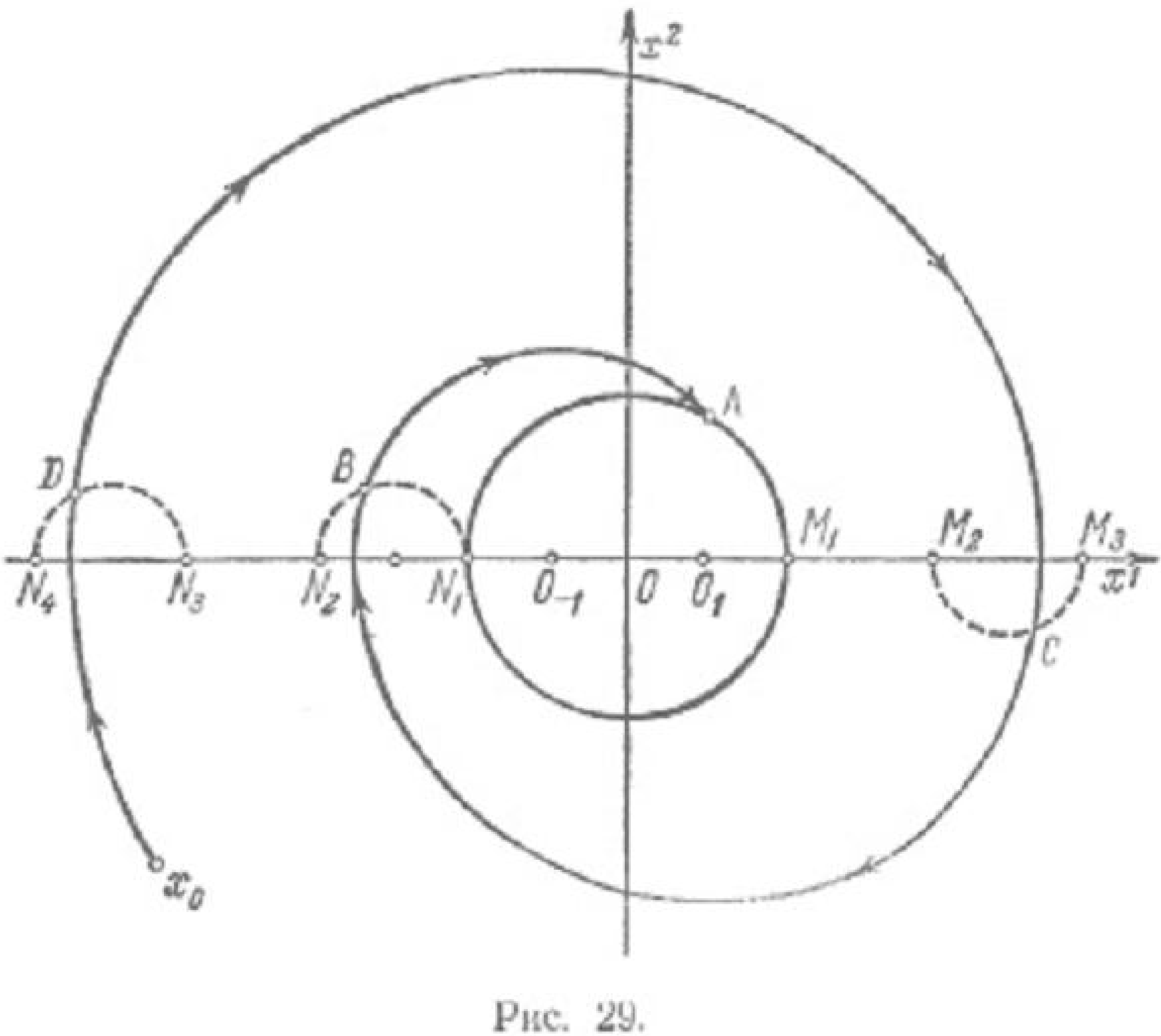
x^2
A
B
D
M_1
M_2
M_3
N_4
N_3
N_2
N_1
O_{-1}
O
O_1
x^1
C
x_0

Рис. 29.

симметричная траектория. Общее расположение фазовых траекторий показано на рис. 30.

Синтез оптимальных управлений осуществляется функцией $v(x^1, x^2)$, которая строится, как вытекает из предыдущего, следующим образом. К окружности (52)

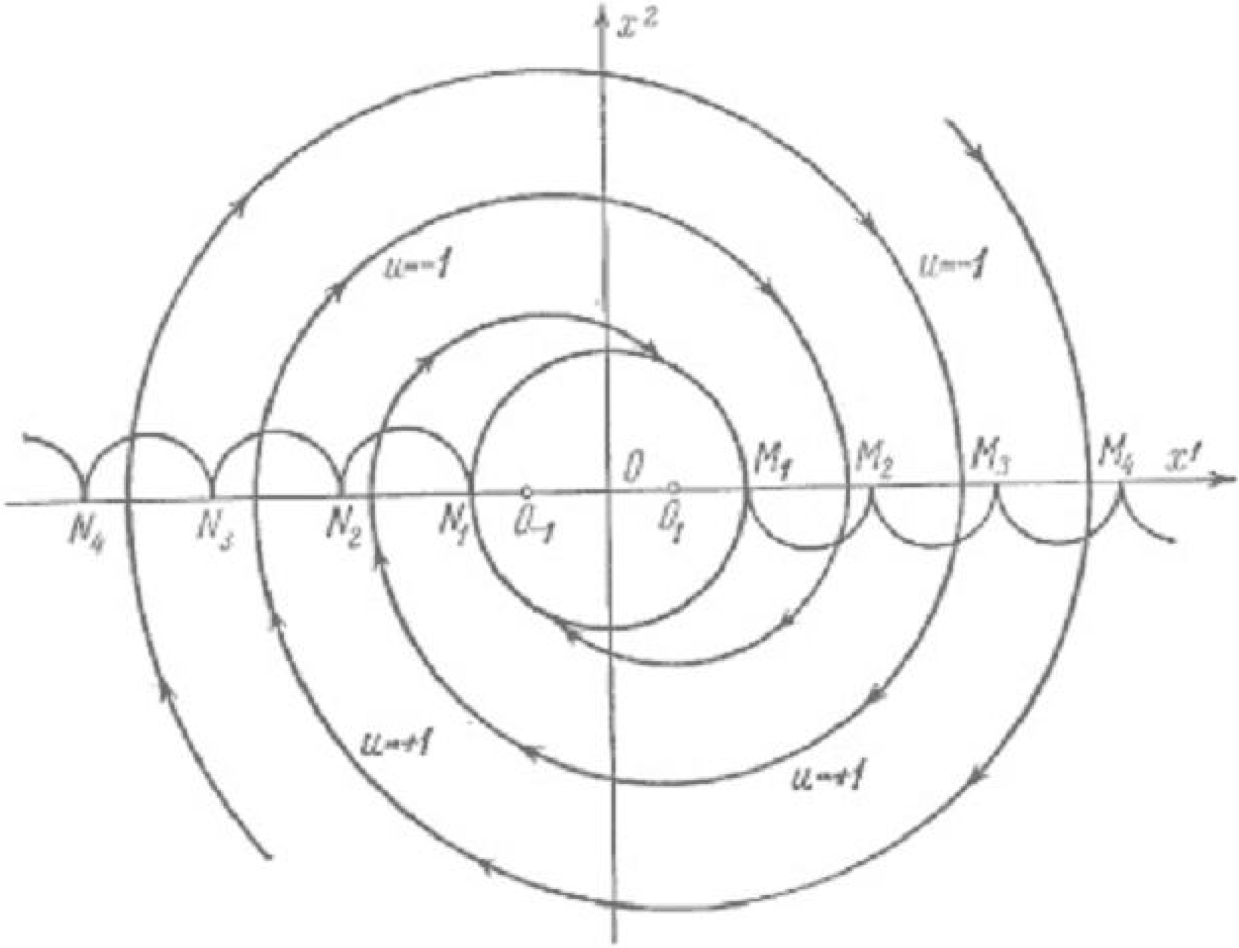

Рис. 30.

прикладываются справа равные между собой полуокружности M_1M_2, M_2M_3, ... радиуса 1, расположенные под осью абсцисс. Слева от окружности (52) строятся аналогичные полуокружности N_1N_2, N_2N_3, ..., расположенные над осью абсцисс. Функция $v(x^1, x^2)$ определяется теперь вне окружности (52): $v(x^1, x^2)$ равна $+1$ ниже линии ... $N_2N_1M_1M_2$ ... и равна -1 выше линии ... $M_2M_1N_1N_2$ ... Это и дает синтез оптимальных управлений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= -x^1 + v(x^1, x^2). \end{aligned}\right\}$$

§ 7. Принцип максимума для неавтономных систем

А. Рассмотрим оптимальную задачу такого же вида, как и (4), (7), но в случае, когда функции f^α явно зависят от времени (область управления U предполагается не зависящей от времени). Таким образом, закон движения объекта и функционал, минимум которого ищется, принимают в рассматриваемом случае вид

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{55}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\, dt. \tag{56}$$

Время t_0 здесь предполагается заданным, а t_1 — искомое время прохождения через точку x_1. Введя, как и прежде, новую координату $x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t), t)\, dt$, мы сформулируем рассматриваемую задачу в следующей форме (ср. § 2).

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве X даны точка $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$ и прямая Π, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $(0, x_1)$. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, обладающих тем свойством, что соответствующее решение $\mathbf{x}(t)$ системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{57}$$

с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ пересекает прямую Π, найти такое, для которого точка пересечения с прямой Π имеет наименьшую координату x^0.

Для решения этой задачи введем еще одно вспомогательное неизвестное x^{n+1}, изменяющееся по закону

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1, \qquad x^{n+1}(t_0) = t_0.$$

Очевидно, что мы будем иметь $x^{n+1} \equiv t$. Пространство переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ обозначим через X^*. С помощью неизвестного x^{n+1} система (57) может быть записана в следующем автономном (т. е. не зависящем явно от t) виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= f^i(x, u, x^{n+1}), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \\ \frac{dx^{n+1}}{dt} &= 1. \end{aligned}\right\}$$

При этом мы должны найти оптимальную траекторию, соединяющую в пространстве X^* точку $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n, t_0)$ с некоторой точкой прямой S_1, проходящей через точку $(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, 0)$ параллельно оси x^{n+1} (ибо конечное значение переменного x^{n+1}, т. е. момент времени, когда движущаяся точка приходит в положение x_1, не является заранее заданным). Таким образом, мы приходим к обычной оптимальной задаче с закрепленным левым концом и подвижным правым концом.

Напишем принцип максимума и условие трансверсальности для полученной задачи. Вспомогательная система уравнений (12) имеет вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \psi_\alpha, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{58}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \psi_\alpha. \tag{59}$$

Согласно теоремам 1 и 3, для решения рассматриваемой задачи нужно составить функцию

$$\psi_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \psi_1 f^1(x, u, x^{n+1}) + \ldots \\ \ldots + \psi_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1} \cdot 1.$$

Эту функцию мы обозначим через $\mathscr{H}^*$ (а не через $\mathscr{H}$, как в теореме 1), сохранив обозначение $\mathscr{H}$ для функции

$$\mathscr{H}(\psi, x, t, u) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \psi_1 f^1(x, u, t) + \ldots \\ \ldots + \psi_n f^n(x, u, t),$$

с помощью которой уравнения (57), (58) записываются в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Точно так же максимум по u функции $\mathscr{H}^*$ при фиксированных x^i, ψ_i мы обозначим через $\mathscr{M}^*(\psi, x, x^{n+1})$ (а не через $\mathscr{M}$, как в теореме 1), сохранив обозначение $\mathscr{M}(\psi, x, t)$ для максимума (по u) функции $\mathscr{H}(\psi, x, t, u)$ при фиксированных ψ, x, t. Таким образом, учитывая соотношение $x^{n+1} \equiv t$, мы можем написать $\mathscr{H}^* = \mathscr{H} + \psi_{n+1}$, $\mathscr{M}^* = \mathscr{M} + \psi_{n+1}$, и потому соотношение $\mathscr{H}^* = \mathscr{M}^* = 0$, выполняющееся вдоль оптимальной траектории (см. теорему 1), принимает вид

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t) \equiv -\psi_{n+1}(t). \tag{60}$$

Наконец, условие трансверсальности в правом конце траектории показывает, что прямая S_1 (параллельная оси x^{n+1}) ортогональна вектору $(\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \ldots \ldots, \psi_{n+1}(t_1))$. Иначе говоря, $\psi_{n+1}(t_1) = 0$. Вместе с соотношениями (60), (59) это дает нам

$$\mathscr{M}(\psi(t), x(t), t) = \int\limits_{t_1}^{t} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt.$$

Итак, мы получаем следующую теорему (принцип максимума для неавтономных систем).

Теорема 4. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$ системы* (57), *исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходит в момент t_1 через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ (см.* (58)), *что:*

1° *для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t); \tag{61}$$

2° *выполнены соотношения*

$$\begin{gathered} \psi_0(t) = \mathrm{const} \leqslant 0, \\ \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t) = \int\limits_{t_1}^{t} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt. \end{gathered} \tag{62}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ *удовлетворяют системе* (57), (58) *и условию* 1°, *то функция* $\psi_0(t)$ *переменного* t *постоянна, а функция* $\mathscr{M}(\psi(t), x(t), t)$ *может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного во втором соотношении* (62), *так что проверку соотношений* (62) *достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; *например, вместо* (62) *достаточно проверить соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \qquad \mathscr{M}(\psi(t_1),\ x(t_1),\ t_1) = 0. \tag{63}$$

Б. Если теперь предположить, что точка x_1, в которую точка x_0 должна переводиться с помощью управления $u(t)$, не неподвижна, а перемещается, т. е. $x_1 = x_1(t)$, то формулировка теоремы 4 несколько меняется. Именно, пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, которое точку x_0 в некоторый момент времени t_1 приводит в точку $x_1(t_1)$, и пусть $\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=t_1} = (q^1, q^2, \ldots, q^n)$ — касательный вектор к кривой $x_1(t)$ в момент t_1. Тогда, после введения вспомогательного переменного $x^{n+1} \equiv t$, мы получим, что многообразие S_1 будет уже не прямой, параллельной оси x^{n+1}, а линией $(x_1^1(\theta), x_1^2(\theta), \ldots, x_1^n(\theta), \theta)$, где θ — параметр. Касательная этой линии в точке $\theta = t_1$ определяется вектором $(q^1, q^2, \ldots, q^n, 1)$, и потому условие трансверсальности принимает вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1)\, q^\nu + \psi_{n+1}(t_1)\cdot 1 = 0.$$

Отсюда, учитывая соотношение (60), получаем

$$\mathscr{M}(\psi(t_1),\ x(t_1),\ t_1) = -\psi_{n+1}(t_1) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1)\, q^\nu.$$

Так как, наконец, согласно (60) и (59), функция $\mathscr{M}(\psi(t), x(t), t)$ является первообразной для

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t),\ u(t),\ t)}{\partial t}\, \psi_\alpha(t),$$

то мы получаем

$$\mathscr{M}(\psi(t), x(t), t) = \\ = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1) q^\nu + \int_{t_1}^{t} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t)\, dt. \quad (64)$$

Это и есть соотношение, которым необходимо заменить второе из равенств (62) в формулировке теоремы 4; в связи с этим соотношения (63) принимают вид

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \qquad \mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1), t_1) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1) q^\nu. \quad (65)$$

В остальном же формулировка теоремы 4 сохраняется.

В. Наконец, рассмотрим неавтономную оптимальную задачу с подвижными концами. Ограничимся случаем подвижного правого конца. Пусть $S_1(t)$ — перемещающееся r-мерное многообразие, дифференцируемым образом зависящее от t. Задача заключается в отыскании такого допустимого управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что точка, движущаяся по закону (55) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, попадает в некоторый момент t_1 на многообразие $S_1(t_1)$, причем осуществляется минимум функционала (56).

Уточним прежде всего понятие «перемещающегося многообразия». Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, t$ рассматривается $(r+1)$-мерное многообразие S_1^*, определяемое системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} f_1(x^1, x^2, \ldots, x^n, t) &= 0, \\ f_2(x^1, x^2, \ldots, x^n, t) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-r}(x^1, x^2, \ldots, x^n, t) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Предполагается далее, что левые части этих уравнений имеют непрерывные первые производные по $x^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n, t$ и что ранг функциональной матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ в каждой точке многообразия S_1^* равен $n - r$. Рассмотрим теперь в пространстве X переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} f_1(x^1, x^2, \ldots, x^n, t^*) &= 0, \\ f_2(x^1, x^2, \ldots, x^n, t^*) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ f_{n-r}(x^1, x^2, \ldots, x^n, t^*) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

получающуюся из (66) при фиксированном значении $t = t^*$. В силу сделанных предположений, система (67) определяет в пространстве X некоторое r-мерное гладкое многообразие, которое мы обозначим через $S_1(t^*)$. При различных значениях t^* мы получим целое семейство многообразий $S_1(t)$, меняющих (вообще говоря) свое положение и форму при изменении t. В этом смысле мы и говорим о «перемещающемся многообразии $S_1(t)$».

Пусть $u(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$ дают решение поставленной задачи. Обозначим через T_1 касательную плоскость к многообразию $S_1(t_1)$ в точке $x(t_1)$. Так как множество всех векторов, касательных к многообразию S_1^* в точке $(x(t_1), t_1)$ и имеющих вид $(q^1, q^2, \ldots, q^n, 0)$, имеет размерность r, а многообразие S_1^* имеет размерность, большую r, то существуют такие числа $q^1, \ldots, q^n$, что вектор $(q^1, \ldots \ldots, q^n, 1)$ касается многообразия S_1^* (в точке $(x(t_1), t_1)$). Эти числа $q^1, q^2, \ldots, q^n$ дадут нам возможность написать соотношения (64), 65), которым должен удовлетворять вектор $\psi(t)$. Наконец, как и в § 6, будем говорить, что вектор $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце t_1, если вектор $\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \ldots, \psi_n(t_1))$ ортогонален плоскости T_1 (т. е. касательной плоскости многообразия $S_1(t_1)$ в точке $x(t_1)$). При этих условиях имеется следующее предложение (обобщение теоремы 3 на неавтономный случай).

Т е о р е м а 3*. *Для того чтобы $u(t)$ и $x(t)$ давали решение оптимальной неавтономной задачи с подвижным правым концом, необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условиям, указанным в теореме* 4, *с заменой соотношений* (62), (63) *соотношениями* (64), (65), *и, кроме того, условию трансверсальности в точке t_1.*

Это утверждение легко вытекает из теоремы 3 после введения новой переменной $x^{n+1} = t$ (ср. доказательство теоремы 4). Отметим, что если многообразие S_1 неподвижно, то соотношения (64), (65) совпадают с (62), (63), так как в этом случае вектор $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ касается многообразия S_1^*.

Г. Выведем теперь из теоремы 4 аналогичное необходимое условие для оптимальности по быстродействию. Иначе говоря, рассмотрим для точки, движущейся по закону (55), задачу о быстрейшем переходе из заданного начального фазового состояния x_0 в заданное фазовое состояние x_1. Для решения этой задачи в теореме 4 следует положить $f^0(x, u, t) \equiv 1$. Функция $\mathscr{H}$ принимает в этом случае вид

$$\mathscr{H}(\psi, x, t, u) = \psi_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x, u, t).$$

Вводя n-мерный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ и функцию

$$H(\psi, x, t, u) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x, u, t),$$

мы можем записать уравнения (55) и (58) (кроме уравнения (58) для $i = 0$, которое теперь не нужно) в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{68}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{69}$$

При фиксированных значениях ψ, x, t функция H становится функцией параметра u; точную верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через $M(\psi, x, t)$:

$$M(\psi, x, t) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, t, u).$$

В силу соотношения $H(\psi, x, t, u) = \mathscr{H}(\psi, x, t, u) - \psi_0$, мы получаем

$$M(\psi, x, t) = \mathscr{M}(\psi, x, t) - \psi_0,$$

и потому условия (61), (62) принимают теперь вид

$$H(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u(t)) = M(\psi(t),\ x(t),\ t) =$$

$$= \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t) - \psi_0 = \int_{t_1}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f^\nu(x(t),\ u(t),\ t)}{\partial t} \psi_\nu(t)\, dt - \psi_0 \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_1}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f^\nu(x(t),\ u(t),\ t)}{\partial t} \psi_\nu(t)\, dt.$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)$ — соответствующая траектория (см. (55) или (68)), так что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Для оптимальности (в смысле быстродействия) управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ (см. (69)), что:*

1° для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $H(\psi(t), x(t), t, u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u(t)) = M(\psi(t),\ x(t),\ t); \tag{70}$$

2° выполнено соотношение

$$M(\psi(t),\ x(t),\ t) \geqslant \int_{t_1}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f^\nu(x(t),\ u(t),\ t)}{\partial t} \psi_\nu(t)\, dt. \tag{71}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (68), (69) и условию 1°, то разность между левой и правой частями соотношения (71) постоянна, так что проверку соотношения (71) достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; например, вместо (71) достаточно проверить соотношение

$$M(\psi(t_1),\ x(t_1),\ t_1) \geqslant 0. \tag{72}$$

Д. Если точка x_1, в которую точка x_0 должна переводиться с помощью управления $u(t)$, не неподвижна, а перемещается, т. е. $x_1 = x_1(t)$, то формулировка теоремы 5 несколько меняется. Именно, пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, которое фазовую точку из положения x_0 в некоторый момент времени t_1 переводит в положение $x_1(t_1)$. Положим

$$\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=t_1} = (q^1, q^2, \ldots, q^n).$$

Тогда (ср. (64), (65)) соотношения (71), (72) заменяются следующими:

$$M(\psi(t), x(t), t) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1) q^\nu + \int_{t_1}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f^\nu(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\nu(t)\, dt, \quad (73)$$

$$M(\psi(t_1), x(t_1), t_1) \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1) q^\nu. \quad (74)$$

В остальном же формулировка теоремы 5 сохраняется.

Задача с подвижным правым концом рассматривается аналогично (ср. стр. 72—74).

§ 8. Задача с закрепленным временем

А. Предположим теперь, что рассматривается такая же оптимальная задача, что и в § 2 (или в § 7, т. е. с зависимостью функций f^α от времени), но с условием, что время t_0 начала движения точки (из положения x_0) и время t_1 ее попадания в точку x_1 заданы заранее, так что время $t_1 - t_0$ закреплено. Решение этой задачи мы легко получим из предыдущих рассмотрений.

Как и в предыдущем параграфе, добавим к системе уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad (75)$$

еще одно уравнение

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1$$

с начальным условием $x^{n+1}(t_0) = t_0$. Тогда $x^{n+1} \equiv t$, и мы приходим к следующей оптимальной задаче.

В $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n, x^{n+1}$ заданы две точки (x_0, t_0) и (x_1, t_1). Фазовая точка движется по закону

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, x^{n+1}), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1.$$

Найти управление $u(t)$, под воздействием которого фазовая точка переходит (начав движение в момент t_0) из положения (x_0, t_0) в положение (x_1, t_1), а функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, x^{n+1})\, dt \tag{76}$$

принимает наименьшее возможное значение. Здесь момент времени t_1 попадания в точку (x_1, t_1) можно не считать фиксированным (ибо в силу соотношения $x^{n+1} \equiv t$ попадание в точку (x_1, t_1) может произойти только в момент t_1), и потому применима теорема 1.

Согласно теореме 1, мы должны для решения задачи ввести переменное x^0, составить функцию

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \psi_{n+1} = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1}$$

и рассмотреть для вспомогательных переменных ψ_i следующую систему уравнений:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{77}$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Соотношения (16), (17) теоремы 1 принимают теперь вид

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) + \psi_{n+1}(t) = \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) + \psi_{n+1}(t),$$

$$\psi_0(t_0) \leqslant 0, \quad \mathcal{M}(\psi(t), x(t), t) + \psi_{n+1}(t) = 0,$$

или, что то же самое, вид

$$\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t),\ x(t),\ t),\ \psi_0(t_0) \leqslant 0, \tag{78}$$

$$\mathscr{M}(\psi(t),\ x(t),\ t) + \psi_{n+1}(t) \equiv 0. \tag{79}$$

Если бы все величины $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, ..., $\psi_n(t)$ в некоторый момент времени t обращались в нуль, то мы имели бы $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = 0$ и потому $\psi_{n+1}(t) = 0$ (см. (78), (79)), что невозможно. Таким образом, $\psi_0(t)$, ..., $\psi_n(t)$ есть ненулевое решение системы (77). Это позволяет нам выбросить из рассмотрения функцию $\psi_{n+1}(t)$ и соотношение (79). Мы получаем, таким образом, следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)$ — соответствующая траектория (см. (75)), так что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ (моменты времени t_0, t_1 фиксированы). Для того чтобы $u(t)$ давало решение поставленной оптимальной задачи с закрепленным временем, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ (см. (77)), что:*

1° для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t),\ x(t),\ t);$$

2° функция $\psi_0(t)$ неположительна (что достаточно проверить лишь в какой-либо одной точке отрезка $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_1$, так как, в силу (77), $\psi_0 = \mathrm{const}$).

Отметим, что эта теорема в такой же степени решает задачу с закрепленным временем, в какой теорема 1 решает задачу с незакрепленным временем. Уменьшение числа условий на одно (а именно, отсутствие, по сравнению с теоремой 1, условия $\mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1)) = 0$) компенсируется здесь тем, что и число неизвестных параметров уменьшается на единицу, так как время t_1 прохождения траектории через точку x_1 теперь задано.

Б. Рассмотрим теперь задачу с закрепленным временем и подвижными концами x_0, x_1. Обозначим через S_0

и S_1 многообразия (в пространстве $x^1, \ldots, x^n$), на которых должны выбираться концевые точки x_0, x_1. Тогда в пространстве переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ мы также получаем задачу с подвижными концами. Именно, концы (x_0, t_0) и (x_1, t_1) искомой траектории должны находиться соответственно на многообразиях $\bar{S}_0$ и $\bar{S}_1$, причем $\bar{S}_i$ состоит из точек вида (x, t_i), где $x \in S_i$, $i = 0, 1$. Рассматривая условия трансверсальности (теорема 3) для многообразий $\bar{S}_0$, $\bar{S}_1$ и, как и прежде, отбрасывая координату x^{n+1}, мы находим, что теорема 3 остается справедливой (в той же формулировке) и дает решение задачи с подвижными концами в случае закрепленного времени. Таким образом, теоремы 1 и 3 остаются верными и для задачи с закрепленным временем, если в формулировке теоремы 1 отбросить второе из соотношений (17).

Обратимся, в частности, к случаю, когда (в задаче с закрепленным временем) правый конец совершенно свободен.

Иначе говоря, рассмотрим задачу: найти такое допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, чтобы соответствующая траектория (см. (75)), начинающаяся в момент t_0 из начального положения x_0, осуществляла минимум значений функционала (76); момент t_1 фиксирован, положение точки $x(t_1)$ может быть произвольным. Это — задача с подвижным правым концом, причем многообразие S_1 совпадает со всем пространством X переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Поэтому л ю б о й вектор этого пространства является касательным к многообразию S_1, и условие трансверсальности дает нам $\psi_1(t_1) = \psi_2(t_1) = \ldots = \psi_n(t_1) = 0$. Отсюда следует, что $\psi_0 \neq 0$, и потому мы можем принять $\psi_0 = -1$. Итак, $\psi(t_1) = (-1, 0, \ldots, 0)$, и мы получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 7. *Для того чтобы допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующая ей траектория $x(t)$ (см. (75)) давали решение оптимальной задачи (75), (76) с закрепленным левым концом x_0 и свободным правым концом (моменты времени t_0, t_1 заданы), необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t_1), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ (см. (77)), что:*

1° *для всех* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *функция* $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), t);$$

2° $\psi(t_1) = (-1, 0, \ldots, 0)$.

§ 9. Связь принципа максимума с методом динамического программирования

В этом параграфе мы вкратце коснемся связи, существующей между принципом максимума и методом динамического программирования Р. Беллмана.

Метод динамического программирования был разработан для нужд оптимального управления процессами, имеющими гораздо более общий характер, чем процессы, описываемые системами дифференциальных уравнений. Поэтому метод динамического программирования носит более универсальный характер, чем принцип максимума. Однако, в отличие от последнего, этот метод не имеет строгого логического обоснования во всех тех случаях, когда им можно с успехом пользоваться как ценным эвристическим средством.

Нас, естественно, интересует вопрос о применимости метода динамического программирования к оптимальной задаче, сформулированной в § 2. Обоснование метода динамического программирования, данное Беллманом, предполагает, что к естественным условиям задачи (см. нашу теорему 1) добавляется еще одно существенное требование — требование дифференцируемости определяемой ниже функции $\omega(x)$. Это предположение не вытекает из постановки задачи и представляет собой ограничение, которое, как мы увидим ниже, не выполняется даже в самых простых примерах.

После того как это предположение сделано, метод динамического программирования приводит к некоторому уравнению в частных производных, которое мы будем называть уравнением Беллмана. Это уравнение (при некоторых дополнительных условиях) эквивалентно гамильтоновой системе (14), (15) и условию максимума (16), (17).

Здесь мы приведем изложение метода динамического программирования и покажем его связь с принципом максимума. Для простоты рассмотрим только задачу об оптимальных быстродействиях.

Фиксируем некоторую точку x_1 пространства X и пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, переводящее (в силу закона движения (5)) фазовую точку из некоторого положения $x_0 \in X$ в положение x_1, а $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория. Время оптимального перехода $t_1 - t_0$ из точки x_0 в точку x_1 мы обозначим через $T(x_0)$. (Точка x_1 в обозначении времени перехода не участвует, так как она меняться не будет.) Таким образом, функция $T(x_0)$ определена на множестве Ω всех тех точек пространства X, из которых возможен оптимальный переход в точку x_1. *Дополнительное предположение, обычно используемое для обоснования метода динамического программирования (и которое мы здесь также примем), заключается в том, что множество Ω открыто в пространстве X и функция $T(x)$ имеет непрерывные частные производные по координатам точки x.*

Вместо функции $T(x)$ обычно вводят функцию

$$\omega(x) = -T(x).$$

Так как $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальная траектория и так как каждый кусок оптимальной траектории также является оптимальной траекторией, то для любого t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, имеет место соотношение

$$\omega(x(t)) = -T(x_0) + t - t_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), u(t)) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha(t)}{dt} = \frac{d\omega(x(t))}{dt} = 1. \quad (80)$$

Пусть теперь v — произвольная точка области управления U. Рассмотрим движение фазовой точки из положения $x(t)$ под воздействием постоянного управления, равного v. Через бесконечно малый промежуток времени $dt > 0$ фазовая точка будет находиться в положении $x(t) + dx$, где вектор $dx = (dx^1, \ldots, dx^n)$ определяется соотношениями

$$dx^i = f^i(x(t), v)\, dt, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{81}$$

Если теперь мы из точки $x(t) + dx$ будем оптимальным образом двигаться в точку x_1, то затратим на это время, равное $T(x(t) + dx)$. Таким образом, общее время, затраченное при таком способе движения на перемещение из точки $x(t)$ в точку x_1, равно $T(x(t) + dx) + dt$. Это время не может быть меньше, чем время оптимального перехода $T(x(t))$, т. е. выполнено соотношение $T(x(t) + dx + dt \geqslant T(x(t))$, или, что то же самое,

$$\omega(x(t) + dx) - \omega(x(t)) \leqslant dt.$$

В силу (81) последнее неравенство переписывается в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), v)\, dt \leqslant dt,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), v) \leqslant 1, \qquad v \in U. \tag{82}$$

Соотношения (80) и (82) показывают, что

$$\sup_{v \in U} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), v) = 1,$$

причем верхняя грань достигается при $v = u(t)$. Так как через каждую точку $x \in \Omega$ проходит оптимальная траектория, ведущая в точку x_1, то мы приходим к выводу, что *функция* $\omega(x)$ *удовлетворяет в области* Ω *следующему неклассическому уравнению с частными производными, которое мы назовем уравнением Беллмана*:

$$\sup_{u \in U} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) = 1; \tag{83}$$

при этом верхняя грань достигается для некоторого $u \in U$ (а именно, для значения оптимального управления в момент выхода из точки x), а функция $\omega(x)$ неположительна и обращается в нуль только в точке x_1.

Это и есть метод динамического программирования в применении к рассматриваемой задаче.

Теперь мы покажем, каким образом из метода динамического программирования может быть выведен принцип максимума; при этом выводе функцию $\omega(x)$ мы будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой. В силу этого предположения функция

$$g(x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u), \tag{84}$$

стоящая в (83) под знаком верхней грани, имеет непрерывные первые производные по $x^1, \ldots, x^n$. Из метода динамического программирования непосредственно следует (см. (80) и (83)), что если $u(t)$ — оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, то при фиксированном t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция $g(x, u(t))$ переменного $x \in X$ достигает в точке $x = x(t)$ максимального значения (равного единице). Из этого вытекает, что

$$\frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Учитывая вид функции $g(x, u)$ (см. (84)), мы получаем отсюда соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega(x(t))}{\partial x^\alpha \partial x^i} f^\alpha(x(t), u(t)) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{85}$$

выполняющиеся вдоль оптимальной траектории. Далее, мы имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega(x(t))}{\partial x^\alpha \partial x^i} f^\alpha(x(t), u(t)) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i}\right)\frac{dx^\alpha(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i}\right),$$

и соотношения (85) переписываются в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha},$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, вдоль всякой оптимальной траектории величины

$$\psi_i(t) = \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{86}$$

удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i}\psi_\alpha(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{87}$$

Кроме того, уравнение Беллмана (83) в силу соотношения (80) записывается в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t) f^\alpha(x(t), u(t)) = \sup_{u \in U} \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t) f^\alpha(x(t), u) = 1. \tag{88}$$

Соотношения (87), (88) совпадают с принципом максимума, а соотношение (86) указывает в явном виде связь величин $\psi_i(t)$ с функцией $\omega(x)$. Отметим еще, что, как следует из (88), оптимальные движения всегда можно осуществить таким образом, чтобы вдоль оптимальных траекторий выполнялось равенство

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \equiv 1. \tag{89}$$

Все эти выводы, напомним, получены при условии двукратной дифференцируемости функции $\omega(x)$. Без этого дополнительного предположения доказательство соотношения (89) теряет силу.

Отметим, что во всех примерах, рассмотренных в § 5, функция $\omega(x)$ не имеет первых производных, в точках, лежащих на линиях переключения (это устанавливается непосредственными подсчетами). Так как при этом каждая оптимальная траектория в течение некоторого отрезка времени проходит вдоль линии переключения, то предположение о дифференцируемости функции $\omega(x)$ не выполняется ни на одной траектории. Таким образом, даже в самых простейших примерах предположения, необходимые для вывода уравнения Беллмана, не выполняются.

ГЛАВА 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

§ 10. Допустимые управления

Здесь мы дадим точное определение *класса допустимых управлений* (ср. § 1) и опишем наиболее важные из этих классов. Область управления U будем представлять себе произвольным множеством r-мерного векторного пространства E_r *).

Мы будем здесь рассматривать не только кусочно-непрерывные, но и значительно более общие управления. Управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (т. е. функция $u(t)$ со значениями в области управления U), называется *измеримым*, если для любого открытого множества $O \subset E_r$ множество всех тех значений t, для которых $u(t) \in O$, измеримо (в смысле обычной лебеговской меры) на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Ограниченность понимается в обычном смысле, т. е. управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, называется *ограниченным*, если множество всех точек $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, имеет в пространстве E_r компактное замыкание.

---

*) Приводимые ниже рассуждения проходят без всякого изменения для случая, когда U представляет собой произвольное подмножество некоторого топологического хаусдорфова пространства со счетной базой. Незначительное изменение доказательства позволяет снять и требование существования счетной базы. Однако мы ограничиваемся в тексте случаем подмножества r-мерного векторного пространства как наиболее простым и вполне достаточным для приложений.

В дальнейшем предполагается, что выбран некоторый класс D управлений; управления, принадлежащие этому классу, будут называться *допустимыми*. От класса D допустимых управлений требуется только, чтобы он удовлетворял следующим трем условиям:

1) Все управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, принадлежащие классу D (т. е. допустимые), измеримы и ограничены.

2) Если $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — допустимое управление и если v — произвольная точка множества U, а t', t'' — такие числа, что $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_1$, то управление $u_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, определяемое формулой

$$u_1(t) = \begin{cases} v & \text{при} \quad t' < t \leqslant t'', \\ u(t) & \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t' \quad \text{и} \quad t'' < t \leqslant t_1, \end{cases}$$

также является допустимым.

3) Если отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ разбит точками деления на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых управление $u(t)$ допустимо, то это управление допустимо и на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Допустимое управление, рассматриваемое на частичном отрезке, также является допустимым. Управление, получающееся из допустимого управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, сдвигом времени (т. е. управление $u_1(t) = u(t - \alpha)$, $t_0 + \alpha \leqslant \leqslant t \leqslant t_1 + \alpha$), также является допустимым.

В качестве класса допустимых управлений можно взять, например, множество всех измеримых ограниченных управлений. Этот класс допустимых управлений, очевидно, содержит в себе любой другой класс допустимых управлений, и потому мы будем обозначать его символом $D_{\max}$.

Другим примером может служить множество всех кусочно-непрерывных управлений, о которых мы говорили в первой главе.

Наконец, классом допустимых управлений является множество всех кусочно-постоянных управлений (т. е. таких управлений $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ можно разбить точками деления на конечное число частичных отрезков, внутри каждого из которых управление $u(t)$ постоянно). Этот класс допустимых управлений, в силу условий 2) и 3), содержится в любом другом классе допустимых управлений. Поэтому класс всех кусочно-постоянных управлений мы будем обозначать символом $D_{\min}$.

В дальнейшем на протяжении всей этой главы мы будем предполагать, не оговаривая этого специально, что раз навсегда фиксирован некоторый класс допустимых управлений. Этот класс будет обозначаться символом D.

Введение в рассмотрение измеримых (а не только кусочно-непрерывных) управлений объясняется отнюдь не стремлением к наибольшей математической общности. Дело в том, что в главе 3 при доказательстве весьма важной теоремы существования мы будем вынуждены пользоваться измеримыми управлениями (несмотря на то, что в окончательной формулировке теоремы участвуют лишь кусочно-постоянные управления).

В связи с необходимостью расматривать измеримые управления мы отметим здесь некоторые важные для дальнейшего свойства измеримых функций. Пусть $u(t)$ — произвольная измеримая функция, заданная на интервале $a < t < b$ и принимающая значения в области управления U. Точку θ интервала $a < t < b$ мы будем называть *правильной точкой* для функции $u(t)$, если для любой окрестности $O \subset U$ точки $u(\theta)$ выполнено соотношение

$$\lim_{\operatorname{mes} I \to 0} \frac{\operatorname{mes}(u^{-1}(O) \cap I)}{\operatorname{mes} I} = 1;$$

здесь $u^{-1}(O)$ — множество всех точек t интервала $a < t < b$, для которых $u(t) \in O$, через I обозначается произвольный отрезок, содержащий точку θ, а символ mes означает лебеговскую меру множества. Очевидно, что всякая точка непрерывности функции $u(t)$ является ее правильной точкой (ибо если отрезок I, содержащий точку θ, достаточно мал, то $I \subset u^{-1}(O)$). Таким образом, если функция $u(t)$ кусочно-непрерывна, то все точки интервала $a < t < b$, за исключением лишь конечного числа их, являются правильными точками для функции $u(t)$. Оказывается *), что в случае произвольной измеримой функции $u(t)$ множество всех правильных точек имеет на интервале $a < t < b$ полную меру, т. е. *почти все точки интервала* $a < t < b$ *являются правильными точками для функции* $u(t)$.

Далее, пусть $g(t, u)$ — действительная непрерывная функция пары переменных $t \in (a, b)$, $u \in U$ и $u(t)$, $a < t < b$, — ограниченная измеримая функция со значениями в U. Если θ — правильная точка для функции $u(t)$, то имеет место соотношение

$$\int_{\theta+p\varepsilon}^{\theta+q\varepsilon} g(t, u(t))\, dt = \varepsilon(q-p)\, g(\theta, u(\theta)) + o(\varepsilon); \tag{1}$$

здесь p и q — произвольные действительные числа, ε — достаточно малое положительное число, а $o(\varepsilon)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем ε, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$; интеграл понимается в смысле Лебега. Соотношение (1) легко выводится из определения правильной точки. Отметим, что если функция g непрерывно зависит еще и от параметра ν, изменяющегося в компактном множестве N (например, в замкнутом ограниченном множестве некоторого конечномерного векторного пространства), то формула (1) сохраняет силу:

$$\int_{\theta+p\varepsilon}^{\theta+q\varepsilon} g(t, u(t), \nu)\, dt = \\ = \varepsilon(q-p)\, g(\theta, u(\theta), \nu) + o(\varepsilon, \nu), \qquad \nu \in N, \tag{2}$$

причем величина $o(\varepsilon, \nu)$ равномерно по ν имеет более высокий порядок малости, чем ε, т. е. отношение $\frac{o(\varepsilon, \nu)}{\varepsilon}$ равномерно по $\nu \in N$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

---

*) Это утверждение легко следует из того факта, что почти все точки произвольного измеримого множества являются его *точками плотности* (см., например, Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954, стр. 21; И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М., 1957, стр. 285).

Сделаем еще некоторые замечания о дифференциальных уравнениях с измеримыми правыми частями *). Рассмотрим систему

$$\frac{dz^i}{dt} = h^i(z^1, \ldots, z^m, t, u), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3)$$

Правые части уравнений (3) непрерывны по совокупности переменных $z^1, z^2, \ldots, z^m, t, u$ и непрерывно дифференцируемы по $z^1, z^2, \ldots, z^m$. Пусть $u(t)$ — произвольная ограниченная измеримая функция, заданная на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и принимающая значения в U. Мы будем рассматривать абсолютно непрерывные функции $z^1(t), \ldots, z^m(t)$, удовлетворяющие почти всюду на некоторой части отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ соотношениям

$$\frac{dz^i(t)}{dt} = h^i(z^1(t), \ldots, z^m(t), t, u(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Каждую такую систему функций $z^1(t), \ldots, z^m(t)$ мы будем называть *решением* системы (3), *соответствующим* управлению $u(t)$. При таком понимании решений для системы (3) справедливы (при произвольно заданном управлении $u(t)$) все основные факты теории обыкновенных дифференциальных уравнений и, в частности, теорема существования и единственности решений. Вообще говоря, решение системы (3) определяется не на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, на котором задано управление $u(t)$ (и, следовательно, правые части системы (3)). Однако, если система (3) линейна относительно $z^1, \ldots, z^m$, то любое решение системы (3) определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ задания управления $u(t)$.

В случае, когда правые части системы (3) непрерывно зависят еще и от некоторого параметра μ, имеют место обычные теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров. В частности, решения системы (3) непрерывно зависят от начальных значений. Кроме

*) См. C. Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927, стр. 665; Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, ИЛ, М., 1954, стр. 120.

того, «добавки», которые получают функции z^i при малом изменении начальных значений, удовлетворяют обычной системе уравнений в вариациях (ср. § 12).

§ 11. Формулировка принципа максимума для произвольного класса допустимых управлений

Как и в предыдущей главе, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r) = f^i(x, u), \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u). \tag{5}$$

Функции $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u)}{\partial x^j}$$

предполагаются заданными и непрерывными на прямом произведении $X \times \bar{U}$, где $\bar{U}$ — замыкание множества U в пространстве E_r.

Как и в предыдущей главе, мы введем в рассмотрение интегральный функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt, \tag{6}$$

где f^0 удовлетворяет тем же условиям, что и функции f^i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поставим задачу: *среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, найти такое, для которого функционал* (6) *принимает наименьшее возможное значение* (моменты времени t_0 и t_1 заранее не заданы). Термины «оптимальное управление» и «оптимальная траектория» мы сохраним и в этой главе.

Дословно так же, как и в главе I, поставленная оптимальная задача формулируется в следующем эквивалентном виде.

В $(n+1)$-мерном фазовом пространстве X переменных $x^0, x^1, \ldots, x^n$ даны точка $x_0 = (0, x_0)$ и прямая П, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $(0, x_1)$. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, обладающих тем свойством, что соответствующее решение $x(t)$ системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, u), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{7}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$ пересекает прямую П, найти такое, для которого точка пересечения с прямой П имеет наименьшую координату x^0.

Для формулировки принципа максимума мы, как и в главе I, введем в рассмотрение систему уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i}\psi_\alpha, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{8}$$

для вспомогательных неизвестных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ и функцию

$$\mathscr{H}(\psi, x, u) = (\psi, f(x, u)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u),$$

с помощью которой уравнения (7) и (8) записываются в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Взяв произвольное управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, класса D (т. е. допустимое) и начальное условие $x(t_0) = x_0$, мы можем найти *соответствующую* (т. е. удовлетворяющую системе (9)) траекторию $x(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t))$. Предположим, что она определена на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда, подставив функции $u(t)$ и $x(t)$ в правые части системы (10), мы получим линейную систему относительно неизвестных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, коэффициенты которой определены и непрерывны на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Каждое решение

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$$

этой системы (оно также определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$) мы будем называть решением системы (10), *соответствующим* функциям $u(t)$ и $x(t)$. Подчеркнем, что вектор-функции $x(t)$ и $\psi(t)$ абсолютно непрерывны (как решения систем дифференциальных уравнений).

При фиксированных (постоянных) значениях ψ и x функция $\mathscr{H}$ становится функцией параметра $u \in U$; точную верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через $\mathscr{M}(\psi, x)$:

$$\mathscr{M}(\psi, x) = \sup_{u \in U} \mathscr{H}(\psi, x, u).$$

Равенство, выполняющееся почти всюду, мы будем указывать знаком $(=)$. Иначе говоря, если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — две функции переменного t, определенные на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то запись

$$\varphi_1(t) (=) \varphi_2(t)$$

будет означать, что функции φ_1 и φ_2 почти всюду совпадают.

Цель настоящей главы состоит в доказательстве *принципа максимума* (теорема 8) *и условий трансверсальности.*

Теорема 8. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$ (см. (9)), исходящая в момент t_0 из точки x_0, определена на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и проходит в момент t_1 через некоторую точку прямой* П. *Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой абсолютно непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ (см. (10)), что:*

1° *функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in U$ почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) (=) \mathscr{M}(\psi(t), x(t)); \tag{11}$$

2° *в конечный момент t_1 выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \quad \mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1)) = 0. \tag{12}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (9), (10), *и условию* 1°, *то функции* $\psi_0(t)$ и $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ *переменного* t *являются постоянными, так что проверку соотношений* (12) *можно проводить не обязательно в момент* t_1, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Теорема 8 почти дословно совпадает с теоремой 1, сформулированной в первой главе. Различие заключается в том, что теорема 8 справедлива для **любого** класса D допустимых управлений, в то время как теорема 1 относится лишь к классу кусочно-непрерывных управлений. Далее, условие максимума (11) выполняется лишь **почти всюду**, в то время как в теореме 1 оно выполнялось всюду (см. равенство (16) гл. 1).

Нетрудно понять, что теорема 1 вытекает из теоремы 8. В самом деле, применим теорему 8 к случаю, когда класс D совпадает с классом всех кусочно-непрерывных управлений. Обозначим через N множество тех точек отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, в которых выполняется условие максимума (11). Иначе говоря, если $t \in N$, то

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) \geqslant \mathscr{H}(\psi(t), x(t), v) \tag{13}$$

для любой точки $v \in U$. Так как множество N имеет на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ полную меру и так как управление $u(t)$ принадлежит классу D, т. е. непрерывно в концах отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и непрерывно **слева** в любой точке разрыва (см. соглашение о значениях в точках разрыва, стр. 15), то для любой точки τ отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует такая последовательность точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ множества N, сходящаяся к τ, что $\lim u(\tau_k) = u(\tau)$.

В силу (13) мы имеем

$$\mathscr{H}(\psi(\tau_k), x(\tau_k), u(\tau_k)) \geqslant \mathscr{H}(\psi(\tau_k), x(\tau_k), v), \qquad v \in U.$$

Далее, так как $\mathscr{H}$ — непрерывная функция своих аргументов ψ, x, u и так как функции $\psi(t)$, $x(t)$ непрерывны, то

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{H}(\psi(\tau_k), x(\tau_k), v) = \mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), v);$$

точно так же

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{H}(\psi(\tau_k),\ x(\tau_k),\ u(\tau_k)) = \mathscr{H}(\psi(\tau),\ x(\tau),\ u(\tau))$$

(ибо $\lim\limits_{k\to\infty} u(\tau_k) = u(\tau)$). Сопоставляя последние три соотношения, мы находим

$$\mathscr{H}(\psi(\tau),\ x(\tau),\ u(\tau)) \geqslant \mathscr{H}(\psi(\tau),\ x(\tau),\ v)$$

(для любого элемента $v \in U$), т. е.

$$\mathscr{H}(\psi(\tau),\ x(\tau),\ u(\tau)) = \mathscr{M}(\psi(\tau),\ x(\tau)).$$

Итак, условие максимума выполнено в *любой* точке τ отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тем самым теорема 1 доказана (в предположении, что справедлива теорема 8).

Доказательству теоремы 8 посвящены следующие четыре параграфа.

§ 12. Система уравнений в вариациях и сопряженная ей система

В приводимых ниже доказательствах часто будет встречаться положительный параметр ε, который мы будем считать величиной первого порядка малости. Величины, как векторные, так и скалярные, имеющие более высокий порядок малости (по ε), мы будем обозначать символом $o(\varepsilon)$ $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0\right)$. При этом даже для обозначения *различных* величин более высокого порядка малости, чем ε, мы будем применять *один и тот же* символ $o(\varepsilon)$ (так что, например, $o(\varepsilon) + o(\varepsilon) = o(\varepsilon)$).

Пусть $u(t)$ — произвольное допустимое управление, заданное при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, а $x(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots$ $\ldots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$ — соответствующее этому управлению решение системы (7) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Обозначим через $y(t)$ решение, соответствующее тому же управлению $u(t)$ и исходящее (в тот же момент t_0) из близкой к x_0 точки

$$y_0 = x_0 + \varepsilon\xi_0 + o(\varepsilon), \tag{14}$$

где ξ_0 — постоянный (т. е. не зависящий от параметра ε) вектор пространства X. Решение $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = x(t) + \varepsilon\,\delta x(t) + o(\varepsilon), \tag{15}$$

где $\delta x(t) = (\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots, \delta x^n(t))$ — не зависящий от ε вектор, определяемый следующей системой уравнений в вариациях:

$$\frac{d(\delta x^i)}{dt} = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{16}$$

при начальном условии

$$\delta x(t_0) = \xi_0.$$

(Суммирование в правой части соотношения (16) можно было бы производить от 1 до n, так как функции $f^i(x, u)$ не зависят от x^0.)

Замечание 1. Величина $o(\varepsilon)$ в формуле (15) зависит, конечно, и от t, т. е. имеет вид $o(\varepsilon, t)$. Однако она равномерно по t имеет более высокий порядок малости, чем ε, т. е. дробь $\frac{o(\varepsilon, t)}{\varepsilon}$ равномерно по $t \in [t_0, t_1]$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 2. Предположим, что величины ξ_0 и $o(\varepsilon)$ в формуле (14) непрерывно зависят от параметра ν, изменяющегося в компактном множестве N (т. е. имеют вид $\xi_0(\nu)$, $o(\varepsilon, \nu)$) и, кроме того, величина $o(\varepsilon, \nu)$ имеет равномерно по $\nu \in N$ более высокий порядок малости, чем ε (т. е. дробь $\frac{o(\varepsilon, \nu)}{\varepsilon}$ равномерно по $\nu \in N$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$). Тогда формула (15) остается справедливой, причем $\delta x(t)$ зависит теперь и от параметра $\nu \in N$, а величина $o(\varepsilon)$, зависящая теперь и от ν, т. е. имеющая вид $o(\varepsilon, t, \nu)$, имеет равномерно по $\nu \in N$, $t \in [t_0, t_1]$ более высокий порядок малости, чем ε $\left(\text{т. е. } \frac{o(\varepsilon, t, \nu)}{\varepsilon} \to 0 \text{ равномерно по } t, \nu \text{ при } \varepsilon \to 0\right)$.

Уравнения (16) позволяют каждому вектору $\xi_0 = \delta x(t_0)$ поставить в соответствие семейство векторов $\xi_t = \delta x(t)$ (для t, больших чем t_0). Мы условимся считать $\xi_t = \delta x(t)$ связанным вектором, исходящим из точки $x(t)$. Таким образом, каждый вектор ξ_0, заданный в точке x_0, определяет векторное поле $\{\xi_t\}$, заданное вдоль траектории $x(t)$. Мы будем говорить, что векторы этого поля получаются из начального вектора ξ_0 *переносом* вдоль траектории $x(t)$.

Обозначим через X_t векторное пространство, получающееся из X переносом начала координат в точку $x(t)$, т. е. пространство связанных векторов, исходящих из точки $x(t)$. Вектор $\xi_t = \delta x(t)$ является элементом этого пространства X_t. Обозначим, далее, через $A_{t,\,t_0}$ преобразование пространства X_{t_0} на пространство X_t, переводящее каждый вектор ξ_0 пространства X_{t_0} в вектор ξ_t пространства X_t, получающийся из ξ_0 переносом вдоль траектории $x(t)$. Так как система (16) линейна и однородна, то преобразование $A_{t,\,t_0}$ линейно и невырожденно. Кроме того, оно, очевидно, однородно, т. е. переводит начало координат пространства X_{t_0} в начало координат пространства X_t.

Рассмотрев вместо t_0 и t любые другие моменты времени t', t'' (взятые на отрезке, на котором определены и управление $u(t)$ и решение $x(t)$), мы аналогичным образом определим линейное невырожденное однородное преобразование $A_{t'',\,t'}$ пространства $X_{t'}$ на пространство $X_{t''}$. Очевидно, что эти линейные преобразования обладают следующими свойствами (E — тождественное преобразование):

$$A_{t',\,t'} = E; \quad A_{t''',\,t''} \cdot A_{t'',\,t'} = A_{t''',\,t'}. \tag{17}$$

Согласно определению преобразований $A_{t,\,t_0}$, векторы $A_{t,\,t_0}(\xi_0)$ образуют семейство векторов, получающихся из ξ_0 переносом вдоль траектории $x(t)$, и потому удовлетворяют системе (16):

$$\frac{d}{dt}[A_{t,\,t_0}(\xi_0)]^i = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^i(x(t),\,u(t))}{\partial x^\alpha}[A_{t,\,t_0}(\xi_0)]^\alpha, \qquad i = 0,\,1,\,\ldots,\,n. \tag{18}$$

Далее, решение (15) переписывается, очевидно, следующим образом:

$$y(t) - x(t) = \varepsilon A_{t,\,t_0}(\xi_0) + o(\varepsilon) = \\ = A_{t,\,t_0}[y(t_0) - x(t_0)] + o(\varepsilon). \tag{19}$$

Сравним теперь системы (16) и (8). Эти системы линейны и однородны, а матрицы их имеют соответственно вид:

$$\left(\frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha}\right), \quad \left(-\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i}\right).$$

Иначе говоря, эти матрицы получаются друг из друга транспонированием и переменой знака, т. е. системы (16) и (8) — *сопряженные.* Заметим, что системы (8) и (16) мы можем рассматривать лишь в том случае, если выбрано управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующая ей траектория $x(t)$ (т. е. решение системы (7)), ибо функции $u(t)$ и $x(t)$ входят в правые части систем (8) и (16). При этом, в силу линейности систем (8) и (16), решения этих систем мы можем рассматривать на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, если решение $x(t)$ определено на всем этом отрезке.

Из сопряженности систем (8) и (16) вытекает, что *если* $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ — *произвольное решение системы* (8), *а* $\delta x(t) = (\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots, \delta x^n(t))$ — *произвольное решение системы* (16), *то скалярное произведение*

$$(\psi(t), \delta x(t)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t) \delta x^\alpha(t)$$

постоянно на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В самом деле, мы имеем (почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$)

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t) \delta x^\alpha(t) = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{d\psi_\alpha(t)}{dt} \delta x^\alpha(t) + \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t) \frac{d\,\delta x^\alpha(t)}{dt} =$$

$$= -\sum_{\alpha, \beta=0}^{n} \frac{\partial f^\beta(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha} \psi_\beta(t) \delta x^\alpha(t) +$$

$$+ \sum_{\alpha, \beta=0}^{n} \psi_\alpha(t) \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^\beta} \delta x^\beta(t) = 0.$$

Пусть, в частности, ξ_0 — произвольный вектор. Тогда вектор-функция $\xi_t = A_{t, t_0}(\xi_0)$ является, по определению, решением системы (16) (см. (18)). Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если $\psi(t)$ — решение системы* (8), *а ξ_0 — произвольный вектор, заданный в точке $x(t_0)$, то на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполнено соотношение*

$$(\psi(t), A_{t, t_0}(\xi_0)) = \mathrm{const}.$$

Лемма 1 позволяет дать следующую геометрическую интерпретацию системы (8). Пусть L_0 — некоторая гиперплоскость пространства X, проходящая через точку x_0 (т. е. через начало координат пространства X_{t_0}). Линейное преобразование A_{t, t_0} переводит гиперплоскость L_0 в некоторую гиперплоскость L_t (проходящую через точку $x(t)$). Таким образом, возникает семейство гиперплоскостей $\{L_t\}$, получающихся, как мы будем говорить, *переносом* гиперплоскости L_0 вдоль траектории $x(t)$. Уравнение гиперплоскости L_t можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t) x^\alpha = 0, \tag{20}$$

где x^α, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, — текущие координаты, взятые в пространстве X_t, а $\psi_\alpha(t)$ — коэффициенты уравнения этой гиперплоскости (свободный член отсутствует, так как гиперплоскость L_t проходит через начало координат пространства X_t). Мы хотим узнать, каковы должны быть функции $\psi_\alpha(t)$, чтобы уравнение (20) определяло при различных значениях параметра t семейство гиперплоскостей, перенесенных вдоль траектории $x(t)$. Оказывается, что такие функции $\psi_\alpha(t)$ можно находить из системы (8), т. е. *если $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ — некоторое решение системы* (8), *то гиперплоскости* (20) *получаются друг из друга переносом вдоль траектории $x(t)$.*

В самом деле, если функции $\psi_\alpha(t)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют системе (8) и если вектор ξ_0 лежит в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_0) x^\alpha = 0$ (т. е. скалярное произведение $(\psi(t_0), \xi_0)$ обращается в нуль), то и при любом t скалярное произведение $(\psi(t), A_{t, t_0}(\xi_0))$ обращается в нуль, т. е. каждый вектор $\xi_t = A_{t, t_0}(\xi_0)$, получающийся из ξ_0 переносом вдоль траектории $x(t)$, лежит в соответствующей гиперплоскости (20). Так как это справедливо для любого вектора ξ_0, лежащего в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_0) x^\alpha = 0$, то гиперплоскости (20) получаются друг из друга переносом вдоль траектории $x(t)$.

§ 13. Вариации управлений и траекторий

Пусть $u(t)$ — некоторое допустимое управление, определенное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Выберем некоторые моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \tau$, удовлетворяющие неравенствам $t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau < t_1$ и являющиеся правильными точками для управления $u(t)$. Выберем, далее, произвольные неотрицательные числа $\delta t_1, \ldots$ $\ldots, \delta t_s$, произвольное (не обязательно неотрицательное) действительное число δt и произвольные (не обязательно различные) точки $v_1, v_2, \ldots, v_s$ области управления U. Определим теперь зависящие от ε полуинтервалы $I_1, I_2, \ldots, I_s$ следующим образом. Положим

$$l_i = \begin{cases} \delta t - (\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{если} \quad \tau_i = \tau; \\ -(\delta t_i + \ldots + \delta t_s), & \text{если} \quad \tau_i = \tau_s < \tau; \\ -(\delta t_i + \ldots + \delta t_j), & \text{если} \quad \tau_i = \tau_{i+1} = \ldots \\ & \qquad \ldots = \tau_j < \tau_{j+1} \ (j < s), \end{cases}$$

и обозначим через I_i полуинтервал

$$\tau_i + \varepsilon l_i < t \leqslant \tau_i + \varepsilon (l_i + \delta t_i).$$

Таким образом, если $\tau_i = \tau_{i+1} = \ldots = \tau_j$, то полуинтервалы $I_i, I_{i+1}, \ldots, I_j$ следуют, примыкая друг к другу, слева направо; если же к полуинтервалу I_k не примыкает справа следующий полуинтервал (т. е. если $\tau_k <$ $< \tau_{k+1}$ или $k = s$), то правым концом полуинтервала I_k является точка τ_k при $\tau_k < \tau$ и точка $\tau + \varepsilon\delta t$ при $\tau_k = \tau$. Длина полуинтервала I_i равна $\varepsilon\delta t_i$. В случае $\delta t_i = 0$ соответствующий полуинтервал I_i является «пустым», т. е. отсутствует.

При достаточно малом ε *полуинтервалы* $I_1, \ldots, I_s$ *попарно не пересекаются и располагаются все на основ-*

ном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *причем левее точки* $\tau + \varepsilon\delta t$. Считая, что ε удовлетворяет этим условиям, мы определим управление $u^*(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$, положив:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \text{ не принадлежит ни одному} \\ & \quad\text{из множеств } I_1, I_2, \ldots, I_s, \\ v_i, & \text{если } t \in I_i. \end{cases}$$

Мы будем говорить, что управление $u^*(t)$ получается *варьированием* управления $u(t)$. В силу соглашений о классах допустимых управлений (§ 10), управление $u^*(t)$ является (при достаточно малом ε) допустимым.

Пусть $x = \xi(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, — параметрическая запись гладкой линии, проходящей при $\varepsilon = 0$ через точку x_0 и имеющей в точке x_0 касательный вектор $\xi_0 \left(= \frac{d\xi(0)}{d\varepsilon}\right)$.

Обозначим через $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, траекторию, соответствующую (см. (7)) управлению $u(t)$ и исходящую из точки x_0, а через $x^*(t)$ — траекторию, соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ и исходящую из точки $\xi(\varepsilon)$. (Параметр ε в определении проварьированного управления $u^*(t)$ и в параметрической записи линии $\xi(\varepsilon)$ — один и тот же.)

Так как управление $u^*(t)$ ограничено и отличается от $u(t)$ только на множестве меры $\varepsilon(\delta t_1 + \ldots + \delta t_s)$, то из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений легко вытекает, что при достаточно малом ε решение $x^*(t)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$, на котором рассматривается управление $u^*(t)$. Нашей ближайшей целью является вычисление положения точки $x^*(\tau + \varepsilon\delta t)$. Именно, мы покажем, что *справедлива формула*

$$x^*(\tau + \varepsilon\,\delta t) = x(\tau) + \varepsilon A_{\tau, t_0}(\xi_0) + \varepsilon\,\Delta x + o(\varepsilon), \qquad (21)$$

где Δx — *не зависящий от* ε *вектор, определяемый равенством*

$$\Delta x = f(x(\tau), u(\tau))\,\delta t + \\ + \sum_{i=1}^{s} A_{\tau, \tau_i}[f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i. \qquad (22)$$

Доказательство формул (21), (22) мы проведем индукцией по s. Прежде всего, применяя соотношение (1) к векторной функции $g(t, u) = f(x(t), u)$ (очевидно, непрерывной по совокупности своих аргументов) и полагая $\theta = \tau$, $p = 0$, $q = \delta t$, мы получим

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\,\delta t} f(x(t),\ u(t))\,dt = \varepsilon\,\delta t \cdot f(x(\tau),\ u(\tau)) + o(\varepsilon),$$

или, так как $x(t)$ есть решение (абсолютно непрерывное!) системы (7),

$$x(\tau + \varepsilon\,\delta t) = x(\tau) + \varepsilon f(x(\tau),\ u(\tau))\,\delta t + o(\varepsilon). \qquad (23)$$

Далее, если $\tau_s < \tau$, то при достаточно малом ε отрезок между точками τ и $\tau + \varepsilon\delta t$ расположен правее точки τ_s, так что на этом отрезке управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$ и потому

$$x^*(\tau + \varepsilon\,\delta t) - x^*(\tau) = \\ = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} f(x^*(t),\ u^*(t))\,dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\delta t} f(x^*(t),\ u(t))\,dt. \qquad (24)$$

Кроме того, как легко видеть (используя теорему о непрерывной зависимости от начальных значений), решение $x_*(t)$ равномерно (на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$) стремится к $x(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому $f(x^*(t), u(t)) = f(x(t), u(t)) + \xi_1(t)$, где $\xi_1(t)$ равномерно (по t) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Отсюда получаем

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\,\delta t} f(x^*(t),\ u(t))\,dt = \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon\,\delta t} f(x(t),\ u(t))\,dt + o(\varepsilon) = \\ = x(\tau + \varepsilon\,\delta t) - x(\tau) + o(\varepsilon) = \varepsilon f(x(\tau),\ u(\tau))\,\delta t + o(\varepsilon)$$

(см. (23)). Сопоставляя это соотношение с (24), находим (при $\tau_s < \tau$)

$$x^*(\tau + \varepsilon\,\delta t) = x^*(\tau) + \varepsilon f(x(\tau),\ u(\tau))\,\delta t + o(\varepsilon). \qquad (25)$$

Наконец, найдем приращение функции $x^*(t)$ на полуинтервале I_i. Так как на этом полуинтервале

$$f(x^*(t),\ u^*(t)) = f(x(t),\ v_i) + \xi_2(t),$$

где $\xi_2(t)$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то для приращения

$$x^*(\tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i)) - x^*(\tau_i + \varepsilon l_i) = x^*|_{I_i}$$

функции $x^*(t)$ на полуинтервале I_i получаем следующее значение:

$$x^*|_{I_i} = \int_{I_i} f(x^*(t), u(t))\,dt =$$
$$= \int_{I_i} f(x(t), v_i)\,dt + o(\varepsilon) = \varepsilon f(x(\tau_i), v_i)\,\delta t_i + o(\varepsilon) \qquad (26)$$

(напомним, что длина полуинтервала I_i равна $\varepsilon\delta t_i$, причем при $\varepsilon \to 0$ этот полуинтервал стягивается к точке τ_i).

Переходим к индуктивной проверке соотношений (21), (22). При $s = 0$ мы имеем $u^*(t) = u(t)$. Поэтому (см. (14), (15), (19))

$$x^*(t) = x(t) + \varepsilon A_{t, t_0}(\xi_0) + o(\varepsilon).$$

В частности,

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon A_{\tau, t_0}(\xi_0) + o(\varepsilon).$$

Теперь в силу (23) и (25) получаем

$$x^*(\tau + \varepsilon\,\delta t) - x(\tau + \varepsilon\,\delta t) = x^*(\tau) - x(\tau) + o(\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon A_{\tau, t_0}(\xi_0) + o(\varepsilon),$$

откуда (см. (23))

$$x^*(\tau + \varepsilon\,\delta t) = x(\tau + \varepsilon\,\delta t) + \varepsilon A_{\tau, t_0}(\xi_0) + o(\varepsilon) =$$
$$= x(\tau) + \varepsilon f(x(\tau), u(\tau))\,\delta t + \varepsilon A_{\tau, t_0}(\xi_0) + o(\varepsilon),$$

и формулы (21), (22) при $s = 0$ установлены.

Предположим теперь, что формулы (21), (22) доказаны уже для случая, когда число полуинтервалов I_1, I_2, ... меньше чем s, и докажем справедливость этих формул при наличии s полуинтервалов $I_1, I_2, \ldots, I_s$. Обозначим через k такое целое число, что

$$\tau_{k+1} = \tau_{k+2} = \ldots = \tau_s \quad \text{и} \quad \tau_i < \tau_s \quad \text{при} \quad i \leqslant k$$

(случай $k = 0$ не исключается). Заменяя точку τ точкой τ_s, число δt числом l_{k+1}, а число s меньшим числом k, мы, в силу индуктивного предположения, получим из (21), (22)

$$x^*(\tau_s+\varepsilon l_{k+1}) = x(\tau_s)+\varepsilon f(x(\tau_s),\, u(\tau_s))\, l_{k+1}+\varepsilon A_{\tau_s,\, t_0}(\xi_0)+ \\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{k} A_{\tau_s,\, \tau_i}[f(x(\tau_i),\, v_i)-f(x(\tau_i),\, u(\tau_i))]\,\delta t_i+o(\varepsilon). \quad (27)$$

Это есть значение функции $x^*(t)$ в левом конце полуинтервала I_{k+1}. Далее, так как полуинтервалы $I_{k+1}, \ldots$ $\ldots, I_s$ примыкают один к другому, то, суммируя соотношения (26) для $i=k+1, \ldots, s$, мы получим приращение функции $x^*(t)$ от левого конца полуинтервала I_{k+1} до правого конца полуинтервала I_s, т. е. до точки $\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s)$:

$$x^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s)) - x^*(\tau_s+\varepsilon l_{k+1}) = \\ = \varepsilon\sum_{i=k+1}^{s} f(x(\tau_i),\, v_i)\,\delta t_i+o(\varepsilon).$$

Складывая это соотношение с соотношением (27), найдем

$$x^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s)) = x(\tau_s)+\varepsilon f(x(\tau_s),\, u(\tau_s))\, l_{k+1}+ \\ +\varepsilon A_{\tau_s,\, t_0}(\xi_0)+\varepsilon\sum_{i=k+1}^{s} f(x(\tau_i),\, v_i)\,\delta t_i+ \\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{k} A_{\tau_s,\, \tau_i}[f(x(\tau_i),\, v_i)-f(x(\tau_i),\, u(\tau_i))]\,\delta t_i+o(\varepsilon)= \\ = x(\tau_s)+\varepsilon f(x(\tau_s),\, u(\tau_s))(l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s)+ \\ +\varepsilon A_{\tau_s,\, t_0}(\xi_0)+\varepsilon\sum_{i=k+1}^{s}[f(x(\tau_i),\, v_i)-f(x(\tau_s),\, u(\tau_s))]\,\delta t_i+ \\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{k} A_{\tau_s,\, \tau_i}[f(x(\tau_i),\, v_i)-f(x(\tau_i),\, u(\tau_i))]\,\delta t_i+o(\varepsilon).$$

Учитывая, что $A_{\tau_s,\, \tau_i}=E$ при $i=k+1, \ldots, s$ (см. (17)), можем последнее соотношение переписать в виде

$$x^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s)) = x(\tau_s)+ \\ +\varepsilon f(x(\tau_s),\, u(\tau_s))(l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s)+\varepsilon A_{\tau_s,\, t_0}(\xi_0)+ \\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{s} A_{\tau_s,\, \tau_i}[f(x(\tau_i),\, v_i)-f(x(\tau_i),\, u(\tau_i))]\,\delta t_i+o(\varepsilon). \quad (28)$$

Если $\tau_{k+1}=\tau_s=\tau$, то, в силу определения чисел l_i, мы имеем $l_s+\delta t_s=\delta t$, $l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s=\delta t$, так что соотношение (28) совпадает в этом случае с (21), (22). Если же $\tau_s<\tau$, то $l_s+\delta t_s=0$, $l_{k+1}+\delta l_{k+1}+\ldots$ $\ldots+\delta t_s=0$, и соотношение (28) принимает вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^*(\tau_s)=\boldsymbol{x}(\tau_s)+\varepsilon A_{\tau_s,t_0}(\xi_0)+\\+\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_s,\tau_i}[\boldsymbol{f}(x(\tau_i),v_i)-\boldsymbol{f}(x(\tau_i),u(\tau_i))]\,\delta t_i+o(\varepsilon).\end{aligned}\quad(29)$$

Так как в этом случае на участке $\tau_s<t\leqslant\tau$ управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$, то (см. § 12) с точностью до величин более высокого порядка малости, чем ε, векторы $\boldsymbol{x}^*(t)-\boldsymbol{x}(t)$ при $\tau_s\leqslant t\leqslant\tau$ получаются друг из друга переносом вдоль траектории $\boldsymbol{x}(t)$ (см. 19)):

$$\boldsymbol{x}^*(t)-\boldsymbol{x}(t)=A_{t,\tau_s}(\boldsymbol{x}^*(\tau_s)-\boldsymbol{x}(\tau_s))+o(\varepsilon)\qquad(t\geqslant\tau_s).$$

Поэтому, применяя к формуле (29) преобразование A_{τ,τ_s}, мы получаем (см. второе из соотношений (17))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^*(\tau)-\boldsymbol{x}(\tau)=\varepsilon A_{\tau,t_0}(\xi_0)+\\+\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau,\tau_i}[\boldsymbol{f}(x(\tau_i),v_i)-\boldsymbol{f}(x(\tau_i),u(\tau_i))]\,\delta t_i+o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Наконец, складывая последнее соотношение с соотношением (25), мы и в этом случае (т. е. при $\tau_s<\tau$) получаем соотношения (21), (22), чем и заканчивается доказательство.

Замечание. Анализируя проведенное доказательство, мы заметим, что оно основывается на формуле (1) и уравнениях в вариациях (формулы (14)—(16)). Поэтому, учитывая формулу (2) и замечание 2 на стр. 96, мы приходим к следующему выводу. Если все величины $\delta t_1, \delta t_2, \ldots, \delta t_s, \delta t$ зависят непрерывно от некоторого параметра $\boldsymbol{v}$, изменяющегося в компактном множестве N, то формулы (21), (22) сохраняют силу, причем величина $o(\varepsilon)$ в формуле (21) (зависящая, конечно, от $\boldsymbol{v}$) имеет равномерное по $\boldsymbol{v}$ более высокий порядок малости, чем ε.

§ 14. Основные леммы

Если какое-либо из чисел δt_i равно нулю, то его можно отбросить при определении проварьированного управления $u^*(t)$ вместе с соответствующими точками τ_i и v_i — от этого управление $u^*(t)$ не изменится. Обратно, добавление новых точек τ_i, v_i, для которых $\delta t_i = 0$, не изменяет управления $u^*(t)$. Пользуясь этим, мы можем, если речь идет о конечном числе управлений $u_1^*(t), \ldots, u_p^*(t)$, получающихся варьированием одного и того же управления $u(t)$ при одном и том же τ, считать, что все точки τ_i, v_i при определении управлений $u_1^*(t), \ldots, u_p^*(t)$ одинаковы и взяты в одинаковом числе, а все различие между этими управлениями заключается в том, что у них не одинаковы числа δt_i и δt. Этой возможностью — считать все точки τ_i, v_i одинаковыми (при рассмотрении конечного числа различных вариаций одного и того же управления) — мы будем пользоваться в дальнейшем, не оговаривая каждый раз.

Вектор Δx (см. (22)) не зависит от ε, но существенно зависит, конечно, от выбора точек τ_i, v_i, τ и чисел δt и δt_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Обозначим совокупность величин τ_i, v_i, τ, δt_i, δt через $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i,\ \delta t\},$$

и будем вектор (22) обозначать далее через $\Delta x_{\mathfrak{a}}$, подчеркивая тем самым его зависимость от этих величин.

В этом параграфе мы будем предполагать, что правильная точка τ управления $u(t)$ зафиксирована и что все рассматривающиеся вариации этого управления удовлетворяют условию $t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau < t_1$.

Пусть имеется конечное число величин

$$\mathfrak{a}' = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i',\ \delta t'\},$$
$$\mathfrak{a}'' = \{\tau_i,\ v_i,\ \tau,\ \delta t_i'',\ \delta t''\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Мы можем считать (см. выше), что все точки τ_i, v_i одинаковы у всех величин $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ... (что и предусмотрено обозначениями). Линейную комбинацию $\lambda'\mathfrak{a}' +$

$+\lambda''\mathfrak{a}''+\ldots$ величин $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, … с неотрицательными коэффициентами λ', λ'', … мы определим формулой *)

$$\lambda'\mathfrak{a}'+\lambda''\mathfrak{a}''+\ldots=$$
$$=\{\tau_i, v_i, \tau, \lambda'\delta t_i'+\lambda''\delta t_i''+\ldots, \lambda'\delta t'+\lambda''\delta t''+\ldots\}.$$

(Неотрицательность коэффициентов λ', λ'', … существенна потому, что в противном случае величины $\lambda'\delta t_i'+\lambda''\delta t_i''+\ldots$ могли бы оказаться отрицательными, что недопустимо.)

Будем теперь, имея некоторое управление $u(t)$, $t_0\leqslant \leqslant t\leqslant t_1$, и соответствующую траекторию $x(t)$, рассматривать векторы $\Delta x=\Delta x_{\mathfrak{a}}$ для различных символов $\mathfrak{a}$ (τ фиксировано). Легко видеть, что имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{a}=\lambda'\mathfrak{a}'+\lambda''\mathfrak{a}''+\ldots$ (где $\lambda'\geqslant 0$, $\lambda''\geqslant 0$, …), то соответствующие векторы Δx связаны такой же линейной зависимостью*

$$\Delta x_{\mathfrak{a}}=\lambda'\Delta x_{\mathfrak{a}'}+\lambda''\Delta x_{\mathfrak{a}''}+\ldots$$

Это непосредственно вытекает из того, что в формулу (22) все числа $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$, δt входят линейно.

Мы будем считать Δx связанным вектором, исходящим из точки $x(\tau)$, т. е. будем считать этот вектор элементом пространства X_τ (см. § 12). Если мы будем брать всевозможные символы $\mathfrak{a}$ (τ фиксировано), то векторы $\Delta x=\Delta x_{\mathfrak{a}}$ заполнят некоторое множество K_τ в пространстве X_τ.

Докажем теперь, что *множество K_τ является выпуклым конусом* **) *векторного пространства X_τ.*

*) Отметим, что, вообще говоря, добавление новых точек τ_i, v_i, для которых $\delta t_i=0$ (благодаря чему все точки τ_i, v_i у рассматриваемого конечного набора величин $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, … становятся одними и теми же), может быть произведено неоднозначно. Вследствие этого линейная комбинация $\lambda'\mathfrak{a}'+\lambda''\mathfrak{a}''+\ldots$ также определена неоднозначно. Однако, как легко видеть, эта неоднозначность никак не скажется на результатах последующих вычислений.

**) Множество M, лежащее в некотором векторном пространстве X, называется выпуклым конусом с вершиной в точке o, если 1) оно является *конусом*, т. е. вместе с каждой отличной от o точкой a содержит и весь луч $\overrightarrow{oa}$, 2) оно *выпукло*, т. е. вместе с каждыми двумя точками содержит целиком соединяющий их отрезок.

В самом деле, если a и a'' — две точки пространства X_τ, принадлежащие множеству K_τ, т. е. если существуют такие символы $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, что

$$a' = \Delta x_{\mathfrak{a}'}, \quad a'' = \Delta x_{\mathfrak{a}''},$$

то для любых неотрицательных λ', λ'' мы имеем в силу леммы 2

$$\lambda' a' + \lambda'' a'' = \lambda' \Delta x_{\mathfrak{a}'} + \lambda'' \Delta x_{\mathfrak{a}''} = \Delta x_{(\lambda' \mathfrak{a}' + \lambda'' \mathfrak{a}'')},$$

т. е. точка $\lambda' a' + \lambda'' a''$ также принадлежит множеству K_τ. Это и означает, что K_τ есть выпуклый конус про-

---

Заметим, что если выпуклый конус M не заполняет всего векторного пространства X, в котором он расположен, то существует в пространстве X такая гиперплоскость, проходящая через вершину конуса o, что весь конус M расположен целиком в каком-либо одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью. Точка $x \in X$ называется *внутренней точкой* выпуклого конуса $M \subset X$, если некоторая окрестность точки x в пространстве X целиком содержится в конусе M. Множество всех внутренних точек конуса $M \subset X$ называется его *внутренностью*.

Пусть, далее, M_1 и M_2 — два выпуклых конуса пространства X, имеющих общую вершину o. Конусы M_1 и M_2 назовем *разделяемыми* в X, если существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. такая гиперплоскость, что конус M_1 расположен целиком в одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а конус M_2 — в другом полупространстве. Для того чтобы конусы M_1 и M_2 были разделяемыми, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий: 1) существует гиперплоскость, содержащая оба конуса M_1, M_2; 2) не существует точки, которая была бы внутренней точкой каждого из конусов M_1, M_2 относительно его несущей плоскости. Таким образом, если конусы M_1 и M_2 (с общей вершиной o) не являются разделяемыми в X, то линейная оболочка их несущих плоскостей совпадает со всем пространством X, и, кроме того, существует точка a, являющаяся внутренней точкой каждого конуса M_1, M_2 относительно его несущей плоскости. В этом случае через точку a можно провести такую плоскость C, ортогональную прямой oa и пересекающуюся с несущей плоскостью конуса M_2 только в точке a, что все точки плоскости C, достаточно близкие к a, принадлежат конусу M_1, и, кроме того, линейная оболочка плоскости C и несущей плоскости конуса M_2 совпадает с X. Иначе говоря, шар малого радиуса с центром в точке a даст в пересечении с плоскостью C «дополнительную площадку» к несущей плоскости конуса M_2, причем эта площадка ортогональна прямой oa и целиком содержится в конусе M_1. Размерность этой «дополнительной площадки» равна разности размерностей пространства X и конуса M_2.

странства X_τ (или, что то же самое, выпуклый конус пространства X с вершиной в точке $x(\tau)$).

Мы будем называть множество K_τ *конусом достижимости.*

Докажем теперь две леммы, служащие основой для применения вышеизложенных конструкций к изучению оптимальных процессов.

Лемма 3. *Пусть τ ($t_0 < \tau < t_1$) — правильная точка управления $u(t)$, $x(t)$ — траектория, соответствующая управлению $u(t)$ и исходящая из точки x_0, а Λ — некоторая линия, исходящая из точки $x(\tau)$ и имеющая в точке $x(\tau)$ касательный луч L. Если луч L принадлежит внутренности конуса K_τ (т. е. если все точки луча L, кроме его конца, являются внутренними точками множества K_τ), то существует такое управление $u_*(t)$, что соответствующая ему траектория $x_*(t)$, исходящая из той же точки x_0, проходит через некоторую (отличную от $x(\tau)$) точку линии Λ.*

Доказательство. Выберем на луче L какую-либо точку A, отличную от $x(\tau)$, и из этой точки A проведем n векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равной длины r, ортогональных лучу L и попарно ортогональных между собой. Положим, далее, $f_i = -e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем векторы f_i также будем считать исходящими из точки A. Число r — общую длину векторов $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ — будем считать настолько малым, чтобы концы всех этих векторов принадлежали конусу K_τ (это возможно, так как A есть внутренняя точка этого конуса). Наконец, через c обозначим вектор с началом в точке $x(\tau)$ и концом в точке A. Так как векторы

$$c,\ c + e_1,\ c + e_2,\ \ldots,\ c + e_n,\ c + f_1,\ c + f_2,\ \ldots,\ c + f_n$$

(исходящие из точки $x(\tau)$) принадлежат конусу K_τ, то существуют такие символы $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_n$, что

$$\Delta x_{\mathfrak{a}_0} = c,\quad \Delta x_{\mathfrak{a}_1} = c + e_1,\ \ldots,\ \Delta x_{\mathfrak{a}_n} = c + e_n,$$
$$\Delta x_{\mathfrak{a}'_1} = c + f_1,\ \ldots,\ \Delta x_{\mathfrak{a}'_n} = c + f_n.$$

Определим теперь две (очевидно, непрерывные и неотрицательные) функции $h^+(\rho)$ и $h^-(\rho)$ действительного переменного ρ, положив:

$$h^+(\rho)=\begin{cases}\rho & \text{при } \rho\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } \rho<0;\end{cases}\quad h^-(\rho)=\begin{cases}0 & \text{при } \rho\geqslant 0,\\ -\rho & \text{при } \rho<0.\end{cases}$$

При $(\rho^1)^2+(\rho^2)^2+\ldots+(\rho^n)^2\leqslant 1$ формула

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\rho^1,\ldots,\rho^n)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\rho^i|\right)\mathfrak{a}_0+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h^+(\rho^i)\,\mathfrak{a}_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h^-(\rho^i)\,\mathfrak{a}_i'$$

определяет зависящий от n действительных чисел $\rho^1,\ldots$ $\ldots,\rho^n$ символ $\mathfrak{a}(\rho^1,\ldots,\rho^n)$. (Действительно, у нас имеется конечное число символов $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i'$, причем все коэффициенты $h^+(\rho^i)$, $h^-(\rho^i)$ и $1-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|\rho^i|$, как легко видеть, неотрицательны.) Вектор Δx, соответствующий символу $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\rho^1,\ldots,\rho^n)$, имеет, в силу леммы 2 и соотношений $f_i=-e_i$, $h^+(\rho)+h^-(\rho)=|\rho|$, $h^+(\rho)-$ $-h^-(\rho)=\rho$, следующий вид:

$$\Delta x_{\mathfrak{a}}=\left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\rho^i|\right)c+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h^+(\rho^i)(c+e_i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h^-(\rho^i)(c+f_i)=$$
$$+\left[1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-|\rho^i|+h^+(\rho^i)+h^-(\rho^i)\right)\right]c+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[h^+(\rho^i)-h^-(\rho^i)]e_i=c+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho^i e_i.$$

Следовательно, если точка $(\rho^1,\ldots,\rho^n)$ пробегает в n-мерном числовом пространстве единичный шар

$$(\rho^1)^2+\ldots+(\rho^n)^2\leqslant 1, \tag{30}$$

то вектор Δx_a (точнее, конец этого вектора) также пробегает n-мерный шар в пространстве X_τ, а именно шар радиуса $\frac{1}{n}r$ с центром в точке A, ортогональный лучу L. При тех же условиях конец вектора $\varepsilon\Delta x_a$ (все векторы исходят из точки $x(\tau)$, т. е. из начала координат пространства X_τ) пробегает n-мерных шар E_ε радиуса $\varepsilon\cdot\frac{r}{n}$, ортогональный лучу L; центр шара E_ε расположен в точке A_ε луча L, находящейся на расстоянии εd от точки $x(\tau)$, где d — длина вектора c (рис. 31).

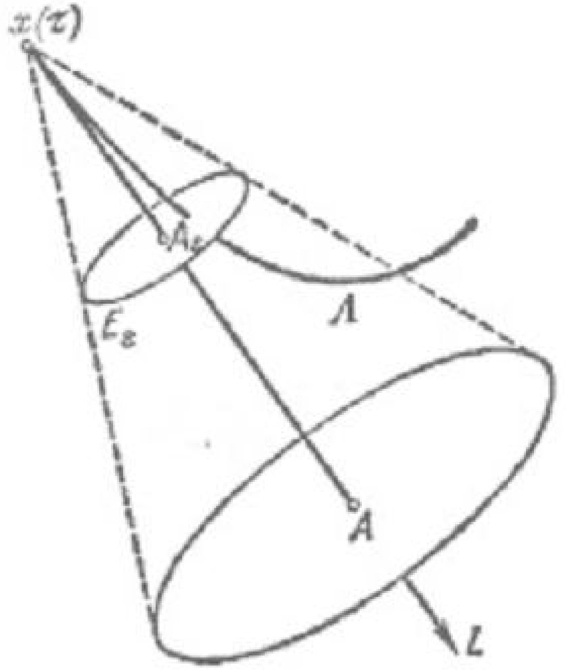

Рис. 31.

Так как в нашем рассуждении расматриваются лишь такие символы $\mathfrak{a}$, которые являются линейными комбинациями (с неотрицательными коэффициентами) конечного числа символов $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}'_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, то точки τ_j, v_j, $j=1, 2, \ldots, s$, входящие в определение символа $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\rho^1, \ldots, \rho^n)$, одинаковы для всех этих символов, т. е. не зависят от $\rho^1, \ldots, \rho^n$; точка τ также фиксирована. Числа же $\delta t_1, \ldots, \delta t_s$ и δt (определяющие проварьированное управление $u^*(t)$) зависят, причем непрерывно, от $\rho^1, \ldots, \rho^n$. Поэтому мы будем писать $u^*_a(t)$ и δt_a, чтобы подчеркнуть зависимость величин $u^*(t)$ и δt от $\rho^1, \ldots, \rho^n$. Траекторию $x^*(t)$, исходящую из точки x_0 и соответствующую управлению $u^*(t)$, будем обозначать через $x^*_a(t)$, так что соотношение (21) (в котором $\xi_0 = 0$, ибо начальная точка совпадает с x_0 при всех ε) даст нам

$$x^*_a(\tau + \varepsilon\,\delta t_a) = x(\tau) + \varepsilon\,\Delta x_a + o(\varepsilon). \tag{31}$$

Отметим, что траектория $x^*_a(t)$ непрерывно зависит от параметров $\rho^1, \ldots, \rho^n$; точно так же число δt_a непрерывно зависит от $\rho^1, \ldots, \rho^n$. Поэтому и точка $x^*_a(\tau + \varepsilon\delta t_a)$ непрерывно зависит от $\rho^1, \ldots, \rho^n$, а величина $o(\varepsilon)$ имеет равномерно по $\rho^1, \ldots, \rho^n$ более высокий порядок малости, чем ε (см. замечание на стр. 105). Следовательно, когда точка $(\rho^1, \ldots, \rho^n)$ описывает шар (30), точка (31) пробегает (при любом фиксированном ε) некоторый «диск» F_ε (т. е. непрерывный образ шара (30); этот диск может иметь самопересечения и т. п.). С точностью до малых более высокого порядка, чем ε, диск F_ε «совпадает» с шаром E_ε (см. (31)); точнее говоря, точки диска F_ε отстоят от соответствующих точек шара E_ε на величину более высокого порядка малости, чем ε (равномерно для всех точек шара E_ε). Точка же пересечения этого шара с линией Λ (существующая при достаточно малых ε) отстоит от точки $x(\tau)$ и от границы шара E_ε на величину порядка ε. Следовательно, при достаточно малом ε диск F_ε **пересекает** линию Λ в некоторой точке*) (рис. 32). Выберем такое ε. Так как весь диск F_ε состоит из точек вида (31), то доказанный факт пересечения F_ε с линией Λ означает: существуют такие $\rho^1, \ldots, \rho^n$ (лежащие в шаре (30)), что $x_a^*(\tau + \varepsilon\delta t_a) \in \Lambda$. Иначе говоря, обозначив величины $u_a^*(t)$, $x_a^*(t)$, соответствующие выбранным значениям $\rho^1, \ldots, \rho^n$, через $u_*(t)$, $x_*(t)$ и полагая $\tau + \varepsilon\delta t_a = \tau'$, мы получим $x_*(t_0) = x_0$, $x_*(\tau') \in \Lambda$, и лемма 3 доказана.

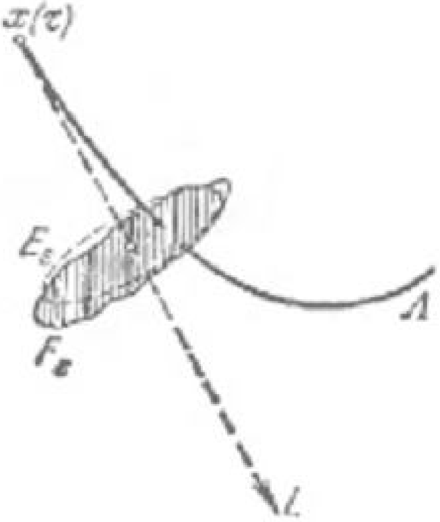

Рис. 32.

Лемма 4. *Если управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, оптимальны, то для лю-*

---

*) Факт существования такой точки пересечения представляется наглядно «очевидным»; строгое доказательство легко проводится элементарными средствами **топологии** (с помощью понятия *индекса пересечения*; см., например, В. Г. Болтянский, Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова, т. XLVII, 1955; определение индекса пересечения «отображенных», т. е. искривленных цепей дано в п. 5 : 2 этой книги, а существование при достаточно малом ε точки пересечения диска F_ε и линии Λ вытекает из предложения (г) на стр. 69).

бой правильной точки $\tau (t_0 < \tau < t_1)$ луч L_τ, исходящий из точки $x(\tau)$ и идущий в направлении отрицательной полуоси x^0, не принадлежит внутренности конуса K_τ (т. е. проходит либо вне этого конуса, либо по его границе).

Доказательство. Допустим, что при некотором τ луч L_τ принадлежит внутренности конуса K_τ. Применим лемму 3, принимая за линию Λ (и за луч L) луч L_τ. Тогда мы получим, что существует такое управление $u_*(t)$, для которого соответствующая траектория $x_*(t)$ (исходящая из той же точки x_0) проходит в некоторый момент $\tau' > t_0$ через точку, лежащую на луче L_τ. Иначе говоря,

$$\begin{aligned} &x^i_*(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ &x^0_*(\tau') < x^0(\tau). \end{aligned}$$

Определим на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau)$ управление $u_{**}(t)$, положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau', \\ u(t - (\tau' - \tau)) & \text{при} \quad \tau' < t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau). \end{cases}$$

Траектория $x_{**}(t)$, соответствующая управлению $u_{**}(t)$ и исходящая из точки x_0, совпадает, очевидно, на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau'$ с траекторией $x_*(t)$, так что, в частности,

$$\begin{aligned} &x^i_{**}(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ &x^0_{**}(\tau') < x^0(\tau). \end{aligned} \tag{32}$$

Далее, на отрезке $\tau' \leqslant t \leqslant t_1 + (\tau' - \tau)$ траектория $x_{**}(t)$ имеет вид

$$x_{**}(t) = x(t - (\tau' - \tau)) + p, \tag{33}$$

где p — постоянный вектор

$$p = (x^0_{**}(\tau') - x^0(\tau), 0, 0, \ldots, 0).$$

(Это получается непосредственной подстановкой решения (33) в уравнения (7) с учетом того факта, что правые части системы (7) не зависят от t и x^0; вектор p определяется тем условием, что в точке τ' — точке «стыка» двух кусков траектории $x_{**}(t)$ — эта траектория должна быть непрерывна.) При $t = t_1 + (\tau' - \tau)$ получаем

$$x_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = x(t_1) + p.$$

Иначе говоря, точка $x_{**}(t_1 + (\tau' - \tau))$ лежит на прямой П, определенной в § 11 (ибо вектор p параллелен оси x^0), и, кроме того,

$$x^0_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = x^0(t_1) + x^0_{**}(\tau') - x^0(\tau) < x^0(t_1)$$

(см. (32)). Но это противоречит оптимальности траектории $x(t)$ и управления $u(t)$. Таким образом, предположение, сделанное в начале доказательства, приводит к противоречию, и лемма 4 полностью доказана.

§ 15. Доказательство принципа максимума

В этом параграфе мы будем предполагать, что $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальная траектория (соединяющая точку x_0 с некоторой точкой прямой П, см. § 11), а $u(t)$ — соответствующее оптимальное управление. Пусть τ — некоторая правильная точка управления $u(t)$. Согласно лемме 4, луч L_τ не принадлежит внутренности конуса K_τ, так что этот конус не заполняет всего пространства X. Поэтому существует опорная гиперплоскость к конусу K_τ в его вершине, т. е. такая гиперплоскость Г, что весь конус K лежит в одном из двух замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью Г. (Гиперплоскость Г, обладающая этим свойством, может быть не единственной; последующие рассуждения справедливы для любой такой гиперплоскости.) Уравнение гиперплоскости Г (в пространстве X_τ) можно записать в виде $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha x^\alpha = 0$, где $x^0, x^1, \ldots, x^n$ — текущие координаты. Так как умножение всех коэффициентов a_α на одно и то же отличное от нуля число не меняет гиперплоскости Г, то мы можем считать (изменив, если нужно, знаки всех чисел a_α на обратные), что конус K_τ лежит в отрицательном полупространстве $\left(\sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha x^\alpha \leqslant 0\right)$. Иначе говоря, для любого вектора Δx, определяемого формулой (22), выполнено неравенство

$$(\boldsymbol{a}, \Delta \boldsymbol{x}) \leqslant 0 \quad (\Delta \boldsymbol{x} \in K_\tau), \tag{34}$$

где через $\boldsymbol{a}$ обозначен вектор $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ (ибо совокупность векторов (22) и есть конус K_τ). Полагая в формуле (22) $\delta t_1 = \delta t_2 = \ldots = \delta t_s = 0$, мы получим $\Delta x = f(x(\tau), u(\tau))\, \delta t$, и, в силу (34),

$$(\boldsymbol{a}, f(x(\tau), u(\tau))\, \delta t) \leqslant 0.$$

Так как это неравенство справедливо при любых δt (как положительных, так и отрицательных), то

$$(\boldsymbol{a}, f(x(\tau), u(\tau))) = 0,$$

т. е., иначе говоря,

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{a}, x(\tau), u(\tau)) = 0 \tag{35}$$

(это соотношение выполняется, если вектор $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет условию (34)). Обозначим через

$$\psi(t, \boldsymbol{a}) = (\psi_0(t, \boldsymbol{a}), \psi_1(t, \boldsymbol{a}), \ldots, \psi_n(t, \boldsymbol{a}))$$

решение системы уравнений (8) (соответствующее изучаемым оптимальным $u(t)$ и $x(t)$) с начальным условием

$$\psi(\tau, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}. \tag{36}$$

Решение $\psi(t, \boldsymbol{a})$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, так как система (8) линейна.

Лемма 5. *Если вектор* $\boldsymbol{a}$ *удовлетворяет условию (34), то во всякой правильной точке управления* $u(t)$, *лежащей на полуинтервале* $t_0 < t \leqslant \tau$, *выполнено соотношение*

$$\mathscr{H}(\psi(t, \boldsymbol{a}), x(t), u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t, \boldsymbol{a}), x(t)).$$

Пусть τ_1 — правильная точка управления $u(t)$, расположенная на полуинтервале $t_0 < t \leqslant \tau$, а v_1 — произвольная точка области управления U. Рассмотрим символ $\mathfrak{a}$ (см. § 14) с единственной точкой τ_1 (т. е. $s = 1$) и с числами δt_1, δt, соответственно равными единице и нулю:

$$\mathfrak{a} = \{\tau_1, v_1, \tau, 1, 0\}.$$

Тогда вектор Δx (см. (22)), соответствующий этому символу a, будет иметь значение

$$\Delta x = A_{\tau, \tau_1}[f(x(\tau_1), v_1) - f(x(\tau_1), u(\tau_1))].$$

В силу соотношений (34) и (36) получаем отсюда

$$(\psi(\tau, a), A_{\tau, \tau_1}[f(x(\tau_1), v_1) - f(x(\tau_1), u(\tau_1))]) \leqslant 0,$$

и потому, согласно лемме 1 и соотношению $A_{\tau_1, \tau_1} = E$ (см. (17))

$$(\psi(\tau_1, a), f(x(\tau_1), v_1) - f(x(\tau_1), u(\tau_1))) \leqslant 0.$$

Это соотношение переписывается (в силу определения функции $\mathscr{H}$) в виде

$$\mathscr{H}(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), v_1) - \mathscr{H}(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), u(\tau_1)) \leqslant 0,$$

а так как это неравенство справедливо для любой точки $v_1 \in U$, то мы получаем

$$\mathscr{H}(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), u(\tau_1)) = \max_{v_1 \in U} \mathscr{H}(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), v_1) = \\ = \mathscr{M}(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1)),$$

и лемма 5 доказана.

Соотношение, указанное в лемме 5, справедливо и при $t = \tau$ (ибо τ — правильная точка):

$$\mathscr{H}(\psi(\tau, a), x(\tau), u(\tau)) = \mathscr{M}(\psi(\tau, a), x(\tau)).$$

Поэтому, в силу (35) и (36), мы получаем следующее утверждение.

Лемма 6. *Если вектор a удовлетворяет условию (34), то*

$$\mathscr{M}(\psi(\tau, a), x(\tau)) = 0.$$

Лемма 7. *Если абсолютно непрерывная функция $\psi(t)$ почти всюду на некотором отрезке I удовлетворяет уравнениям (8) и соотношению*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t)), \tag{37}$$

то функция $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ постоянна на всем отрезке I.

Заметим прежде всего, что функция $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ полунепрерывна снизу на отрезке I. Действительно, пусть t' — произвольная точка этого отрезка, а ε — положительное число. В силу определения верхней грани, существует такая точка $u' \in U$, что

$$\mathscr{H}(\psi(t'),\ x(t'),\ u') \geqslant \mathscr{M}(\psi(t'),\ x(t')) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу непрерывности функции $\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ u)$ по t при фиксированном $u = u'$, существует такое $\delta > 0$, что при $|t - t'| < \delta$ имеем

$$|\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ u') - \mathscr{H}(\psi(t'),\ x(t'),\ u')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $|t - t'| < \delta$ справедливо неравенство

$$\mathscr{M}(\psi(t),\ x(t)) = \sup_{u \in U} \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ u) \geqslant$$
$$\geqslant \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ u') > \mathscr{M}(\psi(t'),\ x(t')) - \varepsilon,$$

показывающее, что функция $\mathscr{M}(\psi(t),\ x(t))$ полунепрерывна снизу.

Далее, так как управление $u(t)$ допустимо, то образ отрезка I при отображении u обладает в пространстве E_r компактным замыканием (см. § 10), т. е. существует в E_r такое компактное множество P, что $u(t) \in P$ при $t \in I$. Положим

$$m(\psi,\ x) = \max_{u \in P} \mathscr{H}(\psi,\ x,\ u).$$

Очевидно, что имеет место неравенство

$$\mathscr{M}(\psi,\ x) \geqslant m(\psi,\ x), \tag{38}$$

справедливое при любых x и ψ. Соотношение (37) означает, что *почти всюду на отрезке I имеет место равенство*

$$m(\psi(t),\ x(t)) = \mathscr{M}(\psi(t),\ x(t))$$

(ибо $u(t) \in P$).

Итак, $\mathscr{M}(\psi(t),\ x(t))$ есть полунепрерывная снизу фунция, почти всюду на отрезке I совпадающая с функцией $m(\psi(t),\ x(t))$ и связанная с ней соотношением (38). Из этого следует, что *если функция $m(\psi(t),\ x(t))$ непрерывна, то функция $\mathscr{M}(\psi(t),\ x(t))$* в с ю д у *на отрезке I совпадает с ней (и потому также непрерывна)*. Мы сейчас покажем, что функция $m(\psi(t),\ x(t))$, — а следовательно, в силу сказанного, и $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$, — абсолютно непрерывна на отрезке I.

Так как отрезок I компактен, то существует в пространстве переменных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, x^0, x^1, \ldots, x^n$ такое выпуклое ограниченное множество Q, что точка $(\psi(t), x(t))$ принадлежит множеству Q при $t \in I$. Таким образом, тройка $(\psi(t), x(t), u(t))$ принадлежит множеству $Q \times P$ при $t \in I$. Далее, так как частные производные функции $\mathscr{H}(\psi, x, u)$ по переменным ψ_α, x^α, непрерывны по совокупности переменных ψ, x, u (см. условия, наложенные на функции f^i в § 11), то на компактном множестве $Q \times P$ все эти производные ограничены. Отсюда следует существование такой (не зависящей от u) константы $K > 0$, что для любых $(\psi, x) \in Q$, $(\psi', x') \in Q$, $u \in P$ выполнено соотношение

$$|\mathscr{H}(\psi, x, u) - \mathscr{H}(\psi', x', u)| \leqslant Kd, \tag{39}$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi_i - \psi'_i|$, $|x^i - x'^i|$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Пусть (ψ, x) и (ψ', x') — две точки множества Q, а u и u' — такие точки множества P, что

$$m(\psi, x) = \mathscr{H}(\psi, x, u), \quad m(\psi', x') = \mathscr{H}(\psi', x', u').$$

Тогда, очевидно, выполнены неравенства

$$\mathscr{H}(\psi, x, u') \leqslant \mathscr{H}(\psi, x, u), \quad \mathscr{H}(\psi', x', u) \leqslant \mathscr{H}(\psi', x', u'),$$

и потому (учитывая соотношение (39)) мы получаем

$$\begin{aligned} -Kd \leqslant \mathscr{H}(\psi, x, u') - \mathscr{H}(\psi', x', u') &\leqslant \\ \leqslant \mathscr{H}(\psi, x, u) - \mathscr{H}(\psi', x', u') &\leqslant \\ \leqslant \mathscr{H}(\psi, x, u) - \mathscr{H}(\psi', x', u') &\leqslant Kd. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$|m(\psi, x) - m(\psi', x')| \leqslant Kd,$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi_i - \psi'_i|$, $|x^i - x'^i|$, $i = 0, 1, \ldots, n$. В частности, отсюда получаем

$$|m(\psi(t), x(t)) - m(\psi(t'), x(t'))| \leqslant Kd, \quad t, t' \in I,$$

где d — наибольшее из чисел $|\psi_i(t) - \psi_i(t')|$, $|x^i(t) - x^i(t')|$. Из этого неравенства, в силу абсолютной непрерывности функций $\psi(t)$ и $x(t)$, мы без труда заключаем, что функция $m(\psi(t), x(t))$ абсолютно непрерывна.

Покажем, наконец, что функция $m(\psi(t), x(t))$ почти всюду имеет производную, равную нулю. В силу абсолютной непрерывности функции $m(\psi(t), x(t))$ и определения функций $x(t)$ и $\psi(t)$, почти всюду на отрезке I имеют место следующие обстоятельства: функция $m(\psi(t), x(t))$ имеет производную, для функций $x(t)$ и $\psi(t)$ выполнены соотношения (7) и (8), или, что то же самое, (9) и (10), и, кроме того,

$$m(\psi(t), x(t)) = \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)).$$

Пусть $t=\tau$ — какая-либо точка, в которой эти обстоятельства имеют место, и t' — произвольная отличная от τ точка отрезка I. Тогда

$$m(\psi(t'), x(t')) \geqslant \mathscr{H}(\psi(t'), x(t'), u(\tau))$$

и потому

$$m(\psi(t'), x(t')) - m(\psi(\tau), x(\tau)) \geqslant$$
$$\geqslant \mathscr{H}(\psi(t'), x(t'), u(\tau)) - \mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)).$$

Будем теперь считать, что t' приближается к τ, оставаясь больше τ, так что разность $t'-\tau$ положительна. Тогда деление на $t'-\tau$ не меняет знака неравенства в последнем соотношении:

$$\frac{m(\psi(t'), x(t')) - m(\psi(\tau), x(\tau))}{t'-\tau} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\mathscr{H}(\psi(t'), x(t'), u(\tau)) - \mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau))}{t'-\tau}.$$

Переходя к пределу при $t' \to \tau \ (t' > \tau)$, получаем отсюда

$$\frac{d}{dt} m(\psi(t), x(t))\Big|_{t=\tau} \geqslant \frac{d}{dt}\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(\tau))\Big|_{t=\tau} =$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_\alpha} \cdot \frac{d\psi_\alpha(t)}{dt}\Big|_{t=\tau} + \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{dx^\alpha(t)}{dt}\Big|_{t=\tau} = 0$$

(здесь производные вычисляются в точке τ, где τ и, следовательно, $u(\tau)$ фиксированы). Аналогично, при $t' \to \tau$,

$t' < \tau$ получаем обратное неравенство

$$\frac{d}{dt} m(\psi(t), x(t))\Big|_{t=\tau} \leqslant 0.$$

Итак, $m(\psi(t), x(t))$, а также и совпадающая с ней функция $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$, есть абсолютно непрерывная функция, имеющая почти всюду производную, равную нулю. Следовательно, эта функция постоянна на отрезке I.

Докажем следующее важное свойство конусов K_τ.

Лемма 8. *Если τ и τ' — правильные точки управления $u(t)$, причем $t_0 < \tau' < \tau < t_1$, то $A_{\tau, \tau'}(K_{\tau'}) \subset K_\tau$, где $A_{\tau, \tau'}$ — отображение пространства $X_{\tau'}$ на X_τ, определенное в* § 12.

В самом деле, конус $K_{\tau'}$ образован векторами, каждый из которых в силу (22) можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\Delta_1 x = f(x(\tau'), u(\tau'))\,\delta t,$$

$$\Delta_2 x = \sum_{i=1}^{s} A_{\tau', \tau_i}[f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$A_{\tau, \tau'}(\Delta_1 x) \in K_\tau, \quad A_{\tau, \tau'}(\Delta_2 x) \in K_\tau. \tag{40}$$

Мы имеем в силу (17):

$$A_{\tau, \tau'}(\Delta_2 x) = \sum_{i=1}^{s} A_{\tau, \tau_i}[f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))]\,\delta t_i,$$

и потому второе из включений (40) имеет место (ибо $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau' < \tau$). Докажем первое из этих включений. Допустим, что (при некотором δt) вектор $A_{\tau, \tau'}(\Delta_1 x)$ не принадлежит конусу K_τ. Тогда существует гиперплоскость, разделяющая их, т. е. существуют такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что конус K_τ расположен в отрицательном полупространстве $\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha x^\alpha \leqslant 0$, а вектор $A_{\tau, \tau'}(\Delta_1 x)$ — в открытом положительном полупространстве, т. е.

$$(a, A_{\tau, \tau'}(\Delta_1 x)) > 0, \tag{41}$$

где $\boldsymbol{a}$ — вектор $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Обозначим через $\psi(t, a)$ решение системы (8) с начальным условием $\psi(\tau, a) = a$. Это решение мы будем рассматривать на отрезке $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant \tau$. Так как конус K_τ расположен в отрицательном полупространстве, т. е. выполнено условие (34), то из лемм 5, 7 и 6 вытекает, что $\mathscr{M}(\psi(t, \boldsymbol{a}), x(t)) \equiv 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Так как, далее, τ' — правильная точка (лежащая на полуинтервале $t_0 < t \leqslant \tau$), то, согласно лемме 5,

$$\mathscr{H}(\psi(\tau', \boldsymbol{a}), x(\tau'), u(\tau')) = \mathscr{M}(\psi(\tau', a), x(\tau')) = 0,$$

т. е.

$$(\psi(\tau', \boldsymbol{a}), \boldsymbol{f}(x(\tau'), u(\tau'))) = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 1, мы получаем соотношение

$$(\psi(\tau, \boldsymbol{a}), A_{\tau, \tau'}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau'), u(\tau')))) = 0,$$

противоречащее неравенству (41). Полученное противоречие и доказывает лемму 8.

Пусть теперь τ — произвольная правильная точка управления $u(t)$, лежащая на интервале $t_0 < t < t_1$. Положим $\boldsymbol{K}_{t_1}^{(\tau)} = A_{t_1, \tau}(\boldsymbol{K}_\tau)$. Так как $A_{t_1, \tau}$ есть линейное отображение, то $\boldsymbol{K}_{t_1}^{(\tau)}$ есть выпуклый конус пространства $\boldsymbol{X}_{t_1}$. Конусы $\boldsymbol{K}_{t_1}^{(\tau)}$ образуют в о з р а с т а ю щ у ю п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь: если $\tau' < \tau$ — правильные точки, то в силу леммы 8 мы имеем (см. (17))

$$\boldsymbol{K}_{t_1}^{(\tau')} = A_{t_1, \tau'}(\boldsymbol{K}_{\tau'}) = A_{t_1, \tau}(A_{\tau, \tau'}(\boldsymbol{K}_{\tau'})) \subset A_{t_1, \tau}(\boldsymbol{K}_\tau) = \boldsymbol{K}_{t_1}^{(\tau)}.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам τ интервала $t_0 < t < t_1$) всех конусов $\boldsymbol{K}_{t_1}^{(\tau)}$ снова есть выпуклый конус (возможно не замкнутый) пространства $\boldsymbol{X}_{t_1}$ (с вершиной в начале). Этот конус мы обозначим через $\boldsymbol{K}_{t_1}$ и назовем *предельным конусом.*

Л е м м а 9. *Если управление $u(t)$ и соответствующая траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, оптимальны, то луч L_{t_1}, исходящий из точки $\boldsymbol{x}(t_1)$ в направлении отрицательной полуоси x^0, не принадлежит внутренности конуса $\boldsymbol{K}_{t_1}$.*

В самом деле, пусть луч L_{t_1} принадлежит внутренности конуса $\boldsymbol{K}_{t_1}$. Выберем выпуклый многогранник M, целиком лежащий в $\boldsymbol{K}_{t_1}$ и содержащий какую-либо точку

$l\in L_{t_1}$ внутри себя. Каждая вершина многогранника M принадлежит конусу K_{t_1}, т. е. принадлежит некоторому конусу $K_{t_1}^{(\tau)}$, а так как конусы $K_{t_1}^{(\tau)}$ образуют возрастающую последовательность, то найдется такая правильная точка τ, что все вершины многогранника M принадлежат конусу $K_{t_1}^{(\tau)}$. Следовательно, конус $K_{t_1}^{(\tau)}$ содержит весь многогранник M, так что точка l является внутренней точкой конуса $K_{t_1}^{(\tau)}$ или, что то же самое, луч L_{t_1} принадлежит внутренности конуса $K_{t_1}^{(\tau)}$. Но тогда луч $A_{t_1,\tau}^{-1}(L_{t_1})$ принадлежит внутренности конуса $A_{t_1,\tau}^{-1}(K_{t_1}^{(\tau)})=$ $=K_\tau$ (ибо $A_{t_1,\tau}^{-1}$ есть линейное невырожденное, следовательно, гомеоморфное отображение). Луч же $A_{t_1,\tau}(L_{t_1})$ совпадает с лучом L_τ, исходящим из точки $x(\tau)$ в направлении отрицательной полуоси x^0. Это вытекает из того, что система уравнений в вариациях (16) не содержит в своих правых частях переменного x^0, и потому равные между собой векторы $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$, исходящие из точек кривой $x(t)$, получаются друг из друга переносом вдоль траектории $x(t)$.

Итак, луч L_τ принадлежит внутренности конуса K_τ, а это противоречит оптимальности управления $u(t)$ (см. лемму 4).

Переходим к завершению доказательства теоремы 8. Пусть $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, — оптимальное управление, а $x(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория. Тогда луч L_{t} не принадлежит внутренности предельного конуса K_{t} (лемма 9), и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа c_0, $c_1, \ldots, c_n$, что весь конус K_{t_1} лежит в полупространстве $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha\leqslant 0$, а луч L_{t_1} — в полупространстве $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha\geqslant$ $\geqslant 0$. Иначе говоря, вектор $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$, имеющий направление луча L_{t_1}, лежит в замкнутом полупространстве $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha\geqslant 0$, т. е. $c_0\leqslant 0$.

Обозначим через $\psi(t)=(\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ решение системы (8) с начальным условием $\psi(t_1)=c$, где c — вектор $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Так как система (8) линейна, то решение $\psi(t)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Покажем, что вектор $\psi(t)$ и является тем вектором, существование которого утверждается в теореме 8.

Прежде всего, $x(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (7) и (8), или, что то же самое, (9) и (10). Докажем, что соотношение (11) имеет место во всякой правильной точке интервала $t_0 < t < t_1$. Пусть τ — правильная точка, лежащая на этом интервале. Так как весь конус K_{t_1}, а следовательно, и конус $A_{t_1,\tau}(K_\tau)$ лежит в отрицательном полупространстве $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_1)\, x^\alpha \leqslant 0$, то (совершая перенос вдоль траектории $x(t)$ из точки $x(t_1)$ в точку $x(\tau)$) мы получаем, что конус $A_{t_1,\tau}^{-1}(A_{t_1,\tau}(K_\tau)) = K_\tau$ лежит в полупространстве $\sum\limits_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(\tau)\, x^\alpha \leqslant 0$ (см. § 12). Иначе говоря, вектор $a = \psi(\tau)$ удовлетворяет условию (34). Отсюда вытекает, что для решения $\psi(t, a)$ уравнения (8) с начальным условием $\psi(\tau, a) = a$ — а это решение, очевидно, совпадает с $\psi(t)$ — справедливо утверждение леммы 5. В частности (в силу того, что τ — правильная точка),

$$\mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \mathscr{M}(\psi(\tau), x(\tau)) = 0$$

(см. лемму 6).

Итак, условие 1°, указанное в теореме 8, выполняется. Кроме того, есть точки, в которых $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ обращается в нуль (это будет во всякой правильной точке τ), и, далее, $\psi_0(t_1) = c_0 \leqslant 0$. Поэтому для проверки условия 2° теоремы 8 достаточно доказать последнее утверждение теоремы 8 о постоянстве функций $\mathscr{M}(\psi(t), x(t))$ и $\psi_0(t)$, если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (9), (10) и выполнено условие 1°. Это непосредственно вытекает из леммы 7 и того факта, что функции f^α не зависят от x^0, так что первое из уравнений (8) имеет вид $\frac{d\psi_0}{dt} = 0$. Таким образом, теорема 8 полностью доказана. Вместе с тем доказана теорема 1 первой главы.

§ 16. Вывод условий трансверсальности

Здесь мы докажем сформулированную в первой главе теорему 3 (она справедлива для произвольного класса D допустимых управлений).

Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — некоторое допустимое управление, а $x(t)$ — траектория, соответствующая управлению $u(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$. Пусть, далее, S_0 — некоторое гладкое многообразие (в пространстве X) размерности $r_0 < n$, проходящее через точку x_0, и T_0 — касательная плоскость многообразия S_0 в этой точке. Через $\mathscr{T}_0$ обозначим r_0-мерную плоскость пространства X, состоящую из всех точек вида $(0, x)$, где $x \in T_0$. Очевидно, что плоскость $\mathscr{T}_0$ проходит через точку $\mathbf{x}_0$. Подвергнув плоскость $\mathscr{T}_0$ переносу вдоль траектории $x(t)$ в точку $x(\tau)$, $t_0 < \tau < t_1$, мы получим плоскость $A_{\tau, t_0}(\mathscr{T}_0)$, проходящую через точку $x(\tau)$. Если τ — правильная точка управления $u(t)$, то определен также конус K_τ с вершиной в точке $x(\tau)$. Выпуклую оболочку множества $A_{\tau, t_0}(\mathscr{T}_0) \cup K_\tau$ мы обозначим через $\mathscr{K}_\tau$. Очевидно, множество $\mathscr{K}_\tau$ является выпуклым конусом с вершиной в точке $x(\tau)$. Докажем теперь лемму, являющуюся обобщением леммы 3.

Лемма 10. *Пусть τ $(t_0 < \tau < t_1)$ — правильная точка управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, а $x(t)$ — траектория, соответствующая управлению $u(t)$ и исходящая из точки $\mathbf{x}_0$. Пусть, далее, Λ — некоторое многообразие с краем размерности не более n и расположенное в X так, что точка $x(\tau)$ лежит на его краю. Обозначим через M касательную полуплоскость многообразия Λ в точке $x(\tau)$. Если конусы $\mathscr{K}_\tau$ и M, имеющие общую вершину в точке $x(\tau)$, не являются разделяемыми, то существуют такое управление $u_*(t)$ и такая точка $x_0^* \in S_0$, что соответствующая этому управлению траектория $x_*(t)$, исходящая из точки $\mathbf{x}_0^* = (0, x_0^*)$, проходит через некоторую точку многообразия Λ, не лежащую на его краю.*

Доказательство. Обозначим через π ортогональное проектирование многообразия S_0 на плоскость T_0. Отображение π, рассматриваемое не на всем многообразии S_0, а лишь на некоторой окрестности точки x_0, является гомеоморфизмом; потому определено обратное отображение π^{-1} некоторой окрестности точки x_0 в плоскости T_0 на некоторую окрестность точки x_0 в многообразии S_0. Таким образом, если ξ — произвольный вектор, лежащий в плоскости T_0 и исходящий из точки x_0, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ определена точка $\pi^{-1}(\varepsilon\xi) \in S_0$, т. е. вектор ξ определяет линию

$$x = \pi^{-1}(\varepsilon\xi), \qquad 0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0,$$

лежащую на многообразии S_0 и исходящую из точки x_0. Эта линия имеет в точке x_0 касательный вектор ξ, т. е.

$$\pi^{-1}(\varepsilon\xi) = x_0 + \varepsilon\xi + o(\varepsilon).$$

Из этого следует, что линия $(0, \pi^{-1}(\varepsilon\xi))$ пространства X исходит из точки $\boldsymbol{x}_0 = (0, x_0)$ и имеет в этой точке касательный вектор $\boldsymbol{\xi} = (0, \xi)$:

$$(0, \pi^{-1}(\varepsilon\xi)) = \boldsymbol{x}_0 + \varepsilon\boldsymbol{\xi} + o(\varepsilon). \tag{42}$$

Пусть теперь $\mathfrak{a} = \{\tau_i, v_i, \tau, \delta t_i, \delta t\}$ — совокупность величин, определяющая варьирование управления $u(t)$ (см. стр. 106). Обозначим через $\boldsymbol{x}^*_{\xi, \mathfrak{a}}(t)$ траекторию, исходящую (в момент t_0) из точки $(0, \pi^{-1}(\varepsilon\xi))$ и соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ (параметр ε в (42) и в определении управления $u^*(t)$ один и тот же). Из (42) следует, в силу (21), что

$$\boldsymbol{x}^*_{\xi, \mathfrak{a}}(\tau + \varepsilon\delta t) = \boldsymbol{x}(\tau) + \varepsilon[A_{\tau, t_0}(\boldsymbol{\xi}) + \Delta\boldsymbol{x}_{\mathfrak{a}}] + o(\varepsilon), \tag{43}$$

где вектор $\Delta\boldsymbol{x}_{\mathfrak{a}}$ определяется формулой (22).

Обозначим через $s+1$ размерность многообразия Λ (и размерность полуплоскости M). Так как конусы $\mathscr{K}$ и M не являются разделяемыми, то (см. сноску на стр. 107) существует такая точка $\boldsymbol{a}$, принадлежащая полуплоскости M, но не лежащая на ее краю, и такая плоскость C размерности $n - s > 0$, проходящая через точку $\boldsymbol{a}$, что шар малого радиуса с центром в точке $\boldsymbol{a}$ дает в пересечении с плоскостью C «дополнительную площадку» к полуплоскости M, причем эта «площадка» ортогональна прямой, проходящей через точки $\boldsymbol{x}(\tau)$ и $\boldsymbol{a}$, и целиком содержится в конусе $\mathscr{K}_\tau$. Эту «дополнительную площадку», являющуюся шаром размерности $n - s$, мы обозначим через E. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-s}$ — взаимно ортогональные радиусы шара E; положим, далее, $\boldsymbol{f}_i = -\boldsymbol{e}_i$

$i=1, \ldots, n-s$. Все векторы $e_1, \ldots, e_{n-s}, f_1, \ldots, f_{n-s}$ будем считать исходящими из точки a. Концы всех этих векторов принадлежат конусу $\mathscr{K}_\tau$ (ибо $E \subset \mathscr{K}_\tau$). Наконец, через c обозначим вектор с началом в точке $x(\tau)$ и концом в точке a. Так как векторы $c, c+e_i, c+f_i$ ($i=$ $=1, \ldots, n-s$), исходящие из точки $x(\tau)$, принадлежат конусу $\mathscr{K}_\tau$, а этот конус образован всевозможными векторами $A_{\tau, t_0}(\xi)+\Delta x_a$ где $\xi \in T_0$, $\Delta x_a \in K_\tau$, то существуют в плоскости T_0 такие векторы $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-s}, \xi'_1, \ldots$ $\ldots, \xi'_{n-s}$, исходящие из точки x_0, и такие символы a_0, $a_1, \ldots, a_{n-s}, a'_1, \ldots, a'_{n-s}$, что имеют место соотношения

$$A_{\tau, t_0}(\xi_0)+\Delta x_{a_0}=c, \quad A_{\tau, t_0}(\xi_i)+\Delta x_{a_i}=c+e_i,$$
$$A_{\tau, t_0}(\xi'_i)+\Delta x_{a'_i}=c+f_i, \quad i=1, \ldots, n-s.$$

Определим при выполнении условия

$$(\rho^1)^2+(\rho^2)^2+\ldots+(\rho^{n-s})^2 \leqslant 1 \tag{44}$$

символ $a(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})$ так же, как и на стр. 110, только производя суммирование по i не от 1 до n, а от 1 до $n-s$; положим, далее,

$$\xi(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})=$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-s}|\rho^i|\right)\xi_0+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-s} h^+(\rho^i)\,\xi_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-s} h^-(\rho^i)\,\xi'_i.$$

Тогда мы получим (ср. вычисление на стр. 110):

$$A_{\tau, t_0}(\xi(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s}))+\Delta x_{a(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})}=$$
$$=c+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-s}\rho^i e_i. \tag{45}$$

Следовательно, если точка $(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})$ пробегает в $(n-s)$-мерном числовом пространстве шар (44), то конец вектора (45) пробегает в пространстве X_τ шар E_1, получающийся из шара E гомотетией с центром a и коэффициентом $1/n$. При тех же условиях конец вектора

$$\varepsilon\left[A_{\tau, t_0}(\xi(\rho^1, \ldots, \rho^n)) + \Delta x_{\alpha(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})}\right]$$

пробегает $(n-s)$-мерный шар E_ε, получающийся из шара E_1 гомотетией с центром $x(\tau)$ и коэффициентом ε.

При $\xi = \xi(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})$, $\alpha = \alpha(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})$ траектория $x^*_{\xi, \alpha}(t)$ непрерывно зависит от параметров $\rho^1, \ldots$ $\ldots, \rho^{n-s}$, как и число δt_α. Поэтому точка $x^*_{\xi, \alpha}(\tau + \varepsilon\delta t_\alpha)$ непрерывно зависит от $\rho^1, \ldots, \rho^{n-s}$. Следовательно, когда точка $(\rho^1, \ldots, \rho^{n-s})$ описывает шар (44), точка $x^*_{\xi, \alpha}(\tau + \varepsilon\delta t_\alpha)$ пробегает (при любом фиксированном ε) некоторый «диск» F_ε (непрерывный образ шара (44)), причем с точностью до малых более высокого порядка, чем ε, диск F_ε «совпадает» с шаром E_ε. Шар E_ε и полуплоскость M (точнее, конечный ее кусок вблизи точки $x(\tau)$) являются цепями (см. сноску на стр. 112) размерностей $n-s$ и $s+1$ соответственно, причем индекс пересечения этих цепей равен ± 1, а расстояние каждой цепи до границы другой имеет порядок ε. Поэтому «диск» F_ε (отстоящий от E_ε на величину более высокого порядка малости, чем ε) и многообразие Λ (касающееся полуплоскости M) также имеют при достаточно малом ε индекс пересечения ± 1, т. е. при достаточно малом ε диск F_ε пересекает многообразие Λ в некоторой точке, не лежащей на краю этого многообразия. Иначе говоря, существует такое $\varepsilon > 0$ и такие $\rho^1, \ldots$ $\ldots, \rho^{n-s}$, что точка $x^*_{\xi, \alpha}(\tau + \varepsilon\delta t_\alpha)$ принадлежит многообразию Λ, но не лежит на его краю. Следовательно, обозначив величины $u^*_\alpha(t)$, $x^*_{\xi, \alpha}(t)$, соответствующие выбранным значениям $\varepsilon, \rho^1, \ldots, \rho^{n-s}$, через $u_*(t)$, $x_*(t)$, мы найдем, что траектория $x_*(t)$ начинается в точке $x_*(t_0) = (0, \pi^{-1}(\varepsilon\xi)) = (0, x_0^*)$, где $x_0^* = \pi^{-1}(\varepsilon\xi) \in S_0$, и проходит (в момент $\tau' = \tau + \varepsilon\delta t_\alpha$) через некоторую точку многообразия Λ, не лежащую на его краю.

Таким образом, лемма 10 доказана.

Пусть теперь $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, а $x(t)$ — оптимальная траектория, дающие решение поставленной в § 6 задачи с подвижными концами. Положим $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$; точки x_0 и x_1 пространства X определим, как всегда, отбрасывая «нулевую» координату точек $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$, т. е. $\boldsymbol{x}_0 = (0, x_0)$, $\boldsymbol{x}_1 = (x^0(t_1), x_1)$. Обозначим через T_1 касательную плоскость к многообразию S_1 в точке x_1, а через $\mathcal{T}_1$ — плоскость (r_1-мерную) пространства $\boldsymbol{X}$, состоящую из всех точек вида $(x^0(t_1), x)$, где $x \in T_1$. Проведем через каждую точку плоскости $\mathcal{T}_1$ луч, идущий в направлении отрицательной полуоси x^0, и обозначим множество точек, заполняемое всеми этими лучами, через Q. Множество Q представляет собой (r_1+1)-мерную полуплоскость; ее граничными точками являются точки плоскости $\mathcal{T}_1$. Обозначения T_0 и $\mathcal{T}_0$ вводим аналогично. Обозначим через $\mathcal{K}_{t_1}$ выпуклую оболочку множества $A_{t_1, t_0}(\mathcal{T}_0) \cup K_{t_1}$. Таким образом, конус $\mathcal{K}_t$ с вершиной $\boldsymbol{x}(t)$ определен для любой правильной точки $t = \tau$ управления $u(t)$, а также для $t = t_1$. Если $t'' > t'$ то $A_{t'', t'}(\mathcal{K}_{t'}) \subset \mathcal{K}_{t''}$ (см. лемму 8).

Лемма 11. *Конусы $\mathcal{K}_{t_1}$ и Q, имеющие общую вершину в точке $\boldsymbol{x}(t_1)$, являются разделяемыми.*

В самом деле, допустим, что конусы $\mathcal{K}_{t_1}$ и Q не являются разделяемыми. Так как конус $\mathcal{K}_{t_1}$ является объединением конусов $A_{t_1, \tau}(\mathcal{K}_\tau)$, то найдется такая правильная точка τ управления $u(t)$, что конусы $A_{t_1, \tau}(\mathcal{K}_\tau)$ и Q также не являются разделяемыми. Выберем такую точку τ.

Обозначим через Λ_{t_1} многообразие с краем, состоящее из всех точек $(x^0, x) \in \boldsymbol{X}$, для которых $x^0 \leqslant x^0(t_1)$, $x \in S_1$. Тогда касательная полуплоскость многообразия Λ_{t_1} в точке $\boldsymbol{x}(t_1)$ совпадает с Q. Для произвольной точки $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda_{t_1}$ мы обозначим через $\boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{\eta})$ решение системы (7) с начальным условием $\boldsymbol{y}(t_1, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}$. Мы будем рассматривать это решение на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant t_1$, где τ — выбранная правильная точка управления $u(t)$. Когда точка $\boldsymbol{\eta}$ пробегает многообразие Λ_{t_1}, точка $\boldsymbol{y}(\tau, \boldsymbol{\eta})$ также пробегает некоторое многообразие с краем, которое мы обозначим через Λ_τ. Легко видеть, что касательная полуплоскость многообразия Λ_τ в точке $\boldsymbol{x}(\tau)$ совпадает с $A^{-1}_{t_1, \tau}(Q)$.

Так как конусы $A_{t_1, \tau}(\mathcal{K}_\tau)$ и Q не являются разделяемыми, то конусы $A^{-1}_{t_1, \tau}(A_{t_1, \tau}(\mathcal{K}_\tau)) = \mathcal{K}_\tau$ и $A^{-1}_{t_1, \tau}(Q)$ также не являются разделяемыми. Но так как $A^{-1}_{t_1, \tau}(Q)$ есть касательная полуплоскость многообразия Λ_τ, то, в силу леммы 10, существует такое управление $u_*(t)$, что соответствующая ему траектория $x_*(t)$, исходящая из точки $x_0^* = (0, x_0^*)$, где $x_0^* \in S_0$, проходит через некоторую точку многообразия Λ_τ, не лежащую на его краю. Иначе говоря, существуют такое $t' > t_0$ и такая точка $\eta \in \Lambda_{t_1}$, не лежащая на краю многообразия Λ_{t_1}, что

$$x_*(t') = y(\tau, \eta). \tag{46}$$

Определим теперь управление $u_{**}(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + (t' - \tau)$, положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t', \\ u(t - (t' - \tau) & \text{при } t' < t \leqslant t_1 + (t' - \tau). \end{cases}$$

Траектория $x_{**}(t)$, соответствующая управлению $u_{**}(t)$ и исходящая из точки x_0^*, имеет следующий вид (ср. (46)):

$$x_{**}(t) = \begin{cases} x_*(t) & \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t', \\ y(t - (t' - \tau), \eta) & \text{при } t' \leqslant t \leqslant t_1 + (t' - \tau). \end{cases}$$

В частности, $x_{**}(t_1 + (t' - \tau)) = y(t_1, \eta) = \eta$. Но точка η принадлежит многообразию Λ_{t_1}, т. е. имеет вид $\eta = (\eta^0, \eta)$, где $\eta \in S_1$. Так как, кроме того, точка η не лежит на краю многообразия Λ_{t_1}, то $\eta^0 < x^0(t_1)$. Таким образом, управление $u_{**}(t)$ переводит фазовую точку из положения x_0^* в положение $\eta \in S_1$, и для него функционал (6) принимает значение η^0, меньшее, чем для управления $u(t)$. Но это противоречит тому, что управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ оптимальны. Таким образом, лемма 11 доказана.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы 3. Так как конусы $\mathscr{K}_{t_1}$ и Q являются разделяемыми, то существуют такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что конус $\mathscr{K}_{t_1}$ (а значит, и $K_{t_1} \subset \mathscr{K}_{t_1}$) лежит в полупространстве $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha \leqslant 0$ (где $x^0, x^1, \ldots, x^n$ — координаты в пространстве X_{t_1}), а конус Q — в полупространстве $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$.

В частности, луч L_{t_1} (лежащий в полуплоскости Q) расположен в полупространстве $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$. Таким образом, числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ обладают всеми свойствами, указанными в § 15, и потому решение $\psi(t)$ системы (8) с начальным условием $\psi(t_1) = c$ (где c — вектор $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$) удовлетворяет условиям, указанным в теореме 8 (или в теореме 1).

Покажем, что вектор $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности в обоих концах траектории $x(t)$. Плоскость $\mathcal{T}_1$ (содержащаяся в Q) расположена целиком в полупространстве $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha \geqslant 0$, и, следовательно, в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha = 0$, или, что то же самое, в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. Если теперь $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ — произвольный касательный вектор многообразия S_1 в точке $x(t_1)$, т. е. вектор, лежащий в плоскости T_1, то вектор $\mathbf{\eta} = (0, \eta)$ пространства X расположен в плоскости $\mathcal{T}_1$, и, следовательно, в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. Иначе говоря, $(\psi(t_1), \mathbf{\eta}) = 0$. Но так как «нулевая» координата вектора $\mathbf{\eta}$ равна нулю, то последнее соотношение принимает вид $\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_1) \eta^\nu = 0$. Таким образом, вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце траектории $x(t)$.

Далее, плоскость $A_{t_1, t_0}(\mathcal{T}_0) \subset \mathcal{K}_{t_1}$ расположена целиком в полупространстве $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha \leqslant 0$, а следовательно, в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} c_\alpha x^\alpha = 0$ или, что то же самое, в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$. Иначе говоря, для любого вектора $\xi \in \mathcal{T}_0$ вектор $A_{t_1, t_0}(\xi)$ лежит в гиперплоскости $\sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$, т. е.

$$(\psi(t_1),\ A_{t_1, t_0}(\xi)) = 0.$$

Из этого, в силу леммы 1, вытекает, что $(\psi(t_0), \xi) = 0$. Но любой вектор $\xi \in \mathscr{T}^0$ имеет вид $\xi = (0, \xi)$, где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — вектор, лежащий в плоскости T_0. Поэтому соотношение $(\psi(t_0), \xi) = 0$ принимает вид $\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t_0) \xi^\nu = 0$. Таким образом, вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности и в левом конце траектории $x(t)$.

Тем самым теорема 3 полностью доказана. Вместе с тем доказаны и все остальные теоремы первой главы.

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

§ 17. Теоремы о числе переключений

Важными для приложений и хорошо иллюстрирующими общие результаты примерами являются *линейные оптимальные быстродействия*, т. е. оптимальные быстродействия в случае, когда уравнения, описывающие поведение объекта, линейны. Рассмотрению таких быстродействий и посвящена настоящая глава. Здесь мы не только изложим факты, вытекающие непосредственно из доказанных выше теорем, но и получим некоторые новые результаты, в частности, докажем *теорему существования* для линейных оптимальных быстродействий.

Уточним прежде всего постановку задачи. Мы будем рассматривать объект, закон движения которого записывается в виде линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n} a^i_\nu x^\nu+\sum_{\rho=1}^{r} b^i_\rho u^\rho, \quad i=1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Мы будем, далее, предполагать, что областью управления U является выпуклый замкнутый ограниченный многогранник *), расположенный в r-мерном векторном про-

*) Выпуклый замкнутый многогранник в E_r представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т. е. множество точек в E_r, удовлетворяющих конечной системе линейных

страистве E_r с координатами $u^1, \ldots, u^r$. Таким образом, управляющий параметр $u = (u^1, \ldots, u^r)$ является точкой многогранника U.

Наконец, мы будем рассматривать лишь задачу об оптимальном быстродействии, т. е. задачу о минимизации времени перехода $t_1 - t_0 = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt$. Оптимальную задачу в такой формулировке назовем задачей о *линейных оптимальных быстродействиях.*

В векторной форме система (1) может быть записана следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu; \tag{2}$$

здесь $A : X \to X$ и $B : E_r \to X$ — линейные операторы, определяемые (в координатах $x^1, \ldots, x^n$ и $u^1, \ldots, u^r$) матрицами (a^i_j) и (b^i_k) соответственно.

Во всех теоремах, доказываемых в этой главе, мы будем предполагать (не указывая этого каждый раз), что выполнено следующее *условие общности положения*, накладываемое на коэффициенты уравнения (2) и на расположение многогранника U:

если w — вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника U, то вектор Bw не принадлежит никакому истинному подпространству пространства X, инвариантному относительно оператора A, т. е. векторы

$$Bw,\ ABw,\ \ldots,\ A^{n-1}Bw \tag{3}$$

линейно независимы в пространстве X.

Функция $H(\psi, x, u)$ (см. теорему 2) в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = (\psi, Ax) + (\psi, Bu) = \sum_{\mu, \nu} \psi_\mu a^\mu_\nu x^\nu + \sum_{\mu, \rho} \psi_\mu b^\mu_\rho u^\rho, \tag{4}$$

неравенств $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^i_k u^k \leqslant \beta^i$ $i = 1, 2, \ldots, s$. Если этот многогранник ограничен (и, следовательно, компактен), то он является выпуклой оболочкой своих *вершин*; очевидно, что число вершин конечно.

а вспомогательная система (см. формулу (19) гл. 1) записывается в виде

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{n} a_j^{\nu}\psi_{\nu}, \quad j=1, \ldots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^*\psi, \tag{5}$$

где A^* — оператор, сопряженный к A, т. е. оператор, определяемый (в той же системе координат) матрицей, получающейся из матрицы (a_j^i) системы (1) транспонированием.

Очевидно, что функция H, рассматриваемая как функция переменного $u \in U$, достигает максимума одновременно с функцией (ψ, Bu). Максимум функции (ψ, Bu), рассматриваемой как функция переменного $u \in U$, мы обозначим через $P(\psi)$. Из теоремы 2 следует (см. формулу (20) гл. 1), что если $u(t)$ — оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, то существует такое решение $\psi(t)$ уравнения (5), что

$$(\psi(t),\ Bu(t)) = P(\psi(t)). \tag{6}$$

Так как уравнение (5) не содержит неизвестных функций $x(t)$ и $u(t)$, то все решения этого уравнения легко могут быть найдены, после чего легко могут быть найдены все управления $u(t)$, являющиеся решениями уравнения (6); среди них, очевидно, содержатся все оптимальные управления для уравнения (2). Вопрос о том, насколько однозначно условие (6) определяет управление $u(t)$ через функцию $\psi(t)$, решается нижеследующей теоремой.

Теорема 9. *Для каждого нетривиального решения $\psi(t)$ уравнения* (5) *соотношение* (6) *однозначно* *) *опре-*

*) Здесь, как и в главе 1, мы предполагаем, что рассматриваемые управления полунепрерывны слева и непрерывны в концах отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (ср. стр. 15). Без этого соглашения теорема 9 была бы неточной, а именно, значения функции $u(t)$ в точках разрыва не были бы однозначно определены. Впрочем, ясно, что значения функции $u(t)$ в точках разрыва не играют никакой роли в рассматриваемых вопросах.

деляет управляющую функцию $u(t)$; при этом оказывается, что функция $u(t)$ кусочно-постоянная и ее значениями являются лишь вершины многогранника U.

Доказательство. Так как функция

$$(\psi(t),\ Bu), \tag{7}$$

рассматриваемая как функция вектора u, линейна, то она либо постоянна, либо достигает своего максимума лишь на границе многогранника U. Это же соображение применимо и к каждой грани многогранника U. Таким образом, функция (7) достигает своего максимума либо лишь в одной вершине многогранника U, либо на целой грани этого многогранника *). Покажем, что в силу условия общности положения последнее возможно лишь для конечного числа значений t.

В самом деле, допустим, что на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует бесконечное число таких значений t, для каждого из которых функция (7) переменного $u \in U$ достигает своего максимума на некоторой (имеющей положительную размерность) грани многогранника U. Так как U имеет лишь конечное число граней, то мы можем выбрать бесконечное множество M таких значений t, для каждого из которых функция (7) достигает своего максимума на некоторой (одной и той же для всех $t \in M$) грани Γ многогранника U. Следовательно, для любого $t \in M$ функция (7) переменного u постоянна на грани Γ. Пусть u_0 и u_1 — векторы, идущие из начала координат (пространства E_r) в концы некоторого ребра грани Γ, так что вектор $w = u_1 - u_0$ имеет направление этого ребра. Тогда при $t \in M$ мы имеем (в силу постоянства функции (7) на грани Γ)

$$(\psi(t),\ Bw) = (\psi(t),\ B(u_1 - u_0)) = \\ = (\psi(t),\ Bu_1) - (\psi(t),\ Bu_2) = 0. \tag{8}$$

Пусть теперь $b^1, b^2, \ldots, b^n$ — координаты вектора Bw (величины $b^1, b^2, \ldots, b^n$ постоянны, так как w — вполне определенное ребро многогранника U).

*) Сам многогранник U мы также считаем его (несобственной) гранью.

Тогда

$$(\psi(t),\ Bw) = b^1\psi_1(t) + b^2\psi_2(t) + \ldots + b^n\psi_n(t). \qquad (9)$$

Так как функции $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ составляют решение $\psi(t)$ уравнения (5) с постоянными коэффициентами, то они аналитичны, и потому функция (9) также является аналитической. Для любого $t \in M$ (т. е. для бесконечного множества значений t) аналитическая функция $(\psi(t), Bw)$ переменного t обращается в нуль (см. (8)), и потому на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеет место соотношение

$$(\psi(t),\ Bw) = 0. \qquad (10)$$

Последовательно дифференцируя это соотношение по t, мы получаем (в силу того, что $\psi(t)$ есть решение уравнения (5))

$$\begin{gathered}(A^*\psi(t),\ Bw) = 0,\\ (A^{*2}\psi(t),\ Bw) = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ (A^{*n-1}\psi(t),\ Bw) = 0,\end{gathered}$$

или (в силу соотношения $(x, Ay) = (A^*x, y)$, справедливого для любых векторов x, y)

$$\left.\begin{gathered}(\psi(t),\ ABw) = 0,\\ (\psi(t),\ A^2Bw) = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\psi(t),\ A^{n-1}Bw) = 0.\end{gathered}\right\} \qquad (11)$$

Так как, в силу условия общности положения, векторы (3) образуют базис пространства X, то соотношения (10), (11) означают, что при любом t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, вектор $\psi(t)$ ортогонален ко всем векторам некоторого базиса и потому равен нулю, что, однако, противоречит предположению о нетривиальности решения $\psi(t)$.

Итак, для всех, кроме конечного числа, значений t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, функция (7) достигает (на U) максимума лишь в одной точке, являющейся вершиной многогранника U. Отсюда, в силу (6), следует однозначная определенность функции $u(t)$ (см. сноску на стр. 134).

Далее, выколов точки неоднозначной разрешимости уравнения

$$(\psi(t),\ Bu) = P(\psi(t)), \tag{12}$$

мы разобьем отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ на конечное число частей. Нетрудно видеть, что на каждой из этих частей функция $u(t)$ постоянна. В самом деле, пусть J — одна из этих частей (она может быть интервалом, полуинтервалом или отрезком). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_q$ — все вершины многогранника U. Обозначим через M_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, множество тех точек $t \in J$, для которых решением уравнения (12) является точка e_i. Тогда $M_1, M_2, \ldots, M_q$ являются, согласно сказанному выше, попарно не пересекающимися множествами, дающими в сумме J (некоторые из этих множеств могут оказаться пустыми). Мы сейчас покажем, что каждое из множеств M_i открыто на J, откуда (в силу связности множества J) будет вытекать, что все множества M_i, кроме одного, пусты, так что решение уравнения (12) постоянно на J. Тем самым теорема 9 будет полностью доказана.

Пусть $t \in J$ — произвольная точка множества M_i, так что $(\psi(t),\ Be_i) = P(\psi(t))$ и $(\psi(t),\ Be_j) < P(\psi(t))$ при $i \neq j$. Так как каждая из функций $(\psi(t),\ Be_j)$, $j = 1, 2, \ldots, q$, непрерывна на J, то во всех достаточно близких к t точках множества J имеет место неравенство $(\psi(t),\ Be_i) > (\psi(t),\ Be_j)$ при $j \neq i$. Иначе говоря, все достаточно близкие к t точки множества J принадлежат множеству M_i, т. е. M_i открыто на J.

Теорема 9 доказана.

Итак, согласно теореме 9, каждое оптимальное управление должно быть кусочно-постоянной функцией со значениями в вершинах многогранника U. Каждую точку разрыва оптимального управления мы будем называть также *точкой переключения*. Более полно, если t' — точка разрыва оптимального управления $u(t)$ и если $u(t'-0) = e_i$, $u(t'+0) = e_j$ (где e_i и e_j — различные вершины многогранника U), то мы будем говорить, что при $t = t'$ происходит *переключение* оптимального управления $u(t)$ из вершины e_i в вершину e_j.

Теорему 9 можно теперь кратко охарактеризовать как *теорему о конечности числа переключений*. Ясно, что в каждом конкретном случае число переключений зависит от значений коэффициентов системы (1), от вида многогранника U и от выбора точек x_0, x_1. С этой точки зрения интересно сравнивать между собой примеры 1 и 2, приведенные в § 5. В примере 1 при любом начальном положении x_0 оптимальное управление $u(t)$ имело не более одного переключения (т. е. имелось не более двух интервалов постоянства управления $u(t)$), в то время как в примере 2 число переключений неограниченно увеличивается при удалении точки x_0 от начала координат (хотя для каждого фиксированного значения x_0 число переключений конечно). С чем связано это существенное различие оптимальных управлений в двух указанных примерах? Как показывает нижеследующая теорема 10, в своем первоначальном виде принадлежащая А. А. Фельдбауму, это различие связано с тем, что в примере 1 матрица системы имеет действительные собственные значения, а в примере 2 — комплексные.

В теореме 10 мы не будем рассматривать общий случай произвольного выпуклого многогранника U, а ограничимся лишь следующим случаем, весьма важным в приложениях. Именно, мы будем считать, что многогранник U представляет собой *параллелепипед*, определенный в пространстве E_r переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$ неравенствами

$$\alpha_\rho \leqslant u^\rho \leqslant \beta_\rho, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r. \tag{13}$$

Иначе говоря, мы будем рассматривать случай, когда каждая из величин u^ρ в уравнениях (1) представляет собой отдельный управляющий параметр, область изменения которого не зависит от значений остальных управляющих параметров и задается неравенством (13). Условие общности положения (стр. 133) мы по-прежнему будем предполагать выполненным.

Теорема 10. *Предположим, что область управления U представляет собой параллелепипед* (13) *и что все собственные значения матрицы* (a^i_j), *составленной из коэффициентов уравнения* (1), *действительны. Тогда для каждого нетривиального решения* $\psi(t)$ *уравнения* (5) *соотношение* (6) *однозначно определяет управляющую* *функцию* $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t))$; *при этом оказывается, что каждая из функций* $u^\rho(t)$, $\rho = 1, \ldots, r$, *кусочно-постоянна, принимает только значения* α_ρ *и* β_ρ *(см. (13)) и имеет не более* $n-1$ *переключений (т. е. не более* n *интервалов постоянства), где* n *— порядок системы* (1).

Доказательство. Функция (7) в координатной форме записывается следующим образом (ср. (4)):

$$(\psi(t), Bu) = \sum_{\rho=1}^{r}\left(\sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu(t)\, b_\rho^\mu u^\rho\right).$$

Для того чтобы эта функция принимала максимальное значение, необходимо, чтобы каждая из функций

$$\sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu(t)\, b_\rho^\mu u^\rho, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r, \tag{14}$$

принимала максимальное значение (ибо область изменения каждой из величин $u^1, \ldots, u^r$ не зависит от значений остальных). Из этого, как мы сейчас покажем, и вытекает, что величина u^ρ принимает только значения α_ρ и β_ρ и имеет не более $n-1$ переключений.

Очевидно, что соотношения

$$u^i = \alpha_i \quad \text{при} \quad i \neq \rho, \quad \alpha_\rho \leqslant u^\rho \leqslant \beta_\rho$$

определяют одно из ребер параллелепипеда U. Направление этого ребра определяется вектором

$$w = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

где единица стоит на ρ-м месте. Таким образом, вектор Bw имеет вид

$$Bw = (b_\rho^1, b_\rho^2, \ldots, b_\rho^n),$$

и потому

$$(\psi(t), Bw) = \sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu(t)\, b_\rho^\mu. \tag{15}$$

Если бы эта функция тождественно равнялась нулю, то, как и при доказательстве теоремы 9 (ср. (10), (11)), мы получили бы $\psi(t) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, функция (15) при любом $\rho = 1, 2, \ldots, r$ не равна тождественно нулю и, следовательно, как аналитическая функция, обращается в нуль лишь в конечном числе точек, а функция (14) получается из функции (15) умножением на u^ρ. Так как функция (14) должна достигать максимума, то величина u^ρ должна принимать значение α_ρ, если функция (15) отрицательна, и значение β_ρ, если функция (15) положительна. Иначе говоря, точками переключения для управляющего параметра u^ρ могут быть только те значения t, в которых функция (15) обращается в нуль. Таким образом, теорема 10 будет полностью доказана, если мы установим, что функция (15), т. е. не равная тождественно нулю линейная комбинация функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$, имеет не более чем $n-1$ действительных корней.

В силу известных теорем о линейных уравнениях с постоянными коэффициентами, каждая из функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$, составляющих решение уравнения (5), имеет вид

$$f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + f_m(t)e^{\lambda_m t}, \tag{16}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — все попарно различные собственные значения матрицы $-A^*$, а $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ — многочлены, причем степень многочлена $f_i(t)$ меньше, чем кратность собственного значения λ_i. Следовательно, линейная комбинация (15) функций $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ также имеет вид (16). Все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ действительны (ибо по условию все собственные значения матрицы A, а значит и матрицы $-A^*$ действительны). Если мы обозначим кратность собственного значения λ_i через r_i (так что $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$), то тогда степень многочлена $f_i(t)$ не превосходит числа $r_i - 1$, и потому, в силу доказываемой ниже леммы, число действительных корней функции (16) не превосходит числа

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \ldots + (r_m - 1) + m - 1 =$$
$$= r_1 + r_2 + \ldots + r_m - 1 = n - 1.$$

Тем самым теорема 10 полностью доказана.

Лемма. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — *действительные попарно различные числа, а* $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ — *много-*

члены с действительными коэффициентами, имеющие степени $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно. Тогда функция

$$f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + f_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{17}$$

имеет не более чем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m + m - 1$ действительных корней.

Доказательство. При $m = 1$ лемма, очевидно, справедлива, ибо функция $f_1(t)e^{\lambda_1 t}$ имеет те же корни, что и функция $f_1(t)$ и потому имеет не более чем k_1 действительных корней.

Предположим, что лемма уже доказана для случая, когда в формуле (17) имеется меньше, чем m слагаемых, и докажем ее для случая m слагаемых. Допустим, что лемма неверна и функция (17) имеет по крайней мере $k_1 + k_2 + \ldots + k_m + m$ действительных корней. Умножив функцию (17) на $e^{-\lambda_m t}$ (что не изменит ее корней), мы получим функцию

$$f_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} + \ldots + f_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t} + f_m(t), \tag{18}$$

которая также имеет по крайней мере $k_1 + k_2 + \ldots + k_m + m$ действительных корней. Так как между каждыми двумя действительными корнями функции лежит по крайней мере один корень ее производной, то $(k_m + 1)$-я производная функции (18) имеет по крайней мере

$$(k_1 + \ldots + k_m + m) - (k_m + 1) = k_1 + \ldots + k_{m-1} + (m-1)$$

действительных корней. Но $(k_m + 1)$-я производная функции (18), как нетрудно видеть, имеет вид

$$g_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} + g_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_m)t} + \ldots \\ \ldots + g_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t}, \tag{19}$$

причем числа $\lambda_1 - \lambda_m, \lambda_2 - \lambda_m, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m$, очевидно, попарно различны, а степень многочлена $g_i(t)$ по-прежнему равна k_i. Согласно предположению индукции, функция (19) имеет не более $k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1} + (m-1) - 1$ действительных корней, вопреки тому, что было сказано ранее. Полученное противоречие и завершает индукцию. Таким образом, лемма доказана.

§ 18. Теоремы единственности

Решим уравнение (2), как неоднородное, методом вариации постоянных. Для этого обозначим через

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t) \tag{20}$$

фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

удовлетворяющую начальным условиям $\varphi_j^i(t_0) = \delta_j^i$, а через

$$\psi^1(t),\ \psi^2(t),\ \ldots,\ \psi^n(t)$$

— фундаментальную систему решений однородного уравнения (5), удовлетворяющую начальным условиям $\psi_i^j(t_0) = \delta_i^j$. Легко видеть, что для всех t имеет место соотношение

$$(\psi^j(t),\ \varphi_i(t)) = \delta_i^j, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{21}$$

В самом деле, в силу выбора начальных условий это соотношение выполнено при $t = t_0$; далее,

$$\frac{d}{dt}(\psi^j(t),\ \varphi_i(t)) = (-A^*\psi^j(t),\ \varphi_i(t)) + (\psi^j(t),\ A\varphi_i(t)) = 0.$$

Будем искать общее решение уравнения (2) в виде

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t)\, c^\nu(t).$$

Подставляя это решение в уравнение (2), получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) \frac{dc^\nu(t)}{dt} = Bu(t);$$

умножая последнее соотношение скалярно на $\psi^j(t)$ учитывая соотношение (21), получаем

$$\frac{dc^j(t)}{dt} = (\psi^j(t),\ Bu(t)).$$

Таким образом, *решение уравнения* (2) *при произвольном управлении* $u(t)$ *и начальном условии* $x(t_0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ *записывается в виде*

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) \left(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t} (\psi^\nu(\tau), Bu(\tau))\, d\tau \right). \qquad (22)$$

Теорема 11. *Пусть* $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$ — *два оптимальных управления, заданных соответственно на отрезках* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *и* $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ *и переводящих точку* x_0 *в одну и ту же точку* x_1. *Тогда эти управления совпадают* (*см. сноску на стр.* 134), *т. е.* $t_1 = t_2$ *и* $u_1(t) \equiv u_2(t)$ *на отрезке* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Доказательство. Прежде всего ясно, что $t_1 = t_2$, ибо если бы было, например, $t_1 < t_2$, то управление $u = u_2(t)$ не было бы оптимальным.

Так как при $t = t_1$ обе траектории, исходящие из точки x_0 и соответствующие управлениям $u_1(t)$ и $u_2(t)$, приходят в одну и ту же точку x_1, то мы имеем (в силу (22))

$$x_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t_1) \left(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_1(t))\, dt \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t_1) \left(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_2(t))\, dt \right),$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t_1) \left[\int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_1(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_2(t))\, dt \right] = 0.$$

Так как векторы $\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_n(t_1)$ линейно независимы, то из последнего равенства следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi^i(t), Bu_1(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\psi^i(t), Bu_2(t))\, dt, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (23)$$

Оптимальному управлению $u_1(t)$ соответствует вектор-функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условию (6) и являющаяся решением уравнения (5). Начальное значение этой функции (при $t = t_0$) обозначим через

$$\psi_0 = (\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0});$$

тогда решение $\psi(t)$ можно записать в виде

$$\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{\nu 0} \psi^{\nu}(t).$$

Умножая соотношение (23) на ψ_{i0} и суммируя по i, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), Bu_1(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), Bu_2(t))\, dt. \tag{24}$$

Но так как, согласно соотношению (6) и определению величины $P(\psi)$, мы имеем (на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$)

$$(\psi(t), Bu_1(t)) = P(\psi(t)) \geqslant (\psi(t), Bu_2(t)),$$

то из (24) вытекает, что $(\psi(t), Bu_1(t)) = (\psi(t), Bu_2(t))$. Следовательно, оба управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ удовлетворяют соотношению (6) с одной и той же функцией $\psi(t)$, и потому (в силу теоремы 9) $u_1(t) \equiv u_2(t)$.

Итак, теорема 11 доказана.

Будем называть управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *экстремальным*, если оно удовлетворяет условию (6), где $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение уравнения (5).

Для нахождения оптимального управления, переводящего фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, можно найти сперва все экстремальные управления, переводящие фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а затем выбрать из их числа то (единственное в силу теоремы 11), которое осуществляет этот переход за кратчайшее время. Возникает вопрос: может ли существовать несколько экстремальных управлений, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1? Вообще говоря, их может существовать несколько. Нижеследующая теорема указывает важный случай единственности для экстремальных управлений.

Теорема 12. *Предположим, что начало координат пространства E_r является внутренней точкой многогран-*

ника U, и пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два экстремальных управления, заданных соответственно на отрезках $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ и переводящих точку x_0 в начало координат $x_1 = 0$ пространства X. Тогда эти управления совпадают, т. е. $t_1 = t_2$ и $u_1(t) \equiv u_2(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Доказательство. Обозначим через $x_1(t)$ и $x_2(t)$ траектории, соответствующие управлениям $u_1(t)$ и $u_2(t)$ и исходящие в момент t_0 из точки x_0. Согласно условиям теоремы мы имеем $x_1(t_1) = x_2(t_2) = 0$, или (в силу (22))

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t_1)\left(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_1} (\psi^\nu(t), Bu_1(t))\, dt\right) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t_2)\left(x_0^\nu + \int_{t_0}^{t_2} (\psi^\nu(t), Bu_2(t))\, dt\right) = 0.$$

Отсюда (в силу линейной независимости векторов (20) при любом t) вытекают равенства $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$-x_0^i = \int_{t_0}^{t_1} (\psi^i(t), Bu_1(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_2} (\psi^i(t), Bu_2(t))\, dt. \quad (25)$$

Допустим для определенности, что $t_1 > t_2$, и пусть $\psi(t)$ — то решение уравнения (5), для которого на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеет место соотношение

$$(\psi(t), Bu_1(t)) = P(\psi(t)),$$

определяющее функцию $u_1(t)$. Как и при доказательстве теоремы 11, функцию $\psi(t)$ запишем в виде $\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{\nu 0}\psi^\nu(t)$. Умножая соотношение (25) на ψ_{i0} и суммируя по i, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), Bu_1(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_2} (\psi(t), Bu_2(t))\, dt. \quad (26)$$

Заметим теперь, что для любого решения $\psi(t)$ уравнения (5) справедливо неравенство

$$P(\psi(t)) \geqslant 0. \quad (27)$$

В самом деле, так как начало координат пространства E_r является внутренней точкой выпуклого тела U, то функция $(\psi(t), Bu)$, как функция переменного u, либо тождественно равна нулю, либо может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

В силу (27) и (26) мы имеем неравенство

$$\int_{t_0}^{t_2} (\psi(t),\ Bu_1(t))\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t_2} (\psi(t),\ Bu_2(t))\,dt.$$

Отсюда так же, как и при доказательстве теоремы 11, получаем

$$u_1(t) \equiv u_2(t) \text{ на отрезке } t_0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Учитывая соотношение (26), мы получаем отсюда

$$\int_{t_1}^{t_2} (\psi(t),\ Bu_1(t))\,dt = 0. \tag{28}$$

Далее, так как равенство $P(\psi(t)) = 0$ может иметь место только в том случае, если функция $(\psi(t), Bu)$ равна нулю на всем многограннике U, т. е. может иметь место только для конечного числа значений t, то из соотношений (27), (28) с необходимостью вытекает, что $t_1 = t_2$.

Итак, теорема 12 доказана.

З а м е ч а н и е. До сих пор мы использовали только условие 1°, указанное в теореме 2 (т. е. формулу (20) гл. 1). Условие же 2° (т. е. соотношение (21) гл. 1) мы нигде не использовали. Нетрудно видеть, однако, что при выполнении предположений теоремы 12 равенство (21) гл. 1 выполняется автоматически. В самом деле, в силу соотношений (4), (6), (27) и соотношения (20) гл. 1, имеем

$$\begin{aligned} M(\psi(t_1),\ x(t_1)) &= H(\psi(t_1),\ x(t_1),\ u(t_1)) = \\ &= (\psi(t_1),\ Ax(t_1)) + (\psi(t_1),\ Bu(t_1)) = \\ &= (\psi(t_1),\ Ax_1) + P(\psi(t_1)) = P(\psi(t_1)) \geqslant 0 \end{aligned}$$

(ибо $x_1 = 0$).

§ 19. Теоремы существования

Теорема 13. *Если для процесса, описываемого уравнением* (2), *существует хотя бы одно управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, то существует и оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1.* (Как всегда, мы предполагаем выполненным условие общности положения.)

Доказательство. Мы должны предполагать, что задан некоторый класс D допустимых управлений и что в классе D существуют управления, переводящие фазовую точку из положения x_0 в положение x_1. Обозначим через $D_{\max}$ наибольший класс управлений, т. е. множество всех измеримых управлений (со значениями в U), а через $D_{\min}$ — наименьший класс управлений, т. е. множество всех кусочно-постоянных управлений (со значениями в U). Таким образом, $D_{\max} \supset D \supset D_{\min}$.

Докажем прежде всего, что в классе $D_{\max}$ существует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1. Обозначим через Δ совокупность всех управлений класса $D_{\max}$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1. Множество Δ непусто, так как, по предположению, в классе D (а значит — и в $D_{\max}$) существуют управления, переводящие фазовую точку из положения x_0 в положение x_1. Каждому управлению $u(t) \in \Delta$ соответствует время перехода (из положения x_0 в положение x_1). Нижнюю грань всех таких времен при $u(t) \in \Delta$ обозначим через t^* и докажем, что существует управление $u^*(t)$, переводящее точку x_0 в точку x_1 за время t^*. Ввиду возможности производить сдвиг времени (см. условие 3) в § 10), мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких управлений, которые заданы на отрезках вида $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Выберем из множества Δ такую бесконечную последовательность управлений $\{u_k(t)\}$, заданных соответственно на отрезках $0 \leqslant t \leqslant t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} t_k = t^*.$$

Обозначим через $x_k(t)$ траекторию, соответствующую управлению $u_k(t)$ и исходящую в момент $t=0$ из точки x_0; тогда $x_k(t_k)=x_1$. Мы имеем

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}(\varphi_\nu(t^*)-\varphi_\nu(t_k))\left(x_0^\nu+\int_0^{t_k}(\psi^\nu(t),\ Bu_k(t))\,dt\right)=0$$

(ибо второй множитель под знаком суммы ограничен, а первый стремится к нулю); точно так же

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(t^*)\left(\int_{t^*}^{t_k}(\psi^\nu(t),\ Bu_k(t))\,dt\right)=0$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(t^*)\left(x_0^\nu+\int_0^{t^*}(\psi^\nu(t),\ Bu_k(t))\,dt\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(t_k)\left(x_0^\nu+\int_0^{t_k}(\psi^\nu(t),\ Bu_k(t))\,dt\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}x_k(t_k)=x_1 \quad (29)$$

(см. (22)).

Рассмотрим теперь гильбертово пространство L_2 всех измеримых функций с интегрируемым квадратом, заданных на отрезке $0\leqslant t\leqslant t^*$. Управление $u_k(t)$ есть вектор-функция; i-ю координату этой вектор-функции обозначим через $u_k^i(t)$. Функция $u_k^i(t)$, рассматриваемая на отрезке $0\leqslant t\leqslant t^*$, принадлежит пространству L_2 (она измерима и ограничена). Совокупность всех функций $u_k^i(t)$, $k=1, 2, \ldots$, при каждом фиксированном $i(=1,2,\ldots,r)$, очевидно, принадлежит некоторому шару пространства L_2, и потому из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность *). Мы будем

---

*) См., например, Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 194—196.

просто считать, что сама последовательность

$$u_1^i(t),\ u_2^i(t),\ \ldots,\ u_k^i(t),\ \ldots \tag{30}$$

слабо сходится к некоторой функции $u^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Докажем теперь, что вектор-функция

$$u^*(t) = (u^1(t),\ u^2(t),\ \ldots,\ u^r(t))$$

почти для всех значений t удовлетворяет условию $u^*(t) \in U$. Возьмем какую-либо $(r-1)$-мерную грань Γ многогранника U и пусть $L(u) = \sum_{\rho=1}^{r} b_\rho u^\rho$ — такая линейная форма переменных $u^1, u^2, \ldots, u^r$, что уравнение несущей плоскости грани Γ имеет вид $L(u) = b$, а сам многогранник U расположен в полупространстве $L(u) \leqslant b$. Пусть, далее, m — множество всех точек t отрезка $[0, t^*]$, для которых $L(u^*(t)) > b$, а $v(t)$ — характеристическая функция множества m. Эта функция измерима и ограничена (т. е. принадлежит L_2) и потому, в силу слабой сходимости последовательностей (30), мы имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{t^*} v(t)\,[L(u^*(t)) - L(u_k(t))]\,dt = 0.$$

Так как, далее, $L(u^*(t)) - L(u_k(t)) > 0$ на множестве m (ибо $L(u_k(t)) \leqslant b$), то $\operatorname{mes} m = 0$. Итак, почти для всех t, принадлежащих отрезку $0 \leqslant t \leqslant t^*$, точка $u^*(t)$ лежит в том же полупространстве $L(u) \leqslant b$, что и многогранник U. Так как это рассуждение применимо к любой грани Γ многогранника U, то $u^*(t) \in U$ почти для всех t.

Так как изменение значений функции $u^*(t)$ на множестве меры нуль не нарушает слабой сходимости последовательностей (30) к функциям $u^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, то мы можем без ограничения общности считать, что $u^*(t) \in U$ при в с е х t, $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Из соотношения (29) в силу слабой сходимости последовательностей (30) следует

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t^*)\left(x_0^\nu + \int_0^{t^*} (\psi^\nu(t),\ Bu^*(t))\,dt\right) = x_1.$$

Таким образом, $u^*(t)$ является измеримым оптимальным управлением, переводящим фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, т. е. в классе $D_{\max}$ существует оптимальное управление. В силу теоремы 2 (см. также теорему 8) отсюда вытекает существование такого нетривиального решения $\psi(t)$ уравнения (5), что (см. (6)) почти всюду на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$(\psi(t),\ Bu^*(t)) = P(\psi(t)).$$

Следовательно, согласно теореме 9, управление $u^*(t)$ можно считать (изменив его на множестве меры нуль — что не нарушит его оптимальности) кусочно-постоянным. Таким образом, управление $u^*(t)$ принадлежит классу $D_{\min}$, а следовательно, и классу D. Оно осуществляет перевод фазовой точки из положения x_0 в положение x_1 за наименьшее время по сравнению с любыми управлениями класса $D_{\max}$, а потому и по сравнению с любыми управлениями класса D.

Итак, в классе D существует оптимальное управление, и теорема 13 доказана.

Замечание. Если заданный класс D допустимых управлений совпадает с классом $D_{\max}$ всех измеримых управлений, то, как видно из доказательства, в формулировке теоремы 13 можно не требовать выполнения условия общности положения (это условие требуется лишь в связи со ссылкой на теорему 9).

Теорема 14. *Предположим, что в уравнении* (2) *оператор A устойчив, т. е. все его собственные значения имеют отрицательные действительные части, и что начало координат пространства E_r является внутренней точкой многогранника U. (Условие общности положения по-прежнему предполагается выполненным.) Тогда для любой точки $x_0 \in X$ существует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в начало координат $0 \in X$.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что существует окрестность V начала координат 0 пространства X, каждая точка x_0 которой может быть при помощи некоторого управления переведена в 0. (При доказательстве этого утверждения устойчивость оператора A не используется.)

Обозначим через $\Phi(t)$ матрицу, столбцами которой служат координаты векторов $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ (см. (20)), т. е. $\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))$. Так как векторы (20) образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

и удовлетворяют условиям $\varphi_j^i(0) = \delta_j^i$ (мы считаем, что $t_0 = 0$), то имеют место соотношения

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t),\ \Phi(0) = E,$$

откуда получаем

$$\Phi(t) = e^{tA}.$$

Далее, обозначим через $\Psi(t)$ матрицу, строками которой служат координаты векторов $\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)$, т. е. $\Psi(t) = (\psi_j^i(t))$. Соотношение (21) записывается теперь в виде $\Psi(t)\Phi(t) = E$, откуда

$$\Psi(t) = e^{-tA},$$

Полученные выражения для матриц $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ позволяют переписать равенство (22) в виде

$$x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-\tau A}Bu(\tau)\,d\tau\right); \tag{31}$$

здесь $x(t)$ — траектория, соответствующая управлению $u(t)$ и исходящая в момент $t = 0$ из точки x_0.

Выберем теперь в U такой вектор v, чтобы вектор $-v$ также принадлежал U и чтобы вектор

$$b = Bv$$

не принадлежал никакому истинному подпространству пространства X, инвариантному относительно оператора A. Такой вектор v существует в силу того, что начало координат пространства E_r является внутренней точкой многогранника U и выполнено условие общности положения. При достаточно малом положительном ε операторы A и $e^{-\varepsilon A}$ имеют совпадающие инвариантные подпространства *), и потому векторы

$$e^{-\varepsilon A}b,\quad e^{-2\varepsilon A}b,\ \ldots,\ e^{-n\varepsilon A}b \tag{32}$$

линейно независимы.

Определим, далее, функцию $\sigma(t,\tau,\xi)$ переменного t, где τ и ξ — действительные параметры, считая ее равной $\operatorname{sign}\xi$ на интервале между точками τ и $\tau+\xi$ и равной нулю вне этого интервала. Наконец, определим управление $u=u(t,\xi^1,\ldots,\xi^n)$, зависящее от n действительных параметров $\xi^1,\ldots,\xi^n$, положив

$$u(t,\ \xi^1,\ \ldots,\ \xi^n)=v\cdot\sum_{k=1}^{n}\sigma(t,\ k\varepsilon,\ \xi^k);$$

это управление мы будем рассматривать на отрезке $0\leqslant t\leqslant t_1$, где t_1 — фиксированное положительное число, и при достаточно малых $\varepsilon>0$ и $\xi^1,\ \ldots,\ \xi^n$. Траектория, соответствующая управлению $u(t,\xi^1,\ldots,\xi^n)$ и исходящая в момент $t=0$ из некоторой точки x_0, оканчивается (в момент $t=t_1$) в точке

$$x_1=x_1(x_0,\ \xi^1,\ \ldots,\ \xi^n)=$$
$$=e^{t_1A}\left(x_0+\int_0^{t_1}e^{-tA}b\sum_{k=1}^{n}\sigma(t,\ k\varepsilon,\ \xi^k)\,dt\right) \tag{33}$$

(см. (31)).

---

*) Этот факт, относящийся к матричному исчислению, можно доказать, например, следующим образом. Пусть матрица $M=e^{-\varepsilon A}-E$; тогда она представляется в виде сходящегося матричного ряда

$$M=-\frac{\varepsilon}{1!}A+\frac{\varepsilon^2}{2!}A^2-\frac{\varepsilon^3}{3!}A^3+\ldots \tag{*}$$

Из этого следует, что любая матрица C, представляющаяся в виде сходящегося степенного матричного ряда

$$C=a_0E+a_1M+a_2M^2+a_3M^3+\ \ldots, \tag{**}$$

перестановочна с матрицей A. Каждое собственное значение матрицы M имеет вид $e^{-\varepsilon\lambda}-1$, где λ — собственное значение матрицы A, и потому существует такое $\varepsilon_0>0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ собственные значения матрицы M лежат в единичном круге. Следовательно (см. Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961, стр. 302—303), существует такая матрица C, пред-

Так как при $\xi^1 = \ldots = \xi^n = 0$ сумма, стоящая в (33) под знаком интеграла, обращается в нуль, то

$$x_1(x_0, \xi^1, \ldots, \xi^n)|_{x_0=0;\ \xi^1=\ldots=\xi^n=0} = 0. \tag{34}$$

Далее, так как (при достаточно малых ξ^k и ε) слагаемое в (33), зависящее от ξ^k, имеет вид

$$e^{t_1 A}\left(x_0 + \int\limits_{k\varepsilon}^{k\varepsilon+\xi^k} e^{-tA} b\, dt\right),$$

ставимая в виде степенного ряда (**), что $e^C = M + E$, т. е. $e^C = e^{-\varepsilon A}$. При этом собственные значения матрицы C можно предполагать как угодно близкими к нулю (при достаточно малом ε_0). Так как матрицы A и C перестановочны, то из соотношения $e^C = e^{-\varepsilon A}$ вытекает, что $e^{C+\varepsilon A} = E$, и потому все собственные значения матрицы $C + \varepsilon A$ имеют вид $2k\pi i$. Так как, кроме того, они близки к нулю (при малом ε_0), то все собственные значения матрицы $C + \varepsilon A$ равны нулю. Пусть S — такая матрица, что матрица $G = S(C + \varepsilon A)S^{-1}$ имеет жорданову форму. Тогда, умножая соотношение $e^{C+\varepsilon A} = E$ слева на S, а справа на S^{-1}, мы получим $e^G = E$, т. е.

$$E = E + G + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{6}G^3 + \ldots \tag{***}$$

Но так как все собственные значения матрицы G равны нулю, то все элементы этой матрицы, стоящие на главной диагонали и выше нее, равны нулю. Поэтому в матрицах $G^2, G^3, G^4, \ldots$ все элементы, стоящие непосредственно под главной диагональю, также равны нулю. Тогда из (***) следует, что и в матрице G все элементы, стоящие непосредственно под главной диагональю, равны нулю, т. е. G — нулевая матрица (напомним, что G имеет жорданову форму). Следовательно, и $C + \varepsilon A$ — нулевая матрица, т. е. $C = -\varepsilon A$.

Из (**) следует теперь, что матрица A представляется в виде сходящегося степенного ряда

$$A = -\frac{1}{\varepsilon}(a_0 E + a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + \ldots). \tag{****}$$

Всякое инвариантное подпространство матрицы A является в силу (*) инвариантным подпространством и матрицы M. Обратно, всякое инвариантное подпространство матрицы M является в силу (****) инвариантным подпространством матрицы A. Таким образом, матрицы A и M (а значит также матрицы A и $e^{-\varepsilon A} = M + E$) имеют общие инвариантные подпространства (если ε настолько мало, что проведенные рассуждения применимы).

то, дифференцируя соотношение (33), мы получим

$$\left.\frac{\partial x_1}{\partial \xi^k}\right|_{\xi^k=0} = e^{t_1 A}(e^{-k\varepsilon A}b), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда вытекает, что якобиан

$$\left.\frac{\partial\left(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\right)}{\partial\left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)}\right|_{\xi^1=\xi^2=\ldots=\xi^n=0} \tag{35}$$

переменных $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n$ (т. е. координат точки x_1) по переменным $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ равен $|e^{t_1 A}| \cdot \Delta$, где Δ — определитель матрицы, составленной из координат векторов (32). Так как определитель матрицы $e^{t_1 A}$ отличен от нуля и, кроме того, при достаточно малом ε, $\Delta \neq 0$ (ибо векторы (32) линейно независимы), то якобиан (35) отличен от нуля.

Итак, мы можем выбрать в предыдущих построениях параметр ε настолько малым, что якобиан (35) будет отличен от нуля. Кроме того, имеет место соотношение (34). Из этого, в силу теоремы о неявных функциях, вытекает разрешимость уравнения

$$x_1(x_0, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = 0$$

относительно $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ для всех значений x_0, принадлежащих некоторой окрестности V начала координат $0 \in X$. Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in V$ существует такое кусочно-постоянное управление u (а именно, управление $u(t, \xi^1, \ldots, \xi^n)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, при надлежащим образом выбранных $\xi^1, \ldots, \xi^n$), которое переводит фазовую точку из положения x_0 в начало координат (за время t_1).

Пусть теперь x_0 — произвольная точка пространства X. Заставим фазовую точку сначала двигаться из положения x_0 при управлении $u(t) \equiv 0$. Так как все собственные значения оператора A имеют отрицательные действительные части, то по истечении некоторого времени движущаяся точка придет в окрестность V, после чего ее, по доказанному, можно перевести в начало координат. Отсюда в силу теоремы 13 вытекает существование *оптимального* управления, переводящего фазовую точку из положения x_0 в начало координат.

Итак, теорема 14 доказана.

Следствие. *Предположим, что начало координат пространства E_r является внутренней точкой многогранника U. Обозначим через Σ_T множество тех точек $x_0 \in \in X$, которые могут быть (при помощи надлежаще выбранного управления) переведены в начало координат $0 \in X$ за время, не превосходящее T (где T — некоторое положительное число). Тогда Σ_T есть замкнутое выпуклое множество пространства X, имеющее внутренние точки (т. е. выпуклое тело).*

Доказательство. Обратимся к доказательству теоремы 14, взяв в нем $t_1 = T$. Тогда мы получим такую окрестность V начала координат $0 \in X$, что для любой точки $x_0 \in V$ существует кусочно-постоянное управление, которое переводит фазовую точку из положения x_0 в начало координат (за время T). Иначе говоря, $V \subset \Sigma_T$, т. е. начало координат является **внутренней** точкой множества Σ_T. Замкнутость множества Σ_T легко следует из теоремы существования.

Остается доказать, что множество Σ_T выпукло. Пусть $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$ и $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)$ — две точки множества Σ_T, а $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — управления, переводящие фазовую точку из положений x_1, x_2 в начало координат за время, не превосходящее T. Будем предполагать оба управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ заданными на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, считая их равными нулю от момента попадания фазовой точки в начало координат и до момента T. Тогда $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — управления, заданные на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ и переводящие за время T фазовую точку из положений x_1 и x_2 в начало координат, т. е. в силу (22)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(T) \left(x_1^\nu + \int_0^T (\psi^\nu(t),\ Bu_1(t))\, dt \right) = 0, \tag{36}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(T) \left(x_2^\nu + \int_0^T (\psi^\nu(t),\ Bu_2(t))\, dt \right) = 0. \tag{37}$$

Пусть теперь α_1 и α_2 — произвольные положительные числа, удовлетворяющие условию $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; положим

$x_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $u_0(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)$. Тогда точка x_0 расположена на отрезке, соединяющем точки x_1 и x_2, а точка $u_0(t)$ — на отрезке, соединяющем точки $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (при любом t, $0 \leqslant t \leqslant T$), так что $u_0(t) \in U$ при любом t (ибо U — выпуклый многогранник). Таким образом, $u_0(t)$ — допустимое управление, заданное на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Умножая соотношения (36), (37) соответственно на α_1, α_2 и складывая, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(T)\left(x_0^\nu + \int_0^T (\psi^\nu(t), Bu_0(t))\,dt\right) = 0.$$

Таким образом, управление $u_0(t)$ переводит фазовую точку из положения x_0 в начало координат за время T, т. е. $x_0 \in \Sigma_T$. Итак, любая точка отрезка, соединяющего точки x_1 и x_2, принадлежит множеству Σ_T, и потому множество Σ_T выпукло.

§ 20. Синтез оптимального управления

В главе 1 мы рассмотрели на конкретных примерах задачу синтезирования оптимальных управлений. Эта задача имеет смысл для произвольного управляемого процесса (см. формулу (4) в § 2). Однако здесь мы будем рассматривать лишь линейные системы вида (1), удовлетворяющие условиям, указанным в формулировке теоремы 14 (по поводу условия устойчивости оператора A см. замечание в конце этого параграфа). Для таких систем имеют место теоремы существования и единственности (теоремы 14 и 12), благодаря чему задача синтеза является в принципе решенной. Приводимые здесь соображения дают конструктивный метод решения этой задачи. Осуществление этого метода в каждом конкретном случае требует, однако, ряда построений.

Синтезирование оптимального управления линейной системы (1) было осуществлено ранее (совершенно другими методами, т. е. без использования принципа максимума) лишь для случая одного управляющего параметра (т. е. при $r = 1$) — А. А. Фельдбаумом при действительных собственных значениях оператора A и Д. Бушоу в случае, когда $n = 2$, а собственные значения оператора A комплексны. Использование принципа максимума дает возможность значительно проще получить указанные результаты (см. примеры, изложенные в § 5). Ниже мы покажем, каким образом с помощью принципа максимума можно при $n=2$ построить синтез линейных систем оптимального управления с **двумя** управляющими параметрами.

В этом параграфе мы изложим общие соображения о задаче синтеза оптимальных управлений. Мы будем считать, что выполнены условия, сформулированные в теореме 14. Тогда для каждой точки $x_0 \in X$ существует и притом только одно оптимальное (кусочно-постоянное) управление $u_{x_0}(t)$, переводящее фазовую точку из точки x_0 в начало координат $0 \in X$. Единственность имеет место, конечно, только с точностью до сдвига времени и до значений управления $u_{x_0}(t)$ в его точках разрыва. Так как в каждый момент времени нас, естественно, интересует, каким будет оптимальное управление **после** этого момента времени, то (в отличие от ранее принимавшихся соглашений — см. стр. 15 и сноску на стр. 134) целесообразнее всего считать в каждой точке разрыва t' управления $u_{x_0}(t)$ его значение равным $u_{x_0}(t'+0)$. При этом соглашении во все моменты времени (кроме конечного, когда значение управления не играет роли) выполняется соотношение

$$u_{x_0}(t) = u_{x_0}(t+0),$$

благодаря чему устраняется неоднозначность управления $u_{x_0}(t)$ в начальный момент и в точках разрыва. Величина $u_{x_0}(t_0)$ зависит, таким образом, только от точки x_0, а не от случайно выбранного начала отсчета времени t_0, и потому можно положить

$$v(x_0) = u_{x_0}(t_0).$$

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (2), соответствующее управлению $u_{x_0}(t)$, а $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — промежуток времени, в течение которого точка, двигаясь при этом управлении, переходит из положения x_0 в начало координат. Так как для любой точки τ, взятой из этого промежутка времени, управление $u_{x_0}(t)$, рассматриваемое на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant t_1$, **оптимальным** образом переводит фазовую точку из положения $x(\tau)$ в начало координат (иначе все управление в целом не было бы оптимальным), то имеет место соотношение

$$u_{x_0}(\tau) = v(x(\tau)).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bv(x(t)),$$

и мы видим, что *решение уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv(x)$$

с произвольным начальным условием $x(t_0) = x_0$ *дает закон оптимального движения фазовой точки из положения* x_0 *в начало координат.* В этом смысле функция $v(x)$ синтезирует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из любой точки x_0 в начало (ср. § 5). В нахождении функции $v(x)$ и заключается решение *задачи синтеза* оптимального управления (для линейной системы (2)).

Дадим метод построения функции $v(x)$. Пусть $\psi(t)$ — то (нетривиальное) решение уравнения (5), которое в силу теоремы 2 соответствует управлению $u_{x_0}(t)$, так что

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*\psi(t), \tag{38}$$

а функция $u_{x_0}(t)$ определяется из уравнения

$$(\psi(t),\ Bu_{x_0}(t)) = P(\psi(t)). \tag{39}$$

Пусть, далее, $x(t)$ — решение уравнения (2) с управлением $u = u_{x_0}(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0 \tag{40}$$

и конечному условию

$$x(t_1) = 0, \tag{41}$$

так что

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu_{x_0}(t). \tag{42}$$

Тогда функция $v(x)$ удовлетворяет условию

$$(\psi(t_0),\ Bv(x(t_0))) = P(\psi(t_0)). \tag{43}$$

Из теоремы существования и единственности следует, что существует, и притом только одна (с точностью до сдвига времени), пара функций $u_{x_0}(t)$, $x(t)$, заданных на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и удовлетворяющих условиям (38)—(42). Ввиду возможности сдвига времени числа t_0 и t_1 этими условиями не определены однозначно, но число $t_1 - t_0$ определено.

Совершенно не ясно, как искать функции $u_{x_0}(t)$, $x(t)$, удовлетворяющие всем условиям (38)—(42), но легко найти все функции $u_{x_0}(t)$, $x(t)$, удовлетворяющие лишь условиям (38), (39), (41), (42). Для этого поступим следующим образом. Ввиду возможности произвольного сдвига времени зафиксируем число t_1, положив $t_1 = 0$. Пусть теперь $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ — произвольный вектор, отличный от нуля, и $\psi(t, \chi)$ — решение уравнения (38), удовлетворяющее начальному условию

$$\psi(0, \chi) = \chi$$

и определенное при $t \leqslant 0$. Определим, далее, функцию $u(t, \chi)$ из условия

$$(\psi(t, \chi), Bu(t, \chi)) = P(\psi(t, \chi)), \qquad t \leqslant 0,$$

и функцию $x(t, \chi)$, удовлетворяющую начальному условию $x(0, \chi) = 0$, — из уравнения

$$\frac{dx(t, \chi)}{dt} = Ax(t, \chi) + Bu(t, \chi).$$

Согласно сказанному выше, функция $v(x)$ определится соотношением

$$(\psi(t, \chi), Bv(x(t, \chi))) = P(\psi(t, \chi)). \tag{44}$$

Из теоремы существования (теорема 14) следует, что точка $x(t, \chi)$ описывает все пространство X, когда t пробегает отрицательные значения, а вектор χ меняется произвольно. Таким образом, соотношение (44) определяет значение функции $v(x)$ для произвольной точки x пространства X.

Заметим, что условие устойчивости оператора A использовалось в предшествующих рассуждениях лишь один раз, а именно в конце предыдущего параграфа, когда показывалось, что из любой точки пространства X

можно подойти как угодно близко к началу координат. Поэтому все выводы настоящего параграфа сохраняют свою силу и в том случае, когда оператор A не является устойчивым, но за счет выбора надлежащего управления $u(t)$ можно из любой точки $x_0 \in X$ подойти как угодно близко к началу координат (см. пример 1 в § 5). Если, однако, и это условие не выполняется, то синтез все равно возможен, но не для всего пространства X, а лишь для некоторой его области. Именно, обозначим через Y множество тех точек пространства X, из которых можно (с помощью надлежащего управления) как угодно близко подойти к началу координат. Тогда функцию $v(x)$ можно построить (предполагая, что начало координат пространства E_r — внутренняя точка многогранника U и что выполнено условие общности положения) на множестве Y, что и дает в этом случае решение задачи синтеза. При этом совсем не нужно заранее проверять, из любой или не из любой точки можно попасть в начало координат: если решать задачу синтеза, как указано выше (т. е. пользуясь «попятными движениями» из начала координат), то множество всех тех точек пространства X, в которые мы сможем попасть (на основании формул (38), (39), (41), (42)), исходя из начала координат, и будет представлять собой область Y, для которой задача синтеза допускает решение.

Множество Y является открытым, т. е. вместе с каждой точкой содержит и некоторую ее окрестность. В самом деле, пусть $x_0 \in Y$ и $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в начало координат. Пусть, далее, V — такая окрестность начала координат, из каждой точки которой можно (с помощью надлежащего управления) попасть в начало координат. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений существует в X такая окрестность W точки x_0, что фазовая траектория, соответствующая тому же управлению $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и исходящая в момент t_0 из любой точки $y_0 \in W$, оканчивается в момент t_1 в некоторой точке множества V. Следовательно, любая точка $y_0 \in W$ может быть при помощи надлежащего управления переведена в начало координат, т. е.

$W \subset Y$. Таким образом, множество Y открыто. Далее, так как из любой точки $x_0 \in Y$ можно за конечное время попасть в начало координат, то (см. следствие из теоремы 14)

$$Y = \bigcup_{T=1}^{\infty} \Sigma_T,$$

т. е. Y представляется в виде объединения возрастающей последовательности выпуклых множеств и потому само является выпуклым множеством.

Итак, *множество Y всех тех точек пространства X, из которых можно попасть в начало координат, представляет собой открытое выпуклое множество пространства X. Внутри этого множества Y задача синтеза оптимальных управлений допускает решение.*

§ 21. Примеры

Пример 1

(Система второго порядка с двумя управляющими параметрами и комплексными собственными значениями.)

Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b_1^1 u^1 + b_2^1 u^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b_1^2 u^1 + b_2^2 u^2 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

в предположении, что собственные значения матрицы (a_j^i) комплексны, т. е. $(a_1^1 - a_2^2)^2 + 4a_1^2 a_2^1 < 0$. Область управления U пусть определяется неравенствами

$$|u^1| \leqslant 1, \quad |u^2| \leqslant 1. \tag{46}$$

Если ранг матрицы (b_l^i) меньше двух, то столбцы этой матрицы пропорциональны, т. е. $b_2^i = kb_1^i$ $(i = 1, 2)$, и потому система (45) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b_1^1 (u^1 + ku^2), \\ \frac{dx^2}{dt} &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b_1^2 (u^1 + ku^2). \end{aligned}\right\}$$

Здесь u^1+ku^2 есть величина, которая может принимать произвольные значения, подчиненные неравенству

$$|u^1+ku^2| \leqslant 1+|k|.$$

Таким образом, система (45) представляет собой в этом случае систему с **одним** управляющим параметром $u=u^1+ku^2$. Мы исключаем этот случай из рассмотрения, т. е. будем предполагать, что определитель матрицы (b^i_j) отличен от нуля.

Собственные значения матрицы (a^i_j) обозначим через $\lambda \pm i\mu$, где $\mu \neq 0$; можно считать, что $\mu > 0$. Все дальнейшие рассуждения не зависят от знака λ, но для определенности мы будем рассматривать случай $\lambda < 0$.

Линейным преобразованием переменных

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= s^1_1x^1+s^1_2x^2, \\ y^2 &= s^2_1x^1+s^2_2x^2 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

систему (45) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda y^1-\mu y^2+c^1_1u^1+c^1_2u^2, \\ \frac{dy^2}{dt} &= \mu y^1+\lambda y^2+c^2_1u^1+c^2_2u^2, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где коэффициенты c^i_j очевидным образом выражаются через элементы матриц (b^i_j) и (s^i_j). Так как независимое переменное t (время) не подвергается преобразованию, а формулы (47) однородны, то оптимальные траектории системы (45), ведущие в начало координат, переходят при преобразовании (47) в оптимальные траектории системы (48), ведущие в начало координат. Ввиду этого мы можем рассмотреть лишь синтез оптимальных траекторий системы (48), откладывая переменные y^1 и y^2 по осям координат. Получив этот синтез, мы с помощью аффинного преобразования (47) найдем и синтез оптимальных управлений для системы (45). Плоскость переменных y^1, y^2 мы будем обозначать через π.

Положив

$$\left.\begin{aligned} c_1^1 u^1 + c_2^1 u^2 = v^1, \\ c_1^2 u^1 + c_2^2 u^2 = v^2, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

мы сможем записать систему (48) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} = \lambda y^1 - \mu y^2 + v^1, \\ \frac{dy^2}{dt} = \mu y^1 + \lambda y^2 + v^2. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

При этом из (49) следует, что точка (v^1, v^2) при всевозможных значениях u^1, u^2, удовлетворяющих неравенствам (46), описывает в плоскости π параллелограмм с вершинами в точках

$$(c_1^1 + c_2^1, c_1^2 + c_2^2), \quad (c_1^1 - c_2^1, c_1^2 - c_2^2),$$
$$(-c_1^1 + c_2^1, -c_1^2 + c_2^2), \quad (-c_1^1 - c_2^1, -c_1^2 - c_2^2).$$

Этот параллелограмм мы обозначим через V (рис. 33).

Итак, мы приходим к задаче о синтезе оптимальных управлений для системы (50) при условии, что точка $v = (v^1, v^2)$ пробегает в плоскости π переменных y^1, y^2 некоторый параллелограмм V с центром в начале координат. Эту задачу мы и будем рассматривать.

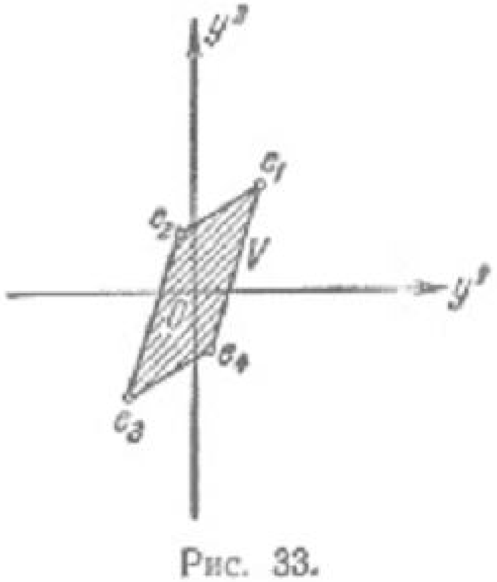

Рис. 33.

Система (5) принимает в случае управляемого процесса (50) следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} = -\lambda\psi_1 - \mu\psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = \mu\psi_1 - \lambda\psi_2. \end{aligned}\right\}$$

Непосредственно находим общее решение этой системы:

$$\psi_1 = ce^{-\lambda t}\cos(\mu t + \alpha),$$
$$\psi_2 = ce^{-\lambda t}\sin(\mu t + \alpha),$$

где $c > 0$ и α — постоянные интегрирования. Так как координаты вектора $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ мы рассматриваем лишь с точностью до общего положительного множителя пропорциональности (ибо функция H однородна относительно величин ψ_i), то мы можем отбросить положительный множитель пропорциональности $ce^{-\lambda t}$ и считать, что вектор ψ задается соотношениями:

$$\psi_1 = \cos(\mu t + \alpha),$$
$$\psi_2 = \sin(\mu t + \alpha).$$

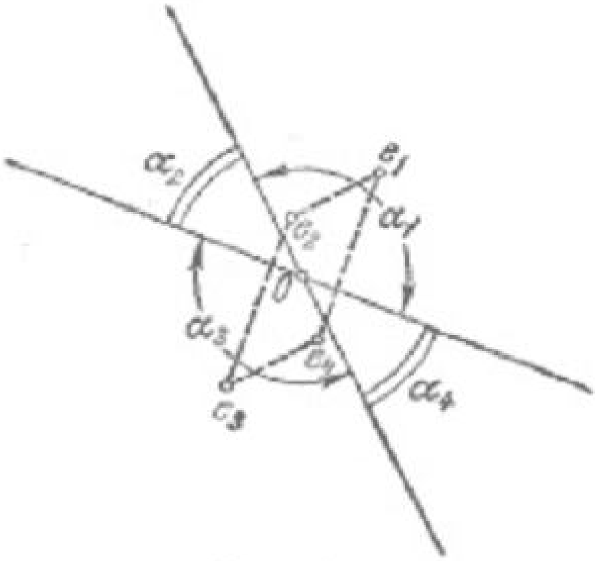

Рис. 34.

Иначе говоря, вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ равномерно вращается (вокруг начала координат) против часовой стрелки с угловой скоростью μ (напомним, что $\mu > 0$).

Обозначим теперь вершины параллелограмма V через e_1, e_2, e_3, e_4, нумеруя их против часовой стрелки. Далее, проведем из начала координат прямые, перпендикулярные сторонам параллелограмма V, и обозначим образуемые этими прямыми углы через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (рис. 34). Так как функция H в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = \ldots + \psi_1 v^1 + \psi_2 v^2 = = \ldots + (\psi, v)$$

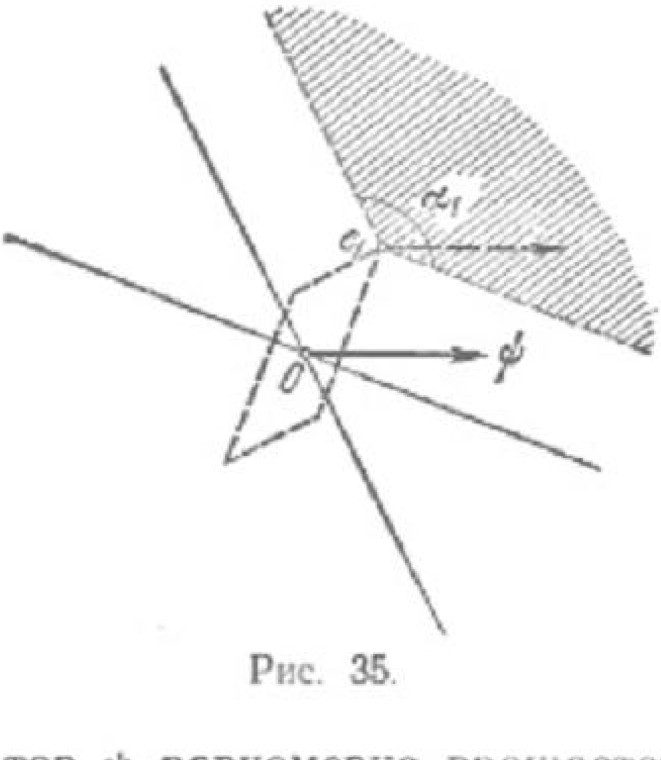

Рис. 35.

(многоточием обозначены члены, не содержащие v^1 и v^2), то из рис. 35 ясно, что если вектор ψ находится в угле α_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то максимум функции H при $v \in V$ достигается в вершине $v = e_i$. Вспомнив теперь, что вектор ψ равномерно вращается с угловой скоростью μ, мы приходим к следующему выводу относительно оптимальных управлений. В течение времени $\frac{\alpha_i}{\mu}$

управляющий параметр v имеет значение e_i, затем v «переключается» в вершину e_{i+1}, где находится в течение времени $\frac{\alpha_{i+1}}{\mu}$ (при $i=4$ следует считать, что $i+1=1$), после этого «переключается» в вершину e_{i+2} и т. д. При этом первый и последний отрезки времени могут быть меньше соответствующих величин $\frac{\alpha_i}{\mu}$, так как в начальный момент движение могло начаться не в момент «переключения», а в конце движение может прекратиться (т. е. фазовая точка попадет в начало координат) до момента очередного переключения.

Обозначим теперь через e'_i такую точку (a_i^1, a_i^2) плоскости π, координаты которой удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \lambda a_i^1 - \mu a_i^2 &= -v_i^1, \\ \mu a_i^1 + \lambda a_i^2 &= -v_i^2, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

где v_i^1, v_i^2 — координаты вершины e_i параллелограмма V. Тогда мы получим четыре точки e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, являющиеся вершинами некоторого параллелограмма V' (ибо соотношения (51) линейны). Из вида формул (51) легко вытекает, что параллелограмм V' получается из V подобным преобразованием (с центром в начале) и поворотом на некоторый угол (рис. 36). Из формул (50), (51) вытекает, что в то время, когда управляющий параметр v принимает значение e_i, изменение координат y^1, y^2 описывается уравнениями

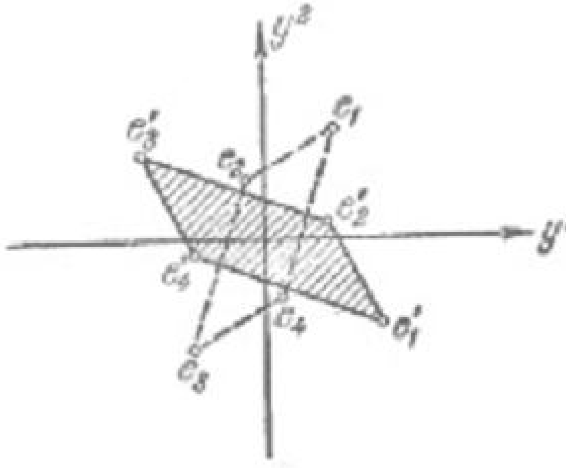

Рис. 36

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda(y^1 - a_i^1) - \mu(y^2 - a_i^2), \\ \frac{dy^2}{dt} &= \mu(y^1 - a_i^1) + \lambda(y^2 - a_i^2) \end{aligned} \quad (\text{при } v = e_i). \right\} \tag*{$(52)_i$}$$

Сравнивая систему (52) с системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda y^1 - \mu y^2, \\ \frac{dy^2}{dt} &= \mu y^1 + \lambda y^2, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

мы видим, что «фазовые портреты» систем $(52)_i$ и (53) получаются друг из друга параллельным переносом;

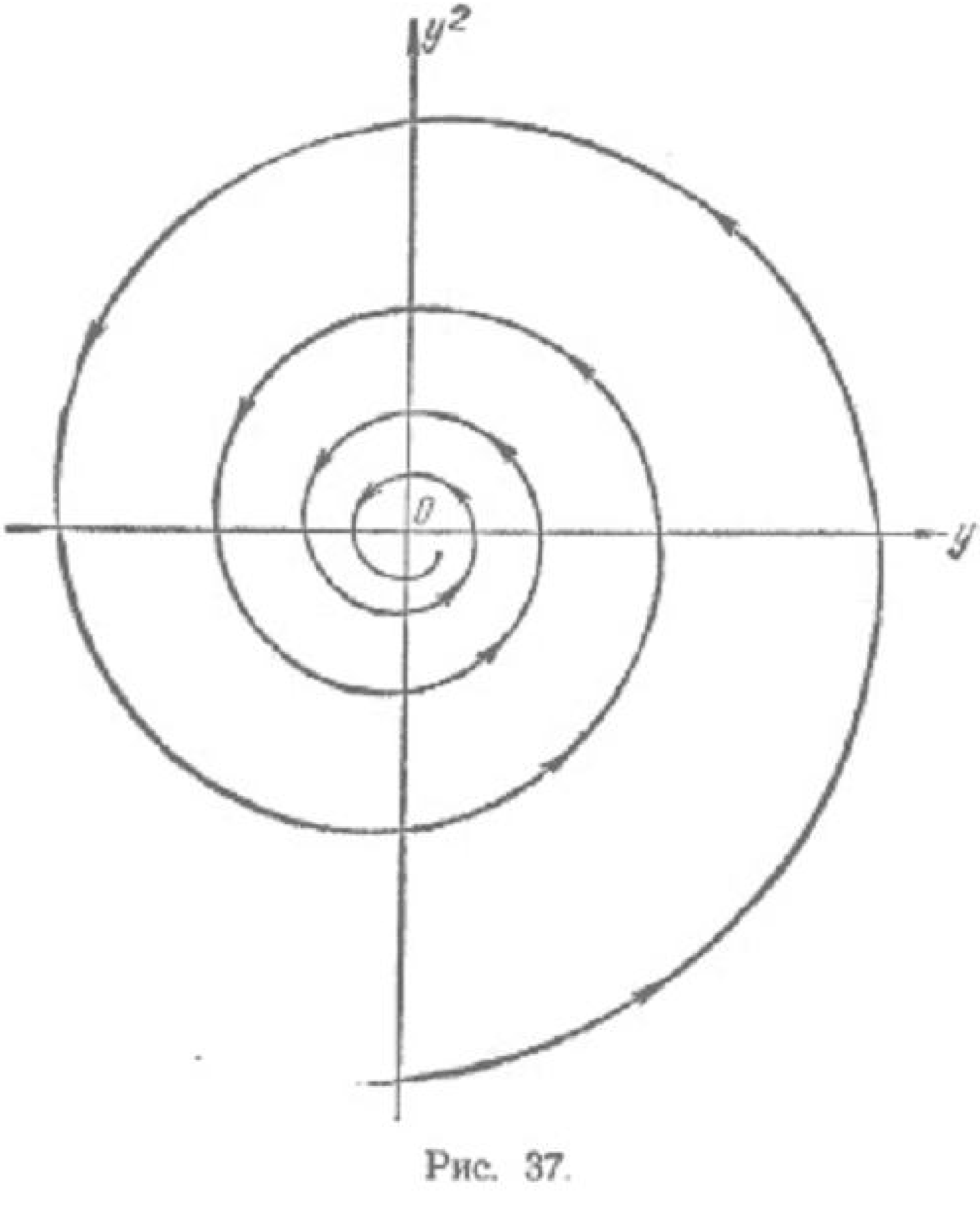

Рис. 37.

именно, положение равновесия системы $(52)_i$ расположено не в начале координат (как у системы (53), рис. 37), а в точке e'_i.

Вспоминая сказанное выше о характере оптимальных управлений, мы получаем следующее утверждение о структуре оптимальных траекторий. В течение времени

$\frac{\alpha_i}{\mu}$ точка описывает дугу фазовой траектории системы $(52)_i$, затем в течение времени $\frac{\alpha_{i+1}}{\mu}$ ее движение описывается системой $(52)_{i+1}$, после этого вступает в действие система $(52)_{i+2}$ и т. д. (первый и последний отрезки времени могут быть меньше, чем соответствующие величины $\frac{\alpha_i}{\mu}$).

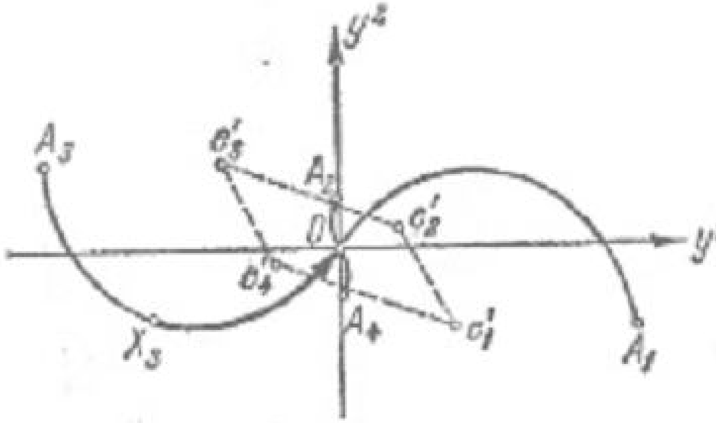

Рис. 38.

Теперь уже нетрудно построить на плоскости π «линии переключения», определяющие синтез оптимальных управлений. Обозначим через A_iO $(i = 1, 2, 3, 4)$ дугу траектории системы $(52)_i$, оканчивающуюся в точке O и соответствующую отрезку времени $\frac{\alpha_i}{\mu}$ (рис. 38). Тогда ясно, что заключительный этап оптимального движения фазовой точки происходит по одной из дуг A_iO, причем точка может пройти не всю эту дугу, а лишь некоторую ее часть X_iO (так как последний отрезок времени может быть меньше, чем $\frac{\alpha_i}{\mu}$). Далее, так как в точке X_i произошло «переключение» и фазовая точка после «переключения» стала двигаться согласно системе $(52)_i$, то перед моментом переключения фазовая точка двигалась по закону $(52)_{i-1}$. Таким образом, предыдущий отрезок Y_iX_i оптимальной траектории представляет собой дугу траектории системы $(52)_{i-1}$, оканчивающуюся

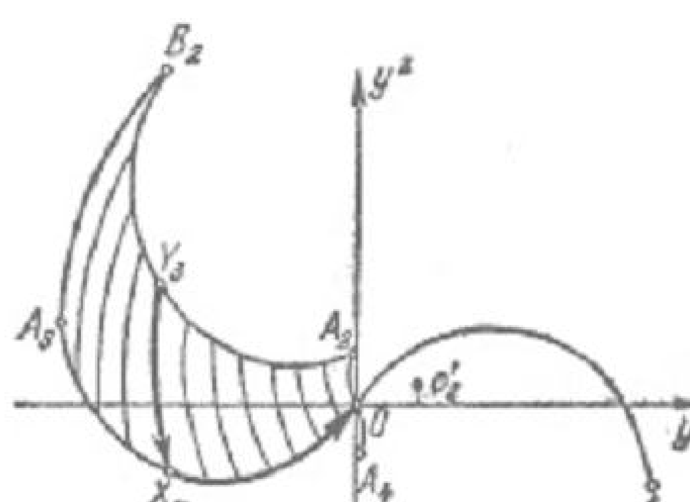

Рис. 39.

в точке X_i и соответствующую отрезку времени $\frac{\alpha_{i-1}}{\mu}$. Когда точка X_i пробегает всю дугу A_iO, дуги Y_iX_i указанного вида заполняют «криволинейный четырехугольник» (рис. 39), одна из «сторон» которого совпадает с дугой $A_{i-1}O$ (ибо при $X_i = O$ дуга Y_iX_i совпадает с $A_{i-1}O$). Таким образом, три вершины рассматриваемого криволинейного четырехугольника находятся в точках A_i, O, A_{i-1}; четвертую вершину обозначим через B_{i-1}. Тогда дуга $B_{i-1}A_{i-1}$ представляет собой геометрическое место точек Y_i, т. е. тех точек оптимальных траекторий, в которых происходит переключение (от системы $(52)_{i-2}$ к системе $(52)_{i-1}$).

Легко понять, что дуга $B_{i-1}A_{i-1}$ получается из дуги A_iO при помощи подобного преобразования с центром e'_{i-1} и коэффициентом $e^{-\frac{\lambda\alpha_{i-1}}{\mu}}$ и поворота вокруг центра e'_{i-1} на угол α_{i-1} по часовой стрелке. В самом деле, решения системы (53) в полярных координатах ($y^1 = \rho\cos\varphi$, $y^2 = \rho\sin\varphi$) имеют вид

$$\rho = ce^{\lambda t}, \quad \varphi = \mu t + \alpha,$$

где $c > 0$ и α — постоянные интегрирования. Если точка движется по этому закону, то по истечении отрезка времени, имеющего длину τ, радиус-вектор движущейся точки увеличивается в $e^{\lambda\tau}$ раз и поворачивается на угол $\mu\tau$. При $\tau = \frac{\alpha_{i-1}}{\mu}$ мы и получаем требуемое утверждение: вектор, идущий из точки e'_{i-1} в точку X_i, получается из вектора, идущего в точку Y_i (рис. 40), увеличением длины в $e^{\frac{\lambda\alpha_{i-1}}{\mu}}$ раз и поворотом на угол α_{i-1} (против часовой стрелки).

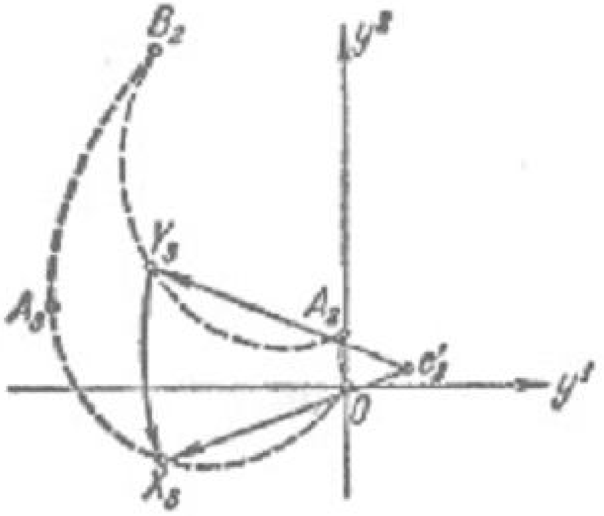

Рис. 40.

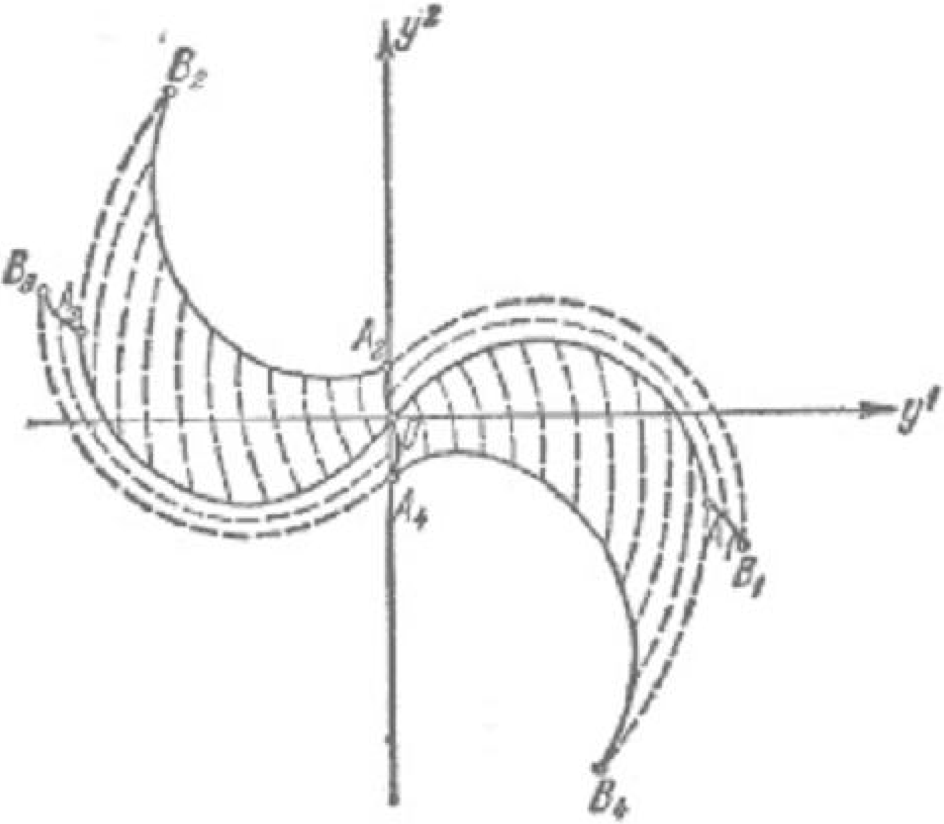

Рис. 41.

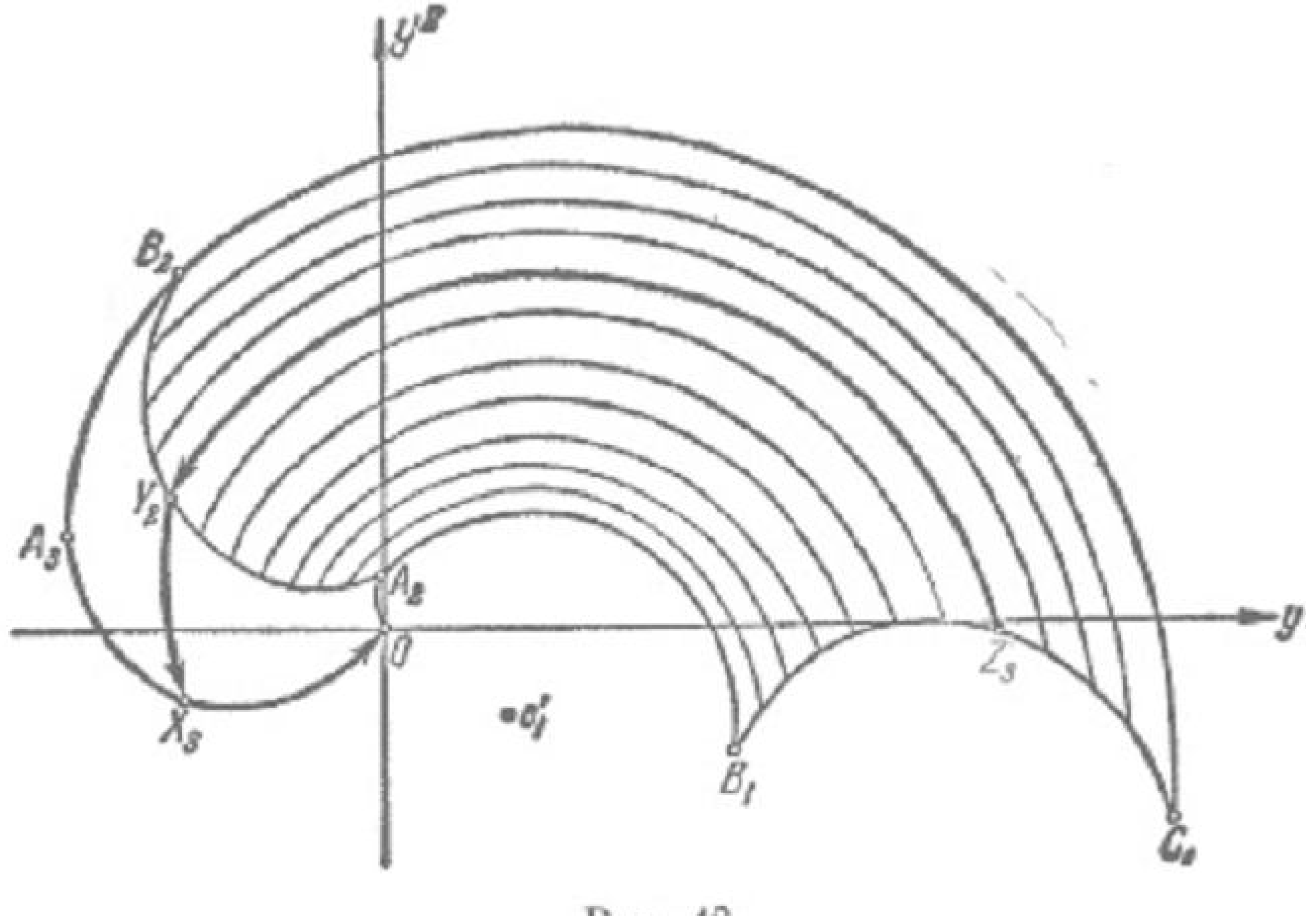

Рис. 42.

Итак, подобное преобразование с центром e'_{i-1} и коэффициентом $e^{-\frac{\lambda \alpha_{i-1}}{\mu}}$, сопровождаемое поворотом (по

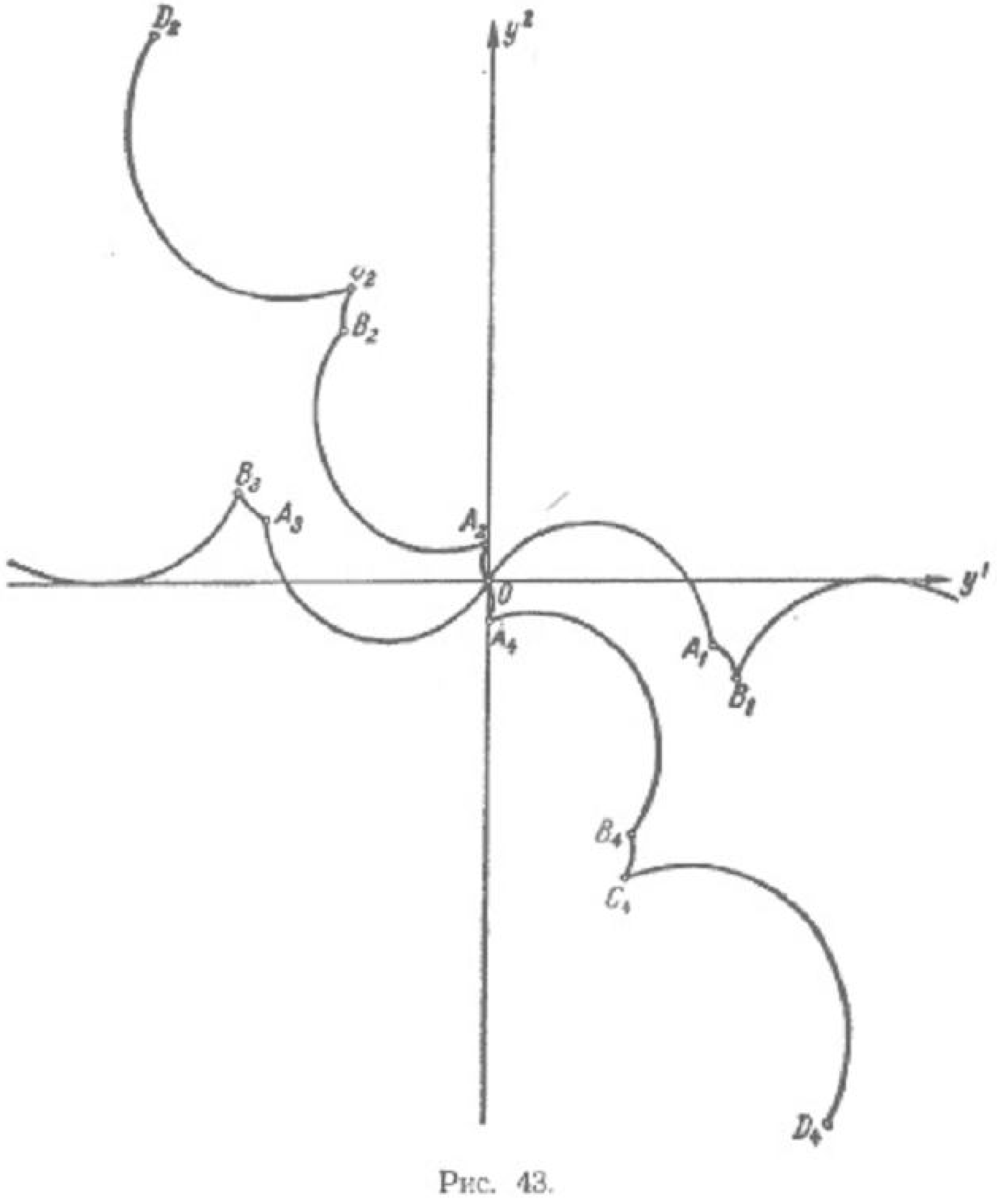

Рис. 43.

часовой стрелке) на угол α_{i-1}, переводит дугу OA_i в дугу $A_{i-1}B_{i-1}$, на которой происходят «переключения» от системы $(52)_{i-2}$ к системе $(52)_{i-1}$ (рис. 41).

Перед тем как произошло переключение в точке Y_i, фазовая точка двигалась по закону $(52)_{i-2}$ в течение

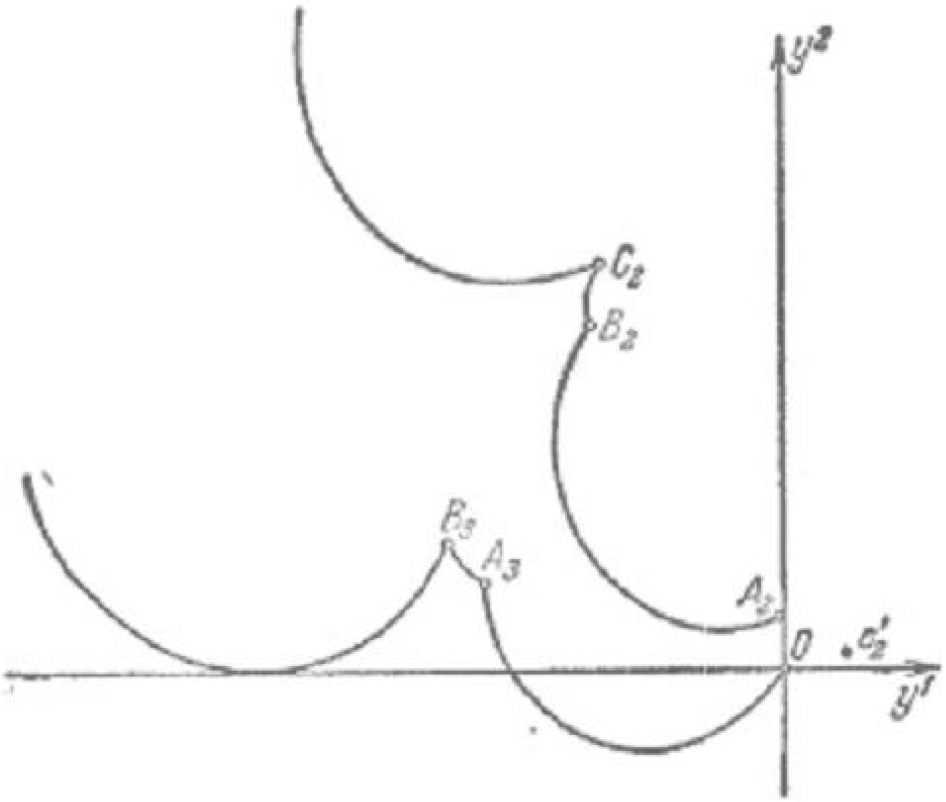

Рис. 44.

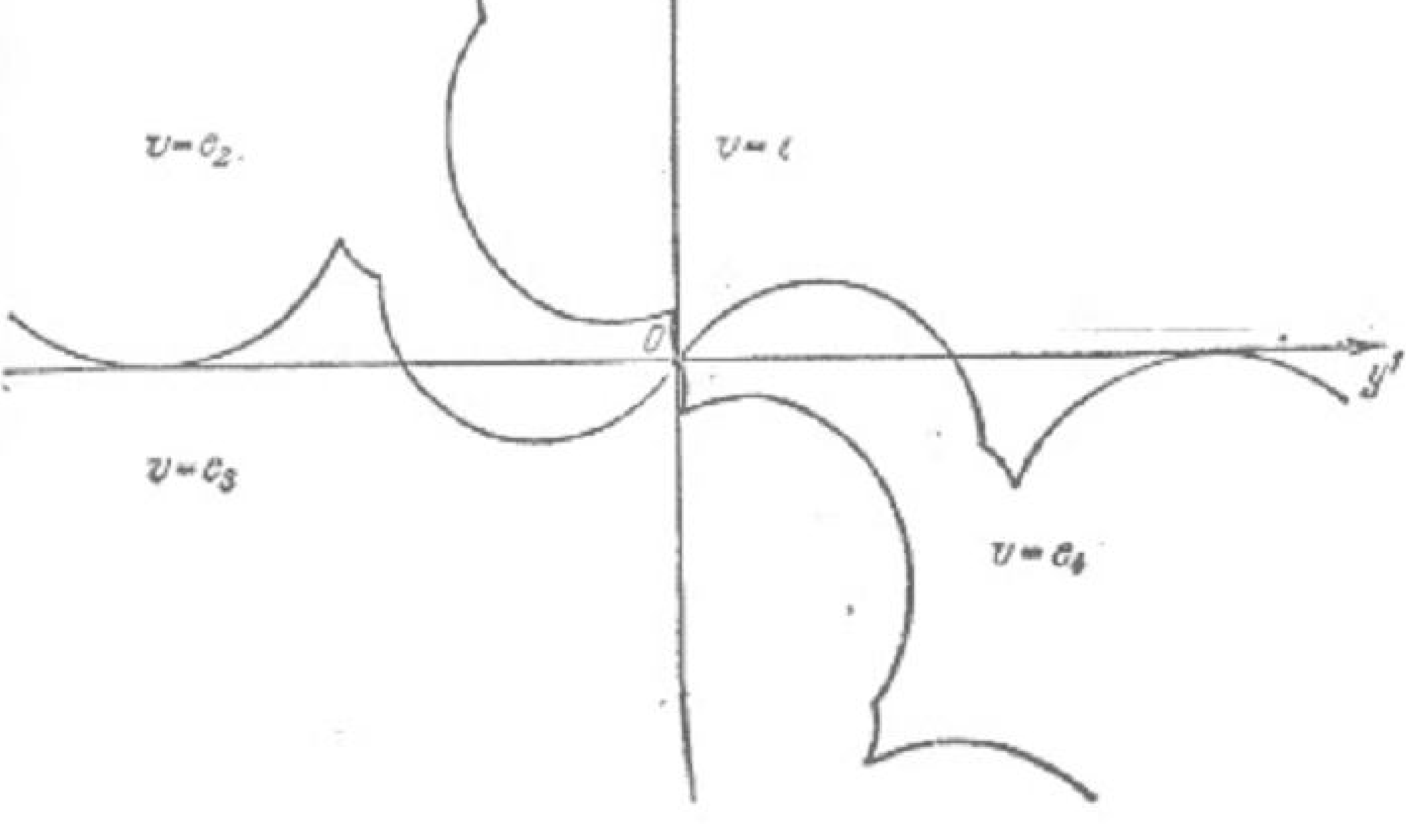

Рис. 45.

времени $\frac{\alpha_{i-2}}{\mu}$ (дуга Z_iY_i на рис. 42). Когда точка Y_i пробегает всю дугу $A_{i-1}B_{i-1}$, дуги Z_iY_i указанного вида заполняют «криволинейный четырехугольник», двумя

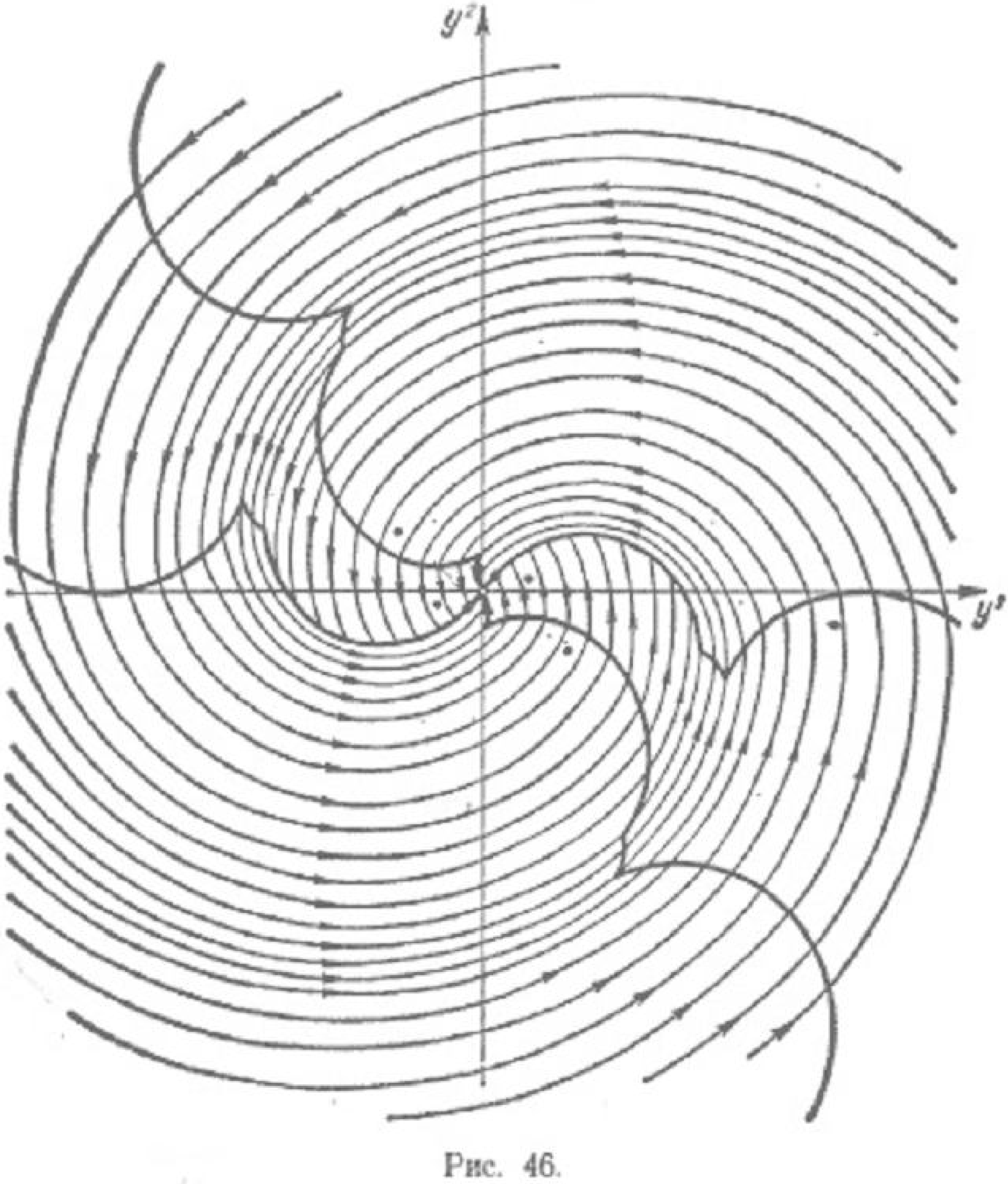

Рис. 46.

сторонами которого являются дуги $A_{i-1}B_{i-1}$ и $A_{i-1}B_{i-2}$. Четвертую вершину этого четырехугольника мы обозначим через C_{i-2}. Как и выше, устанавливается, что дуга $B_{i-2}C_{i-2}$ (геометрическое место предыдущих точек переключения) получается из дуги $A_{i-1}B_{i-1}$ при помощи подобного преобразования с центром e'_{i-2} и коэффициентом $e^{\frac{\lambda a_{i-2}}{\mu}}$, сопровождаемого поворотом (по часовой стрелке) на угол α_{i-2} вокруг центра e'_{i-2}.

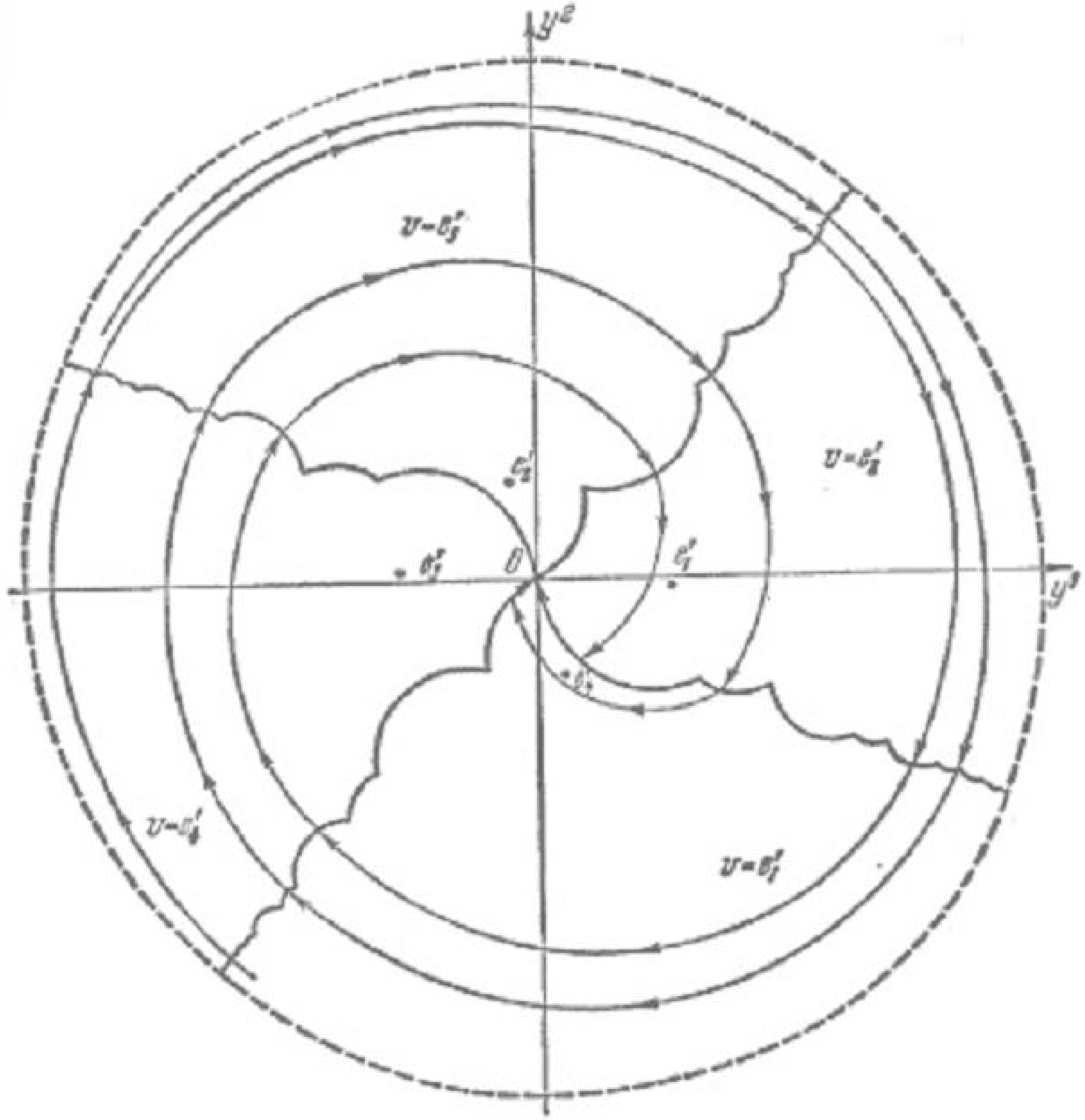

Рис. 47.

Продолжая таким образом, мы вычертим четыре линии $OA_iB_iC_iD_i\ \ldots\ (i=1, 2, 3, 4)$, исходящие из начала координат и представляющие в совокупности геометрическое место точек переключения (рис. 43). Подобное преобразование с центром e'_{i-1} и коэффициентом $e^{-\frac{\lambda a_{i-1}}{\mu}}$, сопровождаемое поворотом вокруг точки e_{i-1} на угол α_{i-1} по часовой стрелке, переводит линию

$OA_iB_iC_i \ldots$ в линию $A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}D_{i-1} \ldots$ (рис. 44). Это позволяет последовательно вычерчивать части линий $OA_iB_iC_i \ldots$, зная первые куски OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 этих линий (определение этих кусков было приведено выше). Остается заметить, что значение c_i управляющий параметр v принимает внутри «угла» между линиями $OA_{i+1}B_{i+1}C_{i+1} \ldots$ и $OA_iB_iC_i \ldots$ и на дуге A_iO. Это и дает синтез оптимальных управлений (рис. 45). Вид оптимальных траекторий показан на рис. 46.

Напомним, что рисунки 37—46, рассмотренные выше, относились к случаю, когда $\lambda < 0$, т. е. когда собственные значения матрицы (a_j^i) имеют отрицательные действительные части. В этом случае размеры дуг OA_i, A_iB_i, B_iC_i, ... увеличивались, а синтез оптимальных управлений осуществляется во всей плоскости π. При $\lambda = 0$ размеры дуг не меняются (т. е. $OA_i = B_iC_i = \ldots$, $A_iB_i = C_iD_i = \ldots$); синтез оптимальных управлений попрежнему осуществляется во всей плоскости π (см. пример 3 в § 5). Наконец, при $\lambda > 0$ размеры дуг OA_i, B_iC_i, ..., а также дуг A_iB_i, C_iD_i, ... уменьшаются в геометрической прогрессии; синтез оптимальных управлений осуществляется лишь в ограниченном куске плоскости π (рис. 47).

Все сказанное относится к синтезу оптимальных управлений в плоскости π переменных y^1, y^2. Переход в плоскости X исходных переменных x^1, x^2 осуществляется по формулам (47). Картина синтеза оптимальных управлений при этом аффинно искажается.

Пример 2

(Система второго порядка с двумя управляющими параметрами и отрицательными собственными значениями.)

Рассмотрим систему (45) в предположении, что собственные значения матрицы (a_j^i) действительны, отрицательны и различны. Мы по-прежнему будем предполагать, что область управления U определяется неравенствами (46) и что определитель матрицы (b_j^i) отличен от нуля. Обозначим собственные значения матрицы

(a^i_j) через λ_1 и λ_2, причем $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Линейным преобразованием переменных (см. (47)) систему (45) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda_1 y^1 + c^1_1 u^1 + c^1_2 u^2, \\ \frac{dy^2}{dt} &= \lambda_2 y^2 + c^2_1 u^1 + c^2_2 u^2, \end{aligned}\right\}$$

или, иначе, к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda_1 y^1 + v^1, \\ \frac{dy^2}{dt} &= \lambda_2 y^2 + v^2, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

(см. (49)). Как и в первом примере, точка $v = (v^1, v^2)$ описывает в плоскости π переменных y^1, y^2 параллелограмм V (рис. 33).

Система (5) принимает в случае управляемого процесса (54) следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\lambda_1 \psi_1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\lambda_2 \psi_2; \end{aligned}\right\}$$

ее общее решение:

$$\psi_1 = c_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad \psi_2 = c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Из этих формул видно, что если одна из постоянных интегрирования c_1, c_2 равна нулю, то вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ сохраняет постоянное направление (параллельное одной из осей координат). Если же оба числа c_1, c_2 отличны от нуля, то вектор ψ монотонно поворачивается (с возрастанием t) от оси абсцисс к оси ординат, оставаясь все время в одном квадранте (ибо $\left|\frac{\psi_2}{\psi_1}\right| = \left|\frac{c_2}{c_1}\right| e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \to \infty$ при возрастании t).

Для системы (45) мы предполагаем выполненным условие общности положения; тогда для системы (54), получающейся из нее линейным преобразованием, это условие также выполнено. Иначе говоря, ни одна из сторон параллелограмма V не параллельна ни одной из осей координат. Проведя из начала координат прямые l_1, l_2, перпендикулярные сторонам параллелограмма V (рис. 34; эти прямые отличны от осей координат в силу сказанного выше), мы, как и прежде, найдем, что если вектор ψ находится в угле α_i $(i=1, 2, 3, 4)$, то максимум функции H при $v \in V$ достигается в вершине $v = e_i$ (рис. 35).

Обозначим теперь через e'_i точку (a_i^1, a_i^2) плоскости π с координатами

$$a_i^1 = -\frac{1}{\lambda_1} v_i^1, \quad a_i^2 = -\frac{1}{\lambda_2} v_i^2, \tag{55}$$

где v_i^1, v_i^2 — координаты вершины e_i параллелограмма V. Тогда мы получим четыре точки e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, являющиеся вершинами некоторого параллелограмма V'. Из формул (54), (55) вытекает, что в то время, когда управляющий параметр v принимает значение e_i, изменение координат y^1, y^2 описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda_1 (y^1 - a_i^1), \\ \frac{dy^2}{dt} &= \lambda_2 (y^2 - a_i^2) \end{aligned} \quad (\text{при } v = e_i). \right\} \qquad (56)_i$$

«Фазовый портрет» системы $(56)_i$ получается из «фазового портрета» системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= \lambda_1 y^1, \\ \frac{dy^2}{dt} &= \lambda_2 y^2 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

с помощью параллельного переноса; именно, положение равновесия системы $(56)_i$ расположено не в начале координат (как у системы (57), рис. 48), а в точке e'_i.

Дальнейшее исследование приведет к существенно различным результатам в зависимости от того, как расположены прямые l_1 и l_2, перпендикулярные к сторонам параллелограмма V. Мы выделим следующие два случая.

Случай I. Прямые l_1 и l_2 расположены в различных квадрантах (т. е. одна в первом и третьем, а другая —

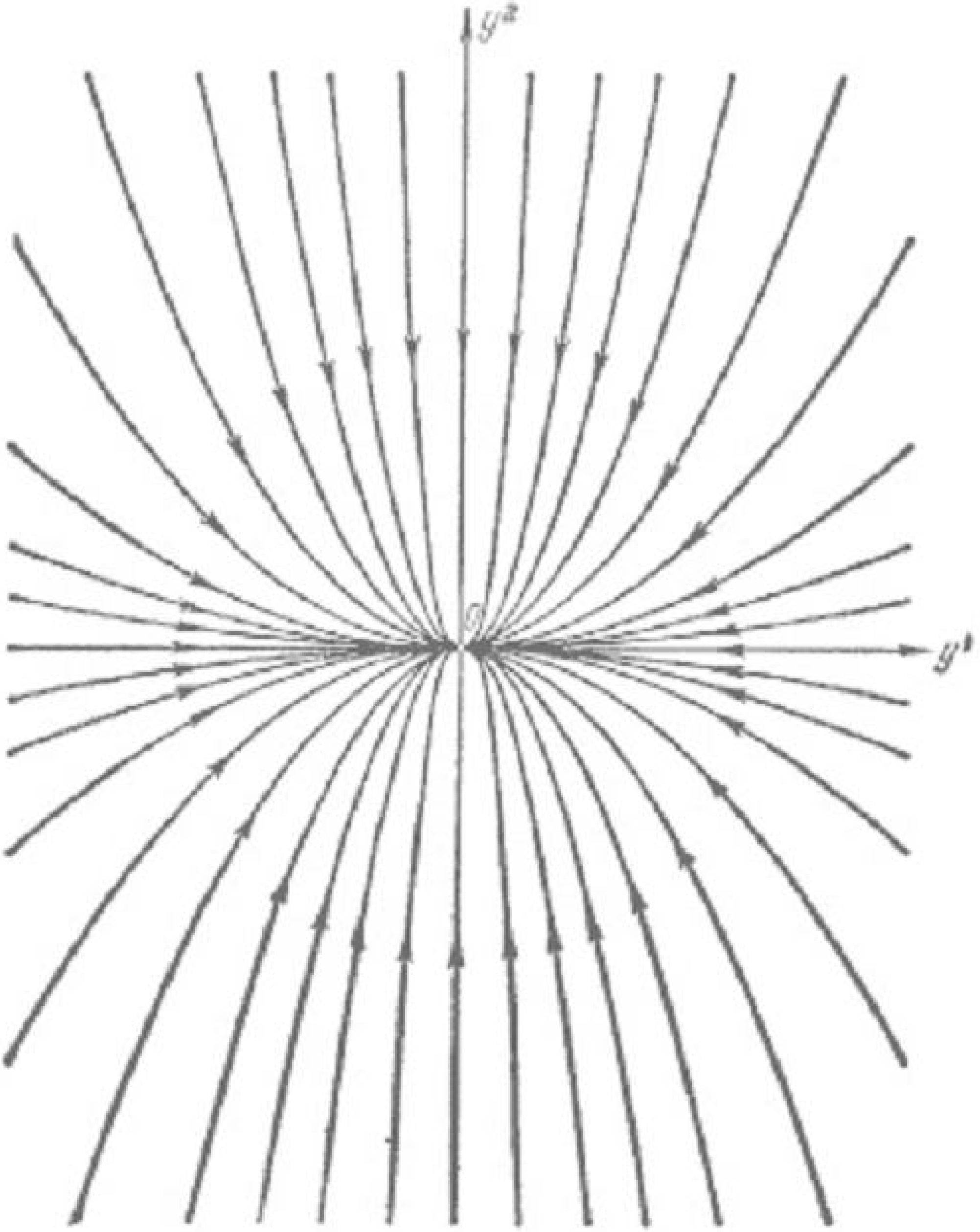

Рис. 48.

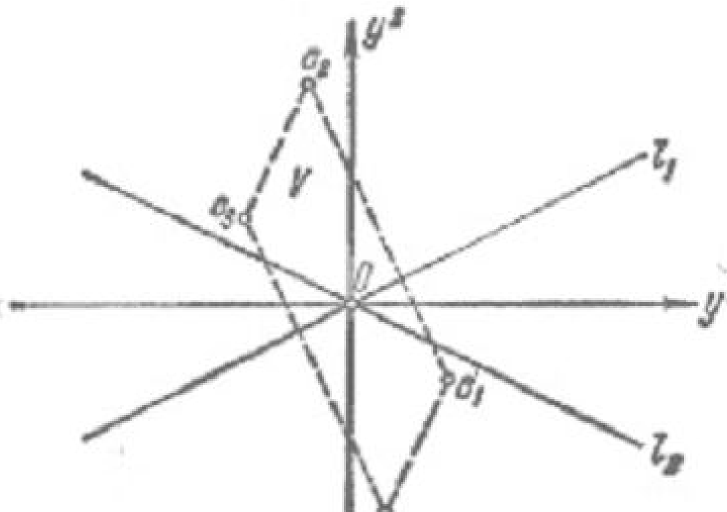

Рис. 49.

во втором и четвертом квадрантах, рис. 49). Произведем нумерацию углов α_i (определяемых прямыми l_1 и l_2) так, как указано на рис. 50. Эта нумерация соответствует тому, что через e_2 и e_4 обозначены соответственно верхняя и нижняя вершины параллелограмма V, а через e_1 и e_3 — правая и левая (рис. 49). Вспоминая сказанное выше о характере изменения величин ψ_1 и ψ_2, мы приходим к следующему выводу относительно оптимальных управлений. Каждое оптимальное управление либо совсем не содержит переклю-

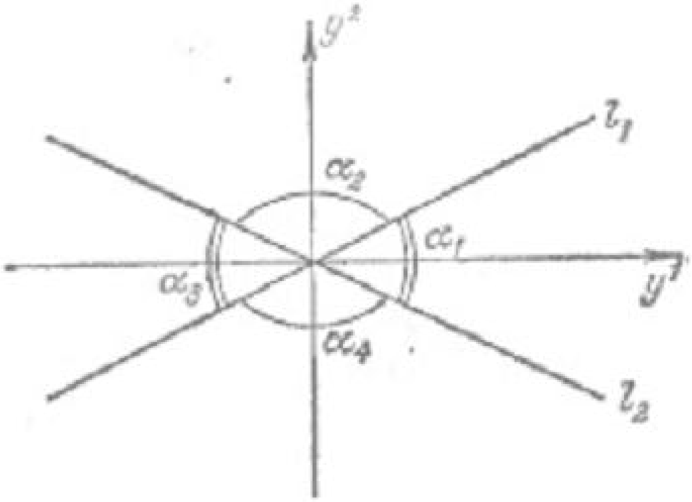

Рис. 50.

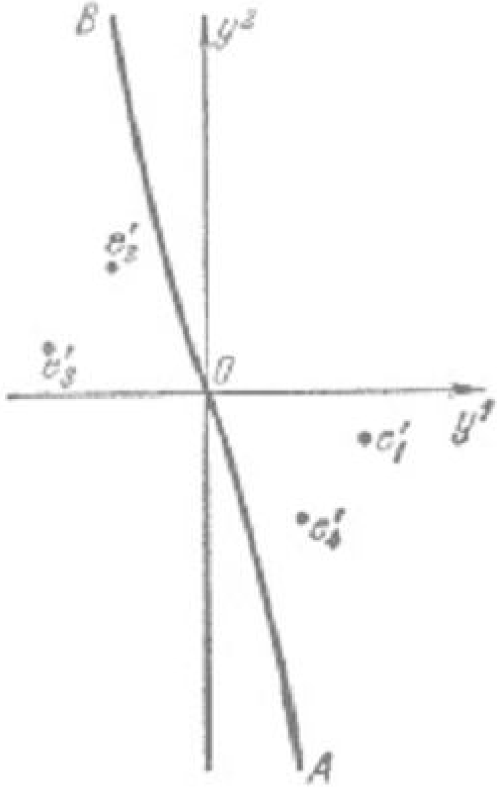

Рис. 51.

чений (т. е. в течение всего движения параметр v сохраняет постоянное значение, совпадающее с одной из вершин параллелограмма V), либо содержит только одно переключение, и тогда до переключения параметр v совпадает с одной из вершин e_1, e_3, а после переключения — с одной из вершин e_2, e_4.

Теперь нетрудно построить на плоскости π «линии переключения», определяющие синтез оптимальных управлений. Обозначим через AO траекторию системы $(56)_2$, оканчивающуюся в начале координат (рис. 51), а через BO — аналогичную траекторию системы $(56)_4$. Линии AO и BO симметричны относительно точки O. Если оптимальное движение содержит переключение (только одно в силу сказанного выше), то заключительный этап движения, завершающийся попаданием в начало координат, происходит в силу системы $(56)_2$ или $(56)_4$, т. е. вдоль линии AO или BO. До этого (т. е. до попадания на линию BOA) точка движется в силу системы $(56)_1$ или $(56)_3$. Таким образом, BOA есть линия переключений, а

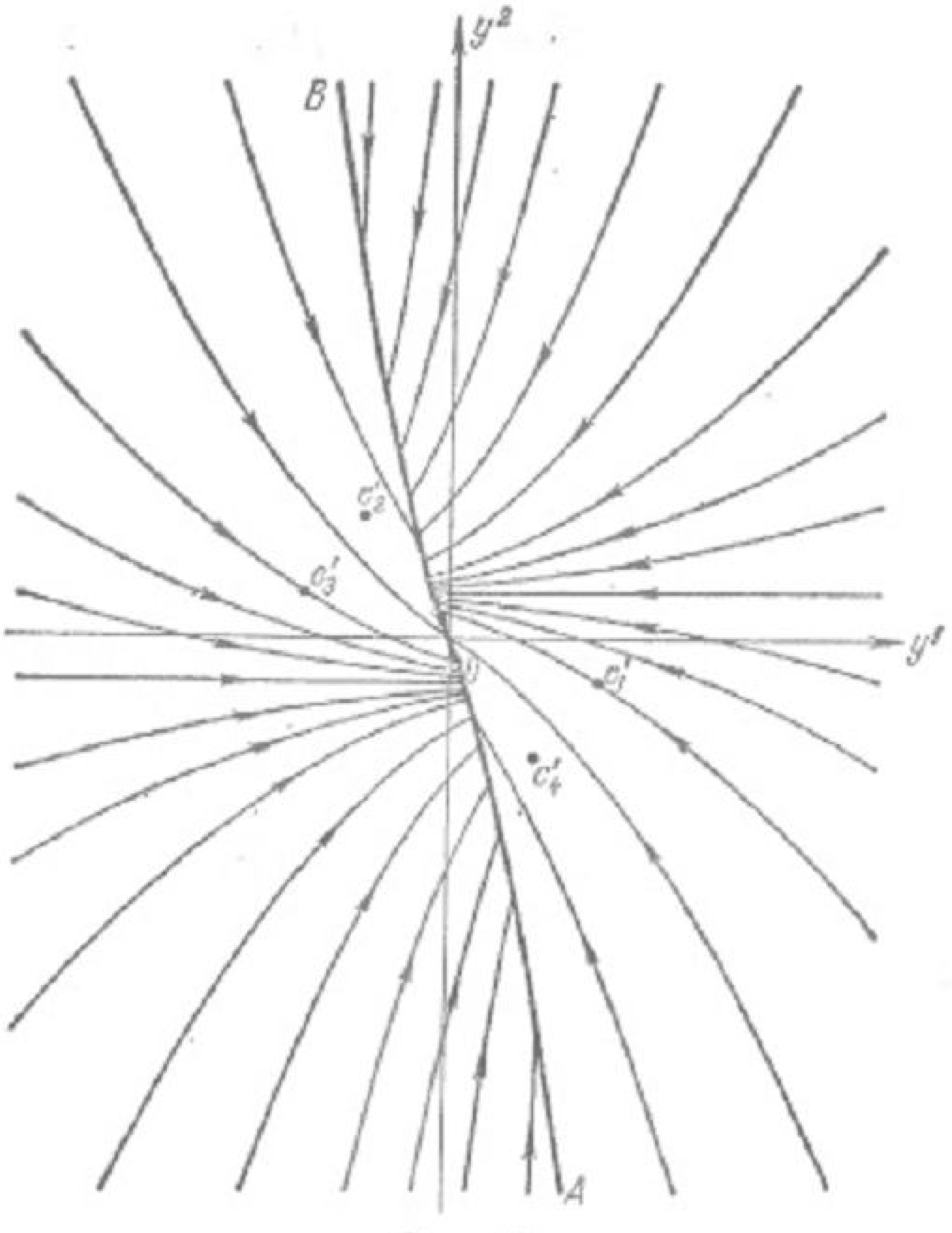

Рис. 52.

две области, на которые плоскость разбивается этой линией, заполнены траекториями систем $(56)_1$ и $(56)_3$ — правая область заполнена траекториями системы $(56)_3$, а левая — траекториями системы $(56)_1$. Это и дает синтез оптимальных управлений (рис. 52).

При переходе от переменных y^1, y^2 к исходным переменным x^1, x^2 фазовая картина оптимальных траекторий аффинно искажается.

Случай II. Прямые l_1 и l_2 расположены в одних и тех же квадрантах — например, в первом и третьем. Произведем нумерацию углов α_i (определяемых прямыми

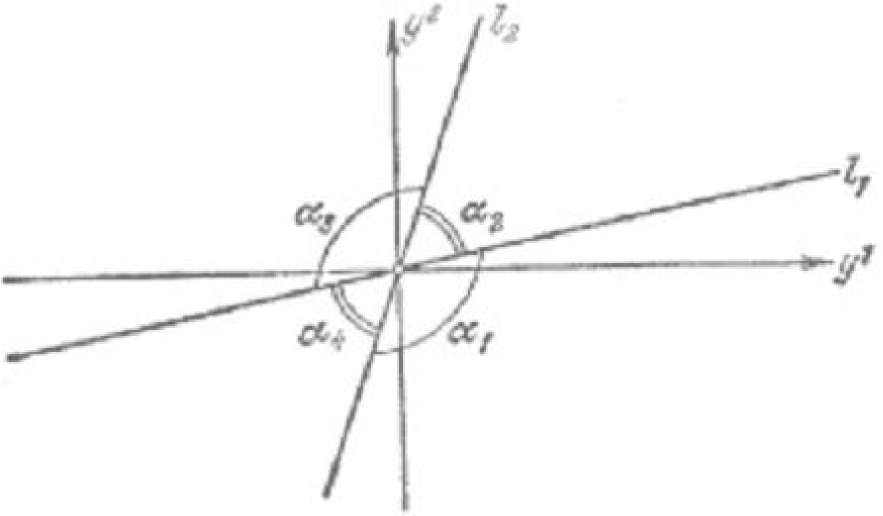

Рис. 53.

l_1 и l_2) так, как указано на рис. 53; соответствующая нумерация вершин параллелограмма V показана на рис. 54. Вспоминая характер изменения величин ψ_1 и ψ_2,

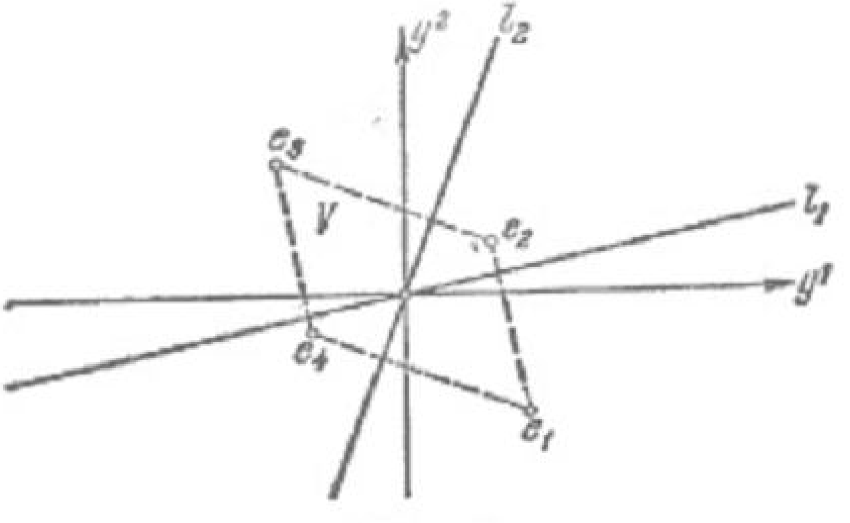

Рис. 54.

мы приходим к следующему выводу относительно оптимальных управлений. Если начальное значение ψ_0 вектора $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ расположено внутри четвертого квадранта (или на его сторонах), то при дальнейшем своем изменении вектор ψ не выйдет из этого квадранта, т. е. будет все время находиться внутри угла α_1. Следовательно, мы будем все время иметь $v = e_1$ (без переключений). Этому управлению соответствует траектория системы $(56)_1$, оканчивающаяся в начале координат (рис. 55). Аналогично, если начальное значение ψ_0 вектора ψ находится внутри или на сторонах второго квадранта, то мы будем иметь $v = e_3$ в течение всего движения, т. е. получим траекторию системы $(56)_3$, оканчивающуюся в начале координат (рис. 56). Все остальные оптимальные траектории соответствуют случаям, когда вектор ψ_0 расположен внутри первого или третьего квадрантов. Мы рассмотрим случай, когда ψ_0 лежит внутри

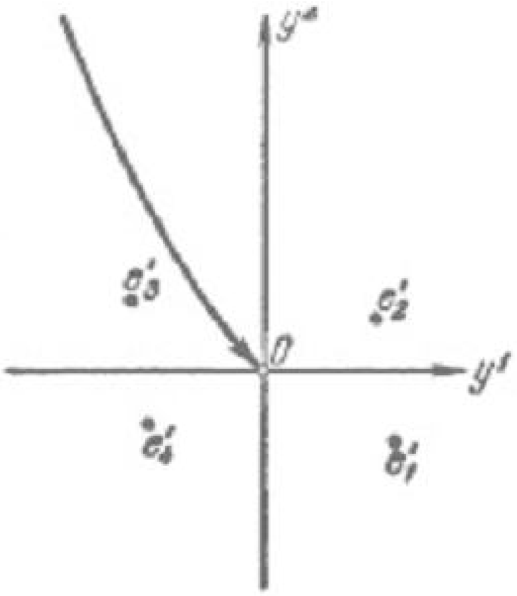

Рис. 55.

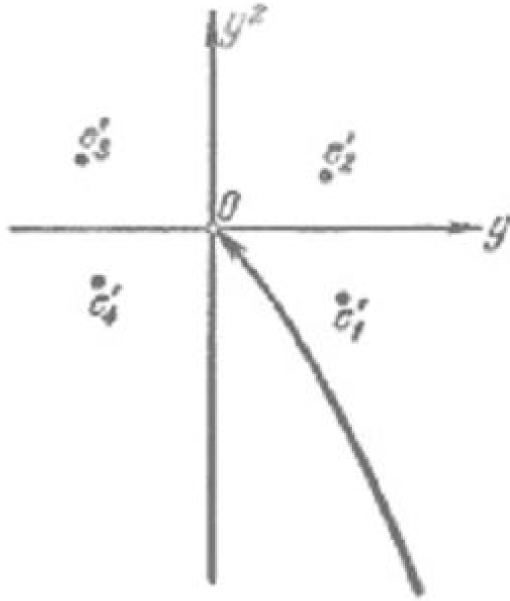

Рис. 56.

первого квадранта (случай третьего квадранта получается при помощи симметрии относительно начала координат).

Итак, пусть вектор ψ_0 расположен внутри первого координатного угла, но одновременно лежит в угле α_1. С течением времени вектор ψ монотонно поворачивается против часовой стрелки, приближаясь к оси ординат. Следовательно, оптимальное управление имеет два переключения: сначала $v = e_1$, затем, после первого переключения, $v = e_2$ и, наконец, после второго переключения, $v = e_3$. Мы сейчас покажем, что при наличии указанных двух переключений промежуток времени, в течение которого управляющий параметр v принимает значение e_2, имеет в п о л н е о п р е д е л е н н у ю д л и н у (независимо от выбора начальных условий). В самом деле, обозначим угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно через k_1, k_2 (где $k_1 \leq k_2$, см. рис. 53). Так как изменение вектора ψ описывается формулами

$$\psi_1 = c_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad \psi_2 = c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

(где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, так как вектор ψ расположен в первом квадранте), то момент переключения τ_1 из вершины e_1 в вершину e_2 (т. е. момент перехода вектора ψ через прямую l_1) определяется из соотношения

$$\frac{c_2 e^{-\lambda_2 \tau_1}}{c_1 e^{-\lambda_1 \tau_1}} = k_1.$$

Аналогично, момент переключения τ_2 из вершины e_2 в вершину e_3 (т. е. момент перехода вектора ψ через прямую l_2) определяется из соотношения

$$\frac{c_2 e^{-\lambda_2 \tau_2}}{c_1 e^{-\lambda_1 \tau_2}} = k_2.$$

Таким образом,

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{k_1 c_1}{c_2}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{k_2 c_1}{c_2},$$

и потому отрезок времени $[\tau_1, \tau_2]$, в течение которого управляющий параметр v принимает значение e_2, имеет длину

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\ln \frac{k_2 c_1}{c_2} - \ln \frac{k_1 c_1}{c_2} \right) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{k_2}{k_1}. \qquad (58)$$

Число, стоящее в правой части соотношения (58), не зависит от c_1 и c_2 (т. е. от начального значения ψ_0 вектора ψ), и мы обозначим его через T.

Итак, при изменении вектора ψ в первом квадранте оптимальные управления имеют следующий вид. Управляющий параметр v в течение некоторого времени принимает значение $v = e_1$, затем в течение времени T параметр v принимает значение $v = e_2$, после чего вплоть до окончания движения он принимает значение $v = e_3$.

Разумеется, число переключений может оказаться и меньшим, чем два. Например, мы могли бы начать рассмотрение движения в момент, когда управляющий параметр v уже принял значение e_2. Тогда мы получили бы, что параметр v в течение времени, *не превосходя-*

щего T, находится в вершине e_2, после чего переключается в вершину e_3. Точно так же могло бы оказаться, например, что движение закончилось (попаданием в начало координат) до момента переключения из вершины e_2 в вершину e_3. Иначе говоря, если управляющий параметр v совершает меньше двух переключений, то время пребывания его в вершине e_2 не превосходит T (причем переключение может происходить либо из вершины e_1 в вершину e_2, либо из e_2 в e_3).

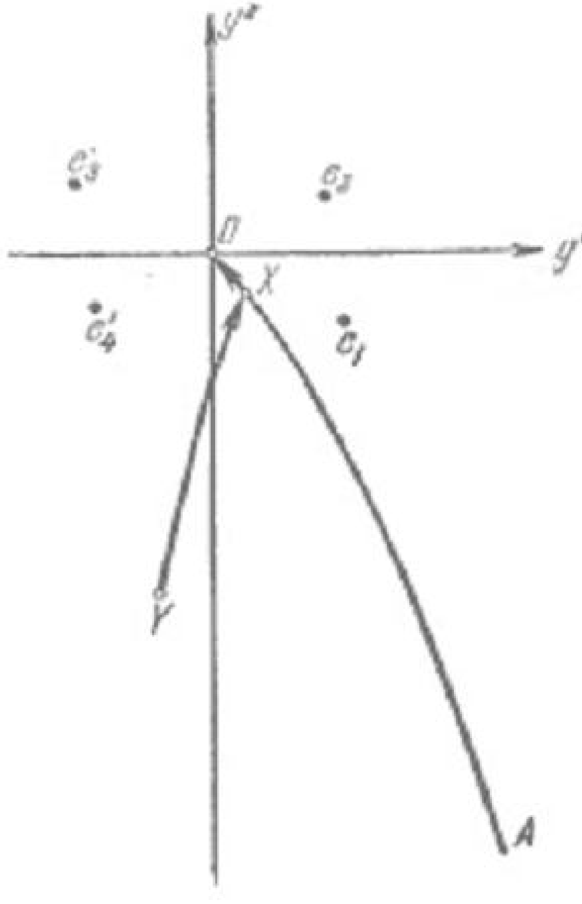

Рис. 57.

Теперь уже нетрудно построить на плоскости π «линии переключения», определяющие синтез оптимальных управлений. Наметим сначала траектории, соответствующие двум переключениям. Заключительный этап движения на таких траекториях соответствует значению параметра $v = e_3$, т. е. движение происходит по дуге AO траектории системы $(56)_3$, оканчивающейся в начале координат (рис. 56). Перед попаданием на линию AO движение происходило в силу системы $(56)_2$. Таким образом, AO есть линия переключения из вершины e_2 в вершину e_3. Пусть X — некоторая точка линии AO. Тогда предшествующий точке X участок YX оптимальной траектории представляет собой дугу траектории системы $(56)_2$, соответствующую отрезку времени T (рис. 57). Так как решения системы (57) имеют вид $y^1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y^2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$, то в результате движения точки по траектории этой системы в течение времени T ее абсцисса умножается на $e^{\lambda_1 T}$, а ордината — на $e^{\lambda_2 T}$. Система же $(56)_2$ отличается от системы (57) только сдвигом положения равновесия. Таким образом, точки X получаются из соответствующих точек Y (рис. 57) с помощью аффинного преобразования

L, которое в системе координат с началом в точке e_2' (см. (55)) и осями, параллельными осям y^1, y^2, заключается в умножении абсциссы на $e^{\lambda_1 T}$, а ординаты — на $e^{\lambda_2 T}$. Следовательно, геометрическое место точек Y представляет собой линию CB, переходящую в линию AO при аффинном преобразовании L (рис. 58). Наметив еще линию BO, представляющую собой дугу траектории системы $(56)_2$, оканчивающуюся в начале координат и соответствующую отрезку времени T, мы найдем, что вся «полоса» $AOBC$ заполнена кусками траекторий системы $(56)_2$, начинающимися на линии CB, кончающимися на линии AO и соответствующими отрезку времени T.

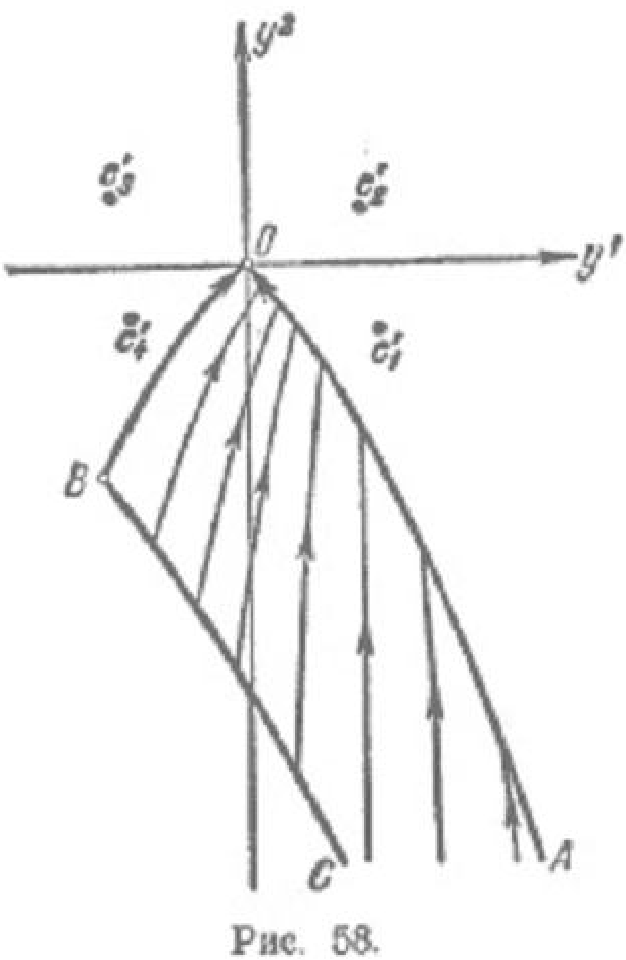

Рис. 58.

Итак, геометрическим местом точек Y, в которых происходит переключение из вершины e_1 в вершину e_2, служит линия CB. До точки Y движение совершалось по траектории системы $(56)_1$. В результате мы получаем траектории, соответствующие двум переключениям (рис. 59). «Крайняя» траектория DBO на рис. 59 соответствует одному переключению — фазовая точка попадает в начало координат как раз в тот момент, когда должно было бы произойти второе переключение (из вершины e_2 в вершину e_3).

Рассмотрим теперь траектории, соответствующие одному переключению из вершины e_1 в вершину e_2. Заключительный этап движения происходит в этом случае по траектории системы $(56)_2$ в течение времени, не превосходящего T, и оканчивается в начале координат, т. е. происходит по некоторой части ZO линии BO (рис. 60). До точки Z движение происходило в силу системы $(56)_1$. Когда точка Z пробегает всю дугу BO, траектории указанного вида заполняют «полосу» $DBOA'$ (рис. 61), где

$A'O$ — траектория системы $(56)_1$, оканчивающаяся в начале координат.

Объединяя все полученные оптимальные траектории, мы находим, что вся часть плоскости слева от линии

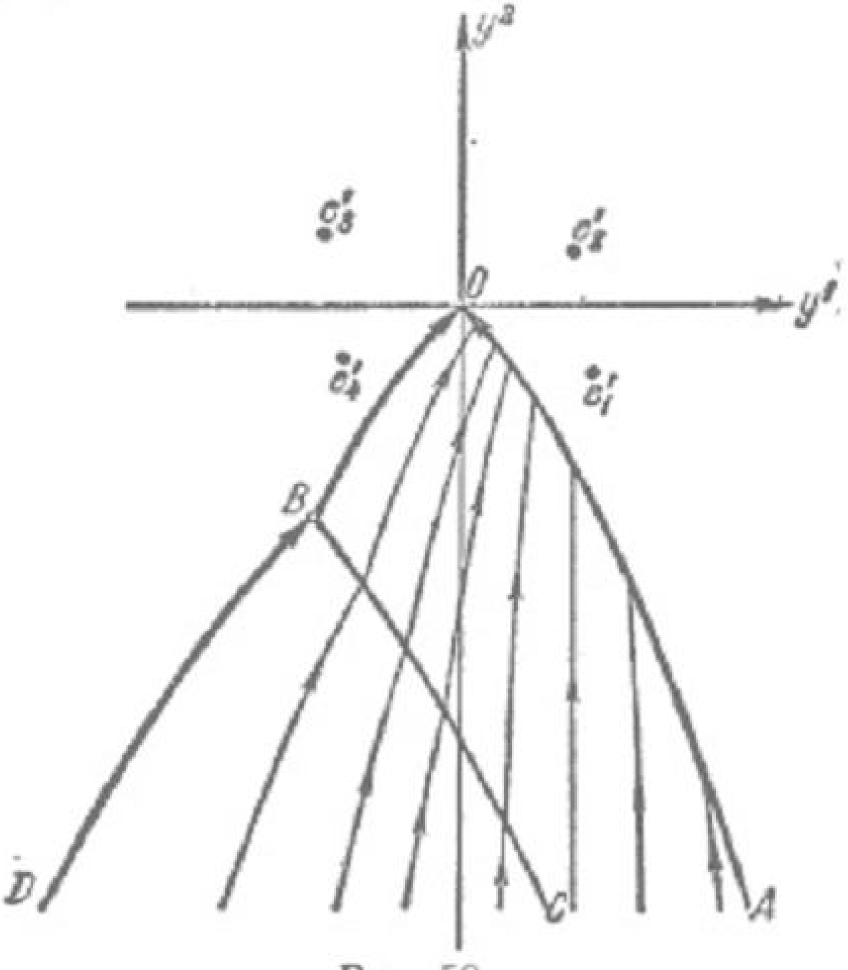

Рис. 59.

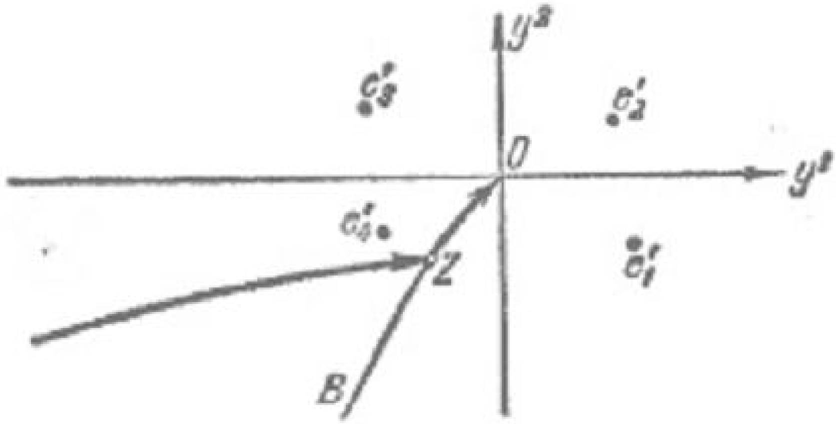

Рис. 60.

AOA' заполняется ими (рис. 59, 61). Очевидно, что линия $A'O$ симметрична линии AO относительно начала координат.

Справа от линии AOA' поведение траекторий симметрично, а переключения происходят из вершины e_3 в вершину e_4, а затем в e_1. В результате синтез оптимальных управлений осуществляется во всей плоскости (рис. 62). Вид оптимальных траекторий показан на рис. 63.

При переходе от переменных y^1, y^2 к переменным x^1, x^2 картина оптимальных траекторий аффинно искажается.

Пример 3

(Случай, когда многогранник U является одномерным, а собственные значения матрицы (a_j^i) действительны.)

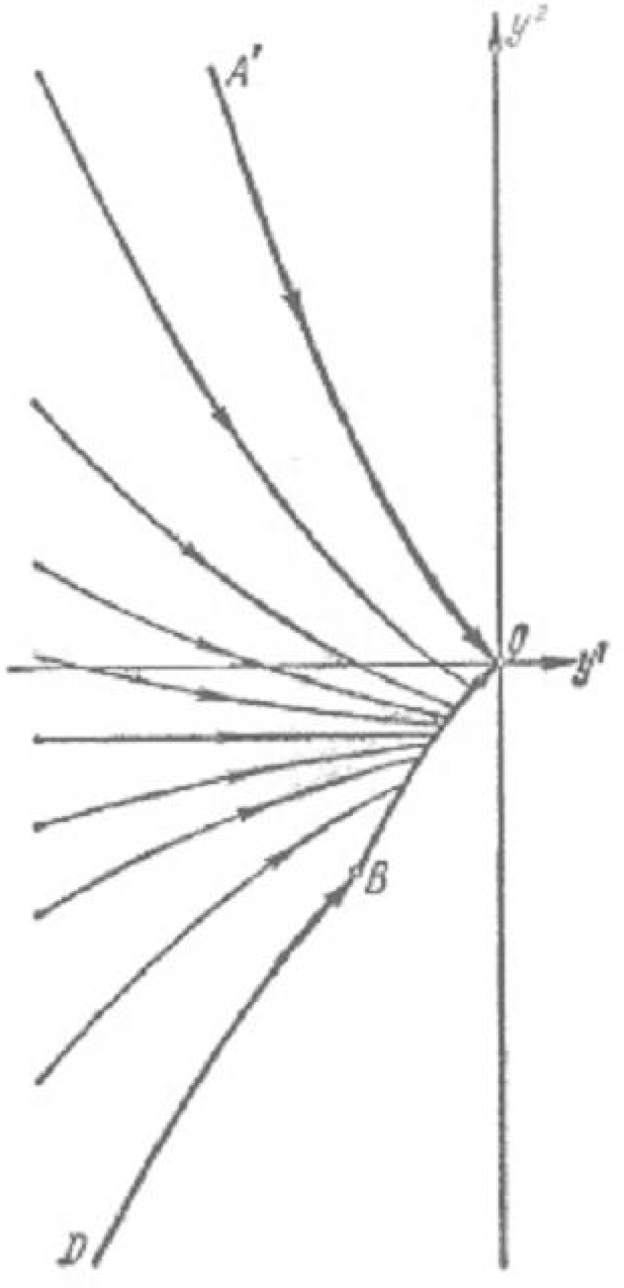

Рис. 61.

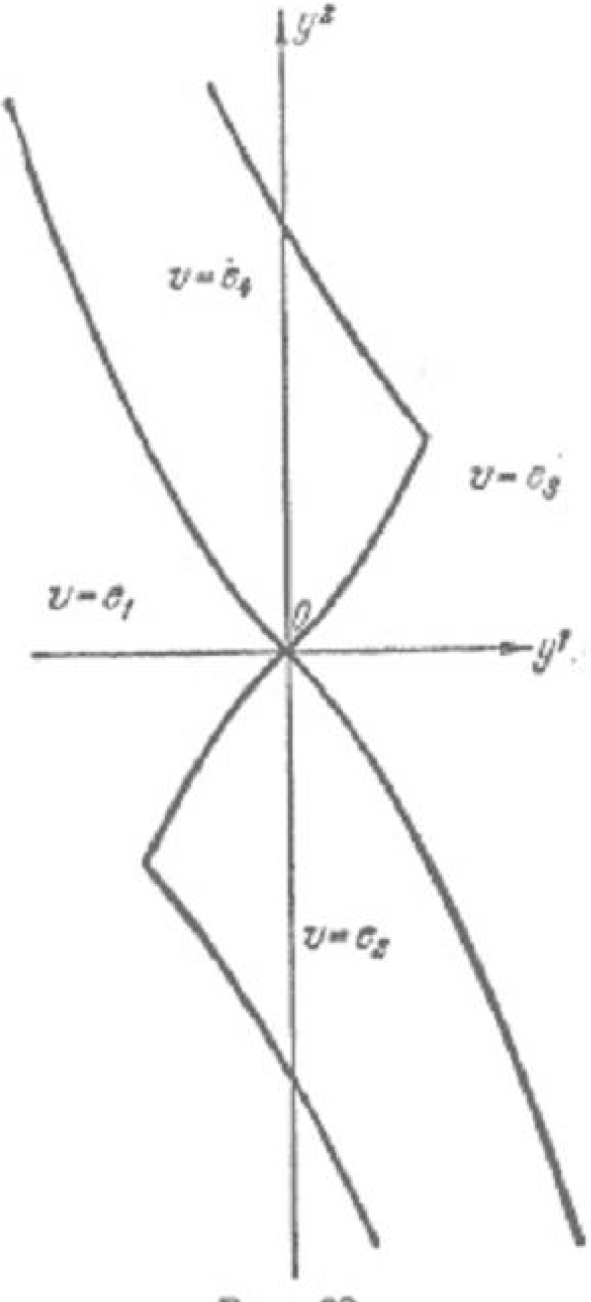

Рис. 62.

Предположим, что в системе (1) $r=1$, т. е. управляющий параметр u является действительным числом; предположим, кроме того, что это число может изменяться в пределах $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Таким образом, многогранник U представляет собой в рассматриваемом случае отрезок $[-1, 1]$ числовой оси, а система (1) принимает вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^i x^\nu + b^i u, \quad |u| \leqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (59)$$

Предположим, наконец, что собственные значения матрицы (a_j^i) действительны. Тогда, согласно теореме 10,

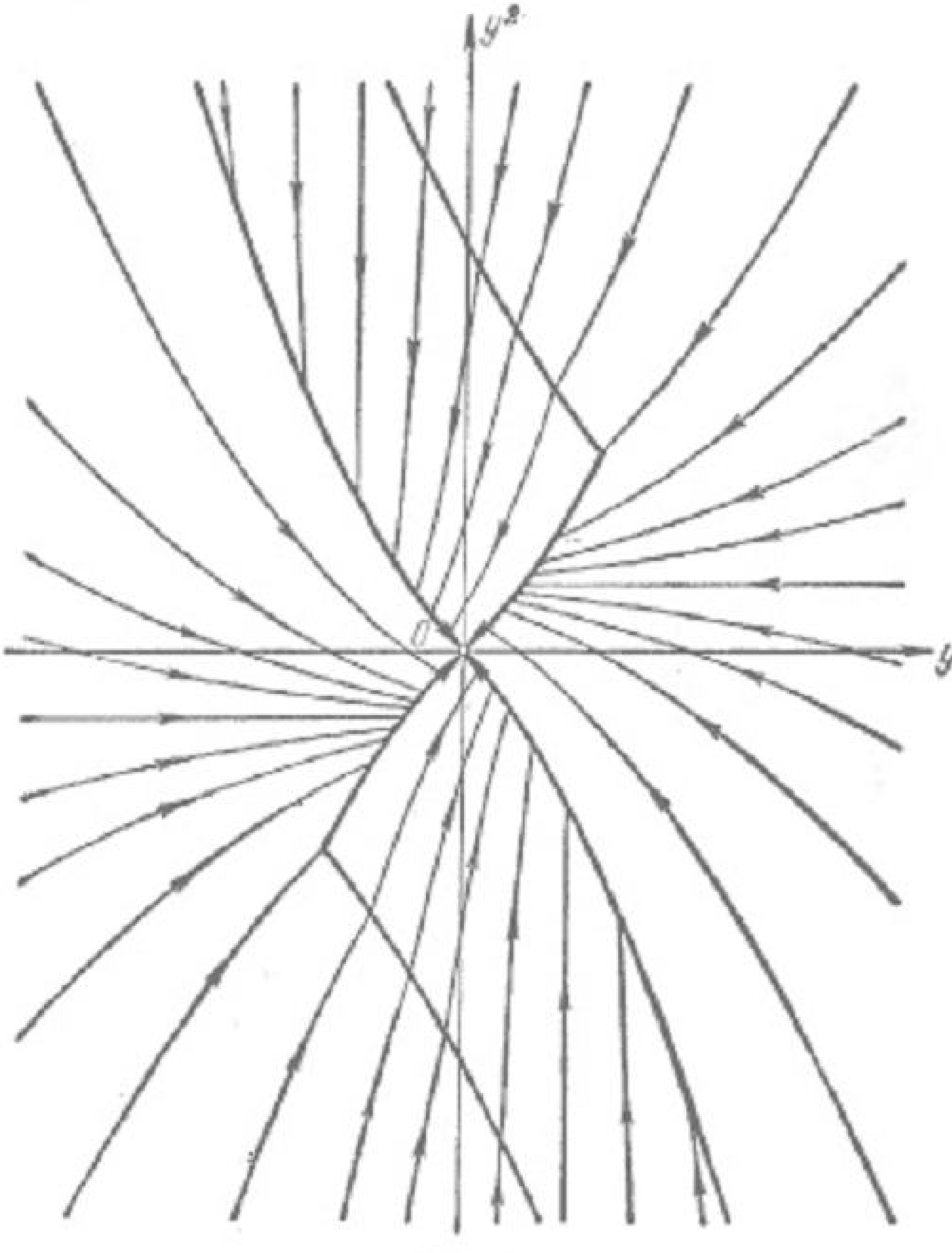

Рис. 63.

оптимальное управление содержит не более n интервалов постоянства, причем на этих интервалах поочередно $u = +1$ и $u = -1$.

Иначе говоря, на каждом интервале постоянства движение происходит в силу одной из двух следующих систем:

$$\frac{dx^i}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n} a^i_\nu x^\nu + b^i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (60)_+$$

$$\frac{dx^i}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n} a^i_\nu x^\nu - b^i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (60)_-$$

Обозначим через M_n^+ траекторию системы $(60)_+$, оканчивающуюся в начале координат, а через M_n^- — траекторию системы $(60)_-$, оканчивающуюся в начале координат. Вместе M_n^+ и M_n^- составляют проходящую через начало координат линию, которую мы обозначим

Рис. 64.

через M_n (рис. 64). В силу сказанного выше о характере оптимальных управлений ясно, что заключительный этап оптимального движения (завершающийся попаданием в начало координат) представляет собой движение по линии M_n^+ или M_n^-.

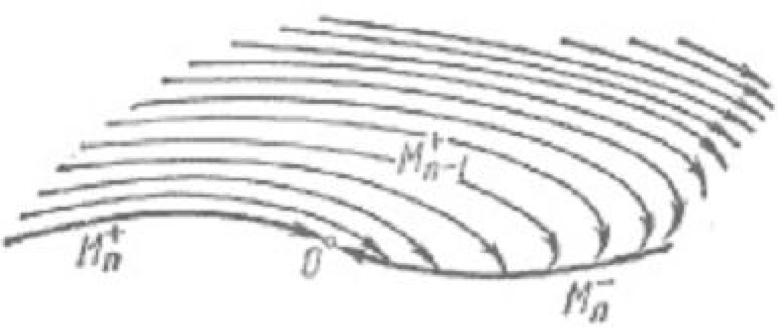

Рис. 65.

Рассмотрим теперь всевозможные траектории системы $(60)_+$, оканчивающиеся в точках линии M_n^- (рис. 65). Эти траектории заполняют некоторую поверхность M_{n-1}^+, имеющую в качестве своего края линию M_n. Аналогично, траектории системы $(60)_-$, оканчивающиеся в точках линии M_n^+, заполняют некоторую поверхность M_{n-1}^-, имеющую в качестве своего края линию M_n. Объединив M_{n-1}^+ и M_{n-1}^- вместе, мы получаем поверхность, которую обозначим через M_{n-1} (рис. 66). Ясно, что последние два этапа всякого оптимального движения совершаются по поверхности M_{n-1}, ибо только по траекториям этой поверхности можно попасть на линию M_n, по которой совершается заключительный этап движения.

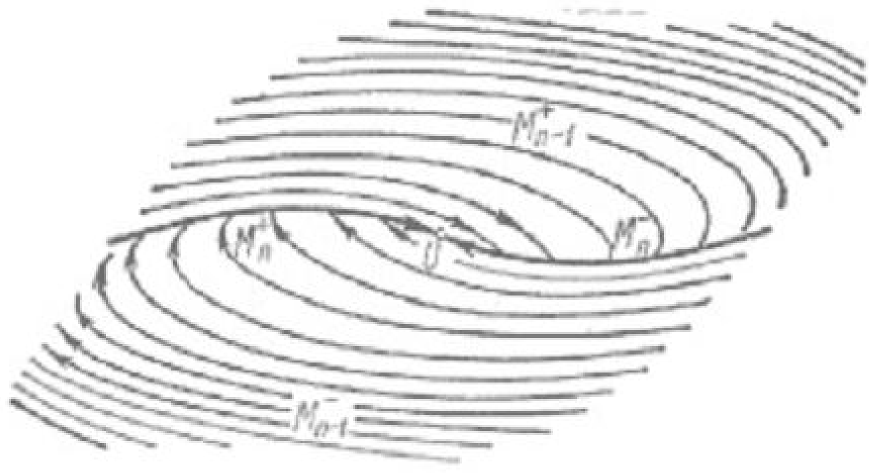

Рис. 66.

Далее, траектории системы $(60)_+$, оканчивающиеся в точках поверхности M_{n-1}^-, образуют трехмерное многообразие M_{n-2}^+, краем которого служит поверхность M_{n-1}. Траектории системы $(60)_-$, оканчивающиеся в точках поверхности M_{n-1}^+, образуют трехмерное многообразие M_{n-2}^- с краем M_{n-1}. Вместе M_{n-2}^+ и M_{n-2}^- образуют трехмерное многообразие M_{n-2}, в котором совершаются последние три этапа всякого оптимального движения.

Продолжая таким образом, мы построим многообразия $M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1$, причем многообразие M_i имеет размерность $n-i+1$. Многообразие M_{i+1} расположено целиком в многообразии M_i и разбивает это многообразие на две области M_i^+ и M_i^-. При этом область M_i^+ образована всевозможными траекториями системы $(60)_+$, оканчивающимися на M_{i+1}^-, а область M_i^- образована всевозможными траекториями системы $(60)_-$, оканчивающимися на M_{i+1}^+. Последнее многообразие M_1 либо совпадает со всем фазовым пространством X, либо представляет собой некоторую область этого пространства, содержащую начало координат. Внутри этой области M_1 и осуществляется синтез оптимальных управлений.

Этот синтез осуществляется следующим образом: во всех областях M_i^+ управляющий параметр u принимает значение $+1$, а во всех областях M_i^- он принимает значение -1. Фазовая точка двигается в области M_1, причем $u=+1$, если она находится в M_1^+, и $u=-1$, если она находится в M_1^-. В момент попадания на многообразие M_2 происходит переключение, и все дальнейшее движение совершается по многообразию M_2. Следующий момент переключения наступает тогда, когда точка, двигаясь по M_2, попадает на многообразие M_3. После этого точка продолжает двигаться по M_3 и т. д. Заключительный этап движения, завершающийся попаданием в начало координат, происходит по линии M_n. Таким образом, всего за время движения происходит $n-1$ переключений. Разумеется, при некоторых начальных положениях фазовой точки число переключений может оказаться и меньшим, чем $n-1$ (например, может оказаться, что точка x_0 расположена на многообразии M_2, или же на многообразии M_3 и т. п.).

Пример 1 в § 5 является частным случаем указанного общего построения.

Пример 4

Поставим следующую задачу. В n-мерном евклидовом пространстве движется управляемая точка, причем «двигатель» ее может сообщать этой точке ускорение, не превосходящее по модулю единицы и направленное в любую сторону. Как следует управлять движением этой точки, чтобы, имея заданное начальное положение и заданную начальную скорость, она за кратчайшее время попала в начало координат (с произвольной конечной скоростью)?

Для решения этой задачи обозначим координаты движущейся точки через $x^1, x^2, \ldots, x^n$, компоненты ее скорости — через $x^{n+1}, \ldots, x^{2n}$, а компоненты ускорения — через $u^1, \ldots, u^n$. Массу точки примем равной единице.

Тогда уравнения движения точки запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx^1}{dt} &= x^{n+1},\\
\frac{dx^2}{dt} &= x^{n+2},\\
&\cdots\cdots\\
\frac{dx^n}{dt} &= x^{2n},\\
\frac{dx^{n+1}}{dt} &= u^1,\\
\frac{dx^{n+2}}{dt} &= u^2,\\
&\cdots\cdots\\
\frac{dx^{2n}}{dt} &= u^n.
\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Так как ускорение $u=(u^1, \ldots, u^n)$ должно по модулю не превосходить единицы, то область управления U определяется неравенством

$$(u^1)^2+(u^2)^2+\ \ldots\ +(u^n)^2 \leqslant 1. \qquad (62)$$

Далее, так как начальное положение и начальная скорость точки заданы, то в фазовом пространстве X переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots, x^{2n}$ задано начальное положение $x_0=(x_0^1, \ldots, x_0^{2n})$. Требование попадания в начало координат (с произвольной конечной скоростью) означает, что в конечный момент движения должны быть выполнены соотношения

$$x^1=x^2=\ \ldots\ =x^n=0, \qquad (63)$$

а величины $x^{n+1}, \ldots, x^{2n}$ могут быть произвольными. Иначе говоря, задача заключается в быстрейшем попадании объекта, управляемого уравнениями (61), (62), из начальной точки $x_0 \in X$ в какую-либо точку многообразия S_1, определяемого в X уравнениями (63). Многообразие S_1 представляет собой, очевидно, n-мерную плоскость.

Функция H имеет в рассматриваемом случае следующий вид:

$$H=\psi_1 x^{n+1}+\ldots+\psi_n x^{2n}+\psi_{n+1}u^1+\ldots+\psi_{2n}u^n; \quad (64)$$

с помощью этой функции находим систему уравнений для вспомогательных переменных ψ_i:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d\psi_n}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\psi_1,$$

$$\frac{d\psi_{n+2}}{dt} = -\psi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\psi_{2n}}{dt} = -\psi_n.$$

Из этой системы вытекает, что в течение всего оптимального движения величины $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ сохраняют постоянные значения, и потому величины $\psi_{n+1}, \psi_{n+2}, \ldots$ $\ldots, \psi_{2n}$ являются линейными функциями времени.

Напишем теперь условие трансверсальности в правом конце оптимальной траектории. Для того чтобы вектор $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_{n+1}, \ldots, \psi_{2n})$ был ортогонален к многообразию S_1, определяемому уравнениями (63), очевидно, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\psi_{n+1} = \psi_{n+2} = \ldots = \psi_{2n} = 0.$$

Таким образом, условие трансверсальности в правом конце оптимальной траектории имеет вид

$$\psi_{n+1}(t_1) = \psi_{n+2}(t_1) = \ldots = \psi_{2n}(t_1) = 0, \tag{65}$$

где t_1 — момент попадания фазовой точки на многообразие S_1. Вспоминая теперь, что функции $\psi_{n+1}, \psi_{n+2}, \ldots$ $\ldots, \psi_{2n}$ линейны, мы находим из (65), что имеют место формулы

$$\psi_{n+1} = a_1(t_1 - t), \quad \psi_{n+2} = a_2(t_1 - t), \ \ldots, \ \psi_{2n} = a_n(t_1 - t), \tag{66}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные величины. Так как величины ψ_i определены лишь с точностью до общего положительного множителя пропорциональности, то мы можем при этом предполагать, что вектор $a = (a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n)$ является единичным, т. е.

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 + \ldots + (a_n)^2 = 1.$$

Подставляя найденные значения (66) в формулу (64), мы получаем

$$H = \ldots + (t_1 - t)(a_1u^1 + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n),$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от $u^1, \ldots, u^n$. Так как $t_1 - t > 0$ (ибо t_1 — последний момент движения), то условие максимума функции H означает, что в течение всего движения величина

$$a_1u^1 + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n = (a, u)$$

должна быть максимальной, а это, в силу (62), означает, что $u(t) \equiv a$, т. е. что величины $u^1, u^2, \ldots, u^n$ в течение всего движения сохраняют постоянные значения $u^i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Итак, в рассматриваемом случае оптимальность движения означает, что ускорение u постоянно и величина его равна единице. Это позволяет однозначно определить искомое ускорение (т. е. найти направление вектора ускорения u). В самом деле, траектория движения точки в рассматриваемом евклидовом пространстве представляет собой параболу

$$x^i = x_0^i + x_0^{n+i}t + u^i\frac{t^2}{2}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $u = (u^1, \ldots, u^n)$ — постоянный вектор ускорения, равный по величине единице, т. е. удовлетворяющий условию

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^n)^2 = 1. \tag{67}$$

Для того чтобы эта траектория прошла через начало координат, должны выполняться условия

$$x_0^i + x_0^{n+i}t + u^i\frac{t^2}{2} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{68}$$

Соотношения (67), (68) представляют собой систему из $n+1$ уравнений относительно неизвестных $u^1, u^2, \ldots, u^n, t$, причем для t мы должны получить положительное значение. В случае, если таких решений окажется несколько, мы должны взять решение с н а и м е н ь ш и м положительным значением t (ибо речь идет о б ы с т р е й ш е м попадании в начало координат). Из (68) мы получаем

$$u^i = -\frac{2\left(x_0^i + x_0^{n+i} t\right)}{t^2}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{69}$$

и подстановка в соотношение (67) дает уравнение

$$4\sum_{i=1}^{n}\left(x_0^i + x_0^{n+i} t\right)^2 - t^4 = 0 \tag{70}$$

относительно неизвестного t. При $t=0$ левая часть этого уравнения принимает значение $4\sum_{i=1}^{n}\left(x_0^i\right)^2 > 0$ (разумеется, мы считаем, что точка $\left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$ не совпадает с началом координат, так как в противном случае решение оптимальной задачи очевидно: $t=0$). При $t \to \infty$ левая часть уравнения (70) отрицательна. Следовательно, уравнение (70) имеет хотя бы один положительный корень. Обозначим через $\tau(x_0) = \tau\left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x, x_0^{n+1}, \ldots, x_0^{2n}\right)$ н а и м е н ь ш и й положительный корень этого уравнения. Тогда из (69) мы находим искомые значения компонент ускорения

$$u^i = -\frac{2\left(x_0^i + x_0^{n+i}\tau(x_0)\right)}{(\tau(x_0))^2}.$$

Это и дает синтез оптимальных управлений в рассматриваемом случае. (Функция $\tau(x_0)$, а следовательно, и функции u^i кусочно-непрерывны.)

§ 22. Моделирование линейных оптимальных быстродействий при помощи релейных схем

Возвратимся снова к задаче о линейных оптимальных быстродействиях, рассмотренной в § 17. В силу теоремы 9 каждая экстремальная траектория (см. стр. 144), исходящая в момент t_0 из точки x_0, определяется начальными значениями $\psi(t_0)$ решения $\psi(t)$ уравнения (5). Именно, если задан произвольный отличный от нуля вектор ψ_0, то однозначно определено решение $\psi(t)$ уравнения (5) с начальным условием $\psi(t_0) = \psi_0$. После этого, в силу теоремы 9, соотношение (6) однозначно определяет соответствующее экстремальное управление $u(t)$. Наконец, зная управление $u(t)$, мы из уравнения (2) находим и соответствующую траекторию $x(t)$, исходящую из точки x_0. Таким образом, в конечном счете экстремальная траектория $x(t)$ однозначно определяется выбором начального значения ψ_0. Если бы нам удалось найти именно такое начальное значение ψ_0, что траектория $x(t)$ *проходит через начало координат* O, то управление $u(t)$ и траектория $x(t)$, полученные указанным выше способом, будут оптимальными. В самом деле, полученная траектория $x(t)$ будет идти в этом случае из точки x_0 в требуемую точку O, и потому оптимальное управление существует (теорема 13). Это оптимальное управление единственно (теорема 11) и удовлетворяет принципу максимума, т. е. является экстремальным (стр. 144). Но экстремальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в начало координат, также единственно (теорема 12). Таким образом, экстремальное управление, переводящее фазовую точку в начало координат, как раз и является оптимальным управлением.

Следует отметить, что *вычисление* траектории $x(t)$, соответствующей начальному значению ψ_0, является довольно трудоемким. Действительно, эта задача включает в себя решение уравнения (5), нахождение функции $u(t)$ по формуле (6) и, наконец, решение уравнения (2), что сводится к решению *нескольких* систем дифференциальных уравнений с последовательным «припасовыванием» начальных значений (ибо функция $u(t)$ получается, вообще говоря, не постоянной, а лишь кусочно-постоянной).

Если предположить, что нахождение траектории $x(t)$ по начальному значению ψ_0 осуществляется некоторым *прибором*, то остается *задача поиска* начального значения ψ_0, при котором траектория $x(t)$ проходит через O.

В этом параграфе, не касаясь второй задачи (задачи поиска начальных значений ψ_0), мы укажем способ построения *моделирующего устройства*, позволяющего по начальному значению ψ_0 находить соответствующую экстремальную траекторию $x(t)$. Это моделирующее устройство состоит из двух линейных объектов с уравнениями (2) и (5) и некоторого числа релейных элементов, количество и схема соединения которых определяются многогранником U и оператором B.

Переходим к математическому описанию указанного моделирующего устройства. Рассмотрим линейный объект, фазовые состояния которого описываются переменными $\psi_1, \ldots, \psi_n$, изменяющимися по закону (5). Этот объект мы будем условно изображать так, как показано на рис. 67. Задание начальных значений для величин $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (т. е. задание вектора ψ_0) однозначно

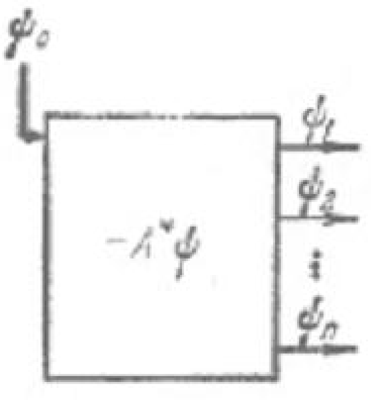

Рис. 67.

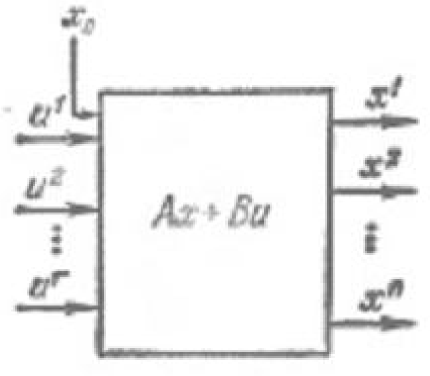

Рис. 68.

определяет дальнейшее изменение величин $\psi_1, \ldots, \psi_n$ во времени. Исходный объект (описываемый уравнением (2)) мы будем изображать так, как показано на рис. 68. Для того чтобы однозначно было определено изменение (во времени) выходных величин (т. е. фазовых координат) $x^1, \ldots, x^n$, нужно задать начальное фазовое состояние x_0 объекта и изменение (во времени) входных величин $u^1, \ldots, u^r$ (т. е. управляющих параметров). Требуемое моделирующее устройство имеет вид, указанный на рис. 69; средний «ящик», помещенный между объектами, изображенными на рис. 67 и 68, содержит некоторое количество релейных элементов. Описанию этого среднего «ящика» и посвящена остальная часть параграфа.

Прежде всего отметим частные случаи, в которых устройство среднего «ящика» особенно просто. Рассмотрим сначала случай, когда в уравнение (2) входит только один управляющий параметр u, изменяющийся в пределах $-1 \leqslant u \leqslant 1$ (т. е. случай, когда многогранник U

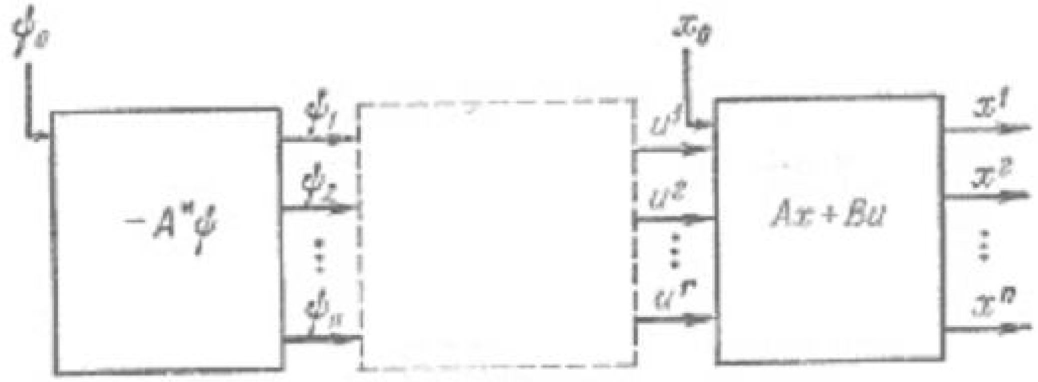

Рис. 69.

представляет собой отрезок $[-1, 1]$). В этом случае матрица (b_i^j) превращается в **столбец** $(b^1, b^2, \ldots, b^n)$, а функция (7) имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t)\, b^\alpha u.$$

Поэтому уравнение (6) имеет следующее решение:

$$u = \operatorname{sign}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} b^\alpha \psi_\alpha(t)\right). \tag{71}$$

Иначе говоря, если мы введем в рассмотрение вспомогательную величину

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^{n} b^\alpha \psi_\alpha. \tag{72}$$

то решение уравнения (6) будет определяться формулой

$$u = \operatorname{sign} \xi. \tag{73}$$

Переход от величин $\psi_1, \ldots, \psi_n$ к величине ξ, определяемой формулой (72), осуществляется некоторым *сумми-*

рующим устройством, условно изображенным на рис. 70. На рис. 71 показано условное изображение *релейного элемента*, т. е. объекта, выходная и входная величины которого связаны соотношением $\eta = \operatorname{sign} \xi$.

Соединим теперь объекты, изображенные на рис. 67, 68, 70, 71, в одну схему (рис. 72). Ясно, что, каков бы ни был начальный вектор ψ_0, на выходе первого звена (в изображенной на рис. 72 схеме) мы

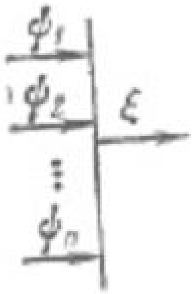

Рис. 70.

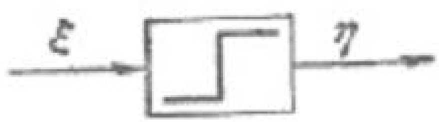

Рис. 71

получаем величины $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$, составляющие решение уравнения (5). Эти величины в следующем звене (обведенном пунктиром) преобразуются по формулам (72), (73), так что на выходе этого звена мы получаем

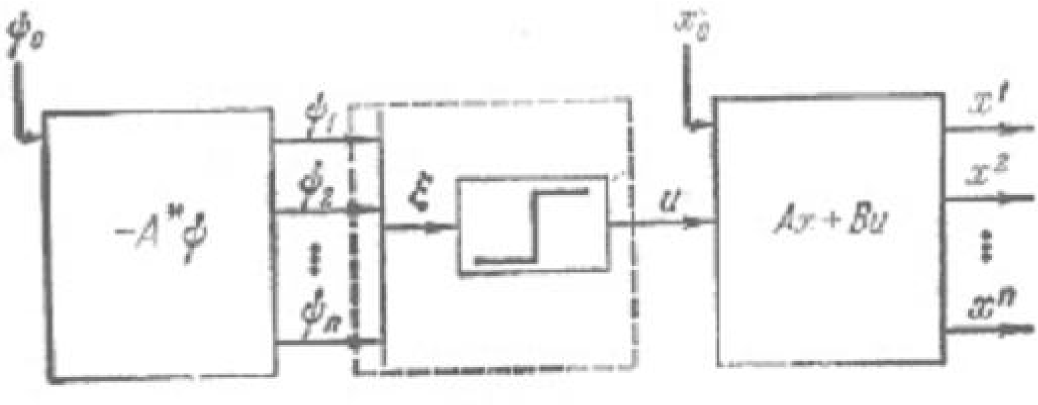

Рис. 72.

величину (71), являющуюся решением уравнения (6). Иначе говоря, на выходе второго звена мы получаем экстремальное управление $u(t)$, и потому выходные величины $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ последнего звена будут давать соответствующую экстремальную траекторию. Иначе говоря, *схема, изображенная на рис. 72, при любых начальных значениях* ψ_0, x_0 *осуществляет движение объекта* (2) *с фазовыми координатами* $x^1, \ldots, x^n$ *по соответствующей экстремальной траектории.* Если схема, изображенная на рис. 72, осуществлена в виде прибора (моделирующего устройства), то при использовании такого прибора остается нерешенной лишь задача поиска начального значения ψ_0, для которого (при заданном начальном значении x_0) получаемая траектория приходит в начало координат.

Проведенные рассуждения легко обобщаются также на тот случай, когда область управления U является r-мерным *кубом*, т. е. определяется неравенствами

$$|u^i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{74}$$

В этом случае функция (7) имеет вид

$$\sum_{\beta=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t)\, b_\beta^\alpha u^\beta. \tag{75}$$

Так как, в силу (74), область изменения каждого из управляющих параметров $u^1, \ldots, u^r$ не зависит от того, какие значения приняли остальные управляющие параметры, то для того, чтобы функция (75) принимала максимальное значение, необходимо, чтобы каждое ее отдельное слагаемое

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t)\, b_\beta^\alpha u^\beta$$

при $\beta = 1, \ldots, r$ принимало максимальное значение. Отсюда получим

$$u^\beta = \operatorname{sign}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t)\, b_\beta^\alpha\right).$$

Иначе говоря, если мы введем в рассмотрение вспомогательные величины

$$\xi_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\beta^\alpha \psi_\alpha, \quad \beta = 1, \ldots, r, \tag{76}$$

то решение уравнения (6) будет определяться формулами:

$$u^\beta = \operatorname{sign} \xi_\beta, \quad \beta = 1, \ldots, r.$$

Переход от величин $\psi_1, \ldots, \psi_n$ к величинам $\xi_1, \ldots, \xi_r$ осуществляется суммирующим устройством, условно изображенным на рис. 73. Из сказанного ясно, что схема, изображенная на рис. 74, вырабатывает на выходе релейных элементов экстремальное управление $u^1(t), \ldots, u^r(t)$, а на выходе последнего звена — соответствующую экстремальную траекторию $x(t)$. Отметим, что число релейных элементов в этой схеме равно числу управляющих параметров.

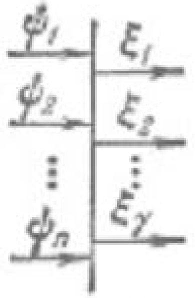

Рис. 73.

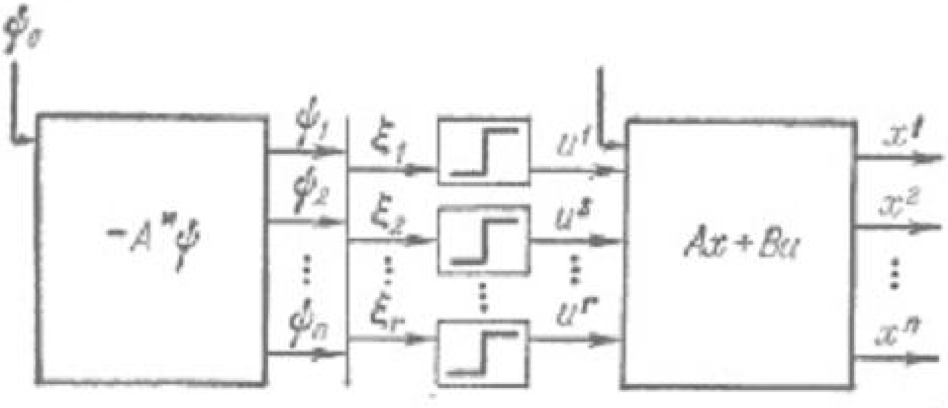

Рис. 74.

Наконец, перейдем к рассмотрению общего случая, когда многогранник U произволен. Пусть

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_\gamma \tag{77}$$

— попарно неколлинеарные векторы, имеющие направление ребер многогранника U (т. е. каждый из векторов (77) параллелен хотя бы одному ребру многогранника U и для каждого ребра имеется в системе (77) один параллельный ему вектор). Координаты вектора w_j будем обозначать через $w_j^1, \ldots, w_j^r$. Положим

$$\xi_j = (\psi, Bw_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{r} \psi_\alpha b_\rho^\alpha w_j^\rho, \qquad j = 1, \ldots, \gamma. \tag{78}$$

Таким образом, переменные $\xi_1, \ldots, \xi_\gamma$ являются линейными формами (вообще говоря, линейно зависимыми) от $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Переход от переменных ψ_i к переменным ξ_j мы будем изображать так, как показано на рис. 75. Значения величин ξ_j определяются величинами ψ_i, но обратного воздействия на них не оказывают (это выражено на рис. 75 направлением стрелок).

Каждую из величин ξ_j мы подадим на свой релейный элемент; выходы этих релейных элементов обозначим через $\eta_1, \ldots, \eta_\gamma$ (рис. 76):

$$\eta_j = \operatorname{sign} \xi_j, \quad j = 1, \ldots, \gamma. \tag{79}$$

Пусть теперь $e_1, \ldots, e_q$ — все вершины многогранника U. Рассмотрим какую-либо одну вершину e_i и пусть j — одно из чисел $1, 2, \ldots, \gamma$. Если исходящий из вершины e_i вектор, равный w_j, идет по одному из ребер многогранника U, примыкающих к этой вершине, то мы положим $\varepsilon_{ij} = +1$. Если исходящий из вершины e_i вектор,

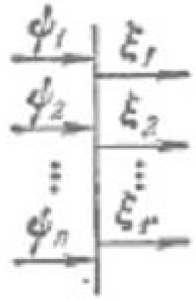

Рис. 75.

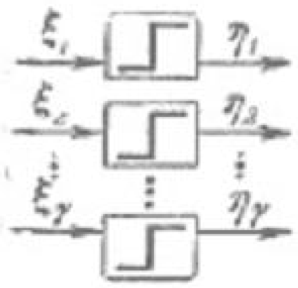

Рис. 76.

равный $-w_j$, идет по одному из ребер многогранника U, примыкающих к этой вершине, то мы положим $\varepsilon_{ij} = -1$. Если же ни один из этих двух случаев места не имеет, то символ ε_{ij} не определяется.

Фиксируем некоторый индекс $i (= 1, 2, \ldots, q)$ и будем рассматривать только такие индексы j, для которых символ ε_{ij} определен. Тогда векторы $\varepsilon_{ij} w_j$ (рассматриваемые для указанных индексов j) направлены по ребрам многогранника U, исходящим из вершины e_i. Пусть теперь $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ — произвольный отличный от нуля вектор. Обозначим через $B^*\psi$ вектор пространства E_r, имеющий i-ю координату $\sum_{\alpha=1}^{n} b_i^\alpha \psi_\alpha$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда для любого вектора u пространства E_r, как легко видеть, имеет место соотношение

$$(B^*\psi, u) = (\psi, Bu). \tag{80}$$

Проведем теперь в пространстве E_r гиперплоскость Λ, проходящую через точку e_i и ортогональную вектору $B^*\psi$, а вектор $B^*\psi$ будем считать исходящим из точки e_i. Для того чтобы величина (ψ, Bu), рассматриваемая как функция точки $u \in U$, достигала своего наибольшего значения только в одной вершине e_i, необходимо и достаточно (в силу (80)), чтобы весь многогранник U находился в том полупространстве, определяемом гиперплоскостью Λ, которое не содержит вектора $B^*\psi$, а для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы каждый вектор, исходящий из точки e_i и направленный по ребру многогранника U, составлял с вектором $B^*\psi$ тупой угол. Иначе говоря, для того чтобы уравнение

$$(\psi, Bu) = P(\psi) \tag{81}$$

имело единственное решение $u = e_i$, необходимо и достаточно, чтобы все скалярные произведения

$$(B^*\psi, \varepsilon_{ij} w_j)$$

(соответствующие индексам j, для которых символ ε_{ij} определен) были отрицательными, или, иначе, чтобы были выполнены неравенства

$$\varepsilon_{ij}(\psi, Bw_j) < 0.$$

В силу (78) последнее неравенство принимает вид

$$\varepsilon_{ij}\xi_j < 0. \tag{82}$$

Итак, для того чтобы уравнение (81) имело единственное решение $u = e_i$, необходимо и достаточно, чтобы для всех j (для которых символ ε_{ij} определен) выполнялось неравенство (82), или, что то же самое, равенство

$$\varepsilon_{ij}\eta_j = -1 \tag{83}$$

(см. (79)).

Положим теперь

$$\zeta_i = l_i - 1 + \sum_j \varepsilon_{ij}\eta_j, \quad i = 1, 2, \ldots, q, \tag{84}$$

где l_i — число ребер многогранника U, примыкающих к вершине e_i, а суммирование распространено на все значения j, для которых символ ε_{ij} определен (так что в этой сумме имеется l_i слагаемых). Переход от величин η_j к величинам ζ_i показан на рис. 77. Величина ζ_i принимает значение -1, если для всех j выполнено равенство (83), и **положительное** значение, если хотя бы для одного j выполнено равенство $\varepsilon_{ij}\eta_j = +1$. (Равенство $\varepsilon_{ij}\eta_j = 0$, или, что то же самое, $(\psi, Bw_j) = 0$, см. (78), может, в силу теоремы 9, выполняться лишь для **конечного** числа значений t, которые мы не будем принимать во внимание.) Таким образом, уравнение (81) тогда и только тогда имеет единственное решение $u = e_i$, когда $\zeta_i < 0$. Подав величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ на релейные элементы и обозначив выходные величины через $\chi_1, \ldots, \chi_q$ (рис. 78), мы найдем, что уравнение (81) тогда и только тогда имеет единственное решение $u = e_i$, когда выполнено равенство $\chi_i = -1$. Из сказанного ясно, что в любой момент t (за исключением конечного числа моментов, когда хотя бы одна из величин ξ_j обращается в нуль) одна из величин χ_i принимает значение -1, а остальные — значение $+1$.

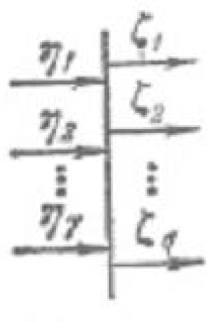

Рис. 77.

Пусть теперь $e_i^1, \ldots, e_i^r$ — координаты вершины e_i многогранника U. Положим

$$u^\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{q}(1-\chi_\alpha)e_\alpha^\rho, \qquad \rho = 1, \ldots, r \tag{85}$$

(рис. 79). Из (85) ясно, что точка $(u^1, \ldots, u^r)$ совпадает с вершиной e_i, если $\chi_i = -1$, а остальные величины χ_α

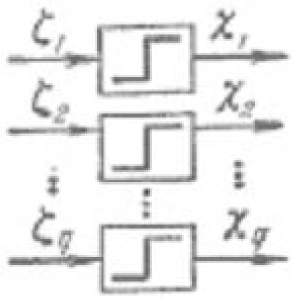

Рис. 78.

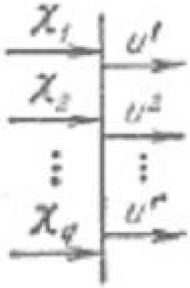

Рис. 79.

равны $+1$. Иначе говоря, если уравнение (81) имеет единственное решение, то этим решением является точка $(u^1, \ldots, u^r)$, получаемая по формулам (85).

Соединим теперь объекты, изображенные на рис. 67, 68, 75—79, вместе. Мы получим схему, показанную на рис. 80. Из сказанного выше ясно, что, каков бы ни был начальный вектор ψ_0, функции $u^1(t), \ldots, u^r(t)$, получающиеся на выходе предпоследнего звена, образуют экстремальное управление (ибо они удовлетворяют уравнению (6)), а на выходе схемы мы получаем

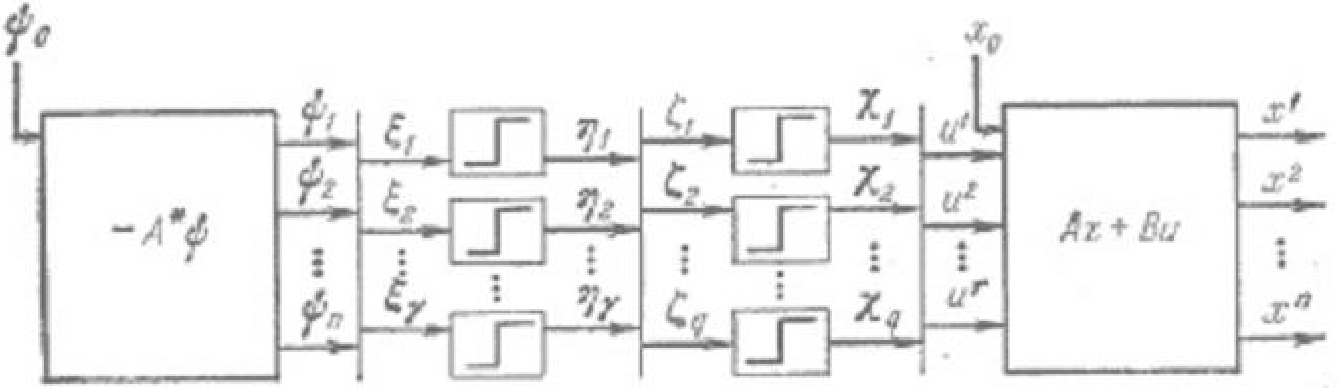

Рис. 80.

величины $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, описывающие соответствующую экстремальную траекторию.

Итак, *схема, изображенная на рис.* 80, *осуществляет движение объекта* (2) *по экстремальной траектории* (*при любых начальных значениях* ψ_0, x_0).

Остается, как мы отмечали выше, задача поиска такого начального значения для ψ, при котором (для заданного начального значения x_0) получаемая траектория проходит через начало координат. Такой поиск можно производить одним из следующих двух методов: либо, имея фиксированное начальное значение x_0, при помощи нескольких проб найти требуемое начальное значение ψ_0, либо же, обратив направление течения времени, вычертить достаточно густую сетку траекторий, исходящих из начала координат (они все будут оптимальными), после чего, «запомнив» все точки фазового пространства X, в которых происходят переключения, составить «поверхность переключений» (т. е. произвести синтез оптимальных управлений).

Следует еще отметить возможность осуществить более быстрое течение времени в моделирующем устройстве по сравнению с реальным объектом (за счет подбора параметров в первом и последнем звеньях схемы). Это может позволить испробовать на моделирующем устройстве несколько экстремальных траекторий в течение короткого времени и получить требуемое оптимальное управление для исходного объекта.

§ 23. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Основные факты, установленные в предыдущих параграфах для линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами (см. (1)), переносятся и на случай линейных неоднородных уравнений с переменными коэффициентами. В этом параграфе мы приведем формулировки получаемых таким образом теорем и укажем те изменения, которые следует произвести в предыдущих доказательствах для получения этих теорем.

Уточним прежде всего постановку задачи. Мы рассматривать объект, закон движения которого записывается в виде следующей линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n} a^i_\nu(t)\,x^\nu+\sum_{\rho=1}^{r} b^i_\rho(t)\,u^\rho+f^i(t),\quad i=1,\ \dots,\ n. \tag{86}$$

Областью управления U по-прежнему будем считать выпуклый замкнутый многогранник r-мерного пространства E_r переменных $u^1, \dots, u^r$. Как и выше, ограничимся рассмотрением задачи об оптимальных быстродействиях. Относительно функций $a^i_j(t)$, $b^i_k(t)$ и $f^i(t)$, входящих в систему (86), мы будем предполагать, что они определены на некотором интервале $a < t < b$ (возможно, совпадающим со всей числовой прямой) и имеют на этом интервале достаточное число непрерывных производных. Именно, мы будем предполагать, что функции $a^i_j(t)$ имеют $n-2$ непрерывных производных (но не менее одной), функции $b^i_k(t)$ имеют $n-1$ непрерывную производную, а функции $f^i(t)$ имеют одну непрерывную производную. (Возможность некоторого ослабления этих ограничений указана в замечании, приведенном в конце этого параграфа.) Все рассматриваемые значения переменного t мы будем предполагать принадлежащими интервалу $a < t < b$; в частности, всякое допустимое управление будет предполагаться заданным на отрезке, являющимся частью интервала $a < t < b$.

В векторной форме система (86) может быть записана следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t); \tag{87}$$

здесь $A(t): X \to X$ и $B(t): E_r \to X$ — линейные операторы, определяемые в координатах $x^1, \ldots, x^n$ и $u^1, \ldots, u^r$ матрицами $(a^i_j(t))$ и $(b^i_k(t))$ соответственно, а $f(t)$ — вектор с компонентами $f^i(t)$.

Введем в рассмотрение операторы $B_1(t), B_2(t), \ldots$ $\ldots, B_n(t)$, положив

$$B_1(t) = B(t), \quad B_j(t) = -A(t)B_{j-1}(t) + \frac{dB_{j-1}(t)}{dt}, \tag{88}$$

$$j = 2, \ldots, n.$$

(Для возможности определения этих операторов необходимо, чтобы функции $b^i_k(t)$ имели $n-1$ производную, а функции $a^i_j(t)$ имели $n-2$ производных.) Мы будем говорить, что в момент времени t выполнено *условие общности положения*, если для любого ребра w многогранника U векторы

$$B_1(t)w, \ B_2(t)w, \ \ldots, \ B_n(t)w \tag{89}$$

линейно независимы в пространстве X. В этом параграфе мы будем всюду предполагать, что *в любой момент времени t, $a < t < b$, выполнено условие общности положения.*

Отметим, что если матрицы $(a^i_j(t))$ и $(b^i_k(t))$ постоянны, т. е. величины a^i_j и b^i_k не зависят от времени, то из (88) следует, что $B_j = (-1)^{j-1}A^{j-1}B$, и потому векторы (89) совпадают, с точностью до знаков, с векторами (3). Таким образом, в этом случае сформулированное здесь условие общности положения совпадает с условием общности положения, введенным в § 17.

Функция $H(\psi, x, t, u)$ (см. стр. 74 и теорему 5) в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = (\psi, A(t)x) + (\psi, B(t)u) + (\psi, f(t)) =$$
$$= \sum_{\mu, \nu} \psi_\mu a^\mu_\nu(t) x^\nu + \sum_{\mu, \rho} \psi_\mu b^\mu_\rho(t) u^\rho + \sum_\mu \psi_\mu f^\mu(t), \qquad (90)$$

а вспомогательная система (см. формулу (69) гл. 1) записывается в виде

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_\nu a^\nu_j(t)\psi_\nu, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или, в векторной форме (ср. (5)),

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^*(t)\psi. \qquad (91)$$

Очевидно, что функция H, рассматриваемая как функция переменного $u \in U$, достигает максимума одновременно с функцией $(\psi, B(t)u)$. Максимум функции $(\psi, B(t)u)$, рассматриваемой как функция переменного $u \in U$, мы обозначим через $P(\psi, t)$. Из теоремы 5 следует (см. формулу (70) гл. 1), что если $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, то существует такое нетривиальное решение $\psi(t)$ уравнения (91), что

$$(\psi(t), B(t)u(t)) = P(\psi(t), t) \qquad (92)$$

для всех t, принадлежащих отрезку $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Некоторую функцию, заданную на интервале $a < t < b$ или на его части, мы будем называть *кусочно-постоянной*, если множество всех точек разрыва этой функции не имеет предельных точек внутри интервала $a < t < b$, а на каждом из интервалов, на которые интервал $a < t < b$ разбивается этими точками разрыва, рассматриваемая функция постоянная. (Заметим, что точки разрыва могут накапливаться к концам интервала $a < t < b$.)

Теорема 15. *Для каждого нетривиального решения $\psi(t)$ уравнения* (91) *соотношение* (92) *однозначно* *) *оп-*

*) Ср. сноску на стр. 134

ределяет управляющую функцию $u(t)$; при этом оказывается, что функция $u(t)$ кусочно-постоянна и ее значениями являются лишь вершины многогранника U.

Это — теорема о «конечности числа переключений» для линейных уравнений с переменными коэффициентами (ибо всякое управление $u(t)$ задано на некотором отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, целиком лежащем внутри интервала $a < t < b$, и из теоремы 15 следует, что число точек разрыва функции $u(t)$ конечно). В случае постоянных коэффициентов теорема 15 превращается в теорему 9.

Доказательство теоремы 15 вполне аналогично доказательству теоремы 9. Укажем лишь те незначительные изменения, которые следует произвести в доказательстве теоремы 9.

Предположим, что множество точек, в которых значение управления $u(t)$ не определяется однозначно соотношением (92), имеет хотя бы одну предельную точку внутри интервала $a < t < b$. Тогда, как и выше (см. формулу (8) и относящийся к ней текст), мы сможем найти такое ребро w многогранника U и такое множество M, имеющее внутри интервала $a < t < b$ предельную точку τ, что

$$(\psi(t),\ B(t)\,w) = 0 \tag{93}$$

при всех $t \in M$.

Формула (9) заменяется соотношением

$$(\psi(t),\ B(t)\,w) = \sum_{\nu,\rho} \psi_\nu(t)\, b_\rho^\nu(t)\, w^\rho. \tag{94}$$

Так как функции $a_j^i(t)$ имеют $n-2$ непрерывных производных, то функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$, составляющие решение уравнения (91), имеют $n-1$ непрерывную производную; функции $b_\rho^\nu(t)$ также имеют, по предположению, $n-1$ непрерывную производную. Следовательно, функция (94) $n-1$ раз непрерывно дифференцируема.

Так как τ — предельная точка множества M, то, в силу непрерывности функции (94), из соотношения (93) вытекает, что

$$(\psi(\tau),\ B(\tau)\,w) = 0.$$

Далее, так как между каждыми двумя корнями дифференцируемой функции содержится хотя бы один корень ее производной, то производная функции (94) обращается в нуль в бесконечном множестве точек, имеющем τ своей предельной точкой. Но производная функции (94) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\Big(\psi(t), B(t)w\Big) = (-A^*(t)\psi(t), B(t)w) + \left(\psi(t), \frac{dB(t)}{dt}w\right) =$$
$$= (\psi(t), -A(t)B(t)w) + \left(\psi(t), \frac{dB(t)}{dt}w\right) = (\psi(t), B_2(t)w)$$

(см. (88)). Таким образом, на бесконечном множестве точек, имеющем τ своей предельной точкой, выполняется соотношение

$$(\psi(t), B_2(t)w) = 0,$$

и потому (в силу непрерывности)

$$(\psi(\tau), B_2(\tau)w) = 0.$$

Аналогично, между любыми двумя корнями функции $(\psi(t), B_2(t)w)$ содержится хотя бы один корень ее производной; из этого с помощью тех же рассуждений получаем $(\psi(\tau), B_3(\tau)w) = 0$ и т. д. В результате мы получаем соотношения

$$(\psi(\tau), B_i(\tau)w) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{95}$$

(ср. (10), (11)). В силу линейной независимости векторов (89) из соотношений (95) вытекает, что $\psi(\tau) = 0$, и потому решение $\psi(t)$ уравнения (91) тривиально. Полученное противоречие показывает, что множество точек, в которых управление $u(t)$ не определяется однозначно соотношением (92), не имеет предельных точек внутри интервала $a < t < b$.

Дальнейшее доказательство не отличается от доказательства теоремы 9. Итак, теорема 15 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению **теорем существования и единственности** для системы (86). Как и выше (см. (20)), рассмотрим фундаментальную систему решений

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

однородного уравнения $\frac{dx}{dt}=A(t)x$, удовлетворяющую начальным условиям $\varphi_j^i(t_0)=\delta_j^i$, и фундаментальную систему решений

$$\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)$$

уравнения (91), удовлетворяющую начальным условиям $\psi_j^i(t_0)=\delta_j^i$. При этом соотношение (21) остается справедливым. Далее, решение уравнения (87), соответствующее произвольно выбранному управлению $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, можно искать в виде

$$x(t)=\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t) c^\nu(t)$$

(ср. стр. 142). В результате мы получаем следующую формулу (ср. (22)):

$$x(t)=\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(t)\left(x_0^\nu+\int_{t_0}^{t}(\psi^\nu(t), B(t)u(t)+f(t))\,dt\right). \quad (96)$$

После этого теоремы 11 и 12 (в дословно тех же формулировках) переносятся и на рассматриваемый случай. Сохраняются и доказательства этих теорем — с заменой соотношения (22) соотношением (96) и вытекающими отсюда очевидными изменениями. Сохраняется и теорема существования (см. теорему 13).

Теорема 16. *Если для процесса, описываемого уравнением* (87), *существует при заданном* t_0 *хотя бы одно управление* $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *переводящее фазовую точку из положения* x_0 *в положение* x_1, *то существует и оптимальное управление (с тем же начальным моментом* t_0), *переводящее фазовую точку из положения* x_0 *в положение* x_1.

Доказательство является дословным повторением доказательства теоремы 13 (с очевидной заменой ссылок на формулу (22) ссылками на формулу (96)). Отметим только, что сдвиг времени, о котором упоминалось на стр. 147, теперь не может быть применен ввиду того, что уравнение (87) неавтономно; однако этот сдвиг времени теперь и не нужен, так как рассматриваются лишь управления с начальным моментом t_0.

Замечание. Все результаты настоящего параграфа получены в предположении, что функции $a_j^i(t)$, $b_k^i(t)$ и $f^i(t)$, входящие в систему (86), определены на некотором интервале $a < t < b$ (возможно, на всей прямой) и функции $f^i(t)$ имеют на этом интервале первые непрерывные производные, а функции $a_j^i(t)$ и $b_k^i(t)$ имеют соответственно $(n-2)$-е и $(n-1)$-е непрерывные производные. (Кроме того, как всегда, предполагалось выполненным условие общности положения.) Нетрудно понять, что все полученные результаты остаются справедливыми, если функции $a_j^i(t)$, $b_k^i(t)$, $f^i(t)$ непрерывны, а их производные (в указанном числе) являются лишь кусочно-непрерывными функциями. В самом деле, отметим на интервале $a < t < b$ все точки, в которых хотя бы одна из указанных производных терпит разрыв непрерывности. Эти точки разбивают интервал $a < t < b$ на части, на каждой из которых функции $a_j^i(t)$, $b_k^i(t)$, $f^i(t)$ имеют требуемое число непрерывных производных. К каждой из этих частей в отдельности можно применить теорему 15, и потому теорема 15 справедлива в применении ко всему интервалу $a < t < b$. Очевидно, что остается справедливой и формула (96), а потому также и теоремы существования и единственности.

ГЛАВА 4

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 24. Случай функционала, заданного несобственным интегралом

Рассмотрим следующий вариант оптимальной задачи, сводящийся к рассмотрению бесконечного интервала интегрирования в функционале J.

В фазовом пространстве X дана точка x_0. Среди всех допустимых управлений $u(t)$, $t_0 \leqslant t < +\infty$, для которых соответствующая траектория $x(t)$ системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, u), \quad i = 1, \ldots, n, \ u \in U, \tag{1}$$

исходящая из точки x_0, определена для всех $t \geqslant t_0$ и удовлетворяет при $t \to \infty$ некоторым (заданным заранее) предельным условиям, найти такое, для которого интеграл

$$J = \int_{t_0}^{\infty} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{2}$$

сходится и принимает наименьшее возможное значение.

На функции $f^i(x, u)$ накладываются условия, аналогичные тем, которые были указаны в гл. 1, 2: они предполагаются непрерывными по x и u и непрерывно дифференцируемыми по $x^1, \ldots, x^n$ на прямом произведении $X \times \bar{U}$. Отметим, далее, что мы будем понимать здесь под «допустимыми» управлениями. Функцию $u(t)$, $t_0 \leqslant$

$\leqslant t < \infty$, принимающую значения в области управления U, мы будем считать ограниченной, если множество всех точек $u(t)$, где t пробегает любой конечный отрезок, лежащий на промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$, имеет в пространстве E_r (содержащем область управления U) компактное замыкание. Принимая это определение ограниченности управления (и рассматривая лишь управления, заданные на промежутках вида $t_0 \leqslant t < \infty$), мы в остальном сохраним определение класса допустимых управлений, данное в § 10. В частности, в качестве класса допустимых управлений можно взять класс всех ограниченных (в указанном смысле) измеримых управлений, заданных на промежутках вида $t_0 \leqslant t < \infty$, или же класс всех ограниченных кусочно-непрерывных управлений (кусочная непрерывность понимается в том смысле, что на всяком конечном отрезке, содержащемся в промежутке $t_0 \leqslant t < \infty$, управление $u(t)$ имеет лишь конечное число разрывов первого рода). Наконец, сделаем еще замечания относительно «предельных условий на бесконечности», упомянутых в формулировке задачи. Мы предполагаем, что эти условия имеют вид

$$\lim_{t \to \infty} x^i(t) = x_1^i, \tag{3}$$

где $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$ — заданная точка фазового пространства X. Если для фазовой траектории $x(t)$, соответствующей допустимому управлению $u(t)$ и исходящей из точки x_0, выполнены условия (3), то мы будем писать $x(\infty) = x_1$ и будем говорить, что управление $u(t)$, $t_0 \leqslant$ $\leqslant t < \infty$, переводит фазовую точку из положения x_0 в положение x_1.

Решение поставленной оптимальной задачи дается теоремой 1 (или теоремой 8) с очевидной заменой отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ бесконечным промежутком $t_0 \leqslant t < \infty$ и с заменой условия прохождения траектории через некоторую точку прямой П предельными условиями на бесконечности. В самом деле, все рассуждения, приведенные в §§ 13, 14, были связаны с выбором некоторой правильной точки τ, удовлетворяющей условию $\tau < t_1$; эти рассуждения дословно, без всяких изменений проходят и в случае $t_1 = \infty$. То же относится к формулировке и доказательству лемм 5—8 из § 15. Однако построение предельного конуса уже не проходит, так как точки t_1 (правого конца отрезка времени) не существует. Тем не менее, легко видоизменить конструкцию предельного конуса таким образом, чтобы ее можно было применить и в рассматриваемом случае. В самом деле, обозначим через $K_{t_0}^{(\tau)}$ выпуклый конус $A_{\tau, t_0}^{-1}(K_\tau)$. Эти конусы образуют возрастающую последовательность: $K_{t_0}^{(\tau')} \subset K_{t_0}^{(\tau)}$ при $\tau' < \tau$ (для доказательства этого факта достаточно к включению, содержащемуся в лемме 8, применить преобразование A_{τ, t_0}^{-1} и воспользоваться формулами (17 (гл. 2). Поэтому объединение (по всем правильным точкам τ) всех конусов $K_{t_0}^{(\tau)}$ снова есть выпуклый конус (возможно, не замкнутый) пространства X_{t_0}. Назовем его **начальным конусом** и обозначим через K_{t_0}. Легко видеть, что (для рассматривавшейся в §§ 2, 11 оптимальной задачи) имеет место соотношение

$$A_{t_1, t_0}(K_{t_0}) = K_{t_1}.$$

Поэтому начальный конус совершенно эквивалентен предельному, и можно было завершение доказательства принципа максимума (§ 15, после леммы 8) провести с помощью **начального конуса** K_{t_0}. При этом лемма 9, как и ее доказательство остаются в силе (с очевидной заменой луча L_{t_1}, конусов K_{t_1}, $K_{t_1}^{(\tau)}$ и преобразований $A_{t_1, \tau}^{-1}$ соответственно на L_{t_0}, K_{t_0}, $K_{t_0}^{(\tau)}$ и A_{τ, t_0}). После этого без труда проводятся и заключительные рассуждения § 15, чем доказательство теоремы 8 (и теоремы 1), проводимое с помощью **начального** конуса (вместо предельного) и завершается. Но такое доказательство дословно (с заменой отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ промежутком $t_0 \leqslant t < \infty$) переносится и на случай рассматриваемой оптимальной задачи (1), (2). Тем самым наше утверждение доказано.

Заметим еще, что можно было «сносить» конусы K_τ не в точку $x(t_1)$ или в точку $x(t_0)$, а в любую точку $x(t)$ рассматриваемой траектории. Поэтому изложенное доказательство применимо и к случаю, когда промежутком интегрирования является вся прямая $-\infty < t < \infty$.

§ 25. Оптимальные процессы с параметрами

Мы рассмотрим в этом параграфе следующую оптимальную задачу. Функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ зависят от трех переменных $x \in X$, $u \in U$, $w \in W$, где X и U имеют прежний смысл, а W — векторное пространство размерности m. Функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ и их частные производные по всем переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n$ предполагаются определенными и непрерывными на всем пространстве $X \times U \times W$. Закон движения объекта задается уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, w), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

В пространстве X заданы две точки x_0 и x_1. Требуется выбрать такую постоянную точку $w_0 \in W$ (т. е. до начала движения подобрать значение параметра w, остающееся постоянным в течение всего движения) и такое допустимое управление $u(t)$, чтобы соответствующая траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0, проходила в некоторый момент t_1 через точку x_1 и чтобы при этом интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), w_0)\, dt$$

принимал наименьшее возможное значение. Если функции $u(t)$, $x(t)$ и точка w_0 дают решение поставленной задачи, то величины $u(t)$, $x(t)$, w_0 мы будем называть *оптимальными* (для заданных точек x_0 и x_1).

При решении этой задачи мы будем предполагать, что все допустимые функции кусочно-непрерывны, т. е. что класс D допустимых управлений либо совпадает с множеством всех кусочно-непрерывных функций (со значениями в U), либо является его подмножеством, удовлетворяющим условиям, указанным в § 10.

Отметим некоторую специфику рассматриваемой задачи, заставляющую ограничиваться лишь кусочно-непрерывными (а не произвольными измеримыми) управлениями. В то время как в оптимальной задаче, сформулированной в § 11, каждый кусок оптимальной траектории снова является оптимальной траекторией (ибо «улучшение» куска траектории ведет к «улучшению» всей траектории, ср. § 2), здесь, в рассматриваемой задаче с параметрами это уже не так. Ведь оптимальные значения параметра w для всей траектории и для ее части могут не совпадать, т. е. если $u(t)$, w_0 дают решение поставленной в этом параграфе оптимальной задачи, причем управление $u(t)$ определено на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то на меньшем отрезке за счет изменения параметра w_0, возможно, удастся «улучшить» управление $u(t)$. Из сказанного следует, что рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4, неприменимы к рассматриваемой оптимальной задаче. Рассуждения, доказывающие теорему 8 (или теорему 1), можно, однако, применить и здесь, считая в лемме 9 точку τ совпадающей с концевой точкой t_1 (что делает излишней лемму 4). Но для этого приходится считать точку t_1 правильной точкой управления $u(t)$, т. е. в качестве допустимых управлений приходится брать управления, правильные в правом конце отрезка. При этих условиях наиболее естественным классом допустимых управлений является класс кусочно-непрерывных управлений (или какой-либо его подкласс).

Решение поставленной оптимальной задачи дается следующей теоремой, аналогичной теореме 1 (функция $\mathscr{H}$ определяется, как и прежде: $\mathscr{H} = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha\Big)$.

Теорема 17. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, а $w_0 = (w^1, \ldots, w^m)$ — такое значение параметра w, что соответствующая траектория*

$$\boldsymbol{x}(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$$

(т. е. траектория системы (4), пополненной соответствующим уравнением для $i = 0$) удовлетворяет условиям

$$x(t_0) = x_0,\ x^0(t_0) = 0,\ x(t_1) = x_1.$$

Для того чтобы величины $u(t)$, $\boldsymbol{x}(t)$, w_0 давали решение поставленной оптимальной задачи, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, что:

1° *функции* $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ *и значение* w_0 *удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t), w_0)}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t), w_0)}{\partial x^i}, \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \ldots, n;$$

2° *функция* $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u, w_0)$ *переменного* $u \in U$ *достигает в точке* $u = u(t)$ *максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t), w_0) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), w_0); \text{*)}$$

3° *в начальной точке* t_0 *выполнены соотношения*

$$\psi_0(t_0) \leqslant 0, \quad \mathscr{M}(\psi(t_0), x(t_0), w_0) = 0;$$

4° *имеют место равенства*

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\alpha(t) \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt = 0, \quad \rho = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, w_0, $u(t)$ *удовлетворяют условиям* 1° *и* 2°, *то функции* $\psi_0(t)$ *и* $\mathscr{M}(\psi(t), x(t), w_0)$ *переменного* t *являются постоянными, так что проверку условия* 3° *можно проводить не обязательно в момент* t_0, *а в любой момент* t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Эта теорема отличается от теоремы 1 (или теоремы 8) наличием условия 4°, которое дает m дополнительных соотношений, что и дает возможность решать задачу, так как в эту задачу введено дополнительно m неизвестных $w^1, w^2, \ldots, w^m$ (координаты точки w_0 в пространстве W).

Укажем, какие изменения нужно произвести в доказательстве теоремы 8, чтобы получить доказательство теоремы 17. Конструкции § 12 несколько видоизменяются.

Именно, пусть $u(t)$ — произвольное допустимое управление, заданное при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; далее, w — некоторое значение параметра, а $x(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots$ $\ldots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$ — соответствующее управлению $u(t)$ и параметру w решение системы (4) с началь-

---

*) См. стр. 25.

ным условием $x(t_0)=x_0$. Обозначим через $y(t)$ решение, соответствующее тому же управлению $u(t)$ и значению параметра $w+\varepsilon\delta w$ и исходящее (в тот же момент t_0) из близкой к x_0 точки $y_0=x_0+\varepsilon\xi_0+o(\varepsilon)$, где ξ_0 — постоянный (т. е. не зависящий от ε) вектор пространства X. Решение $y(t)$ имеет вид

$$y(t)=x(t)+\varepsilon\,\delta x(t)+o(\varepsilon),$$

где $\delta x(t)=(\delta x^0(t),\ \delta x^1(t),\ \ldots,\ \delta x^n(t))$ — не зависящий от ε вектор, определяемый следующей системой уравнений в вариациях:

$$\frac{d}{dt}\,\delta x^i=\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^i(x(t),\,u(t),\,w)}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial f^i(x(t),\,u(t),\,w)}{\partial w^\beta}\,\delta w^\beta,\quad (6)$$

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

при начальном условии $\delta x(t_0)=\xi_0$. В отличие от системы (16) в § 12, эта система уравнений в вариациях неоднородна.

Преобразование $A_{t,\,t_0}$ мы теперь снабдим верхним индексом δw. Именно, мы будем полагать

$$A^{\delta w}_{t,\,t_0}(\xi_0)=\delta x(t),$$

где $\delta x(t)$ — решение системы (6) при начальном условии $\delta x(t_0)=\xi_0$. Как и в § 12, вектор $A^{\delta w}_{t,\,t_0}(\xi_0)$ мы будем считать вектором пространства X_t (с началом координат в точке $x(t)$). Поскольку система уравнений в вариациях теперь неоднородна, то линейное преобразование $A^{\delta w}_{t,\,t_0}(\xi_0)$ также будет неоднородным.

Наконец, лемма 1, завершающая § 12, примет следующий вид:

если $\psi(t)$ — решение системы (8) § 11, *а ξ_0 — произвольный вектор, заданный в точке $x(t_0)$, то на всем отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ выполнено соотношение*

$$(\psi(t),\ A^{\delta w}_{t,\,t_0}(\xi_0))=$$
$$=(\psi(t_0),\ \xi_0)+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=0}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\psi_i(t)\,\frac{\partial f^i(x(t),\,u(t),\,w)}{\partial w^\beta}\,\delta w^\beta\,dt.\qquad (7)$$

Обратимся, далее, к § 13. Правильными точками управления $u(t)$ являются все его точки непрерывности, т. е. все точки отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, за исключением конечного числа точек разрыва. Мы продолжим управление $u(t)$ несколько дальше, за правый конец отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, полагая $u(t) = u(t_1 - 0)$ при $t > t_1$. Продолженное таким образом управление $u(t)$ непрерывно в точке t_1, так что t_1 является правильной точкой. Далее, точку τ, входящую в определение проварьированного управления (стр. 100), мы теперь будем считать совпадающей с t_1, т. е. положим

$$t_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \tau = t_1.$$

Наконец, мы выберем некоторый вектор δw пространства W и через $x^*(t)$ будем обозначать (при достаточно малом ε) решение системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u^*(t), w_0 + \varepsilon\,\delta w), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

т. е. траекторию, соответствующую проварьированному управлению $u^*(t)$ и смещенному значению $w = w_0 + \varepsilon\delta w$ параметра w. При этом линию $\xi(\varepsilon)$ мы будем считать выродившейся в точку x_0, т. е. будем считать, что решение $x^*(t)$ удовлетворяет тому же начальному условию

$$x^*(t_0) = x_0,$$

что и решение $x(t)$. Формулы (21), (22) гл. 2 теперь можно будет записать в виде

$$x^*(t_1 + \varepsilon\,\delta t) = x(t_1) + \varepsilon\,\Delta x + o(\varepsilon),$$

где

$$\Delta x = f(x(t_1), u(t_1), w_0)\,\delta t + A^{\delta w}_{t_1, t_0}(0) + \\ + \sum_{i=1}^{s} A^{\delta w}_{t_1, \tau_i}[f(x(\tau_i), v_i, w_0) - f(x(\tau_i), u(\tau_i), w_0)]\,\delta t_i \qquad (8)$$

(ибо $\xi_0 = 0$).

Обратимся теперь к § 14. Мы включим вектор δw в символ $\mathfrak{a}$, т. е. будем полагать

$$\mathfrak{a} = \{\tau_i, v_i, \delta t_i, \delta t, \delta w\}$$

(мы опустили обозначение точки τ, так как теперь $\tau = t_1$ есть фиксированная точка). Линейная комбинация символов $\mathfrak{a}$ определяется так же, как и раньше, только с учетом и последнего аргумента:

$$\lambda'\{\ldots, \delta w'\} + \lambda''\{\ldots, \delta w''\} + \ldots = \{\ldots, \lambda'\delta w' + \lambda''\delta w'' + \ldots\}.$$

После этого доказательство лемм 2, 3 (при $\tau = t_1$) проходит без изменения, а лемма 4 становится просто ненужной (ибо $\tau = t_1$). В результате мы получаем конус достижимости K_{t_1}, для которого справедлива лемма 3.

Рассуждения § 15 также сохраняются (с заменой τ на t_1), а предельный конус становится ненужным, так как у нас имеется лишь один конус K_{t_1}, построенный как раз в конце $x(t_1)$ траектории $x(t)$ (в силу этого лемма 9 не нужна — она просто сводится к лемме 3). Наконец, рассуждения, приведенные в конце § 15, доказывают (при $\delta w = 0$) условия 1°, 2°, 3° и заключительную часть теоремы 17.

Остается показать, что для выбранного таким образом вектора $\psi(t)$ выполняется условие 4°. Положим в формуле (8) $\delta t = \delta t_1 = \delta t_2 = \ldots = \delta t_s = 0$. Мы получим тогда

$$\Delta x = A^{\delta w}_{t_1, t_0}(0).$$

Согласно сказанному выше (ср. формулы (34), (36) гл. 2), мы имеем $(\psi(t_1), \Delta x) \leqslant 0$ для любого вектора Δx вида (8), и потому (см. (7))

$$\left(\psi(t_1), A^{\delta w}_{t_1, t_0}(0)\right) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} \psi_i(t) \frac{\partial f^i(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\beta} \delta w^\beta \, dt \leqslant 0. \tag{7*}$$

Так как эти соотношения справедливы при любых действительных значениях параметров δw^β, то мы имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\alpha(t) \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\beta} dt = 0, \quad \beta = 1, 2, \ldots, m,$$

и теорема 17 полностью доказана.

Заметим в заключение, что если параметр w может изменяться не во всем пространстве W, а лишь в некоторой замкнутой области $W_1 \subset W$, имеющей кусочно-гладкую границу, то условия (5) в формулировке теоремы 17 заменяются соотношениями

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\alpha(t) \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w} dt \leqslant 0,$$

где производная под знаком интеграла берется по любому направлению w, исходящему из точки w_0 и проходящему в области W_1. Иначе говоря, для любой дифференцируемой кривой $w(\theta)$, исходящей при $\theta = 0$ из точки w_0 и проходящей в области W_1, должно быть выполнено соотношение

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\alpha(t) \left. \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w(\theta))}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} dt \leqslant 0.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из соотношения (7*).

§ 26. Применение теории оптимальных процессов к задачам приближения функций

Пусть $F(x, y)$ — функция, определенная и непрерывная для всех действительных значений аргументов. Тогда для любых двух функций $x(t)$, $y(t)$, заданных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, величина

$$J = \int_a^b F(x(t), y(t))\, dt \tag{9}$$

может быть использована для сравнения функций $x(t)$ и $y(t)$. Например, если $F(x, y) \equiv (x - y)^2$, то интеграл (9) принимает вид

$$J = \int_a^b (x(t) - y(t))^2\, dt \tag{9*}$$

и представляет собой в этом случае квадрат расстояния между элементами $x(t)$ и $y(t)$ пространства L_2. (Здесь и далее в этом параграфе все функции аргумента t будут рассматриваться на одном и том же фиксированном отрезке $a \leqslant t \leqslant b$.)

В настоящем параграфе рассматривается решение следующей задачи. Заданы функции $F(x, y)$ и $y(t)$. Кроме того, заданы целое число $n \geqslant 0$ и действительное число $\alpha \geqslant 0$. *Среди всех n раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, заданных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ и обладающих тем свойством, что функция $x^{(n)}(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой α, найти такую, для которой интеграл* (9) *принимает наименьшее значение.* Эту задачу мы будем в дальнейшем называть основной задачей.

В частном случае, когда $F(x, y) = (x-y)^2$ (т. е. вместо функционала (9) рассматривается (9*)), а число α равно нулю, мы приходим к задаче нахождения такого многочлена n-й степени $x(t)$, который на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ имеет наименьшее квадратичное уклонение от заданной функции $y(t)$, т. е. к классической задаче нахождения коэффициентов Фурье при разложении функции $y(t)$ по многочленам Лежандра. Таким образом, рассматриваемая основная задача является обобщением этой классической задачи.

Прежде всего мы покажем, что при некоторых естественных требованиях, налагаемых на функцию $F(x, y)$, поставленная основная задача всегда (т. е. для любой функции $y(t)$) имеет хотя бы одно решение, а в случае, когда рассматривается функционал (9*), эта задача имеет (для любой функции $y(t)$) ровно одно решение.

Далее рассмотрен вопрос о нахождении функции $x(t)$, являющейся решением основной задачи. Для нахождения решения используется принцип максимума. В качестве примера приведена «задача о нахождении профиля дороги».

Вопрос о существовании решения основной задачи (а в частном случае (9*) и вопрос о единственности решения) рассматривается в нижеследующей теореме.

Теорема 18. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна для всех действительных значений аргумен-*

тов x, y и обладает тем свойством, что при изменении y на любом конечном отрезке функция $F(x, y)$ равномерно (по y) стремится к $+\infty$, когда $x \to \pm\infty$. Тогда основная задача имеет хотя бы одно решение для любой непрерывной функции $y(t)$. Если, в частности, $F(x, y) \equiv (x-y)^2$, то поставленная задача имеет для любой функции $y(t)$ ровно одно решение.

Множество всех действительных n раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, заданных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ и обладающих тем свойством, что их n-е производные $x^{(n)}(t)$ удовлетворяют условию Липшица с константой α, мы обозначим через $\Omega_\alpha^{(n)}$. Таким образом, включение $x \in \Omega_\alpha^{(n)}$ означает, что функция $x(t)$ задана на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке n непрерывных производных и удовлетворяет неравенству

$$|x^{(n)}(t') - x^{(n)}(t'')| \leqslant \alpha |t' - t''|$$

для любых точек t', t'' отрезка $[a, b]$. Множество $\Omega_\alpha^{(n)}$, очевидно, содержится в банаховом пространстве $C_{[a, b]}$ всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

Основная лемма. *Множество $\Omega_\alpha^{(n)}$ является замкнутым выпуклым локально компактным подмножеством пространства $C_{[a, b]}$. Любое замкнутое ограниченное множество, содержащееся в $\Omega_\alpha^{(n)}$, компактно.*

Эта лемма известна. Она, например, легко вытекает из теоремы 3.5.1, приведенной на стр. 127 книги А. Ф. Тимана «Теория приближения функций действительного переменного», Физматгиз, М., 1960. В самом деле, обозначим через Σ_R множество всех функций $x \in \Omega_\alpha^{(n)}$, удовлетворяющих условию $\|x\|_C \leqslant R$, а через $\Sigma_R^{(i)}$ — множество всех функций вида $x^{(i)}(t)$, где $x \in \Sigma_R$. Цитированная выше теорема утверждает, что множества $\Sigma_R, \Sigma_R^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \Sigma_R^{(n)}$ «компактны в пространстве $C_{[a, b]}$», т. е. замыкания этих множеств в пространстве $C_{[a, b]}$ компактны. Если x — произвольная предельная точка множества Σ_R, то существует последовательность $x_1, x_2, \ldots$ элементов множества Σ_R, сходящаяся к x. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать (в силу того, что замыкание множества $\Sigma_R^{(i)}$ компактно), что последовательность $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, ... является сходящейся, $i=1$, 2, ..., n. Из этого, в силу теоремы об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей, следует, что функция $x(t)$ имеет непрерывные производные порядков $i=1, 2, \ldots, n$, причем $x^{(i)}$ есть предел последовательности $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, ... В частности, $x^{(n)}(t)$, как предел последовательности $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, ..., удовлетворяет условию Липшица с константой α, и потому $x\in\Omega_\alpha^{(n)}$. Итак, множество Σ_R замкнуто, и, следовательно, компактно. Выпуклость множества $\Omega_\alpha^{(n)}$ очевидна. Таким образом, основная лемма доказана.

Доказательство теоремы 18. Обозначим через I отрезок, которому принадлежат значения функции $y(t)$ при $t\in[a, b]$. Так как при $y\in I$ функция $F(x, y)$ равномерно по y стремится к $+\infty$, когда $x\to\pm\infty$, то функция $F(x, y)$ ограничена снизу при $y\in I$ и любом x. Поэтому существует такое неотрицательное число N, что

$$F(x, y)\geqslant -N \quad \text{при} \quad y\in I \quad \text{и любом} \quad x. \tag{10}$$

Выберем произвольные попарно различные точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$, расположенные внутри отрезка $[a, b]$, и обозначим через $\varphi_i(t)$ многочлен степени n, принимающий значение 1 в точке a_i и значение 0 в остальных точках a_j. Обозначим, далее, через ρ настолько малое положительное число, что на интервале I_i длины ρ с центром в точке a_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ многочлен $\varphi_i(t)$ принимает значения, бо́льшие $\frac{2}{3}$, а все остальные многочлены $\varphi_i(t)$ принимают значения, по модулю меньшие $\frac{1}{3n}$. Наконец, через A обозначим такое положительное число, что $|\varphi_i(t)|\leqslant A$ при $t\in[a, b]$, $i=0, 1, \ldots, n$.

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная функция, принадлежащая множеству $\Omega_\alpha^{(n)}$, и $\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$ — ее норма в пространстве $C_{[a, b]}$. Обозначим через $\varphi(t)$ многочлен степени n, удовлетворяющий условиям $x^{(i)}(a)=\varphi^{(i)}(a)$, $i=0, 1, \ldots, n$. Тогда функция $x_1(t)=x(t)-\varphi(t)$ удовлетворяет условиям $x_1^{(i)}(a)=0$, $i=0, 1, \ldots, n$.

Кроме того, мы имеем

$$x_1^{(n)}(t) = x_1^{(n)}(t) - x_1^{(n)}(a) =$$
$$= [x^{(n)}(t) - x^{(n)}(a)] - [\varphi^{(n)}(t) - \varphi^{(n)}(a)] = x^{(n)}(t) - x^{(n)}(a)$$

(ибо $\varphi^{(n)}(t)$ есть константа). Так как функция $x^{(n)}(t)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица с константой α, то при любом $t \in [a, b]$

$$|x_1^{(n)}(t)| = |x^{(n)}(t) - x^{(n)}(a)| \leqslant \alpha (t-a) \leqslant \alpha (b-a).$$

Разлагая функцию $x_1(t)$ по формуле Тейлора, мы найдем

$$x_1(t) = x_1(a) + \frac{t-a}{1!} x_1'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!} x_1''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} x_1^{(n-1)}(a) + \frac{(t-a)^n}{n!} x_1^{(n)}(\theta),$$

где θ — промежуточное значение между a и t. Так как $x_1(a) = x_1'(a) = \ldots = x_1^{(n-1)}(a) = 0$, то при $t \in [a, b]$ мы находим

$$|x_1(t)| = \left| \frac{(t-a)^n}{n!} x_1^{(n)}(\theta) \right| \leqslant \frac{(t-a)^n}{n!} \alpha (b-a) \leqslant \alpha \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}. \tag{11}$$

Таким образом, $\|x_1\| \leqslant \alpha \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}$, и потому

$$\|\varphi\| = \|x - x_1\| \geqslant \|x\| - \|x_1\| \geqslant \|x\| - \alpha \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}. \tag{12}$$

Выберем теперь такой номер $i = 0, 1, \ldots, n$, что число $|\varphi(a_i)|$ является наибольшим среди чисел $|\varphi(a_0)|$, $|\varphi(a_1)|, \ldots, |\varphi(a_n)|$. В силу интерполяционной формулы Лагранжа мы имеем

$$\varphi(t) = \varphi(a_0)\varphi_0(t) + \varphi(a_1)\varphi_1(t) + \ldots + \varphi(a_n)\varphi_n(t),$$

и потому $|\varphi(t)| \leqslant (n+1)|\varphi(a_i)| A$ при $t \in [a, b]$, т. е.

$$\|\varphi\| \leqslant (n+1)|\varphi(a_i)| A. \tag{13}$$

Сопоставляя неравенства (12) и (13), мы получаем

$$|\varphi(a_i)| \geqslant \frac{\|\varphi\|}{(n+1)A} \geqslant \frac{1}{(n+1)A}\left[\|x\| - \alpha \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\right].$$

На отрезке I_i выполнены неравенства

$$\varphi_i(t) > \frac{2}{3}, \quad \varphi_j(t) < \frac{1}{3n} \quad \text{при} \quad j \neq i,$$

и потому на этом отрезке мы имеем

$$\begin{aligned}|\varphi(t)| &= |\varphi(a_0)\varphi_0(t) + \varphi(a_1)\varphi_1(t) + \ldots + \varphi(a_n)\varphi_n(t)| \geqslant \\ &\geqslant |\varphi(a_i)\varphi_i(t)| - |\varphi(a_0)\varphi_0(t) + \ldots + \varphi(a_{i-1})\varphi_{i-1}(t) + \\ &+ \varphi(a_{i+1})\varphi_{i+1}(t) + \ldots + \varphi(a_n)\varphi_n(t)| \geqslant |\varphi(a_i)|\{|\varphi_i(t)| - \\ &- [|\varphi_0(t)| + \ldots + |\varphi_{i-1}(t)| + |\varphi_{i+1}(t)| + \ldots + |\varphi_n(t)|]\} > \\ &> \frac{1}{(n+1)A}\left[\|x\| - \alpha\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\right]\left(\frac{2}{3} - n\cdot\frac{1}{3n}\right) = \\ &= \frac{1}{3(n+1)A}\left[\|x\| - \alpha\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\right].\end{aligned}$$

Из этого следует, что на отрезке I_i

$$\begin{aligned}|x(t)| &= |\varphi(t) + x_1(t)| \geqslant |\varphi(t)| - |x_1(t)| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{3(n+1)A}\left[\|x\| - \alpha\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\right] - \alpha\frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \qquad (14)\end{aligned}$$

(см. (11)). Итак, для любой функции $x \in \Omega_a^{(n)}$ найдется такой номер $i = 0, 1, \ldots, n$, что на отрезке I_i выполнено неравенство (14).

Пусть теперь J_0 — значение, которое принимает функционал (9) для функции $x(t) \equiv 0$. Пусть, далее, P — такое положительное число, что при $|x| > P$, $y \in I$ мы имеем

$$F(x, y) > \frac{J_0 + N(b-a)}{\rho}$$

(такое число P существует в силу указанных в формулировке теоремы свойств функции $F(x, y)$). Пусть, наконец, R — такое положительное число, что при $\|x\| > R$ правая часть соотношения (14) больше, чем P. Тогда для любой функции $x \in \Omega_a^{(n)}$, удовлетворяющей условию $\|x\| > R$, найдется такой номер $i = 0, 1, \ldots, n$, что на отрезке I_i выполнено неравенство (14), и потому выполнено неравенство $|x(t)| > P$. Из этого следует, что

$$F(x(t), y(t)) > \frac{I_0 + N(b-a)}{\rho} \quad \text{при} \quad t \in I_i. \tag{15}$$

Кроме того, в силу (10),

$$F(x(t), y(t)) \geqslant -N \quad \text{при} \quad t \in [a, b]. \tag{16}$$

Так как длина отрезка I_i равна ρ, то из неравенств (15) и (16) мы получаем

$$\int_a^b F(x(t), y(t))\,dt \geqslant \frac{I_0 + N(b-a)}{\rho}\rho + \\ + (-N)[(b-a) - \rho] > I_0. \tag{17}$$

Итак, для любой функции $x \in \Omega_a^{(n)}$, удовлетворяющей условию $\|x\| > R$, выполнено неравенство (17).

Обозначим через Σ_R множество всех функций $x \in \Omega_a^{(n)}$, удовлетворяющих условию $\|x\| \leqslant R$, и пусть I^* — нижняя грань значений функционала (9) для функций $x \in \Sigma_R$. Очевидно, что $I_0 \geqslant I^*$, и потому $\int\limits_a^b F(x(t), y(t))\,dt \geqslant I^*$ для любой функции $x \in \Omega_a^{(n)}$: при $\|x\| > R$ это следует из доказанного неравенства (17), а при $\|x\| \leqslant R$ — из определения нижней грани. Поэтому для завершения доказательства первой части теоремы остается установить, что существует такая функция $x \in \Omega_a^{(n)}$, для которой функционал (9) принимает значение I^*. Это легко вытекает из компактности множества Σ_R (см. основную лемму) и непрерывности интеграла (9), рассматриваемого как функция от $x \in \Omega_a^{(n)}$.

Итак, первая часть теоремы (существование решения) доказана. Так как, в частности, функция $F(x, y) \equiv (x - y)^2$ удовлетворяет указанным в теореме 18 условиям, то и для функционала (9*) поставленная задача всегда имеет решение. Покажем, что в этом случае решение единственно. Так как функционал (9*) равен d^2, где

$d = d(x, y)$ — расстояние между функциями x и y в смысле метрики пространства L_2, и так как величины d и d^2 достигают своего минимума одновременно, то задача сводится к отысканию такого элемента $x \in \Omega_\alpha^{(n)}$, для которого $d(x, y) = \min$, т. е. к нахождению ближайшей к y точки $x \in \Omega_\alpha^{(n)}$. Пространство $C_{[a,b]}$, очевидно, содержится в L_2, причем прямые линии пространства $C_{[a,b]}$ являются прямыми и в L_2. Поэтому выпуклое в $C_{[a,b]}$ множество $\Omega_\alpha^{(n)}$ (см. основную лемму) является также выпуклым подмножеством пространства L_2. Но в пространстве L_2 (в силу строгой выпуклости его единичной сферы) выпуклое множество не может содержать более одной ближайшей к y точки. Поэтому в рассматриваемом случае наша основная задача имеет только одно решение.

Теорема 18 доказана.

Перейдем теперь к нахождению решения с помощью принципа максимума. Пусть $x(t)$ — произвольная функция класса $\Omega_\alpha^{(n)}$. Тогда функция $x^{(n)}(t)$ существует на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условию Липшица с константой α и, следовательно, является абсолютно непрерывной. Поэтому почти всюду существует измеримая функция $u = x^{(n+1)}(t)$, причем во всех точках, где функция $u(t)$ определена, выполнено соотношение $|u(t)| \leqslant \alpha$. Таким образом, обозначая функции $x(t)$, $x'(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$ через $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$ соответственно, мы найдем, что выполнены соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= x^3, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx^n}{dt} &= x^{n+1}, \\ \frac{dx^{n+1}}{dt} &= u(t), \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

где $|u(t)| \leqslant \alpha$. Эти соотношения выполняются почти всюду на отрезке $[a, b]$ (первые n соотношений даже всюду). Нетрудно видеть, что и обратно, если абсолютно непрерывные функции $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$ почти всюду на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют соотношениям (18), где $u(t)$ — некоторая измеримая функция, удовлетворяющая условию $|u(t)| \leqslant \alpha$, то функция $x(t) = x^1(t)$ принадлежит классу $\Omega_\alpha^{(n)}$. В самом деле, так как функция x^{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ абсолютно непрерывна и, следовательно, непрерывна, то из соотношения $\frac{dx^i}{dt} = x^{i+1}$, имеющего место почти всюду на отрезке $[a, b]$, следует, что абсолютно непрерывная функция x^i является интегралом от непрерывной функции x^{i+1}. Поэтому функция x^i всюду на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную, равную x^{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, функция $x^1(t)$ имеет всюду на отрезке $[a, b]$ абсолютно непрерывную n-ю производную, равную $x^{n+1}(t)$, и эта производная, в силу соотношений $\frac{dx^{n+1}}{dt} = u(t)$, $|u(t)| \leqslant \alpha$, имеющих место почти всюду, удовлетворяет условию Липшица с константой α, т. е. $x^1 \in \Omega_\alpha^{(n)}$.

Итак, вместо функций класса $\Omega_\alpha^{(n)}$ мы можем рассматривать (абсолютно непрерывные) решения системы (18) при ограничении $|u(t)| \leqslant \alpha$. Таким образом, основная задача эквивалентна следующей оптимальной задаче: *в классе измеримых управлений $u(t)$, удовлетворяющих ограничению $|u(t)| \leqslant \alpha$, найти такое, для которого решение системы* (18) *осуществляет минимум интеграла*

$$J = \int_a^b F(x^1, y(t))\, dt;$$

концевые значения $x^i(a)$ и $x^i(b)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, произвольны.

Так как подынтегральная функция интеграла J зависит явно от t (через заданную функцию $y(t)$), то мы введем вспомогательное переменное $x^{n+2} \equiv t$, удовлетворяющее, очевидно, дифференциальному уравнению

$$\frac{dx^{n+2}}{dt} = 1$$

с начальным условием $x^{n+2}(a)=a$. Тогда рассматриваемая оптимальная задача примет следующую форму.

В пространстве X переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}, x^{n+2}$ задано начальное многообразие S_0 с уравнением $x^{n+2}=a$ и конечное многообразие S_1 с уравнением $x^{n+2}=b$ (каждое из многообразий имеет размерность $n+1$). *В классе измеримых управлений $u(t)$, удовлетворяющих ограничению $|u(t)|\leqslant\alpha$, найти такое, для которого решение системы*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx^1}{dt}&=x^2,\\
\frac{dx^2}{dt}&=x^3,\\
&\cdots\cdots\\
\frac{dx^n}{dt}&=x^{n+1},\\
\frac{dx^{n+1}}{dt}&=u,\\
\frac{dx^{n+2}}{dt}&=1,
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

исходящее в момент $t_0=a$ из некоторой точки многообразия S_0 и приходящее (в силу последнего уравнения (19), в момент $t_1=b$) на многообразие S_1, осуществляет минимум интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x^1,\ y(x^{n+2}))\,dt.$$

Эту задачу (эквивалентную нашей основной задаче) мы и будем решать, для чего воспользуемся теоремами 8 и 3. Функции $F(x, y)$ и $y(t)$ мы будем предполагать непрерывно дифференцируемыми. Функция $\mathscr{H}$ для рассматриваемой оптимальной задачи имеет вид

$$\mathscr{H}=\psi_0F(x^1,\ y(x^{n+2}))+\psi_1x^2+\psi_2x^3+\ldots \\ \ldots+\psi_nx^{n+1}+\psi_{n+1}u+\psi_{n+2}. \tag{20}$$

С помощью этой функции $\mathscr{H}$ мы составим систему дифференциальных уравнений для вспомогательных неизвестных ψ_i:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\psi_0}{dt}=0,\\
&\frac{d\psi_1}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^1}=-\psi_0\frac{\partial F(x^1,\ y(x^{n+2}))}{\partial x^1},\\
&\frac{d\psi_2}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^2}=-\psi_1,\\
&\frac{d\psi_3}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^3}=-\psi_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d\psi_{n+1}}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x^{n+1}}=-\psi_n
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

(выражение для $\frac{d\psi_{n+2}}{dt}$ мы не выписываем, так как оно нам не понадобится).

Пусть $x(t)$ — решение основной задачи. Тогда, согласно сказанному ранее, функции

$$x^1(t)=x(t),\quad x^2(t)=x'(t),\ \dots,\ x^{n+1}(t)=x^{(n)}(t),\quad x^{n+2}=t$$

дают решение рассмотренной выше оптимальной задачи (см. (19)). Поэтому существует ненулевое решение ψ_0, $\psi_1, \dots, \psi_{n+1}, \psi_{n+2}$ системы (21) (дополненной невыписанным уравнением для ψ_{n+2}), удовлетворяющее условиям, которые указаны в теоремах 8 и 3. Условие максимума функции $\mathscr{H}$ дает (почти всюду на отрезке $[a, b]$):

$$\max_{-\alpha\leqslant u\leqslant\alpha}\psi_{n+1}(t)\,u=\psi_{n+1}(t)\,u(t),$$

т. е.

$$u(t)\begin{cases}=\alpha\operatorname{sign}\psi_{n+1}(t), & \text{если}\quad \psi_{n+1}(t)\neq 0,\\ \text{не определено}, & \text{если}\quad \psi_{n+1}(t)=0.\end{cases}\tag{22}$$

Выпишем теперь условия трансверсальности (теорема 3). Так как векторы, идущие вдоль осей $x^1, x^2, \dots, x^{n+1}$, параллельны гиперплоскостям S_0 и S_1, то условия трансверсальности имеют вид

$$\psi_i(a)=0,\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n+1,\tag{23}$$

$$\psi_i(b)=0,\quad i=1,\ 2,\ \dots,\ n+1.\tag{24}$$

В силу первого из уравнений (21) мы имеем $\psi_0 = \text{const}$, причем, согласно теореме 8, $\psi_0 \leqslant 0$. Нетрудно видеть, что предположение $\psi_0 = 0$ приводит к противоречию. Действительно, если $\psi_0 = 0$, то $\frac{d\psi_1}{dt} = 0$ (см. (21)) и, в силу (23), $\psi_1 \equiv 0$. Из этого получаем $\frac{d\psi_2}{dt} = 0$ (см. (21)) и, в силу (23), $\psi_2 \equiv 0$ и т. д. Таким образом, мы находим последовательно $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n+1} \equiv 0$. Так как вдоль оптимальной траектории функция $\mathscr{H}$ тождественно равна нулю (теорема 8), то отсюда, в силу (20), получаем $\psi_{n+2} \equiv 0$. Но это противоречит тому, что ψ_0, $\psi_1, \ldots, \psi_{n+2}$ — ненулевое решение. Итак, $\psi_0 < 0$, и мы можем считать, что $\psi_0 = -1$ (так как все величины ψ_i определены лишь с точностью до общего постоянного положительного множителя пропорциональности). Система (21) теперь принимает вид (после подстановки $x^{n+2} = t$):

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial F(x^1, y(t))}{\partial x^1},$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1,$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = -\psi_n,$$

откуда получаем, учитывая условия трансверсальности (23):

$$\psi_1(t) = \int_a^t \frac{\partial F(x^1(t), y(t))}{\partial x^1}\,dt,$$

$$\psi_2(t) = -\int_a^t \left(\int_a^t \frac{\partial F(x^1(t), y(t))}{\partial x^1}\,dt\right)dt,$$

$$\psi_3(t) = \int_a^t \left[\int_a^t \left(\int_a^t \frac{\partial F(x^1(t), y(t))}{\partial x^1}\,dt\right)dt\right]dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и вообще

$$\psi_k(t)=(-1)^{k-1}\int\limits_a^t\ldots\int\limits_a^t\frac{\partial F(x^1(t),\,y(t))}{\partial x^1}\,dt\ldots dt\ \ (k\ \text{квадратур}),$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1.$$

Согласно известной формуле анализа

$$\underbrace{\int\limits_a^t\ldots\int\limits_a^t}_{k} f(t)\,dt\ \ldots\ dt=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_a^t(t-\xi)^{k-1}f(\xi)\,d\xi,$$

мы можем найденное значение $\psi_k(t)$ переписать в виде

$$\psi_k(t)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_a^t(\xi-t)^{k-1}\frac{\partial F(x^1(\xi),\,y(\xi))}{\partial x^1}\,d\xi,\qquad(25)$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1.$$

Условия трансверсальности (24) принимают теперь вид

$$\psi_k(b)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_a^b(\xi-b)^{k-1}\frac{\partial F(x^1(\xi),\,y(\xi))}{\partial x^1}\,d\xi=0,$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1.$$

Умножая это соотношение на $(k-1)!\,c_{k-1}$ и суммируя по $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$, получаем

$$\int\limits_a^b[c_0+c_1(\xi-b)+c_2(\xi-b)^2+\ \ldots$$

$$\ldots\ +c_n(\xi-b)^n]\,\frac{\partial F(x^1(\xi),\,y(\xi))}{\partial x^1}\,d\xi=0$$

при любых значениях констант $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$. Так как $c_0+c_1(\xi-b)+\ \ldots\ +c_n(\xi-b)^n$ есть произвольный многочлен степени не более n, то мы можем объединить условия трансверсальности (24) одним требованием:

$$\int_a^b P(\xi) \frac{\partial F(x^1(\xi),\ y(\xi))}{\partial x^1} d\xi = 0$$

для любого многочлена $P(\xi)$ степени не более n.

Далее, формула (22) переписывается, в силу (25), в виде

$$u(t) \begin{cases} = \alpha \operatorname{sign}\left(\displaystyle\int_a^t (\xi - t)^n \frac{\partial F(x^1(\xi),\ y(\xi))}{\partial x^1} d\xi\right), & \text{если выражение под знаком sign отлично от нуля;} \\ \text{не определено, если это выражение равно нулю.} \end{cases}$$

Иначе говоря, почти всюду на отрезке $[a, b]$ выполняется одно из соотношений:

$$\int_a^t (\xi - t)^n \frac{\partial F(x^1(\xi),\ y(\xi))}{\partial x^1} d\xi = 0,$$

$$u(t) = \alpha \operatorname{sign}\left(\int_0^t (\xi - t)^n \frac{\partial F(x^1(\xi),\ y(\xi))}{\partial x^1} d\xi\right).$$

Наконец, из соотношений (19) мы получаем

$$u(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} x^1(t)$$

(почти всюду на отрезке $[a, b]$). Сопоставляя все сказанное и обозначая снова $x^1(t)$ через $x(t)$, мы получим следующее предложение.

Теорема 19. *Пусть функции $F(x, y)$ и $y(t)$ имеют непрерывные первые производные. Для того чтобы функция $x(t)$ являлась решением основной задачи, необходимо, чтобы почти всюду на отрезке $[a, b]$ выполнялось* *одно из соотношений*

$$\int_a^t (\xi - t)^n \frac{\partial F(x(\xi), y(\xi))}{\partial x} d\xi = 0,$$

$$x^{(n+1)}(t) = \alpha \operatorname{sign}\left(\int_a^t (\xi - t)^n \frac{\partial F(x(\xi), y(\xi))}{\partial x} d\xi\right)$$

и, кроме того, чтобы для любого многочлена $P(t)$ степени не более n выполнялось условие

$$\int_a^b P(t) \frac{\partial F(x(t), y(t))}{\partial x} dt = 0.$$

Пример (задача о нахождении профиля дороги). Рассматривая функционал (9*), мы при $n = 0$ приходим к следующей задаче. *Даны дифферецируемая на отрезке $[a, b]$ функция $y(t)$ и число $\alpha \geqslant 0$. Найти такую функцию $x(t)$, удовлетворяющую условию Липшица с константой α, для которой интеграл* (9*) *принимает наименьшее возможное значение.* Эту задачу можно интерпретировать следующим образом. Между двумя пунктами A и B нужно провести дорогу, причем рельеф местности между этими пунктами задан (функция $y(t)$), а по условиям эксплуатации дороги уклон пути в любой точке не должен быть больше α, т. е. продольный разрез дороги (профиль ее) должен описываться функцией, удовлетворяющей условию Липшица с константой α. Для достижения этой цели можно либо прокладывать дорогу по местности, либо сооружать насыпь, либо прорывать траншею для дороги. Если $x(t)$ — проектируемый профиль дороги, то стоимость земляных работ (сооружение насыпей для участков, где $x(t) > y(t)$, и траншей для участков, где $x(t) < y(t)$) пусть оценивается интегралом (9*). Найти наиболее выгодный (в смысле материальных затрат) профиль дороги.

Решение этой задачи существует и единственно (теорема 18). Для того чтобы функция $x(t)$ являлась искомым решением, необходимо (в силу теоремы 19), чтобы почти всюду на отрезке $[a, b]$ выполнялось одно из соотношений

$$\int_a^t [x(\xi) - y(\xi)]\, d\xi = 0, \tag{26}$$

$$x'(t) = \alpha \operatorname{sign}\left(\int_a^t [x(\xi) - y(\xi)]\, d\xi\right), \tag{27}$$

и, кроме того, чтобы было выполнено условие

$$\int_a^b [x(t) - y(t)]\, dt = 0. \tag{28}$$

Если на некотором отрезке, содержащемся внутри $[a, b]$, выполнено соотношение (26), то на этом отрезке $x(t) \equiv y(t)$, т. е. дорогу следует прокладывать прямо по местности. Если же на некотором отрезке выполнено соотношение (27), то в точках этого отрезка $x'(t) = \pm\alpha$, так что на этом участке дорога состоит из одного или нескольких кусков с уклоном α или $-\alpha$. Таким образом, общая характеристика дороги заключается в том, что она состоит из отдельных кусков, проложенных по местности, и кусков максимально допустимого уклона, идущих по насыпям или в траншеях.

Рис. 81.

Пусть, например, пункты A и B расположены на ровной местности, на которой между пунктами A и B имеется углубление (скажем, овраг, который дорога должна пересечь), так что разрез местности по линии AB имеет вид, изображенный на рис. 81. Мы будем считать изображенную на рис. 81 линию графиком функции $y(t)$, предполагая, что ось абсцисс совпадает с прямой AB, а абсциссы точек A и B равны соответственно a и b. Стенки оврага предположим крутыми (имеющими уклон больше α). Функцию, график которой представляет собой искомый профиль дороги, обозначим, как и выше,

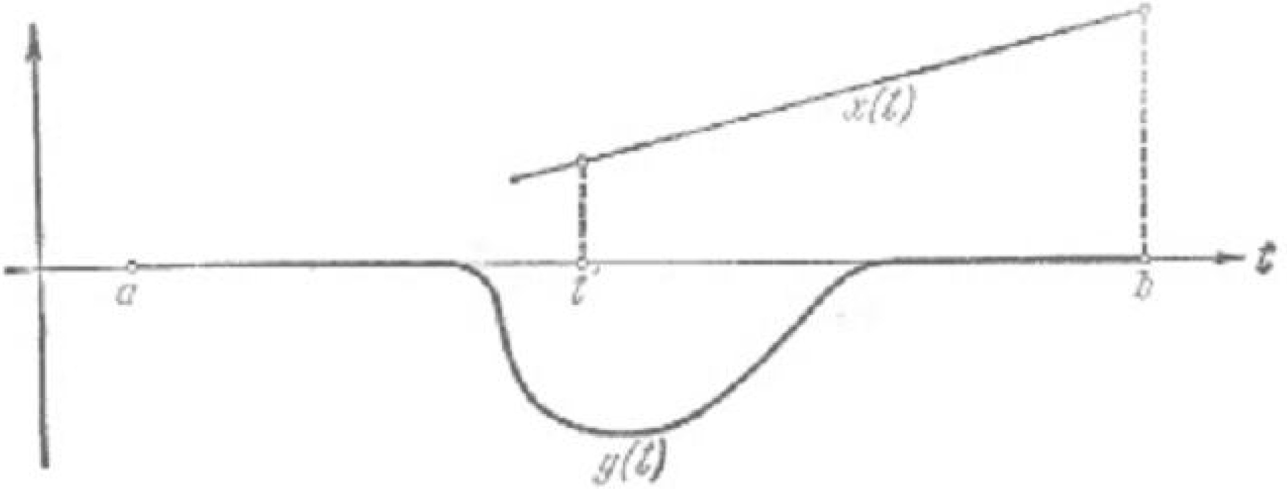

Рис. 82.

через $x(t)$. Легко видеть, что $x(t) \leqslant 0$ для всех t. Действительно, если $x(t') > 0$, то, в силу непрерывности функции $x(t)$, неравенство $x(t) > 0$ будет иметь место

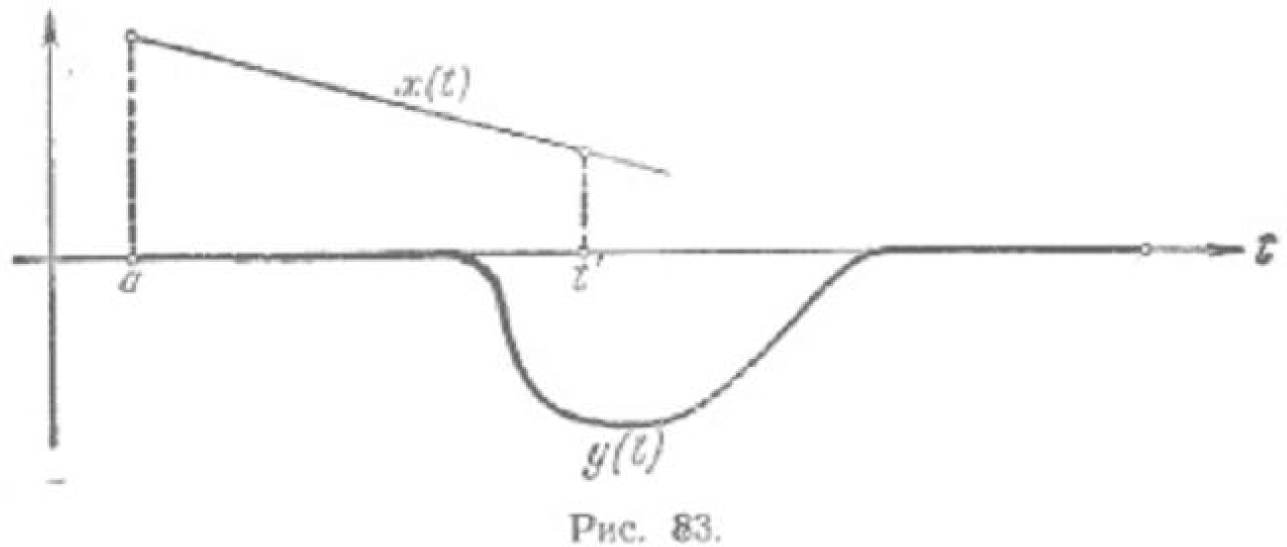

Рис. 83.

и в некоторой окрестности точки t'. Поэтому, несколько сместив, если нужно, точку t', мы можем добиться выполнения неравенств $x(t') > 0$, $\int\limits_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt \neq 0$. Если имеет место неравенство $\int\limits_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt > 0$, то, в силу

(27), $x'(t) = +\alpha$ при $t \geqslant t'$ (рис. 82), и потому

$$\int_a^b (x(t) - y(t))\,dt = \int_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt + \int_{t'}^b (x(t) - y(t))\,dt > 0,$$

что противоречит равенству (28). Если же имеет место неравенство $\int_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt < 0$, то, в силу (27), $x'(t) = -\alpha$ при $t \leqslant t'$ (рис. 83), а это означает, что $x(t) > y(t)$ при $a \leqslant t \leqslant t'$ — вопреки неравенству $\int_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt < 0$. Полученное противоречие показывает, что $x(t) \leqslant 0$ для всех t.

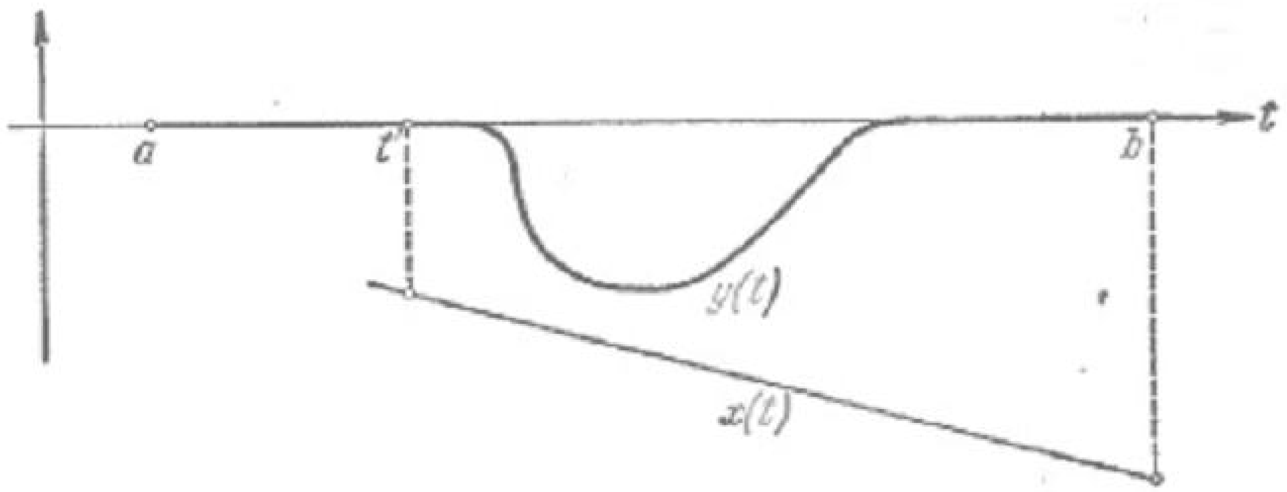

Рис. 84.

Предположим теперь, что в некоторой точке t' выполнено неравенство $x(t') < y(t')$. Если при этом $\int_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt < 0$, то при $t > t'$ дорога спускается с уклоном α (т. е. $x'(t) = -\alpha$) до тех пор, пока неравенство $\int_a^{t} (x(t) - y(t))\,dt < 0$ не нарушается. При этом графики функций $x(t)$ и $y(t)$ обязательно должны пересечься при $t > t'$, ибо в противном случае мы имели бы

$x(t) < y(t)$ при всех $t > t'$ (рис. 84), и потому

$$\int_a^b (x(t) - y(t))\,dt = \int_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt + \int_{t'}^b (x(t) - y(t))\,dt < 0$$

вопреки соотношению (28). Аналогично, если выполнены неравенства $x(t') < y(t')$ и $\int\limits_a^{t'} (x(t) - y(t))\,dt > 0$, то при $t < t'$ дорога подходит к точке t', поднимаясь с уклоном

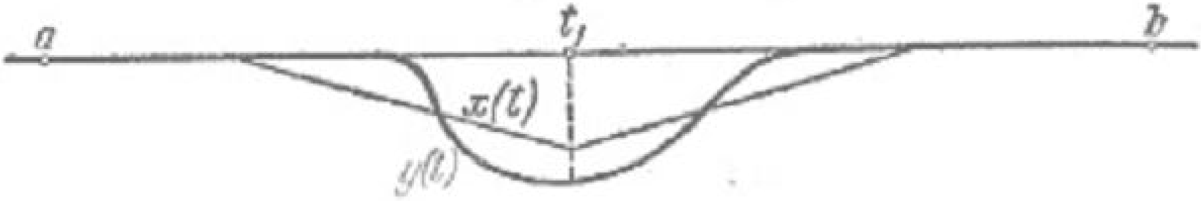

Рис. 85.

α (т. е. $x'(t) = +\alpha$), причем при $t < t'$ обязательно имеется точка пересечения графиков $x(t)$ и $y(t)$.

Все сказанное позволяет отыскивать функцию $x(t)$ для различных графиков $y(t)$. Примеры приведены на

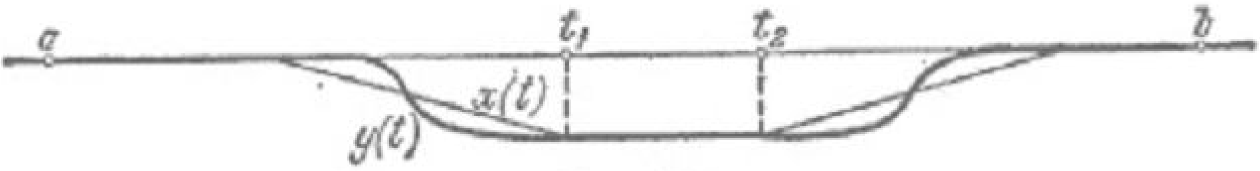

Рис. 86.

рис. 85, 86. При этом для определения точки t_1 и значения $x(t_1)$ на рис. 85 мы имеем соотношения

$$\int_a^{t_1} (x(t) - y(t))\,dt = 0, \quad \int_{t_1}^b (x(t) - y(t))\,dt = 0,$$

а для определения точек t_1 и t_2 на рис. 86 имеем соотношения

$$\int_a^{t_1} (x(t) - y(t))\,dt = 0, \quad \int_{t_2}^b (x(t) - y(t))\,dt = 0.$$

Разумеется, рассмотренные на приведенных рисунках случаи очень просты. Они были подробно изучены лишь с единственной целью — показать, что соотношений (26), (27), (28) (а в общем случае — соотношений, указанных в теореме 19), вообще говоря, «достаточно» для нахождения искомой функции $x(t)$.

§ 27. Оптимальные процессы с запаздыванием *)

В ряде случаев задача оптимального управления осложняется эффектом запаздывания. Запаздывание может возникать в связи с затратой времени на передачу сигнала или, как это бывает чаще, вызывается упрощающими явление предположениями, в силу которых считают, что действие промежуточных и усиливающих звеньев в управляемом объекте сводится к передаче сигнала с запаздыванием. Довольно обширный круг технических задач этого рода укладывается в следующую математическую схему.

Движение объекта описывается в фазовом пространстве X переменных $x^1, \ldots, x^n$ системой уравнений

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f^i(x^1(t), \ldots, x^n(t), x^1(t-\theta), \ldots, x^n(t-\theta), u(t)),$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad \theta = \text{const} > 0, \tag{29}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\theta), u(t)). \tag{30}$$

Таким образом, запаздывающий аргумент содержится только в фазовых координатах и отсутствует в управлении. Функции $f^i(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, u)$ предполагаются непрерывными по совокупности своих аргументов и непрерывно дифференцируемыми по $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots$ $\ldots, y^n$. Иначе говоря, функции f^i, $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\frac{\partial f^i}{\partial y^j}$ определены и непрерывны на прямом произведении $X \times X \times U$. В качестве класса D допустимых управлений мы примем класс всех **кусочно-непрерывных** управлений со значениями в U (или некоторый его подкласс); см. § 10. Как и прежде, мы будем для определенности предполагать, что рассматриваемые управления в точках разрыва

*) Результаты этого параграфа принадлежат Г. Л. Харатишвили.

непрерывны слева

$$u(t) = u(t-0).$$

Для однозначного определения траектории $x(t)$ уравнения (30) на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ необходимо задать не только допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, но и *начальную функцию* $\varphi(t)$ со значениями в X, определенную на отрезке $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$. Начальную функцию $\varphi(t)$ мы будем предполагать непрерывной на всем отрезке $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$.

Функцию $x(t)$, заданную на отрезке $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$ и непрерывную на всем этом отрезке, мы будем называть траекторией уравнения (30), *соответствующей* допустимому управлению $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и заданной начальной функции $\varphi(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$, если функция $x(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяет уравнению (30), а на отрезке $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$ совпадает с функцией $\varphi(t)$.

Перейдем теперь к формулировке оптимальной задачи, которую мы будем решать в этом параграфе. При этом мы сразу сформулируем задачу с подвижным правым концом (которая включает в себя, как частный случай, и задачу с закрепленным правым концом).

Пусть дана функция $f^0(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, u)$, удовлетворяющая тем же условиям, что и функции f^i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть, кроме того, в X задано гладкое k-мерное многообразие S_1, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, и начальная функция $\varphi(t)$. Требуется в классе допустимых управлений выбрать такое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, чтобы траектория $x(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$, системы (29), соответствующая выбранному управлению $u(t)$ и заданной начальной функции $\varphi(t)$, удовлетворяла краевому условию $x(t_1) \in S_1$ и интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\ x(t-\theta),\ u(t))\,dt \tag{31}$$

принимал минимальное значение. Заметим, что пределы интегрирования в (31) не фиксированы; фиксированы лишь «краевые» условия: $\varphi(t)$ и S_1.

Если $f^0 \equiv 1$, то мы получаем задачу об оптимальных быстродействиях для систем с запаздыванием.

Если размерность многообразия S_1 равна нулю, то оно превращается в точку, и мы получаем оптимальную задачу с закрепленным правым концом.

Дадим теперь другую (эквивалентную) формулировку нашей оптимальной задачи, более удобную для формулировки и доказательства основного результата.

Введем в рассмотрение $(n+1)$-мерное фазовое пространство X переменной $\boldsymbol{x} = (x^0, \ldots, x^n) = (x^0, x)$ и обозначим через L множество всех точек (x^0, x), для которых $x \in S_1$ (т. е. L есть многообразие размерности $k+1$, являющееся прямым произведением многообразия S_1 на ось x^0). Тогда наша оптимальная задача эквивалентна следующей задаче (ср. стр. 20—21).

Система уравнений движения фазовой точки $\boldsymbol{x}(t) = (x^0(t), \ldots, x^n(t))$ имеет вид

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f^i(x(t), x(t-\theta), u(t)), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{32}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(x(t), x(t-\theta), u(t)). \tag{33}$$

Требуется выбрать такое допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, чтобы соответствующая этому управлению и начальной функции $\boldsymbol{\varphi}(t) = (0, \varphi(t))$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$, траектория $\boldsymbol{x}(t) = (x^0(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (32) удовлетворяла краевому условию $\boldsymbol{x}(t_1) \in L$ и при этом координата $x^0(t_1)$ была минимальной.

Всякое допустимое управление $u(t)$ и соответствующую траекторию $\boldsymbol{x}(t)$, удовлетворяющие сформулированным условиям, назовем *оптимальными*.

Для решения поставленной задачи, как и раньше, введем в рассмотрение вспомогательный вектор $\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_n)$ и составим скалярную функцию $\mathcal{H} = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha = (\psi, \boldsymbol{f})$ переменных $\psi_0, \ldots, \psi_n$, $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$, u. Через $\mathcal{M}(\psi, x, y)$ обозначим верхнюю грань значений функции $\mathcal{H}$ при фиксированных ψ, x, y и при u, меняющемся на множестве U.

Введем, далее, в рассмотрение следующие две системы уравнений для вспомогательных переменных ψ_0,

$\psi_1, \ldots, \psi_n$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial\mathscr{H}(\psi(t), x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial x^i} - \\ - \frac{\partial\mathscr{H}(\psi(t+\theta), x(t+\theta), x(t), u(t+\theta))}{\partial y^i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{34}$$

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial\mathscr{H}(\psi(t), x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial x^i}, \\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Мы будем говорить, что система непрерывных кусочно-дифференцируемых на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ функций $\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ *соответствует* функциям $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и $x(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$, если на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 - \theta$ она удовлетворяет системе (34), а на отрезке $t_1 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$ — системе (35).

Теперь мы можем сформулировать необходимое условие оптимальности для поставленной задачи (в форме принципа максимума).

Теорема 20. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$, системы (32) с начальной функцией $\varphi(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$, проходит в некоторый момент $t_1 > t_0$ через некоторую точку многообразия L. Для оптимальности управления $u(t)$ и соответствующей траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:*

1° для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, выполняется условие максимума

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), x(t-\theta), u(t)) = \mathscr{M}(\psi(t), x(t), x(t-\theta)); \tag{36}$$

2° в конечный момент t_1 выполнены соотношения

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \quad \mathscr{M}(\psi(t_1), x(t_1), x(t_1-\theta)) = 0 \tag{37}$$

(заметим, что в силу уравнений (34), (35) мы имеем $\psi_0 = \text{const}$);

3° вектор $(\psi_1(t_1), \ldots, \psi_n(t_1))$ ортогонален касательной плоскости многообразия S_1, проведенной в точке $x(t_1) = (x^1(t_1), \ldots, x^n(t_1))$.

Заметим, что при применении этой теоремы возникает трудность, связанная с тем обстоятельством, что неизвестные функции $x^1(t), \ldots, x^n(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ входят в систему (32), (34) как с запаздывающим, так и с опережающим аргументом. Для линейных систем эта трудность, очевидно, отсутствует.

В случае оптимальности по быстродействию ($f^0 \equiv 1$) вместо функции $\mathscr{H}$ рассматривается функция $H = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha$ переменных $\psi_1, \ldots, \psi_n, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, u$; верхняя грань значений этой функции по $u \in U$ (при фиксированных ψ, x, y) обозначается через $M(\psi, x, y)$. Заменяя в уравнениях (34), (35) функцию $\mathscr{H}$ функцией H, мы сможем и в этом случае определить функции $\psi_1(t), \ldots$ $\ldots, \psi_n(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *соответствующие* функциям $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и $x(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$. После этого для случая оптимальных быстродействий сохраняется формулировка теоремы 20 с той только разницей, что функции $\mathscr{H}$ и $\mathscr{M}$ заменяются функциями H и M, а условие 2° заменяется условием

$$M(\psi(t_1), x(t_1), x(t_1 - \theta)) \geqslant 0.$$

Иначе говоря, условие оптимальности по быстродействию вытекает из теоремы 20 совершенно таким же образом, как теорема 2 получается из теоремы 1.

Доказательство теоремы 20 в общих чертах проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 (или теоремы 8). Мы проведем его, подробно отмечая те части доказательства, в которых необходимо произвести некоторые изменения, и опуская построения, ничем не отличающиеся от изложенных в главе 2.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (33), соответствующее допустимому управлению $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и начальной функции $\varphi(t)$, $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$. *Системой уравнений в вариациях* для системы (32) назовем следующую линейную систему:

$$\frac{d(\delta x^i(t))}{dt} = \sum_{\alpha=0}^{n} \left(\frac{\partial f^i(x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f^i(x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial y^\alpha} \delta x^\alpha(t-\theta) \right), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \quad (38)$$

Мы будем рассматривать такие решения системы (38) на отрезке $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_1$ или на его части, которые соответствуют кусочно-непрерывным начальным функциям; так как мы здесь не исключаем возможности разрыва решения в начальный момент t_0, то для однозначного определения решения системы (38) необходимо задать (кроме начальной функции) начальное значение этого решения. Таким образом, если $\eta(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке $\tau - \theta \leqslant t \leqslant \tau$, где $\tau \in [t_0, t_1]$, а ξ — произвольный вектор пространства X, то *решением* системы (38) с начальной функцией $\eta(t)$ и начальным значением ξ мы будем называть такую функцию $\delta x(t) = (\delta x^0(t), \delta x^1(t), \ldots$ $\ldots, \delta x^n(t))$, $\tau - \theta \leqslant t \leqslant t_1$, которая на промежутке $\tau - \theta \leqslant t \leqslant \tau$ совпадает с $\eta(t)$, на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ непрерывна и удовлетворяет системе (38) и, кроме того, удовлетворяет соотношению $\delta x(\tau) = \xi$. Это решение мы будем обозначать символом $A_{t,\tau}(\eta, \xi)$, $\tau - \theta \leqslant t \leqslant t_1$.

Мы условимся (при $\tau - \theta \leqslant t \leqslant t_1$) считать $A_{t,\tau}(\eta, \xi)$ связанным вектором, исходящим из точки $x(t)$. Таким образом, при заданных начальных элементах ξ и $\eta(t)$, $\tau - \theta \leqslant t \leqslant \tau$, определяется векторное поле $A_{t,\tau}(\eta, \xi)$, $\tau - \theta \leqslant t \leqslant t_1$; мы будем говорить, что векторы $A_{t,\tau}(\eta, \xi)$ этого поля получаются друг из друга *переносом* вдоль траектории $x(t)$.

Отметим следующие легко доказываемые свойства переноса, которые нам понадобятся в дальнейшем (ср. формулы (17) гл. 2).

I. $A_{t_0, t_0}(\eta, \xi) = \xi$.

II. Положим $\eta_1(t) = A_{t,\tau}(\eta, \xi)$, $\tau_1 - \theta \leqslant t \leqslant \tau_1$, где $t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 \leqslant t_1$; тогда

$$A_{t,\tau_1}(\eta_1, A_{\tau_1,\tau}(\eta, \xi)) = A_{t,\tau}(\eta, \xi), \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant t_1.$$

III. $$A_{t,\tau}(\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2, \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2) = \\ = \gamma_1 A_{t,\tau}(\eta_1, \xi_1) + \gamma_2 A_{t,\tau}(\eta_2, \xi_2), \ \tau - \theta \leqslant t \leqslant t_1,$$

где γ_1 и γ_2 — произвольные действительные числа.

IV. Пусть $\eta_1(t)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке $\tau - \theta \leqslant t \leqslant \tau$ (где $\tau \in [t_0, t_1]$), M — некоторая константа и ξ — произвольный вектор. Пусть, далее, полуинтервалы I_i определяются так же, как и в § 13, а $\eta(t)$ — функция, определенная на отрезке $\tau-\theta\leqslant t\leqslant\tau$ следующим образом:

$$\begin{cases}\eta(t)=\varepsilon\eta_1(t)+o(\varepsilon) \text{ во всех точках отрезка } \tau-\theta\leqslant t\leqslant\tau,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{не принадлежащих полуинтервалам } I_i;\\ |\eta(t)|\leqslant\varepsilon M \text{ на полуинтервалах } I_i.\end{cases}$$

Тогда

$$A_{t,\tau}(\eta,\ \varepsilon\xi+o(\varepsilon))=A_{t,\tau}(\varepsilon\eta_1,\ \varepsilon\xi)+o(\varepsilon),\quad \tau\leqslant t\leqslant t_1.$$

Свойства I и II непосредственно вытекают из определения символа $A_{t,\tau}(\eta,\xi)$. Справедливость свойства III на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\theta$ вытекает из того, что на этом отрезке система (38) представляет собой линейную (неоднородную) систему обыкновенных дифференциальных уравнений. На последующих отрезках длины θ (вплоть до t_1) свойство III можно доказать совершенно аналогично, воспользовавшись свойством II. Таким же образом устанавливается и справедливость свойства IV.

Перейдем теперь к вариациям управлений и траекторий. Пусть $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, — допустимое управление, а $x(t)$ — соответствующая ему траектория уравнения (33) с начальной функцией $\varphi(t)$, $t_0-\theta\leqslant\leqslant t\leqslant t_0$. Правильными точками управления $u(t)$ будут все точки его непрерывности, т. е. все, кроме конечного числа, точки отрезка $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Мы условимся всякое управление $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, продолжать за точку t_1, полагая $u(t)=u(t_1)$ при $t>t_1$. Важно отметить, что при этом точка t_1 будет правильной точкой управления $u(t)$. Если τ — произвольная точка непрерывности управления $u(t)$, то, каковы бы ни были действительные числа p и q, имеет место соотношение

$$\int\limits_{\tau+p\varepsilon}^{\tau+q\varepsilon} f(x(t),\ x(t-\theta),\ u(t))\,dt=\\ =\varepsilon(q-p)f(x(\tau),\ x(\tau-\theta),\ u(\tau))+o(\varepsilon)\quad(39)$$

(ср. формулу (1) гл. 2).

Пусть теперь $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, — допустимое управление, $x(t)$ — соответствующая траектория уравнения (33) с начальной функцией $\varphi(t)$, $t_0-\theta\leqslant t\leqslant t_0$, а a — символ, определяющий варьирование управления. Проварьированное управление обозначим через $u^*(t)$, а соответствующую этому управлению траекторию с той же начальной функцией $\varphi(t)$ обозначим через $x^*(t)$. (Отметим, что при любом $\varepsilon\geqslant 0$ траектория $x^*(t)$ представляет собой непрерывную функцию от t в силу определения решения уравнения (33).) При достаточно малом ε траектория $x^*(t)$ определена на всем отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (теорема о непрерывной зависимости решения от параметров). Покажем, что для любой точки τ непрерывности управления $u(t)$ имеет место следующая формула (ср. формулы (21), (22) гл. 2):

$$x^*(\tau+\varepsilon\,\delta t)=x(\tau)+\varepsilon\Delta x+o(\varepsilon), \tag{40}$$

где Δx — не зависящий от ε вектор, определяемый формулой:

$$\Delta x=f(x(\tau),\ x(\tau-\theta),\ u(\tau))\,\delta t+\\ +\sum_{i=1}^{s}A_{\tau,\tau_i}(0,\ f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ u(\tau_i)))\,\delta t_i. \tag{41}$$

Доказательство формул (40), (41) аналогично выводу формул (21), (22) в гл. 2. Прежде всего заметим, что имеют место формулы

$$x(\tau+\varepsilon\,\delta t)=x(\tau)+\varepsilon f(x(\tau),\ x(\tau-\theta),\ u(\tau))\,\delta t+o(\varepsilon), \tag{42}$$

$$x^*(\tau+\varepsilon\,\delta t)=x^*(\tau)+\varepsilon f(x(\tau),\ x(\tau-\theta),\ u(\tau))\,\delta t+o(\varepsilon) \tag{43}$$

$$(\text{при } \tau_s<\tau).$$

Эти формулы устанавливаются так же, как и формулы (23), (25) гл. 2 (с заменой ссылки на формулу (1) гл. 2 ссылкой на указанную выше формулу (39)). Далее, совершенно так же, как и в гл. 2, находится приращение функции $x^*(t)$ на полуинтервале I_i:

$$x^*|_{I_i}=\varepsilon f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ v_i)\,\delta t_i+o(\varepsilon) \tag{44}$$

(ср. формулу (26) гл. 2).

Переходим к индуктивной проверке соотношений (40), (41). При $s=0$ эти формулы справедливы (см.

(42)). Предположим, что они доказаны для случая, когда число полуинтервалов $l_1, l_2, \ldots$ меньше, чем s, и докажем справедливость этих формул при наличии s полуинтервалов $l_1, l_2, \ldots, l_s$. Обозначим через k такое целое число, что

$$\tau_{k+1}=\tau_{k+2}=\ldots=\tau_s \quad \text{и} \quad \tau_i<\tau_s \quad \text{при} \quad i\leqslant k$$

(случай $k=0$ не исключается). Заменяя точку τ точкой τ_s, число δt — числом l_{k+1}, а число s — меньшим числом k, мы, в силу индуктивного предположения, получим из (40), (41)

$$x^*(\tau_s+\varepsilon l_{k+1})=x(\tau_s)+\varepsilon f(x(\tau_s),\, x(\tau_s-\theta),\, u(\tau_s))\, l_{k+1}+\\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{\tau_s,\tau_i}(0,\, f(x(\tau_i),\, x(\tau_i-\theta),\, v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\, x(\tau_i-\theta),\, u(\tau_i)))\,\delta t_i+o(\varepsilon). \quad (45)$$

Это есть значение функции $x^*(t)$ в левом конце полуинтервала l_{k+1}. Далее, так как полуинтервалы $l_{k+1}, \ldots, l_s$ примыкают один к другому, то, суммируя соотношения (44) для $i=k+1, \ldots, s$ и складывая полученное соотношение с соотношением (45), найдем

$$x^*(\tau_s+\varepsilon(l_s+\delta t_s))=\\ =x(\tau_s)+\varepsilon f(x(\tau_s),x(\tau_s-\theta),\, u(\tau_s))\,(l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ldots+\delta t_s)+\\ +\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_s,\tau_i}(0,\, f(x(\tau_i),\, x(\tau_i-\theta),\, v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\, x(\tau_i-\theta),\, u(\tau_i)))\,\delta t_i+o(\varepsilon) \quad (46)$$

(ср. вывод формулы (28) в гл. 2; при этом ссылка на первую из формул (17) гл. 2 заменяется ссылкой на свойство 1 операции переноса, см. стр. 245). Если $\tau_{k+1}=\tau_s=\tau$, то соотношение (46) совпадает с (40), (41). Если же $\tau_s<\tau$, то

$$l_s+\delta t_s=0, \quad l_{k+1}+\delta t_{k+1}+\ \ldots\ +\delta t_s=0,$$

и соотношение (46) принимает вид

$$x^*(\tau_s)=x(\tau_s)+\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_s,\tau_i}(0,\, f(x(\tau_i),\, x(\tau_i-\theta),\, v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\, x(\tau_i-\theta),\, u(\tau_i)))\,\delta t_i+o(\varepsilon) \qquad (\tau_s<\tau). \quad (47)$$

Обозначим через $\eta(t)$ функцию $x^*(t)-x(t)$, рассматриваемую на отрезке $\tau_s-\theta\leqslant t\leqslant\tau_s$. Тогда (так как на отрезке $\tau_s\leqslant t\leqslant\tau$ управление $u^*(t)$ совпадает с $u(t)$) функция $x^*(t)-x(t)$ с точностью до $o(\varepsilon)$ является на отрезке $\tau_s-\theta\leqslant t\leqslant\tau$ решением системы уравнений в вариациях (38) с начальной функцией $\eta(t)$ и начальным значением $x^*(\tau_s)-x(\tau_s)$ (напомним, что обе функции $x(t)$, $x^*(t)$ непрерывны). Иначе говоря, с точностью до $o(\varepsilon)$ векторы $x^*(t)-x(t)$ получаются друг из друга (на отрезке $\tau_s-\theta\leqslant t\leqslant\tau$) с помощью переноса:

$$x^*(t)-x(t)=A_{t,\tau_s}(\eta,\ x^*(\tau_s)-x(\tau_s))+o(\varepsilon),\qquad \tau_s-\theta\leqslant t\leqslant\tau. \tag{48}$$

Всюду, кроме конечного числа отрезков I_i, функция $\eta(t)$, $\tau_s-\theta\leqslant t\leqslant\tau_s$, имеет (в силу предположения индукции) вид

$$\eta(t)=x^*(t)-x(t)=\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{t,\tau_i}(0,\ f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ u(\tau_i)))\,\delta t_i+o(\varepsilon).$$

Поэтому, в силу свойства IV (стр. 245—246), мы можем заменить формулу (48) формулой

$$x^*(t)-x(t)=A_{t,\tau_s}(\eta_1,\ \xi_1)+o(\varepsilon),\quad \tau_s\leqslant t\leqslant\tau, \tag{49}$$

где

$$\eta_1(t)=\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{t,\tau_i}(0,\ f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ u(\tau_i)))\,\delta t_i,$$

$$\xi_1=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}A_{\tau_s,\tau_i}(0,\ f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ v_i)-\\ -f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ u(\tau_i)))\,\delta t_i$$

(см. (47)). В силу свойства III операции переноса (стр. 245) мы можем формулу (49) переписать в виде

$$x^*(t)-x(t)=\varepsilon\sum_{i=1}^{k}A_{t,\tau_s}(\eta_1^{(i)},\ \xi_1^{(i)})\,\delta t_i+\\ +\varepsilon\sum_{i=k+1}^{s}A_{t,\tau_s}(0,\ \xi_1^{(i)})\,\delta t_i+o(\varepsilon),\quad \tau_s\leqslant t\leqslant\tau, \tag{50}$$

где

$$\eta_1^{(i)}(t) = A_{t, \tau_i}(0, f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), v_i) -$$
$$- f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), u(\tau_i))), \ \tau_s - \theta \leqslant t \leqslant \tau_s, \ i = 1, \ldots, k,$$
$$\xi_1^{(i)} = A_{\tau_s, \tau_i}(0, f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), v_i) -$$
$$- f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), u(\tau_i))), \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Наконец, в силу свойства II операции переноса (стр. 245) мы получаем

$$A_{t, \tau_s}(\eta_1^{(i)}, \xi_1^{(i)}) = A_{t, \tau_i}(0, f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), v_i) -$$
$$- f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), u(\tau_i))), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

а в силу свойства I

$$\xi_1^i = f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), v_i) -$$
$$- f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), u(\tau_i)), \qquad i = k + 1, \ldots, s.$$

Таким образом, формула (50) принимает вид

$$x^*(t) - x(t) = \varepsilon \sum_{i=1}^{s} A_{t, \tau_i}(0, f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), v_i) -$$
$$- f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), u(\tau_i)))\,\delta t_i + o(\varepsilon), \quad \tau_s \leqslant t \leqslant \tau$$

В частности, при $t = \tau$,

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^{s} A_{\tau, \tau_i}(0, f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), v_i) -$$
$$- f(x(\tau_i), x(\tau_i - \theta), u(\tau_i)))\,\delta t_i + o(\varepsilon).$$

Складывая это соотношение с соотношением (43), мы и в этом случае (т. е. при $\tau_s < \tau$) получаем соотношения (40), (41), что и завершает индукцию. Тем самым, формулы (40), (41) полностью доказаны.

Так как t_1 — правильная точка управления $u(t)$, то формулы (40), (41) применимы, в частности, при $\tau = t_1$:

$$x^*(t_1 + \varepsilon\,\delta t) = x(t_1) + \varepsilon\,\Delta x + o(\varepsilon), \tag{51}$$

где

$$\Delta x = f(x(t_1),\ x(t_1-\theta),\ u(t_1))\,\delta t + \\ + \sum_{i=1}^{s} A_{t_1,\tau_i}(0,\ f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ v_i) - \\ - f(x(\tau_i),\ x(\tau_i-\theta),\ u(\tau_i)))\,\delta t_i. \quad (52)$$

Обозначим теперь через K множество всех векторов (52), исходящих из точки $x(t_1)$. Дословно так же, как в главе 2 (стр. 107—112), устанавливается, что K — выпуклый конус пространства X и что имеет место лемма 3 (при $\tau = t_1$). Справедлива также и лемма 4 для $\tau = t_1$, что следует непосредственно из леммы 3. Таким образом, если траектория $x(t)$ оптимальна, то конус K не содержит внутри себя луча L_t. Поэтому через вершину $x(t_1)$ конуса K можно провести такую гиперплоскость Γ, что конус K расположен в одном из двух замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью Γ, а луч L_t — в другом. (Конус K здесь заменяет предельный конус, рассмотренный на стр. 121.) Это позволяет, как и в главе 2, определить нетривиальное решение $\psi(t) = (\psi_0(t),\ \psi_1(t),\ \ldots,\ \psi_n(t))$ системы уравнений (34), (35), для которого выполнены соотношения

$$\psi_0 = \text{const} \leqslant 0, \quad (53)$$

$$(\psi(t_1),\ \Delta x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \in K. \quad (54)$$

Докажем, что $\psi(t)$ — искомая функция (существование которой утверждается в теореме 20). Пусть τ_1 — произвольная правильная точка, т. е. точка непрерывности управления $u(t)$, $t_0 < \tau_1 < t_1$. Рассмотрим символ $\mathfrak{a}$ (см. § 14) с единственной точкой τ_1 (т. е. $s = 1$) и с числами δt_1, δt, соответственно равными единице и нулю. Тогда вектор Δx (см. (52)), соответствующий этому символу $\mathfrak{a}$, будет иметь значение

$$\Delta x = A_{t_1,\tau_1}(0,\ f(x(\tau_1),\ x(\tau_1-\theta),\ v_1) - \\ - f(x(\tau_1),\ x(\tau_1-\theta),\ u(\tau_1))). \quad (55)$$

Положим

$$g(t) = A_{t,\tau_1}(0,\ f(x(\tau_1),\ x(\tau_1-\theta),\ v_1) - \\ - f(x(\tau_1),\ x(\tau_1-\theta),\ u(\tau_1))), \quad \tau_1-\theta \leqslant t \leqslant t_1.$$

Тогда, по определению, $g(t) = (g_0(t), g^1(t), \ldots, g^n(t))$ есть решение системы (38), соответствующее начальной функции, тождественно равной нулю (на всем отрезке $\tau_1 - \theta \leqslant t \leqslant \tau_1$) и начальному значению

$$g(\tau_1) = f(x(\tau_1), x(\tau_1 - \theta), v_1) - f(x(\tau_1), x(\tau_1 - \theta), u(\tau_1)). \tag{56}$$

Кроме того, согласно (55) и (54), мы имеем

$$(\psi(t_1), g(t_1)) \leqslant 0. \tag{57}$$

Мы сейчас докажем, что имеет место равенство

$$(\psi(\tau_1), g(\tau_1)) = (\psi(t_1), g(t_1)). \tag{58}$$

В самом деле, мы имеем (в силу (34), (35) и (38))

$$(\psi(t_1), g(t_1)) - (\psi(\tau_1), g(\tau_1)) = \int_{\tau_1}^{t_1} \frac{d}{dt}(\psi(t), g(t))\, dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{t_1} \left[\left(\frac{d\psi(t)}{dt}, g(t) \right) + \left(\psi(t), \frac{dg(t)}{dt} \right) \right] dt =$$

$$= -\sum_{\alpha=0}^{n} \int_{\tau_1}^{t_1 - \theta} \left(\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial x^\alpha} g^\alpha(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t+\theta), x(t+\theta), x(t), u(t+\theta))}{\partial y^\alpha} g^\alpha(t) \right) dt -$$

$$- \sum_{\alpha=0}^{n} \int_{t_1-\theta}^{t_1} \frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial x^\alpha} g^\alpha(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{n} \int_{\tau_1}^{t_1} \left(\psi_\alpha(t) \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial x^j} g^j(t) + \right.$$

$$\left. + \psi_\alpha(t) \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha(x(t), x(t-\theta), u(t))}{\partial y^j} g^j(t-\theta) \right) dt =$$

$$= -\sum_{\alpha=0}^{n} \int_{\tau_1}^{t_1-\theta} \frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t+\theta), x(t+\theta), x(t), u(t+\theta))}{\partial y^\alpha} g^\alpha(t)\, dt +$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{n}\int_{\tau_1}^{t_1}\frac{\partial\mathscr{H}(\psi(t),\,x(t),\,x(t-\theta),\,u(t))}{\partial y^\alpha}g^\alpha(t-\theta)\,dt=$$

$$=-\sum_{\alpha=0}^{n}\int_{\tau_1}^{t_1-\theta}\frac{\partial\mathscr{H}(\psi(t+\theta),\,x(t+\theta),\,x(t),\,u(t+\theta))}{\partial y^\alpha}g^\alpha(t)\,dt+$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{n}\int_{\tau_1-\theta}^{t_1-\theta}\frac{\partial\mathscr{H}(\psi(t+\theta),\,x(t+\theta),\,x(t),\,u(t+\theta))}{\partial y^\alpha}g^\alpha(t)\,dt=0$$

(при вычислении мы использовали определение функции $\mathscr{H}$ и тот факт, что $g(t)=0$ на интервале $\tau_1-\theta<<t<\tau_1$). Таким образом, равенство (58) доказано.

Из (57) и (58) получаем

$$(\psi(\tau_1),\,g(\tau_1))\leqslant 0,$$

откуда, согласно (56) и определению функции $\mathscr{H}$, находим

$$\mathscr{H}(\psi(\tau_1),\,x(\tau_1),\,x(\tau_1-\theta),\,v_1)\leqslant$$
$$\leqslant\mathscr{H}(\psi(\tau_1),\,x(\tau_1),\,x(\tau_1-\theta),\,u(\tau_1)).$$

Так как это неравенство справедливо для всех точек $v_1\in U$, то при $t=\tau$ равенство (36) выполняется. Итак, равенство (36) доказано для всех точек непрерывности управления $u(t)$. Так как функция $u(t)$ в точках разрыва непрерывна слева, а функции $\mathscr{H}$ и $\mathscr{M}$ непрерывно зависят от своих аргументов, то соотношение (36) справедливо и в точках разрыва управления $u(t)$. Таким образом, равенство (36) доказано полностью.

Первое из соотношений (37) нами также доказано (см. (53)). Далее, полагая в формуле (52) $\delta t_1=\ldots$ $\ldots=\delta t_s=0$, мы получим

$$\Delta x=f(x(t_1),\,x(t_1-\theta),\,u(t_1))\,\delta t,$$

и потому, в силу (54),

$$\mathscr{H}(\psi(t_1),\,x(t_1),\,x(t_1-\theta),\,u(t_1))\,\delta t\leqslant 0.$$

Так как это неравенство справедливо при любых δt (как положительных, так и отрицательных), то

$$\mathscr{H}(\psi(t_1),\,x(t_1),\,x(t_1-\theta),\,u(t_1))=0,$$

и второе из соотношений (37) установлено (см. (36)).

Итак, теорема 20 для случая закрепленного правого конца установлена. Условие трансверсальности (условие 3° в теореме 20) для задачи с подвижным правым концом устанавливается так же, как и в главе 2 (с очевидными изменениями).

Тем самым теорема 20 полностью доказана.

§ 28. Одна задача преследования *)

Предположим, что в n-мерном фазовом пространстве X движутся две управляемые точки, одну из которых мы будем называть «преследующей», а другую — «преследуемой». Движение каждой из этих точек подчиняется своей собственной системе дифференциальных уравнений со своим собственным управляющим параметром. Управляющий параметр, область управления и траекторию движения преследующей точки мы будем обозначать соответственно через u, U, $x(t)$. Для преследуемой точки будем эти величины обозначать символами v, V, $y(t)$.

Пусть $u(t)$, $v(t)$ — некоторые допустимые управления, а $x(t)$, $y(t)$ — соответствующие им траектории с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{59}$$

Если для некоторого $t_1 > 0$ выполняется равенство $x(t_1) = y(t_1)$, то число t_1 мы будем называть *моментом встречи*, а сам факт выполнения равенства $x(t_1) = y(t_1)$ — *встречей*. Вообще говоря, если управления $u(t)$ и $v(t)$ выбраны произвольно, то встречи может не произойти ни при каком $t > 0$. Если же встреча происходит, то мы будем говорить, что $u(t)$ является *преследующим управлением* (для заданного управления $v(t)$ и заданных начальных условий x_0, y_0). При этом для заданных x_0, y_0, $v(t)$ и выбранного управления $u(t)$ может произойти не одна встреча. *Наименьшее* положительное число t_1, являющееся моментом встречи, мы будем называть *временем преследования*, соответствую-

*) Результаты этого параграфа принадлежат Д. Л. Келенджеридзе.

щим управлениям $u(t)$, $v(t)$. Время преследования мы будем обозначать через $T_{u,v}$. В дальнейшем начальные условия (59) предполагаются фиксированными (в связи с чем в обозначение времени преследования начальные условия x_0, y_0 не входят).

Мы будем в дальнейшем предполагать, что преследующая точка обладает следующим свойством: для любого заданного управления $v(t)$ существует (при заданных начальных условиях (59)) преследующее управление $u(t)$.

Если управление $v(t)$ преследуемой точки выбрано, то можно поставить вопрос о нахождении такого преследующего управления $u(t)$, чтобы соответствующее время преследования $T_{u,v}$ принимало минимальное значение. Мы будем предполагать, что для любого допустимого управления $v(t)$ с у щ е с т в у е т допустимое управление $u(t)$, осуществляющее м и н и м у м времени преследования. Этот минимум мы будем обозначать через T_v:

$$T_v = \min_u T_{u,v}.$$

Мы будем, далее, предполагать, что существует допустимое управление $v(t)$, осуществляющее м а к с и м у м величины T_v. Этот максимум мы обозначим через T:

$$T = \max_v T_v = \max_v (\min_u T_{u,v}). \tag{60}$$

Задача заключается в том, чтобы выбрать такую пару допустимых управлений $u(t)$, $v(t)$, что для соответствующего времени преследования $T_{u,v}$ выполняется равенство $T_{u,v} = T$. Такую пару управлений $u(t)$, $v(t)$ мы будем называть *оптимальной парой управлений*, а соответствующую пару траекторий $x(t)$, $y(t)$ (с начальными значениями (59)) — *оптимальной парой траекторий*.

Итак, управление u (при любом заданном управлении $v(t)$) выбирается таким образом, чтобы по возможности у с к о р и т ь встречу преследующей точки с преследуемой; выбор же управления v подчинен задаче максимально отдалить (во времени) момент встречи. Отметим еще, что при выборе управления $u(t)$, определяющего движение преследующей точки, мы каждый раз предполагаем заранее **известным** управление $v(t)$ для преследуемой точки; в соответствии с этим при определении величины T **сначала** берется минимум по всевозможным управлениям $u(t)$ при некотором фиксированном управлении $v(t)$, а **затем** берется максимум по всевозможным управлениям $v(t)$.

При решении поставленной задачи мы будем предполагать, что движение преследующей точки описывается в пространстве X *линейным* уравнением (в векторной форме)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) = Ax + Bu + c, \tag{61}$$

для которого выполнено условие общности положения, а соответствующая область управления U представляет собой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник в пространстве E_r переменной $u = (u^1, \ldots, u^r)$. Движение преследуемой точки пусть описывается уравнением *) (векторным)

$$\frac{dy}{dt} = g(y, v, t), \tag{62}$$

а соответствующая область управления V является множеством s-мерного пространства переменной $v = (v^1, \ldots \ldots, v^s)$. В качестве класса допустимых управлений (как для u, так и для v) примем множество всех кусочно-непрерывных управлений. На координаты векторной функции $g(y, v, t)$ мы накладываем обычные условия (непрерывность по переменным y, v, t и непрерывная дифференцируемость по координатам $y^1, \ldots, y^n$ точки y).

Для решения поставленной задачи мы введем в рассмотрение два вспомогательных вектора

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n), \quad \chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$$

---

*) Разумеется, можно было бы ограничиться случаем, когда правая часть уравнения (62) автономна, т. е. не зависит явно от времени. Однако проводимые ниже преобразования приводят (даже в автономном случае) к явному введению переменной t в правую часть уравнения движения преследуемого объекта. Поэтому никакого упрощения в случае автономности уравнения (62) не происходит.

и две гамильтоновы функции

$$H_1(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u) = (\psi, f(x, u)),$$

$$H_2(\chi, y, v) = \sum_{\alpha=1}^{n} \chi_\alpha g^\alpha(y, v, t) = (\chi, g(y, v, t)),$$

соответствующие преследующему и преследуемому объектам. С помощью функций H_1, H_2 мы напишем следующие две системы уравнений для вспомогательных неизвестных ψ_i и χ_i:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{63}$$

$$\frac{d\chi_i}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial y^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{64}$$

Если заданы функции $u(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $y(t)$, то, подставляя их в правые части системы (63), (64), мы получим линейные системы относительно неизвестных ψ_i и χ_i. Каждое решение $\psi(t)$, $\chi(t)$ этих систем мы будем называть *соответствующим* выбранным функциям $u(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $y(t)$.

Нижеследующая теорема дает необходимое условие оптимальности для рассматриваемой задачи.

Теорема 21. *Пусть $u(t)$, $v(t)$ — оптимальная пара управлений, $x(t)$, $y(t)$ — соответствующая оптимальная пара траекторий (см. уравнение (61), (62)) и T — время преследования. Тогда существуют такие нетривиальные решения $\psi(t)$, $\chi(t)$ систем (63), (64), соответствующие функциям $u(t)$, $x(t)$, $v(t)$, $y(t)$, что:*

1° *для всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, выполнены условия максимума*

$$\max_{u \in U} H_1(\psi(t), x(t), u) = H_1(\psi(t), x(t), u(t)), \tag{65}$$

$$\max_{v \in V} H_2(\chi(t), y(t), v) = H_2(\chi(t), y(t), v(t)); \tag{66}$$

2° *в момент $t = T$ выполняются условия*

$$H_1(\psi(T), x(T), u(T)) \geqslant H_2(\chi(T), y(T), v(T)), \tag{67}$$

$$\psi(T) = \chi(T). \tag{68}$$

Доказательство. Пусть u^0 — произвольная внутренняя точка многогранника U. Положим

$$\bar{u} = u - u^0.$$

Тогда уравнение (61) перепишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\bar{u} + (Bu^0 + c).$$

Таким образом, перенося начало координат пространства E_r в точку u^0, мы лишь изменяем свободный член c в уравнении (61); однако теперь начало координат пространства E_r будет уже внутренней точкой многогранника U. Мы будем предполагать, что такой перенос начала (если он нужен) уже сделан в уравнении (61), так что начало координат является внутренней точкой многогранника U.

Обозначим, далее, через $x^0(t)$ решение уравнения (61), соответствующее управлению $u \equiv 0$ (это управление допустимо, так как начало координат принадлежит многограннику U) и начальному значению $x^0(0) = x_0$ (см. (59)). Решение $x^0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx^0(t)}{dt} = Ax^0(t) + c \tag{69}$$

и потому является аналитической функцией от t.

Пусть $u_1(t)$, $v_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, — произвольная допустимая пара управлений и $x_1(t)$, $y_1(t)$ — соответствующие траектории уравнений (61), (62) с начальными условиями (59), т. е.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = Ax_1(t) + Bu_1(t) + c, \tag{70}$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = g(y_1(t), v_1(t), t), \tag{71}$$

$$x_1(0) = x_0, \quad y_1(0) = y_0. \tag{72}$$

Положим

$$\bar{x}(t) = x_1(t) - x^0(t), \quad \bar{y}(t) = y_1(t) - x^0(t). \tag{73}$$

Тогда, в силу (69), (70), (71), мы имеем

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + Bu_1(t),$$

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = g(\bar{y}(t) + x^0(t),\ v_1(t),\ t) - Ax^0(t) - c = \\ = g_1(\bar{y}(t),\ v_1(t),\ t),$$

где через g_1 обозначена функция

$$g_1(y, v, t) = g(y + x^0(t),\ v,\ t) - Ax^0(t) - c$$

(ср. сноску на стр. 256). Итак, функции $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{74}$$

$$\frac{dy}{dt} = g_1(y, v, t) \tag{75}$$

при $u = u_1(t)$, $v = v_1(t)$ и начальным условиям (см. (72))

$$\bar{x}(0) = 0, \quad \bar{y}(0) = y_0 - x_0. \tag{76}$$

Обратно, если функции $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяют уравнениям (74), (75) и начальным условиям (76), то функции $x_1(t)$, $y_1(t)$, определяемые по формулам (73), удовлетворяют уравнениям (61), (62) и начальным условиям (59). Далее, из (73) ясно, что каждый момент встречи траекторий x_1, y_1 является также моментом встречи траекторий $\bar{x}$, $\bar{y}$ и обратно (т. е. если $x_1(t') = y_1(t')$, то $\bar{x}(t') = \bar{y}(t')$ и обратно). Поэтому в первоначальной задаче о преследовании можно заменить уравнения (61), (62) и начальные условия (59) уравнениями (74), (75) и начальными условиями (76). Наконец, ясно, что если мы докажем теорему 21 для задачи (74), (75), (76) и затем в формулировке теоремы произведем замену (73), то получим теорему 21 для задачи (61), (62), (59). Таким образом, при доказательстве теоремы 21 мы можем рассматривать лишь задачу (74), (75), (76). Можно сказать и иначе: достаточно доказать теорему 21 (в первоначальной формулировке задачи, см. (61), (62), (59)) для случая, когда

$$c = 0, \quad x_0 = 0 \tag{77}$$

и, кроме того, начало координат пространства E_r переменных $u^1, \ldots, u^r$ является внутренней точкой многогранника U. Переходим к доказательству теоремы 21 при выполнении этих упрощающих предположений.

Для любого $t_1 > 0$ обозначим через Σ_{t_1} множество всех тех точек фазового пространства X, в которые можно попасть, двигаясь из начала координат в силу системы (74), за время $\leqslant t_1$ (под воздействием надлежащего управления). Множество Σ_{t_1} является выпуклым ограниченным множеством пространства X, содержащим внутренние точки (см. стр. 155). В любую точку множества Σ_{t_1} можно попасть и за время, в точности равное t_1 (ибо перед началом движения можно в течение любого времени находиться в начале координат, считая $u = 0$). Границу выпуклого тела Σ_{t_1} обозначим через S_{t_1}.

Покажем, что во всякую внутреннюю точку множества Σ_{t_1} можно попасть (двигаясь из начала координат в силу системы (74)) за время, меньшее чем t_1; обратно, если в некоторую точку можно попасть за время, меньшее чем t_1, то она является внутренней точкой тела Σ_{t_1}. В самом деле, пусть a — произвольная внутренняя точка множества Σ_{t_1}. Пусть, далее, $\psi_*(t)$ — такое решение уравнения (5) гл. 3, что управление $u_*(t)$, определяемое уравнением (6) гл. 3, переводит фазовую точку из начала координат в положение a. Обозначим через t' момент времени, когда фазовая точка, движущаяся под воздействием этого управления, попадает в положение a. Мы рассмотрим функцию $\psi_*(t)$, определяемое ею управление $u_*(t)$ и соответствующую фазовую траекторию $x_*(t)$ на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t''$, где $t'' > t'$. Так как $x_*(t') = a$, то при t'' достаточно близком к t' точка $x_*(t'')$ лежит внутри тела Σ_{t_1}. Но траектория $x_*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t''$, является оптимальной траекторией системы (74) (единственной в силу теоремы 12), ведущей из начала координат в точку $x_*(t'')$, и, так как $x_*(t'') \in \Sigma_{t_1}$, то $t'' \leqslant t_1$. Следовательно, $t' < t_1$. Обратно, пусть в точку a можно попасть за время $t' < t_1$ при помощи некоторого управления $u_*(t)$. Рассмотрим множество $\Sigma_{t_1-t'}$, состоящее из точек, в которые можно попасть (с помощью какого-либо управления) за время $\leqslant t_1 - t'$;

оно содержит начало координат внутри себя. Двигаясь из различных точек множества $\Sigma_{t_1-t'}$ с помощью управления $u_*(t)$ в течение времени t', мы получим множество W, содержащее точку a внутри себя (рис. 87). В любую точку множества W можно попасть из начала за время $\leqslant t_1$ (двигаясь сначала в течение времени $t_1 - t'$

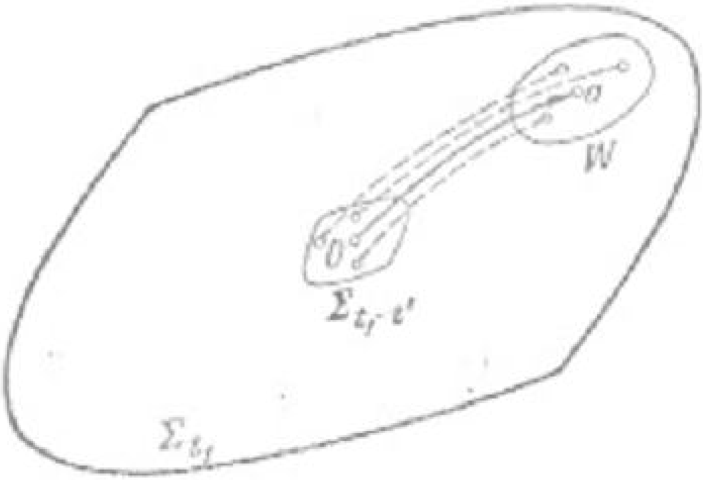

Рис. 87.

внутри множества $\Sigma_{t_1-t'}$, а затем в течение времени t' от множества $\Sigma_{t_1-t'}$ к множеству W), т. е. $W \subset \Sigma_{t_1}$. Следовательно, a есть внутренняя точка множества Σ_{t_1}.

Вернемся снова к оптимальным управлениям $u(t)$, $v(t)$ и оптимальным траекториям $x(t)$, $y(t)$, упоминаемым в теореме 21 (при упрощающих предположениях (77)), и покажем, что точка $x(T)$ лежит на границе тела Σ_T. В самом деле, допустим, что точка $x(T)$ является внутренней точкой этого тела. Тогда в эту точку можно попасть (двигаясь от начала координат в силу системы (74)) за время $t' < T$. Следовательно, взяв точку t_1, удовлетворяющую неравенствам $t' < t_1 < T$, мы найдем, что множество Σ_{t_1} (состоящее из точек, в которые можно попасть за время t_1) содержит точку $x(T)$ внутри себя, а следовательно, содержит внутри себя шар некоторого радиуса r с центром в точке $x(T)$. При $t_1 < t < T$ множество Σ_t также содержит внутри себя шар радиуса r с центром в точке $x(T)$. Выберем теперь число t (принадлежащее интервалу $t_1 < t < T$) настолько близким к T, чтобы расстояние между точками $y(T) = x(T)$ и $y(t)$ было меньше, чем r. Тогда множество Σ_t содержит внутри себя точку $y(t)$, причем $t < T$. Но это означает, что в положение $y(t)$ преследующая точка может попасть в момент $t<T$, т. е. что (при выбранном управлении $v(t)$ для преследуемой точки) встреча может произойти в момент $t<T$. Однако это противоречит определению числа T. Таким образом, точка $x(T)$ лежит на границе S_T множества Σ_T.

Из этого следует, что $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, есть оптимальное по быстродействию управление, соответствующее переходу из начала координат в точку $x(T)$ (в силу системы (74)). Действительно, если бы это управление было не оптимальным, то в точку $x(T)$ можно было бы попасть за время, меньшее, чем T, и тогда точка $x(T)$ лежала бы внутри множества Σ_T, что не имеет места. В силу сказанного, управление $u(t)$, рассматриваемое на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ (где $t_1 < T$), также является оптимальным по быстродействию управлением, соответствующим переходу (в силу системы (74)) из начала координат в точку $x(t_1)$. Иначе говоря, в точку $x(t_1)$ $(0 < t_1 \leqslant \leqslant T)$ нельзя попасть быстрее, чем за время t_1, и потому точка $x(t_1)$ лежит на границе множества Σ_{t_1}.

Обозначим через Σ объединение всех множеств Σ_t, $t>0$. Ясно, что Σ — открытое множество пространства X, содержащее множество Σ_T и, следовательно, точку $x(T)=y(T)$. Поэтому найдется такое число $t^*<T$, что $y(t) \in \Sigma$ при $t^* \leqslant t \leqslant T$. Для любого t, $t^* \leqslant t \leqslant T$, мы обозначим через $\tau(t)$ такое число, что $y(t) \in S_{\tau(t)}$. Легко видеть, что $\tau(t)$ — непрерывная функция переменного t, $t^* \leqslant t \leqslant T$. Далее, так как $u(t)$, $v(t)$ — оптимальная пара управлений и T — время преследования, то имеют место соотношения

$$\tau(T)=T, \tag{78}$$

$$\tau(t)>t \text{ при } t<T. \tag{79}$$

В самом деле, если бы для некоторого $t<T$ было выполнено неравенство $\tau(t) \leqslant t$, то в точку $y(t) \in S_{\tau(t)} \subset \Sigma_t$ преследующая точка могла бы попасть в момет времени t, т. е. (при выбранном управлении $v(t)$ для преследуемой точки) была бы возможна встреча в момент $t<T$, что противоречит определению числа T.

Так как точка $y(t)$ лежит на границе $S_{\tau(t)}$ выпуклого тела $\Sigma_{\tau(t)}$, то можно провести в X опорную гиперплоскость к телу $\Sigma_{\tau(t)}$, проходящую через точку $y(t)$. Эту гиперплоскость (любую из них, если она не единственна) мы обозначим через $\Delta_{\tau(t)}$. Единичный вектор, ортогональный к гиперплоскости $\Delta_{\tau(t)}$ и идущий из точки $y(t)$ в то полупространство, которое не содержит множества $\Sigma_{\tau(t)}$, мы обозначим через $e_{\tau(t)}$. Так как для любой точки $x \in \Sigma_{\tau(t)}$ вектор $x - y(t)$ направлен в то полупространство, которое содержит множество $\Sigma_{\tau(t)}$, то $(x - y(t), e_{\tau(t)}) \leqslant 0$ (при $x \in \Sigma_{\tau(t)}$). В частности, из (79) следует, что $\Sigma_t \subset \Sigma_{\tau(t)}$, и потому

$$(x - y(t),\ e_{\tau(t)}) \leqslant 0 \text{ при } x \in \Sigma_t. \tag{80}$$

Выберем теперь некоторый способ варьирования управления $v(t)$ (см. стр. 100—101). Соответствующая варьированная траектория (с прежним начальным условием, см. (59)) имеет вид:

$$y^*(t) = y(t) + \varepsilon\,\delta y(t) + o(\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{81}$$

при этом вектор $\Delta y = \delta y(T)$ определяется формулой (22), гл. 2, в которой следует положить $\tau = T$, $\delta t = 0$ и отбросить координату x^0 (ибо рассматривается фазовое пространство X, а не X). Пусть теперь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_i, \ldots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Траекторию (81), соответствующую значению $\varepsilon = \varepsilon_i$, обозначим через $y_i^*(t)$, а соответствующее управление — через $v_i^*(t)$. Время преследования, соответствующее управлению $v_i^*(t)$, мы обозначим через t_i: $t_i = T_{v_i^*}$. Таким образом,

$$y_i^*(t_i) \in \Sigma_{t_i}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{82}$$

Из оптимальности пары управлений $u(t)$, $v(t)$ вытекает, что

$$t_i \leqslant T, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{83}$$

Далее, легко видеть, что

$$\lim_{i \to \infty} t_i = T. \tag{84}$$

В самом деле, допустим, что соотношение (84) не выполнено. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, мы можем считать, что $\lim\limits_{i\to\infty} t_i$ существует и меньше T. Положим $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \tilde{t}$. Так как $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$, то из (81) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} y_i^*(t_i) = y(\tilde{t}).$$

Далее, из (82), переходя к пределу, получаем

$$\lim_{i\to\infty} y_i^*(t_i) \in \Sigma_{\tilde{t}}.$$

Таким образом $y(\tilde{t}) \in \Sigma_{\tilde{t}}$, где $\tilde{t} < T$, но это противоречит определению T. Следовательно, соотношение (84) выполнено.

Из (83) и (84) следует, что при достаточно большом i определены числа $\tau(t_i)$; мы будем считать (отбрасывая, если нужно, несколько первых членов последовательности), что числа $\tau(t_i)$ определены для всех $i = 1, 2, \ldots$ Далее, из (78) и (84), в силу непрерывности функции $\tau(t)$, следует

$$\lim_{i\to\infty} \tau(t_i) = T. \tag{85}$$

Рассмотрим теперь векторы

$$e_{\tau(t_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{86}$$

В силу компактности единичной сферы n-мерного пространства X, мы можем считать (перейдя, если нужно, к подпоследовательности), что векторы (86) сходятся при $i\to\infty$ к некоторому единичному вектору e пространства X. Пусть теперь x — произвольная *внутренняя* точка тела Σ_T. Тогда при достаточно большом i будет выполнено включение $x \in \Sigma_{t_i}$ и потому

$$(x - y(t_i),\ e_{\tau(t_i)}) \leqslant 0$$

(см. (80)). Переходя в этом соотношении к пределу при $i\to\infty$, мы получим (учитывая соотношение $y(T) = x(T)$ и соотношение (85)):

$$(x - x(T),\ e) \leqslant 0. \tag{87}$$

Соотношение (87) справедливо для всех внутренних точек x тела Σ_T, а значит, и для всех вообще точек x этого тела.

Далее, из (82) следует, в силу (80), что

$$\left(y_i^*(t_i) - y(t_i),\ e_{\tau(t_i)}\right) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

или, согласно (81),

$$\left(\varepsilon_i\, \delta y(t_i) + o(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=\varepsilon_i},\ e_{\tau(t_i)}\right) \leqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots$$

Разделив это соотношение на ε_i и переходя к пределу при $i \to \infty$, получим $\left(\text{в силу соотношения } \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0\right)$

$$(\delta y(T),\ e) \leqslant 0,$$

или, иначе,

$$(\Delta y,\ e) \leqslant 0. \tag{88}$$

Наконец, рассмотрим функцию

$$\varphi_i(t) = \left(x(t) - y(t),\ e_{\tau(t_i)}\right).$$

Так как $x(t) \in \Sigma_t$ при любом t, то из (80) следует, что $\varphi_i(t_i) \leqslant 0$. Далее, $\varphi_i(T) = 0$, ибо $x(T) = y(T)$. Кроме того, функция $\varphi_i(t)$ имеет при достаточно большом i непрерывную производную на отрезке $t_i \leqslant t \leqslant T$ (ибо управления $u(t)$ и $v(t)$ кусочно-непрерывны и имеет место соотношение (84)). Поэтому существует такое число ξ_i, $t_i < \xi_i < T$, что $\varphi_i'(\xi_i) \geqslant 0$, т. е.

$$\left(f(x(\xi_i),\ u(\xi_i)) - g(y(\xi_i),\ v(\xi_i),\ \xi_i),\ e_{\tau(t_i)}\right) \geqslant 0.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $i \to \infty$, получим

$$(w,\ e) \leqslant 0, \tag{89}$$

где

$$w = g(y(T),\ v(T),\ T) - f(x(T),\ u(T)). \tag{90}$$

Обозначим теперь через Δ гиперплоскость пространства X, проходящую через точку $x(T)$ и ортогональную вектору e. Кроме того, будем считать векторы Δy и w исходящими из точки $x(T)$. Тогда соотношения (87), (88) и (89) показывают, что *все тело* Σ_T *и векторы* Δy

и w расположены по одну сторону гиперплоскости Δ. Иначе говоря, если мы обозначим через Σ^* выпуклую оболочку тела Σ_T и вектора w, то мы найдем, что тело Σ^* и вектор Δy лежат по одну сторону гиперплоскости Δ. Поэтому тело Σ^* и вектор $-\Delta y$ расположены в двух разных замкнутых полупространствах, определяемых гиперплоскостью Δ. Отсюда мы, наконец, заключаем, что *вектор $-\Delta y$, исходящий из точки $x(T)$, не проходит через внутренние точки тела Σ^*.*

Будем теперь рассматривать *всевозможные* способы варьирования управления $v(t)$, откладывая получающиеся векторы $\Delta y = \delta y(T)$ (см. (81)) из точки $x(T)$. Концы этих векторов заполнят некоторое множество K в пространстве X, являющееся, как легко видеть (ср. стр. 107—109), выпуклым конусом с вершиной в точке $x(T)$. Концы векторов $-\Delta y$ заполняют выпуклый конус, симметричный конусу K относительно точки $x(T)$. Этот конус мы обозначим через $-K$. Из сказанного выше вытекает, что конус $-K$ не пересекается с внутренностью выпуклого тела Σ^*. Так как при этом тело Σ^* содержит внутренние точки (ибо тело Σ_T содержит внутренние точки), то тела Σ^* и $-K$ являются разделяемыми. Иначе говоря, существует в X такая гиперплоскость Δ^*, что тело Σ^* содержится в одном замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью Δ^*, а конус $-K$ в другом. Следовательно, выпуклые множества Σ^* и K расположены в одном замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью Δ^*. Обозначим через e^* единичный вектор, исходящий из точки $x(T)$, ортогональный гиперплоскости Δ^* и направленный в полупространство, не содержащее тел Σ^* и K. Таким образом, вектор e^* удовлетворяет соотношениям (ср. (87), (88), (89)):

$$(x - x(T),\ e^*) \leqslant 0 \text{ при } x \in \Sigma_T, \tag{91}$$

$$(\Delta y,\ e^*) \leqslant 0 \text{ при } \Delta y \in K, \tag{92}$$

$$(w,\ e^*) \leqslant 0. \tag{93}$$

Обозначим через $\psi(t)$ решение системы (63) с начальным условием $\psi(T) = e^*$, а через $\chi(t)$ — решение системы (64) с начальным условием $\chi(T) = e^*$. Мы покажем сейчас, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — искомые (т. е. они удовлетворяют условиям, указанным в теореме 21). Прежде всего отметим, что в силу выбора начальных условий для функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$ соотношение (68) выполнено. Далее, из (90) и (93) непосредственно следует соотношение (67). Наконец, соотношения (65) и (66) доказываются, исходя из неравенств (91) и (92), совершенно так же, как в главе 2 из неравенства (34) было доказано соотношение (11) (в доказательстве должны быть сделаны очевидные изменения, связанные с тем, что рассматривается пространство X, а не X).

Итак, теорема 21 полностью доказана.

ГЛАВА 5

ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрим связь, существующую между теорией оптимальных процессов и классическим вариационным исчислением. Будет показано, что оптимальная задача, изученная в главах 1, 2, является обобщением задачи Лагранжа в вариационном исчислении и эквивалентна ей в случае, когда область управления U является открытым множеством r-мерного векторного пространства E_r.

Далее, мы покажем, что в случае открытого множества U из принципа максимума следуют все основные необходимые условия, известные в вариационном исчислении (в частности, критерий Вейерштрасса). Однако в случае, когда U — замкнутое множество пространства E_r (не совпадающее со всем E_r), условие Вейерштрасса перестает действовать, т. е. теорема о том, что для достижения минимума функционала необходимо выполнение условия Вейерштрасса, становится неверной. Таким образом, существенное преимущество принципа максимума по сравнению с классическими теоремами вариационного исчисления состоит в том, что он применим для любого (в частности, замкнутого) множества $U \subset E_r$. Расширение класса возможных областей управления U по сравнению с классическим случаем открытых множеств весьма существенно для технических приложений теории. Именно случай замкнутого множества $U \subset E_r$ наиболее интересен в задачах оптимального управления и, в частности, в прикладных вопросах. Например, даже простейшие задачи, приведенные в § 5, не могли бы быть рассмотрены методами классического вариационного исчисления, так как область управления U являлась замкнутым множеством и значения оптимальных управлений во всех примерах лежали на границе U. Если в любом из этих примеров мы ограничимся рассмотрением открытого множества, отбросив граничные точки области управления U, то классические теоремы дадут такой ответ: оптимальных управлений не существует. Это, конечно, может служить указанием на то, что управляющий параметр должен принимать значения на границе множества U, но такого соображения отнюдь не достаточно для решения задачи, ибо нужно знать, каким образом должен изменяться управляющий параметр на границе области U. Например, в случае линейных задач нужно знать, каково может быть число переключений, из каких вершин многогранника U в какие происходят переключения и т. п. На эти вопросы классическая теория не может дать никакого ответа; в то же время, как мы видели на примерах, принцип максимума содержит информацию, достаточную для решения указанных вопросов.

В § 29 мы выведем из принципа максимума необходимые условия для основной задачи вариационного исчисления.

В § 30 мы докажем эквивалентность задачи Лагранжа и оптимальной задачи гл. 2, а также выведем из принципа максимума критерий Вейерштрасса в случае, когда область управления U представляет собой открытое множество r-мерного векторного пространства E_r. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением сильных экстремумов вариационных задач.

§ 29. Основная задача вариационного исчисления

Хотя основная задача вариационного исчисления и является частным случаем задачи Лагранжа, рассматриваемой в следующем параграфе, тем не менее мы посвящаем основной задаче отдельный параграф, так как связь между принципом максимума и необходимыми условиями вариационного исчисления особенно отчетливо выступает в этом простейшем случае.

Определения

Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве R^{n+1} действительных переменных $(t, x^1, \ldots, x^n) = (t, x)$ задана кривая $x(t)$ уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \; t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{1}$$

Если функции $x^i(t)$ $i = 1, \ldots, n$, абсолютно непрерывны и имеют ограниченные производные, т. е. во всякой точке существования производной выполнено соотношение

$$\left| \frac{dx^i(t)}{dt} \right| \leqslant M = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то мы будем говорить, что кривая (1) *абсолютно непрерывна*. Далее, обозначим точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$ соответственно через x_0 и x_1; мы будем говорить, что кривая (1) *соединяет* точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1) или же что она удовлетворяет *краевым условиям*

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{2}$$

Назовем δ-*окрестностью* абсолютно непрерывной кривой (1) множество всех абсолютно непрерывных кривых

$$\tilde{x}(t) = (\tilde{x}^1(t), \ldots, \tilde{x}^n(t)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

удовлетворяющих условию

$$|x^i(t) - \tilde{x}^i(t)| < \delta \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть теперь G — некоторое открытое множество пространства R^{1+n} и пусть действительная функция

$$f(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^n) = f(t, x, u)$$

определена для любой точки $(t, x) \in G$ и любых действительных значений $u^1, \ldots, u^n$. Будем предполагать, кроме того, что функция f непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

Предположим, что кривая (1) целиком лежит в области G. Тогда определен интеграл

$$J = J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) dt, \tag{3}$$

который мы будем рассматривать как *функционал* от вектор-функции $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Очевидно, что для любой кривой $\tilde{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, принадлежащей δ-окрестности кривой (1), функционал $J(\tilde{x})$ также определен, если $\delta > 0$ достаточно мало.

Абсолютно непрерывную кривую (1) назовем (сильной) *экстремалью* для функционала (3), если существует такое $\delta > 0$, что на множестве всех кривых $\tilde{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, расположенных в δ-окрестности кривой (1) и удовлетворяющих тем же краевым условиям (2), функционал (3) принимает свое наименьшее (или наибольшее) значение при $\tilde{x} = x$. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай минимума. Таким образом, кривая (1) будет называться экстремалью функционала (3), если существует такое $\delta > 0$, что для любой абсолютно непрерывной кривой $\tilde{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, принадлежащей δ-окрестности кривой (1) и удовлетворяющей краевым условиям $\tilde{x}(t_0) = x_0$, $\tilde{x}(t_1) = x_1$, выполнено неравенство $J(\tilde{x}) \geqslant J(x)$.

Основная задача вариационного исчисления состоит в нахождении всех экстремалей данного функционала (3) при заданных (закрепленных) краевых условиях (2).

Уравнения Эйлера и условие Лежандра

Мы покажем сейчас, что всякая экстремаль является оптимальной траекторией для некоторой оптимальной задачи. Рассмотрим следующую систему n-го порядка:

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

и интегральный функционал

$$J = J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^n)\, du = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt. \tag{5}$$

Здесь $u = (u^1, \ldots, u^n)$ — управляющий параметр, который выбирается в классе всех ограниченных измеримых вектор-функций. Таким образом, область управления U совпадает в данном случае со всем n-мерным пространством E_n переменных $u^1, \ldots, u^n$.

Имея в виду применения к вариационному исчислению, мы определим здесь оптимальные траектории задачи (4), (5) несколько иначе, чем это было сделано в главах 1, 2. Именно, пусть пределы интегрирования в (5) фиксированы. Измеримое ограниченное управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующую абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ системы (4) с краевыми условиями (2) мы будем называть *оптимальными*, если существует такое $\delta > 0$, что, каково бы ни было управление $\tilde{u}(t)$, для которого соответствующая траектория $\tilde{x}(t)$ системы (4) удовлетворяет краевым условиям (2) и *находится в δ-окрестности кривой* $x(t)$, выполняется неравенство $J(\tilde{x}, \tilde{u}) \geqslant J(x, u)$. Иначе говоря, здесь при определении оптимальных управлений и траекторий мы будем сравнивать траекторию $x(t)$ не со всеми другими траекториями $\tilde{x}(t)$, а только с траекториями, расположенными в δ-окрестности кривой $x(t)$. Всякая траектория, оптимальная в смысле гл. 1, 2, является оптимальной и в смысле принятого здесь определения, но, вообще говоря, не наоборот. Таким образом, оптимальных управлений и траекторий в принятом здесь смысле больше, чем оптимальных управлений и траекторий в смысле глав 1, 2.

Нетрудно понять, однако, что принцип максимума, как необходимое условие оптимальности, для оптимальных управлений и траекторий в принятом здесь смысле *сохраняется в той же самой формулировке*. В самом деле, при доказательстве принципа максимума в главе 2 мы сравнивали траекторию $x(t)$ только с траекториями вида

$$x^*(t) = x(t) + \varepsilon\,\delta x(t) + o(\varepsilon),$$

где ε — бесконечно малая величина. При достаточно малом ε траектория $x^*(t)$ лежит в δ-окрестности кривой $x(t)$ (каково бы ни было заданное число δ), и поэтому все рассуждения главы 2 проходят без изменений для управлений и траекторий, оптимальных в рассматриваемом здесь смысле.

Сформулированная оптимальная задача (4), (5) является задачей с закрепленными концами и закрепленным временем (см. § 8). Очевидно, что всякая оптимальная траектория задачи (4), (5) является экстремалью интеграла (3) и наоборот (достаточно, в силу (4), заменить в интеграле (5) величины $u^i(t)$ производными $\frac{dx^i(t)}{dt}$). Поэтому принцип максимума, представляющий собой необходимое условие оптимальности, является в то же время и необходимым условием для того, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью интеграла (3). Это простое соображение и позволяет применять принцип максимума при решении вариационной задачи (3).

В силу теоремы 6 для решения поставленной оптимальной задачи мы должны составить уравнения для вспомогательных неизвестных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ и функцию $\mathscr{H}$, которые, в силу (4), принимают здесь вид

$$\mathscr{H} = \psi_0 f(t, x, u) + \psi_1 u^1 + \psi_2 u^2 + \ldots + \psi_n u^n, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \\ &\frac{d\psi_i}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x^i}, \; i = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Условие максимума, указанное в теореме 6, дает

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u(t)) = \max_{u \in E_n} \left(\psi_0 f(t, x(t), u) + \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t) u^\alpha \right) \tag{8}$$

(почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, ср. теорему 8). Так как область управления U совпадает со всем пространством E_n (для справедливости последующих рассуждений достаточно было бы потребовать, чтобы она была **открытым** множеством в E_n), то точка максимума $u = u(t)$ функции $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, u)$, рассматриваемой как функция переменного $u \in U$, является ее **стационарной** точкой. Следовательно, из (8) вытекает, что (почти для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$) выполнены соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u(t)) = \psi_0\ \frac{\partial f(t,\ x(t),\ u(t))}{\partial u^i} + \psi_i(t) = 0,$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Из этих равенств следует, что $\psi_0 \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $\psi_i(t) \equiv 0$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Следовательно, мы можем считать, что $\psi_0 = -1$, так как $\psi_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$ (см. теорему 6), а величины $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ определены лишь с точностью до общего положительного множителя пропорциональности. Полагая в предыдущих равенствах $\psi_0 = -1$, мы получаем (почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$)

$$\psi_i(t) = \frac{\partial f(t,\ x(t),\ u(t))}{\partial u^i},\ i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{9}$$

С другой стороны, подставляя в уравнение (7) $\psi_0 = -1$ и интегрируя, мы находим

$$\begin{gathered}\psi_i(t) = \psi_i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial f(\tau,\ x(\tau),\ u(\tau))}{\partial x^i}\,d\tau,\\ i = 1,\ \ldots,\ n,\quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.\end{gathered} \tag{10}$$

Из (9) и (10) мы получаем *уравнения Эйлера в интегральной форме* (подставив вместо $u^i(t)$ производные $\frac{dx^i(t)}{dt}$ (см. (4)):

$$\frac{\partial f\left(t,\ x(t),\ \dfrac{dx(t)}{dt}\right)}{\partial u^i} (=) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial f\left(\tau,\ x(\tau),\ \dfrac{dx(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial x^i}\,d\tau + \psi_i(t_0),$$

$$i = 1,\ \ldots,\ n,$$

где символ $(=)$ означает, как и в главе 2, что равенства выполняются почти для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Дифференцирование по t (при условии, что функция f и экстремаль $x(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы) дает *уравнения Эйлера в обычном виде*

$$\frac{\partial f\left(t,\ x(t),\ \frac{dx(t)}{dt}\right)}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ \left(t,\ x(t),\ \frac{dx(t)}{dt}\right)}{\partial u^i}\right) (=) 0,$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Предположим теперь, что функция $f(t, x, u)$ имеет вторые непрерывные частные производные по переменным $u^1, \ldots, u^n$. Тогда, если функция

$$\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u) = f(t,\ x(t),\ u) + \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t)\, u^\alpha,$$

как функция переменного u, достигает в точке $u = u_0$ максимума, то квадратичная форма

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ u_0)\, \xi^\alpha \xi^\beta = \\ = - \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} f(t,\ x(t),\ u_0)\, \xi^\alpha \xi^\beta$$

неположительна (при любых $\xi^1, \ldots, \xi^n$). Следовательно, из условия максимума (8) вытекает, что почти для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, выполняется неравенство

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f\left(t,\ x(t),\ \frac{dx(t)}{dt}\right)}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \geqslant 0.$$

Это условие, необходимое для того, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью интеграла (3), называется *условием Лежандра.*

Канонические переменные

Пусть, как и выше, $u(t)$, $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление и оптимальная траектория задачи (4), (5), а $\psi(t) = (-1, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) = (-1, \psi(t))$ — соответствующее им ненулевое абсолютно непрерывное решение системы (7).

Обозначим через $\mathscr{M}(\psi, x, t)$ точную верхнюю грань значений функции $\mathscr{H}(\boldsymbol{\psi}, x, t, u)$ при фиксированных $\boldsymbol{\psi} = (-1, \psi)$, x, t:

$$\mathscr{M}(\psi, x, t) = \sup_{u \in E_n} \mathscr{H}(\boldsymbol{\psi}, x, t, u) = \sup_{u \in E_n} \left(-f(t, x, u) + \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha u^\alpha \right).$$

Предположим, что уравнение

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\psi}, x, t, u) = \mathscr{M}(\psi, x, t) \tag{11}$$

имеет единственное решение

$$u = u(\psi, x, t), \tag{12}$$

определенное, непрерывное и непрерывно дифференцируемо по своим аргументам при

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \ |x^i - x^i(t)| < |\psi_i - \psi_i(t)| < \delta, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

где δ — достаточно малое положительное число. При этих условиях переменные $(x^1, \ldots, x^n) = x$, $(\psi_1, \ldots \ldots, \psi_n) = \psi$ назовем *каноническими переменными* рассматриваемой оптимальной задачи, а функцию

$$H(\psi, x, t) = -f(t, x, u(\psi, x, t)) + \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha u^\alpha(\psi, x, t)$$

— *функцией Гамильтона.*

Так как оптимальное управление $u(t)$ почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяет условию максимума (8) (напомним, что $\psi_0 = -1$) и так как $u(\psi, x, t)$ — единственное решение уравнения (11) (при условиях (13)), то (почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$)

$$u(t) = u(\psi(t), x(t), t) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{14}$$

Можно даже утверждать, что равенство (14) выполняется всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В самом деле, так как равенство (14) выполняется почти всюду, то

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\psi(\tau), x(\tau), \tau)\, d\tau.$$

Но подынтегральная функция непрерывна по τ (ибо решение (12) непрерывно по совокупности своих аргументов), и потому в каждой точке отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ производная интеграла равна подынтегральной функции.

Из равенства (11) следует, что частные производные функции $\mathscr{H}(\psi, x, t, u)$ по u^i, $i = 1, \ldots, n$, обращаются в нуль при $u = u(\psi, x, t)$ (если выполнены условия (13)):

$$-\frac{\partial f(t, x, u(\psi, x, t))}{\partial u^i} + \psi_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Следоватсльно.

$$\frac{\partial H(\psi, x, t)}{\partial \psi_i} =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial u^\alpha(\psi, x, t)}{\partial \psi_i} + u^i(\psi, x, t) + \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha \frac{\partial u^\alpha(\psi, x, t)}{\partial \psi_i} =$$

$$= u^i(\psi, x, t) + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\psi_\alpha - \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \psi_i} = u^i(\psi, x, t);$$

$$\frac{\partial H(\psi, x, t)}{\partial x^i} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial u^\alpha(\psi, x, t)}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha \frac{\partial u^\alpha(\psi, x, t)}{\partial x^i} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\psi_\alpha - \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = -\frac{\partial f(t, x, u(\psi, x, t))}{\partial x^i}.$$

Полученные соотношения, в силу (14), (7), приводят нас к *каноническим уравнениям Эйлера — Гамильтона:*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которым удовлетворяют в каждой точке отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ координаты вектор-функций $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ и $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$.

Предположим, наконец, функцию $f(t, x, u)$ дважды непрерывно дифференцируемой по переменным $u^1, \ldots, u^n$ и пусть определитель

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} f(t, x(t), u(\psi(t), x(t), t)) \right| \tag{16}$$

отличен от нуля при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В этом случае система уравнений

$$\psi_i - \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

однозначно разрешима относительно $u^1, \ldots, u^n$, если x^i и ψ_i мало отличаются от $x^i(t)$ и $\psi_i(t)$, и, в силу (15), решение этой системы совпадает с функцией (12). Таким образом, данное нами выше определение канонических координат согласуется с обычным определением этих координат с помощью системы (17) при условии, что определитель (16) не обращается в нуль.

Замечание. Если предположить, что функция $f(t, x, u)$ определена не для всех вещественных значений переменных $u^1, \ldots, u^n$, а только при $u \in U \subset E_n$, где U — некоторое открытое множество в E_n, то (после очевидных изменений в определении экстремалей для интеграла (3)) все изложенное остается в силе. Надо только в соответствующей оптимальной задаче (4), (5) в качестве области управления взять не все пространство E_n, а его открытое подмножество U. Это замечание относится и к следующему параграфу.

§ 30. Задача Лагранжа

Формулировка задачи

Пусть заданы k функций

$$f^i(t, x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^{n-k}) = f^i(t, x, v), \; i = 1, \ldots, k,$$

непрерывных и непрерывно дифференцируемых по всем аргументам при $(t, x) \in G$ и при любых значениях вектора $v=(v^1, \ldots, v^r)$, где $r=n-k$. Рассмотрим следующую систему k дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x^1(t), \ldots, x^n(t)$:

$$\frac{dx^i}{dt}-f^i\left(t, x^1, \ldots, x^n, \frac{dx^{k+1}}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right)=$$
$$=\varphi^i\left(t, x^1, \ldots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right)=0, \quad (18)$$
$$i=1, \ldots, k<n.$$

Абсолютно непрерывную кривую $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, целиком лежащую в области G, будем называть *допустимой*, если она удовлетворяет краевым условиям (2), а ее координаты — системе (18). Далее, абсолютно непрерывную кривую $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, мы будем называть *экстремалью* для функционала (3) при заданных краевых условиях (2) и заданной системе (18), если $x(t)$ — допустимая кривая и существует такое $\varepsilon>0$, что $J(x) \leqslant J(\tilde{x})$ для любой допустимой кривой $\tilde{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, лежащей в ε-окрестности кривой $x(t)$.

Задача Лагранжа (с закрепленными концами) при заданных краевых условиях (2) и заданной системе (18) заключается в нахождении всех экстремалей для функционала вида (3).

Покажем, что эта задача сводится к некоторой оптимальной задаче. Для симметрии введем обозначение

$$f^0(t, x, v)=$$
$$=f(t, x, f^1(t, x, v), \ldots, f^k(t, x, v), v^1, \ldots, v^r), \quad (19)$$

где функция $f(t, x, u^1, \ldots, u^n)$ определена в предыдущем параграфе.

Рассмотрим систему n-го порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt}&=f^i(t, x, v),\ i=1, \ldots, k, \\ \frac{dx^{k+j}}{dt}&=v^j,\ j=1, \ldots, n-k=r, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

в которой через $v=(v^1, \ldots, v^r)$ обозначен управляющий вектор. Допустимыми будем считать любые измеримые ограниченные управления, т. е. областью управления служит все r-мерное пространство E_r переменных $v^1, \ldots, v^r$.

Требуется найти допустимое управление $v(t)$, которому соответствует траектория $x(t)$ системы (20), удовлетворяющая краевым условиям (2) и минимизирующая интеграл

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,\ x(t),\ v(t))\,dt.$$

Очевидно, что всякое решение этой оптимальной задачи (с закрепленным временем) является экстремалью для рассмотренной задачи Лагранжа и, наоборот, произвольная экстремаль $x(t)=(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_1$, задачи Лагранжа является оптимальной траекторией, соответствующей оптимальному управлению

$$(v^1(t), \ldots, v^r(t))=\left(\frac{dx^{k+1}(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx^n(t)}{dt}\right). \tag{21}$$

Легко видеть, что и, обратно, всякая оптимальная задача с закрепленным временем является задачей Лагранжа (с закрепленными концами), если класс допустимых управлений состоит из произвольных ограниченных измеримых управлений, а область управления совпадает со всем пространством E_r.

Правило множителей Лагранжа

Пусть $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, $x(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория системы (20), удовлетворяющая краевым условиям (2). Пусть, далее, $\psi(t)=(\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ — соответствующая функциям $x(t)$, $v(t)$ ненулевая абсолютно непрерывная вектор-функция. Функция $\mathscr{H}(\psi,\ x, t,\ v)$ имеет вид

$$\mathscr{H}(\psi,\ x,\ t,\ v)=\psi_0 f^0(t,\ x,\ v)+\sum_{\alpha=1}^{k}\psi_\alpha f^\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n-k}\psi_{k+\alpha}v^\alpha.$$

Далее, мы имеем, в силу (19),

$$\frac{\partial f^0}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i},\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{22}$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial v^j}=\frac{\partial f}{\partial u^{k+j}}+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^j},\quad j=1,\ \ldots,\ n-k. \tag{23}$$

Следовательно, система уравнений для вспомогательных неизвестных ψ_i имеет вид (см. теорему 6)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\psi_0}{dt}=0,\\&\frac{d\psi_i}{dt}=-\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)\psi_0-\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\psi_\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$i=1,\ \ldots,\ n.$$

Из условия максимума (теорема 6) получаем почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (см. (23))

$$\frac{\partial}{\partial v^j}\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ v(t))=\left(\frac{\partial f}{\partial u^{k+j}}+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^j}\right)\psi_0+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial v^j}\psi_\alpha+\psi_{k+j}=0,\ j=1,\ \ldots,\ n-k. \tag{25}$$

Введем обозначения

$$\frac{dx^i}{dt}=\dot x^i,\ i=1,\ \ldots,\ n,\ \left(\text{т. е. } \frac{dx}{dt}=\dot x\right),$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial u^i}=\frac{\partial f}{\partial \dot x^i},\ \ \frac{\partial f}{\partial u^{k+j}}=\frac{\partial f}{\partial \dot x^{k+j}},\quad && i=1,\ \ldots,\ k,\\&\frac{\partial f^i}{\partial v^j}=\frac{\partial f^i}{\partial \dot x^{k+j}}, && j=1,\ \ldots,\ n-k\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Кроме того, имеем (см. (18)) при $i=1,\ \ldots,\ k$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \varphi^i}{\partial \dot x^j}=\delta^i_j, && 1\leqslant j\leqslant k,\\&\frac{\partial \varphi^i}{\partial \dot x^{k+j}}=-\frac{\partial f^i}{\partial \dot x^{k+j}}, && 1\leqslant j\leqslant n-k.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Перепишем теперь соотношения (24) в виде

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_0) - \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} \psi_0 + \psi_\alpha \right) \right] d\tau,$$
$$i = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Равенства (25) дают (см. (26))

$$\psi_{k+j}(t) (=) -\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{x}^{k+j}} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} \psi_0 + \psi_\alpha \right) \right),$$
$$j = 1, \ldots, n-k.$$

Сравнивая полученные равенства с последними $n-k$ равенствами (28), получим

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{x}^{k+j}} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} \psi_0 + \psi_\alpha \right) (=)$$
$$(=) \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^{k+j}} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} \psi_0 + \psi_\alpha \right) \right] d\tau - \psi_{k+j}(t_0),$$
$$j = 1, \ldots, n-k. \tag{29}$$

Наконец, введем k измеримых и ограниченных на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, равенствами

$$\lambda_i(t) = \frac{\partial f(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}^i} \psi_0 + \psi_i(t), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{30}$$

и перепишем соотношения (28), (29) в виде

$$\psi_i(t) = -\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right) d\tau + \psi_i(t_0),$$
$$i = 1, \ldots, n, \tag{31}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{x}^{k+j}} (=) \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^{k+j}} \right) d\tau -$$
$$- \psi_{k+j}(t_0), \quad j = 1, \ldots, n-k. \tag{32}$$

Сформулируем и докажем теперь *правило множителей Лагранжа.*

Пусть абсолютно непрерывная кривая (1) *является экстремалью для интеграла* (3) *при заданных краевых условиях* (2) *и заданной системе* (18). *Тогда найдутся k таких измеримых и ограниченных функций $\lambda_i(t)$, $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_1$, называемых множителями Лагранжа, и такая постоянная $\psi_0 \leqslant 0$, что функция*

$$F(t,\ x(t),\ \dot{x}(t)) = \\ = -\psi_0 f(t,\ x(t),\ \dot{x}(t)) + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(t)\, \varphi^\alpha(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))$$

почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяет равенствам:

$$\frac{\partial F(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}^i} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(\tau,\ x(\tau),\ \dot{x}(\tau))}{\partial x^i}\, d\tau + c_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n,$$

где c_i — постоянные.

Доказательство. Определим множители $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, равенствами (30), а за постоянную ψ_0 примем координату с нулевым индексом вектор-функции $\psi(t)$. Тогда при $1 \leqslant i \leqslant k$ равенства (27), (30), (31) дают

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \dot{x}^i} = -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \lambda_i = \\ = \psi_i(t) = -\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right) d\tau + \psi_i(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x^i} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right) d\tau + \psi_i(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^i}\, d\tau + \psi_i(t_0).$$

Далее, из соотношений (32) получаем при $j=1, \ldots$
$\ldots, n-k$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{k+j}} = -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{x}^{k+j}} (=)$$

$$(=) - \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^{k+j}} \right) d\tau + \psi_{k+j}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(- \frac{\partial f}{\partial x^{k+j}} \psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^{k+j}} \right) d\tau + \psi_{k+j}(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F}{\partial x^{k+j}} d\tau + \psi_{k+j}(t_0).$$

Таким образом, правило множителей Лагранжа доказано.

Неравенство Вейерштрасса

Обозначим через l некоторый $(k+1)$-мерный вектор $l=(l_0, l_1, \ldots, l_k)$ и определим *функцию Вейерштрасса* $\mathscr{E}(t, x, \dot{x}, \xi, l)$, зависящую от аргументов t, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $\dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $l=(l_0, l_1, \ldots, l_k)$, формулой

$$\mathscr{E}(t, x, \dot{x}, \xi, l) =$$
$$= F(t, x, \xi, l) - F(t, x, \dot{x}, l) - \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi^\alpha - \dot{x}^\alpha) \frac{\partial F(t, x, \dot{x}, l)}{\partial \dot{x}^\alpha},$$

где

$$F(t, x, \dot{x}, l) = -l_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{\alpha=1}^{k} l_\alpha \varphi^\alpha(t, x, \dot{x}),$$

а функции $f(t, x, \dot{x})$, $\varphi^i = \dot{x}^i - f^i(t, x, \dot{x}^{k+1}, \ldots, \dot{x}^n)$, $i=1, \ldots, k$, — те же, что и выше.

Для удобства обозначений последние $n-k$ координат вектора ξ будем обозначать через $V^1, \ldots, V^{n-k}$; первые же k координат будем обозначать по-прежнему через $\xi^1, \ldots, \xi^k$:

$$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k, V^1, \ldots, V^{n-k}), \quad V = (V^1, \ldots, V^{n-k}).$$

Вычислим теперь функцию Вейерштрасса в случае, когда $x = x(t)$ — экстремаль задачи Лагранжа при заданных уравнениях (18), $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$, $l = \lambda(t) = (\psi_0, \lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t))$ (см. (30)), и первые k координат вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k, V^1, \ldots, V^{n-k})$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi^i - f^i(t, x(t), V^1, \ldots, V^{n-k}) = \\ = \xi^i - f^i(t, x(t), V) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \quad (33)$$

Из сделанных допущений следует, что $(n-k)$-мерная вектор-функция

$$v(t) = (v^1(t), \ldots, v^{n-k}(t)) = (\dot{x}^{k+1}(t), \ldots, \dot{x}^n(t))$$

является оптимальным управлением, соответствующим траектории $x(t)$ системы (20). Мы имеем (см. (18), (19), (33)):

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) = -\psi_0 f(t, x(t), \dot{x}(t)) = \\ = -\psi_0 f^0(t, x(t), v(t)),$$

$$F(t, x(t), \xi, \lambda(t)) = \\ = -\psi_0 f(t, x(t), \xi) + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(t)\left(\xi^\alpha - f^\alpha(t, x(t), V)\right) = \\ = -\psi_0 f(t, x(t), \xi) = -\psi_0 f^0(t, x(t), V).$$

Далее, если $i = 1, \ldots, k$, то (см. 30))

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) = -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \lambda_i = \psi_i(t);$$

если же $i = k + j$, $j = 1, \ldots, n-k$, то (см. (19), (23), (25))

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} F(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) = -\psi_0 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{k+j}} - \\ - \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\psi_\alpha(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha}\psi_0\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial \dot{x}^{k+j}} = -\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial v^j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \psi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^j} = \\ = -\frac{\partial}{\partial v^j}\mathscr{H}(\psi(t), x(t), t, v(t)) + \psi_{k+j}(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \xi,\ \lambda(t)) &= \\ &= -\psi_0 f^0(t,\ x(t),\ V) + \psi_0 f^0(t,\ x(t),\ v(t)) - \\ &- \sum_{\alpha=1}^{k} \left(f^\alpha(t,\ x(t),\ V) - f^\alpha(t,\ x(t),\ v(t))\right)\psi_\alpha - \\ &- \sum_{\alpha=1}^{n-k} \left(V^\alpha - v^\alpha(t)\right)\left(\psi_{k+\alpha}(t) - \frac{\partial}{\partial v^\alpha}\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ v(t))\right) = \\ &= \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ v(t)) - \mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ V) + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{n-k} \left(V^\alpha - v^\alpha(t)\right)\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ t,\ v(t)). \qquad (34)\end{aligned}$$

Так как $x(t)$ — экстремаль, то почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняются равенства (25) и, следовательно, из условия максимума почти для всех t следует неравенство

$$\mathscr{E}(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ \xi,\ \lambda(t)) \geqslant 0, \qquad (35)$$

которое и выражает необходимое условие Вейерштрасса: *если $x(t)$ — экстремаль рассмотренной нами задачи Лагранжа, то найдутся такие ограниченные и измеримые функции $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, и такая неположительная постоянная ψ_0, что почти для всех t выполняется неравенство* (35) *при любом выборе вектора ξ, удовлетворяющего условиям* (33).

Итак, в случае, когда область U изменения переменных $v^1, \ldots, v^r$ совпадает со всем пространством E_r (или является его открытым подмножеством), правило множителей Лагранжа и критерий Вейерштрасса вытекают из принципа максимума.

Мы здесь подробно рассмотрели случай вариационной задачи с закрепленными концами. Известные в вариационном исчислении результаты для задач с подвижными концами легко выводятся с помощью условий трансверсальности (см. § 6).

Обсудим теперь вопрос о взаимоотношении принципа максимума и критерия Вейерштрасса в случае, когда множество U **не является открытым**. Полагая

$$V = v(t) + \Delta v$$

и считая Δv бесконечно малой, мы можем на основании формулы Тейлора записать соотношение (34) (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка) в виде

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathscr{H}(\psi(t),\, x(t),\, t,\, v(t))}{\partial v^\alpha\, \partial v^\beta} \Delta v^\alpha \Delta v^\beta. \qquad (36)$$

Это делает совершенно естественным условие Вейерштрасса $\mathscr{E} \geqslant 0$ во внутренних точках области возможных значений U (ибо функция $\mathscr{H}$, в силу теоремы 8, должна достигать при $v = v(t)$ максимума, и, следовательно, $v(t)$ является стационарной точкой функции $\mathscr{H}$). Однако в граничных точках, где, вообще говоря, перестают обращаться в нуль производные $\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial v^i}$ (т. е. в разложении функции $\mathscr{H}(\psi(t),\; x(t),\; t,\; v(t) + \Delta v)$ вблизи этих точек имеются члены **первого** порядка малости относительно Δv), неотрицательность функции $\mathscr{E}$ (имеющей **второй** порядок малости) перестает быть необходимым условием максимальности функции $\mathscr{H}$. Иными словами, условие Вейерштрасса $\mathscr{E} \geqslant 0$, вообще говоря, перестает быть справедливым в граничных точках множества U.

ГЛАВА 6

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

В оптимальной задаче, изученной в главах 1—3, ограничивалась лишь область U возможных значений управляющего параметра u, в то время как на возможные значения фазовой точки x не накладывалось никаких ограничений и, следовательно, область возможных значений фазовой точки совпадала со всем фазовым пространством X.

Поэтому не исключен случай, когда при оптимальном (в смысле гл. 1) переходе фазовой точки из начального положения x_0 в близкое к нему конечное положение x_1 траектория $x(t)$ сначала сильно отклонится от точек x_0, x_1, а уже потом попадет в положение x_1. Однако часто в инженерной практике такое поведение системы является не только нежелательным, но и недопустимым.

Дело в том, что в ряде случаев мощность допустимых сигналов управления вполне достаточна для перевода системы в состояние, недопустимое с точки зрения безопасности или надежности работы (например, перегрев в моторе, перегрузки и т. д.).

В этих случаях приходится ограничивать не только область U возможных значений управляющего параметра, но и область возможных значений фазовой точки. Другими словами, разрешается выбирать только такие допустимые управления, для которых соответствующие фазовые траектории лежат в заданной фиксированной области B, выделенной наперед в n-мерном фазовом пространстве X.

В этом случае оптимальная задача состоит в выборе такого допустимого управления, для которого соответствующая траектория целиком лежит в области B и удовлетворяет заданным краевым условиям, причем минимизируется заданный функционал.

Полная система необходимых условий, которым удовлетворяют оптимальные управления и соответствующие им оптимальные траектории этой обобщенной оптимальной задачи, дается теоремой 25 (см. стр. 345), которая и является основным результатом настоящей главы.

Если область B — открытое множество фазового пространства X, то сформулированная здесь оптимальная задача эквивалентна оптимальной задаче гл. 1,2, и ответ дается принципом максимума (так как при доказательстве принципа максимума мы пользовались лишь сколь угодно малой окрестностью оптимальной траектории).

Новые трудности возникают в интересном для приложений случае, когда рассматривается замкнутая область B (т. е. замыкание открытого в X множества) и исследуемая оптимальная траектория частично или целиком лежит на границе области B.

В дальнейшем мы будем предполагать, что B — замкнутая область пространства X, а ее граница — гладкая или кусочно-гладкая гиперповерхность пространства X. Мы будем рассматривать только такие оптимальные траектории, которые можно разбить на конечное число участков, каждый из которых либо целиком лежит на гладком куске границы области B, либо принадлежит (за исключением, быть может, своих концов) открытому ядру области B.

Участки оптимальной траектории, целиком лежащие на гладком куске границы области B, удовлетворяют необходимым условиям, указанным в теореме 22, аналогичной принципу максимума. Формулировке и доказательству этой теоремы, а также некоторым ее обобщениям посвящены §§ 32—35 настоящей главы.

Участки оптимальной траектории, принадлежащие (за исключением, быть может, своих концов) открытому ядру области B, удовлетворяют обычному принципу максимума (гл. 1, 2).

Наконец, всякая пара примыкающих друг к другу участков оптимальной траектории, один из которых лежит в открытом ядре области B, а другой — на ее границе, или лежащих на двух разных гладких кусках границы области B, удовлетворяет некоторому условию сопряжения, которое мы называем условием скачка (теорема 24). Доказательству этого условия и некоторым его приложениям посвящен § 36.

§ 31. Постановка задачи

Основные определения

В качестве допустимых управлений и теперь было бы естественнее всего рассматривать кусочно-непрерывные вектор-функции $u(t)$, определенные на некотором отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Однако имеющиеся доказательства сформулированных в этой главе теорем проходят при дополнительном предположении о *кусочной гладкости управлений* $u(t)$.

Кроме того, областью U возможных значений допустимого управления будет теперь служить не произвольное подмножество r-мерного пространства E_r, а множество, которое в окрестности каждой своей граничной точки имеет «регулярное» строение, определенное ниже.

Поэтому в настоящей главе мы примем следующее определение класса допустимых управлений (вполне достаточное для всех технических приложений полученных результатов).

В качестве области управления U мы выберем произвольное множество пространства E_r переменной $u = (u^1, \ldots, u^r)$, устроенное в окрестности всякой своей граничной точки «регулярным» в следующем смысле образом.

Если u_1 — произвольная граничная точка множества U, принадлежащая этому множеству, то найдутся такие непрерывно дифференцируемые скалярные функции

$$q_i(u), \quad i = 1, \ldots, s \quad (s \geqslant 1), \tag{1}$$

что множество U в окрестности точки u_1 задается системой неравенств

$$q_1(u) \leqslant 0, \ \ldots, \ q_s(u) \leqslant 0,$$

а в самой точке u_1 выполнены равенства

$$q_1(u_1) = \ \ldots \ = q_s(u_1) = 0,$$

и векторы

$$\frac{\partial q_1(u_1)}{\partial u} = \operatorname{grad} q_1(u_1), \ \ldots, \ \frac{\partial q_s(u_1)}{\partial u} = \operatorname{grad} q_s(u_1) \qquad (2)$$

линейно независимы.

Таким образом, $(r-1)$-мерные грани области U, примыкающие к точке u_1, определяются уравнениями

$$q_1(u) = 0, \ \ldots, \ q_s(u) = 0 \qquad (3)$$

и являются гладкими гиперповерхностями пространства E_r, находящимися, в силу независимости векторов (2), в общем положении в точке u_1. Сама точка u_1 лежит на $(r-s)$-мерном гладком «ребре» границы, определяемом как множество решений системы (3), лежащих вблизи точки u_1.

Хотя функции (1) перечисленными условиями не определяются однозначно, однако, как легко видеть, грани всех размерностей множества U вблизи точки u_1 (в частности, $(r-s)$-мерное «ребро» (3), и, следовательно, число s) однозначно определены.

Формулировки основных теорем этой главы, естественно, инвариантны относительно выбора функций (1) для данной граничной точки u_1. Однако на некоторые конструкции при доказательстве теорем этот выбор существенно влияет, что значительно усложняет изложение. Поэтому, во избежание такого произвола, мы для каждой граничной точки $u_1 \in U$ зафиксируем одну из возможных систем функций (1) и будем во всем дальнейшем изложении, говоря о функциях (1) для точки u_1, подразумевать именно эту систему.

Классом допустимых управлений мы назовем множество всех кусочно-непрерывных, кусочно-гладких вектор-функций $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t))$ (с разрывами первого рода), определенных на произвольном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (своем для каждой функции) и в каждый момент времени принимающих значения из области управления U. Если в момент t' управление терпит разрыв, то множеству U должны принадлежать обе точки $u(t'-0)$ и $u(t'+0)$.

Допустимому управлению $u(t)$, а также его производной мы будем, как и в гл. 1, в момент разрыва приписывать значение, равное пределу с л е в а.

Пусть в n-мерном фазовом пространстве X переменной $x=(x^1, \ldots, x^n)$ дана замкнутая область B с гладкой границей, определяемая вблизи границы неравенством

$$g(x)=g(x^1, \ldots, x^n)\leqslant 0,$$

где скалярная функция $g(x)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка вблизи границы

$$g(x)=0,$$

и вектор

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}=\operatorname{grad} g(x)=\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x^n}\right)$$

нигде на границе в нуль не обращается.

Таким образом, граница области B — гладкая гиперповерхность пространства X с непрерывно меняющейся кривизной. Важный для приложений случай, когда область B имеет кусочно-гладкую границу, обсуждается ниже (см. стр. 344).

Формулировка задачи

Пусть заданы действительные скалярные функции $f^0(x, u)$, $f^i(x, u)$, $i=1, \ldots, n$, непрерывные и непрерывно дифференцируемые по всем координатам векторов x, u на прямом произведении $B^*\times U^*\supset B\times U$, где B^*, U^* — открытые множества пространств X, E_r, содержащие соответственно B, U.

Уравнение движения фазовой точки имеет, как и в главе 1, вид

$$\frac{dx}{dt}=f(x, u), \tag{4}$$

где

$$f(x, u)=(f^1(x, u), \ldots, f^n(x, u)).$$

Поставим следующую задачу. В пространстве X заданы две точки x_0, x_1, принадлежащие замкнутой области B. Среди всех допустимых управлений, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, причем так, что соответствующая фазовая траектория $x(t)$ целиком лежит в замкнутой области B, требуется выбрать управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, минимизирующее функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\ u(t))\,dt.$$

Чтобы дать вторую (эквивалентную) формулировку нашей оптимальной задачи (ср. стр. 20—21), введем $(n+1)$-мерное пространство $\mathbf{X}$ переменной

$$\mathbf{x} = (x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n) = (x^0,\ x),$$

где

$$x = (x^1,\ \ldots,\ x^n) \in X.$$

Всякую векторную или скалярную функцию $F(x)$, зависящую от аргумента $x \in X$, можно, очевидно, считать функцией от аргумента $\mathbf{x} = (x^0,\ x) \in \mathbf{X}$, полагая

$$F(\mathbf{x}) = F(x^0,\ x) = F(x);$$

этим фактом мы будем в дальнейшем постоянно пользоваться.

Как и в главе 1, введем вектор

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\ u) = \mathbf{f}(x,\ u) = (f^0(x,\ u),\ f^1(x,\ u),\ \ldots,\ f^n(x,\ u)) = \\ = (f^0(x,\ u),\ f(x,\ u)).$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{x},\ u)$ не зависит от координаты x^0.

Через G обозначим прямое произведение замкнутой области B на ось x^0. Область G, так же как и B, задается в окрестности своей границы неравенством

$$g(\mathbf{x}) = g(x^0,\ x) = g(x) \leqslant 0.$$

Она имеет гладкую n-мерную границу

$$g(\mathbf{x}) = 0$$

с непрерывно меняющейся кривизной, и вектор

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}=\operatorname{grad} g(x)=\left(\frac{\partial g}{\partial x^0},\ \frac{\partial g}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial g}{\partial x^n}\right)=$$
$$=\left(0,\ \frac{\partial g}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial g}{\partial x^n}\right)=(0,\ \operatorname{grad} g(x))$$

нигде на границе области G в нуль не обращается.

Рассмотрим в пространстве X уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ u), \tag{5}$$

объединяющее уравнение (4) и соотношение

$$\frac{dx^0}{dt}=f^0(x,\ u).$$

После введения этих обозначений можно дать следующую эквивалентную формулировку нашей оптимальной задачи. Требуется выбрать допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, таким образом, чтобы конец $x(t_1)$ соответствующей траектории $x(t)$ уравнения (5) с начальным значением

$$x(t_0)=(0,\ x_0)$$

лежал на прямой $\Pi \subset X$, проходящей через точку $(0, x_1)$ и параллельной оси x^0, и чтобы при этом вся траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, целиком лежала в замкнутой области G, а координата $x^0(t_1)$ принимала наименьшее возможное значение.

В дальнейшем мы будем пользоваться преимущественно второй формулировкой задачи.

Управления и траектории, удовлетворяющие этим условиям, будем называть *оптимальными*.

Некоторые дополнительные замечания

Кусочно-непрерывные управления мы назвали в гл. 1 «безынерционными управлениями», так как в случае надобности такое управление может мгновенно перескакивать с одного значения на другое. Однако в ряде случаев «рули» обладают определенной инерцией, и, следовательно, некоторые из функций $u^1(t), \ldots, u^r(t)$ (или даже все) не только сами непрерывны, но и обладают непрерывными производными вплоть до некоторого порядка.

Оптимальные задачи с инерционными управлениями легко сводятся к сформулированной выше оптимальной задаче. Пусть, например, допустимые управления — непрерывные кусочно-гладкие функции, производные которых ограничены по модулю одной и той же константой, например, единицей, и пусть область управления U — замкнутая область с кусочно-гладкой границей. Для простоты допустим, что область возможных значений фазовой точки x совпадает со всем пространством X.

Примем параметр u за фазовую переменную, а за управляющий параметр примем производную от u. Тогда вместо уравнения движения (4) в n-мерном фазовом пространстве X мы получим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

$$\frac{du}{dt} = v$$

в $(n+r)$-мерном фазовом пространстве $X \times E_r$, где $v = (v^1, \ldots, v^r)$ — кусочно-непрерывное (безынерционное) управление, областью возможных значений которого является единичный r-мерный куб

$$|v^i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, r,$$

а областью возможных значений фазовой точки (x, u) является прямое произведение $X \times U$.

Отметим еще, что принцип максимума справедлив для оптимальных траекторий, которые лежат **внутри открытого ядра** G, за исключением концов, лежащих на границе этой области.

Пусть концы $x(t_0)$, $x(t_1)$ оптимальной траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, лежат на границе $g(x) = 0$. Тогда участок траектории при $t_0 + \tau \leqslant t \leqslant t_1 - \tau$, $\tau > 0$, целиком лежит в открытом ядре области G, и потому существует функция $\psi_\tau(t)$, $t_0 + \tau \leqslant t \leqslant t_1 - \tau$, удовлетворяющая требованиям принципа максимума (теорема 1) применительно к участку $x(t)$, $t_0+\tau \leqslant t \leqslant t_1-\tau$. Можно считать, что длина вектора $\psi_\tau(t_0+\tau)$ равна единице.

В силу компактности единичной сферы конечномерного векторного пространства можно выбрать такую последовательность положительных чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots$, сходящуюся к нулю, что последовательность векторов $\psi_{\tau_i}(t_0+\tau_i)$, $i=1, 2, \ldots$, имеет предел ψ_0. Очевидно, что функция $\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, соответствующая траектории $x(t)$ и удовлетворяющая начальному условию $\psi(t_0)=\psi_0$, внутри отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ служит пределом функций $\psi_{\tau_i}(t)$, $i=1, 2, \ldots$, и потому является искомой.

§ 32. Оптимальные траектории, лежащие на границе области

В этом параграфе сформулирована теорема 22, дающая полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная оптимальная траектория, целиком лежащая на гладкой границе $g(x)=0$ области G.

Необходимость ограничиться регулярными траекториями, определение которых приведено ниже, вызвана не недостатком метода доказательства теоремы 22, а существом вопроса. Дело в том, что при выводе любых необходимых условий, которым удовлетворяет заданная оптимальная траектория, ее нужно сравнить с другими оптимальными траекториями, удовлетворяющими тем же краевым условиям, т. е. включить (путем соответствующим образом выбранного метода вариаций) оптимальную траекторию в некоторое «достаточно богатое» семейство близких траекторий, лежащих в G. Однако нетрудно привести пример оптимальной траектории, лежащей на границе области G, л ю б а я вариация которой выходит за пределы области G и для которой теорема 22 неверна.

Это исключительное явление не имеет места, если рассматриваемая траектория регулярна. Именно, здесь будет доказано, что соответствующими вариациями управления всякую регулярную траекторию можно включить в достаточно богатое семейство траекторий, лежащих в замкнутой области G.

Основные определения

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} p(x, u) &= \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x^{\alpha}} f^{\alpha}(x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial g(x)}{\partial x^{\alpha}} f^{\alpha}(x, u) = \\ &\qquad\qquad = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x},\ f(x, u)\right), \\ \frac{\partial p(x, u)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x^0},\ \frac{\partial p}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x^n}\right) = \\ &\qquad\qquad = \left(0,\ \frac{\partial p}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x^n}\right), \\ \frac{\partial p(x, u)}{\partial u} &= \left(\frac{\partial p}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial u^r}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для того чтобы траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, уравнения (5), соответствующая управлению $u(t)$, целиком лежала на границе $g(x) = 0$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$g(x(t_0)) = 0, \quad p(x(t), u(t)) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

первое из которых утверждает, что начальная точка траектории лежит на границе области G, а второе — что фазовая скорость движущейся вдоль траектории точки в каждый момент времени касательна к границе.

Точку $x \in X$ назовем *регулярной* относительно точки $u_1 \in U$, если выполняются следующие условия:

1) $p(x, u_1) = 0$;

2) $\dfrac{\partial p(x, u_1)}{\partial u} \neq 0$;

3) если u_1 — граничная точка множества U и $q_i(u)$, $i = 1, \ldots, s$, — функции (1) для точки u_1, то векторы

$$\frac{\partial p(x, u_1)}{\partial u},\ \frac{\partial q_1(u_1)}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial q_s(u_1)}{\partial u} \qquad (7)$$

линейно независимы.

Остановимся на геометрическом смысле условия 3).

Прежде всего ясно, что условие 2) можно считать частным случаем условия 3), если в последнем условии полагать $s=0$, когда u_1 — внутренняя точка множества U. В дальнейшем мы так и будем поступать.

Из независимости векторов (7) следует, что гладкое $(r-s)$-мерное «ребро» (3) границы области U находится в точке u^1 в общем положении с $(r-1)$-мерной гиперповерхностью, заданной в окрестности точки u_1 уравнением $p(x, u)=0$. Следовательно, $s \leqslant r-1$; другими словами, u_1 не может быть вершиной границы множества U, в которой сходятся r различных $(r-1)$-мерных граней.

Отметим еще тот очевидный факт, что понятие регулярности точки x относительно u_1 не зависит от сделанного нами выбора функций (1) для точки u_1.

Обозначим через $\omega(x)$ множество всех точек $u \in U$, относительно которых регулярна точка x. Множество $\omega(x) \subset U$ может, конечно, оказаться и пустым.

Траекторию $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, уравнения (5), соответствующую управлению $u(t)$ и целиком лежащую на границе области G, назовем *регулярной*, если $u(t) \in \in \omega(x(t))$ в каждой точке непрерывности t управления $u(t)$ и если

$$u(t-0) \in \omega(x(t)), \quad u(t+0) \in \omega(x(t)),$$

когда t — точка разрыва управления $u(t)$.

Для точек x, лежащих на границе области G, для которых множество $\omega(x)$ непусто, определим величину $m(\psi, x)$ равенством

$$m(\psi, x) = \sup_{u \in \omega(x)} \mathscr{H}(\psi, x, u),$$

где, как и раньше,

$$\mathscr{H}(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u) = (\psi, f(x, u)).$$

Если x — регулярная точка границы $g(x)=0$ относительно точки $u \in U$ и для некоторого вектора ψ выполняется равенство

$$\mathscr{H}(\psi, x, u) = m(\psi, x),$$

то, по правилу множителей Лагранжа, существуют такие действительные числа λ, $\nu_1, \ldots, \nu_s$, что

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p(x, u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha(u)}{\partial u}, \tag{8}$$

где $q_i(u)$, $i = 1, \ldots, s$, — функции (1) для точки u, а вектор $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}$ определяется формулой

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u^r}\right).$$

Кроме того, введем обозначения:

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^0}, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^n}\right) = \\ = \left(0, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x^n}\right),$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial \psi} = \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_0}, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_1}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi_n}\right) = f(x, u).$$

Отметим, что векторы $\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial u}$, $\frac{\partial p(x, u)}{\partial u}$ не зависят от выбора функций $q_i(u)$, $i = 1, \ldots, s$. Далее, вектор $\sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha(u)}{\partial u}$ является параллельной направлению $\frac{\partial p(x, u)}{\partial u}$ проекцией вектора $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}$ на касательную плоскость $(r - s)$-мерного «ребра» (3), также инвариантному относительно выбора функций $q_i(u)$. Следовательно, множитель λ в формуле (8) не зависит от выбора функций $q_i(u)$.

Если u — внутренняя точка множества U, т. е. $s = 0$, то из (8) следует, что векторы $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}$, $\frac{\partial p(x, u)}{\partial u}$ коллинеарны.

Теорема 22. *Пусть $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — регулярная оптимальная траектория уравнения* (5), *соответствующая оптимальному управлению $u(t)$ и целиком лежащая на границе области G. Тогда найдется такая непрерывная вектор-функция $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$,*

$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и такая кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая скалярная функция $\lambda(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ будут выполняться нижеследующие равенства (9)—(11) *и условия* а) — в):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial \psi} = f(x, u), \tag{9}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial p(x, u)}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = m(\psi(t), x(t)) = 0, \tag{11}$$

где $\lambda(t)$ определяется из условия максимума (11) *как множитель Лагранжа при векторе $\frac{\partial p(x, u)}{\partial u}$ в формуле* (8);

а) *координата* $\psi_0(t) = \mathrm{const} \leqslant 0$;

б) *вектор $\psi(t_0)$ отличен от нуля и касается границы* $g(x) = 0$ *в точке* $x(t_0)$;

в) *во всех точках дифференцируемости функции $\lambda(t)$ вектор*

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}\operatorname{grad} g(x(t))$$

направлен внутрь области G или обращается в нуль $\left(\text{т. е. } \frac{d\lambda(t)}{dt} \leqslant 0\right)$.

Сделаем несколько замечаний принципиального характера, разъясняющих смысл условий а) — в).

Замечание 1. Равенство $\psi_0(t) = \mathrm{const}$ следует из независимости правой части уравнения (10) от координаты x^0.

Уравнения (9)—(11) и условие а) аналогичны принципу максимума. Условия б) и в) специфичны для рассматриваемого случая и обсуждаются в замечаниях 4, 5.

Замечание 2. Из условия максимума непосредственно следует возможность подразделения отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ на частичные отрезки точками деления

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_1$$

таким образом, что на отрезке $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots, k$, выполняется равенство

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u} = \lambda(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha^{(i)}(t)\frac{\partial q_\alpha^{(i)}(u(t))}{\partial u},$$

где $q_1^{(i)}, \ldots, q_s^{(i)}$, $s \geqslant 0$, — функции (1) для точки $u(\tau_i+0)$, а $\nu_1^{(i)}(t), \ldots, \nu_s^{(i)}(t)$ — некоторые функции.

Это равенство эквивалентно на рассматриваемом отрезке системе r линейных уравнений относительно $s+1 \leqslant r$ неизвестных $\lambda, \nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_s^{(i)}$ с кусочно-непрерывными, кусочно-гладкими коэффициентами и свободными членами, матрица которой имеет ранг $s+1$. Следовательно, функцию $\lambda(t)$ можно представить на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ в виде

$$\lambda(t) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_\alpha(t)a^\alpha(t) = (\psi(t), a(t)), \tag{12}$$

где $a(t) = (a^0(t), \ldots, a^n(t))$ — кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая вектор-функция.

Замечание 3. Уравнения (9)—(11) обращаются в тождество, если $\psi(t) \equiv 0$, $\lambda(t) \equiv 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Покажем, что если $\psi(t_0) \neq 0$, то $\psi(t) \neq 0$ для любого t, и наоборот, из $\psi(t_0) = 0$ следует $\psi(t) \equiv 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

В самом деле, подставив выражение (12) для $\lambda(t)$ в уравнение (10), получим однородное линейное дифференциальное уравнение относительно $\psi(t)$, для которого справедлива теорема единственности, откуда и следует наше утверждение.

Замечание 4. Для выяснения смысла условия б) заметим, что система (9)—(11) всегда имеет, кроме решения $u(t)$, $x(t)$, $\psi(t) \equiv 0$, $\lambda(t) \equiv 0$, еще следующее тривиальное решение:

$$u(t),\ x(t),\ \psi(t) = \nu \operatorname{grad} g(x(t)),\ \lambda(t) \equiv \nu,$$

где ν — произвольное число. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой.

Легко проверить также, что если

$$u(t),\ x(t),\ \psi(t),\ \lambda(t) \tag{13}$$

— некоторое решение системы (9)—(11), то ее решением является и

$$u(t),\ x(t),\ \psi(t)+\nu \operatorname{grad} g(x(t)),\ \lambda(t)+\nu,$$

где ν — произвольное число.

Следовательно, прибавлением к функциям $\psi(t)$, $\lambda(t)$, входящим в решение (13), членов вида $\nu \operatorname{grad} g(x(t))$, ν мы всегда можем добиться того, чтобы начальное значение $\psi(t_0)+\nu \operatorname{grad} g(x(t_0))$ лежало в касательной плоскости границы $g(x)=0$ в точке $x(t_0)$.

Если это начальное значение — нулевое, то исходное решение было тривиальным, так как, учитывая замечание 3, можно утверждать, что $\psi(t) \equiv -\nu \operatorname{grad} g(x(t))$, $\lambda(t) \equiv -\nu$.

Таким образом, из условия б) следует нетривиальность решения системы (9)—(11).

Из сказанного следует, что условие б) эквивалентно требованию неколлинеарности векторов $\psi(t_0)$ и $\operatorname{grad} g(x(t_0))$.

З а м е ч а н и е 5. Условие в) возникает вследствие того, что при варьировании траектория $x(t)$ сравнивается не только с соседними траекториями, так же как и $x(t)$ лежащими на границе $g(x)=0$, но и со всеми близкими траекториями, принадлежащими замкнутой области G.

Доказательству теоремы 22 посвящены следующие два параграфа.

§ 33. Доказательство теоремы 22 (основные построения)

Н е к о т о р ы е о б о з н а ч е н и я

Введем обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right),\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\quad j=1,\ \ldots,\ r,$$

и будем рассматривать эту матрицу как оператор из пространства E_r векторов $u = (u^1, \ldots, u^r)$ в пространство X векторов $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ и одновременно как оператор из пространства векторов $\psi = (\psi_0, \ldots$ $\ldots, \psi_n)$ в пространство E_r:

$$\frac{\partial f}{\partial u} u = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} u^\alpha = \left(\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial f^0}{\partial u^\alpha} u^\alpha, \ldots, \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial f^n}{\partial u^\alpha} u^\alpha \right),$$

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \psi = \left(\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1} \psi_\alpha, \ldots, \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^r} \psi_\alpha \right) = \frac{\partial \mathscr{H}(\psi, x, u)}{\partial u}.$$

Пусть $\Lambda = (\lambda^0, \ldots, \lambda^n)$ — вектор пространства X. Матрицы

$$\Lambda \frac{\partial p(x, u)}{\partial x} = \left(\lambda^i \frac{\partial p(x, u)}{\partial x^j} \right), \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\Lambda \frac{\partial p(x, u)}{\partial u} = \left(\lambda^i \frac{\partial p(x, u)}{\partial u^j} \right), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, r,$$

также будем рассматривать как операторы, действующие на векторы ψ, x, u по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial p}{\partial x} \psi &= \frac{\partial p}{\partial x} (\Lambda, \psi) = \frac{\partial p}{\partial x} \sum_{\alpha=0}^{n} \lambda^\alpha \psi_\alpha, \\ \Lambda \frac{\partial p}{\partial x} x &= \Lambda \left(\frac{\partial p}{\partial x}, x \right) = \Lambda \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} x^\alpha, \\ \Lambda \frac{\partial p}{\partial u} u &= \Lambda \left(\frac{\partial p}{\partial u}, u \right) = \Lambda \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} u^\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

В этом параграфе $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — произвольная регулярная траектория уравнения (5), соответствующая управлению $u(t)$ и лежащая на границе $g(x) = 0$ области G. В § 34 мы будем дополнительно предполагать, что $u(t)$, $x(t)$ оптимальны.

Построение функции $R(x, u, \mu)$

Приступаем теперь к построению скалярной функции $R(x, u, \mu)$, играющей основную роль при доказательстве теоремы 22.

Зафиксируем s точек ξ_i, $i = 1, \ldots, s$ $(s \geqslant 0)$, на траектории $x(t)$, ни одна из которых не совпадает с концом траектории $x(t_1)$; равенства $\xi_i = x(t_0)$ и $\xi_i = \xi_j$ при $i \neq j$ возможны.

Через N_i обозначим вектор, не касающийся границы $g(x) = 0$ в точке ξ_i и направленный во вне области G; в остальном вектор N_i произволен. Так как область G в окрестности границы задается неравенством $g(x) \leqslant 0$, то

$$(\operatorname{grad} g(\xi_i),\ N_i) > 0.$$

Пусть O_{ξ_i} — достаточно малая окрестность точки ξ_i в X, замыкание которой не содержит точки $x(t_1)$; единственное дополнительное требование, накладываемое на O_{ξ_i}, заключается в том, что при $\xi_i \neq x(t_0)$ замыкание окрестности O_{ξ_i} не содержит также точки $x(t_0)$. «Достаточная малость» окрестности характезируется тем, что скалярное произведение

$$\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x},\ N_i\right) \geqslant c > 0 \tag{15}$$

при $x \in O_{\xi_i}$, $i = 1, \ldots, s$.

Через $a_i(x)$ обозначим непрерывно дифференцируемую скалярную функцию, удовлетворяющую условиям $a_i(x) = 1$ в некоторой окрестности точки ξ_i, содержащейся в O_{ξ_i}, $a_i(x) > 0$ при $x \in O_{\xi_i}$, $a_i(x) = 0$ вне O_{ξ_i}.

Введем скалярную функцию

$$h(x, \mu) = g\left(x + \mu \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x) N_\alpha\right), \tag{16}$$

где μ — скалярный параметр. Функция $h(x, \mu)$ зависит, очевидно, от выбора элементов $a_i(x)$ и N_i, участвующих в ее построении.

Если $\mu \geqslant 0$ достаточно мало и точка x, лежащая вблизи границы области G, удовлетворяет уравнению

$$h(x, \mu) = 0,$$

то $x \in G$; если, кроме того, x не принадлежит объединению окрестностей O_{ζ_i} или если $\mu = 0$, то x лежит на границе $g(x) = 0$. Если x не принадлежит объединению окрестностей O_{ζ_i}, $i = 1, \ldots, s$, или если $\mu = 0$, то $h(x, \mu) = g(x) = 0$, и утверждение справедливо. Пусть $x \in O_{\zeta_i}$. Тогда

$$h(x, \mu) = g\left(x + \mu \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x) N_\alpha\right) =$$

$$= g(x) + \mu\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}, \ \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x) N_\alpha\right) + o(\mu) = 0.$$

Но при достаточно малом μ в силу неравенств (15) имеем:

$$\mu\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}, \ \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x) N_\alpha\right) + o(\mu) > 0,$$

следовательно, $g(x) < 0$.

В дальнейшем параметр μ будет принимать близкие к нулю значения вида $\varepsilon\delta\mu$, где ε имеет тот же смысл, что и в главе 2, а $\delta\mu$ — неотрицательное число. В определение функции $h(x, \varepsilon\delta\mu)$ входят точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$, функции $a_1(x), \ldots, a_s(x)$, векторы $N_1, \ldots, N_s$ и число $\delta\mu$. Совокупность всех этих величин обозначим теперь через $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{b} = \{\zeta_i, a_i(x), N_i, \delta\mu\}. \tag{17}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость функции $h(x, \varepsilon\delta\mu)$ от этих величин, мы будем теперь обозначать ее через $h_{\mathfrak{b}}(x, \varepsilon\delta\mu)$. Пусть $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ — два символа вида (17); запишем их в виде

$$\mathfrak{b}_1 = \{\zeta_i, a_i(x), N_i, \delta\mu\}, \quad i = 1, \ldots, s_1,$$
$$\mathfrak{b}_2 = \{\zeta_i, a_i(x), N_i, \delta\mu\}, \quad i = s_1 + 1, \ldots, s_1 + s_2.$$

Символ $\mathfrak{b} = \{\zeta_i, a_i(x), N_i, \delta\mu\}$, $i = 1, \ldots, s_1 + s_2$, мы будем называть суммой символов $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ и писать

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2.$$

Произведение символа $\mathfrak{b} = \{\zeta_i, a_i(x), N_i, \delta\mu\}$ на произвольное неотрицательное число λ определим формулой

$$\lambda\mathfrak{b} = \{\zeta_i, a_i(x), N_i, \lambda\delta\mu\},$$

т. е. точки ζ_i, функции $a_i(x)$ и векторы N_i остаются прежними, а число $\delta\mu$ умножается на λ.

Таким образом, если $\mathfrak{b}'$ и $\mathfrak{b}''$ — два символа вида (17), а λ' и λ'' — произвольные неотрицательные числа, то определен символ $\lambda'\mathfrak{b}' + \lambda''\mathfrak{b}''$.

Функцию $R(x, u, \varepsilon\delta\mu)$, зависящую от выбора символа (17), определим равенством

$$R(x, u, \varepsilon\delta\mu) = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial h(x, \varepsilon\delta\mu)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) = \left(\frac{\partial h(x, \varepsilon\delta\mu)}{\partial x}, f(x, u)\right) \quad (18)$$

(т. е. $R(x, u, \varepsilon\delta\mu)$ есть производная $\frac{dh(x, \varepsilon\delta\mu)}{dt}$ в силу уравнения (5)). Из (16) следует, что при $\delta\mu = 0$

$$R(x, u, 0) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}, f(x, u)\right) = p(x, u). \quad (19)$$

Чтобы подчеркнуть зависимость функции $R(x, u, \varepsilon\delta\mu)$ от выбора символа (17), мы будем обозначать ее также через $R_{\mathfrak{b}}$:

$$R_{\mathfrak{b}}(x, u, \varepsilon\delta\mu) = \left(\frac{\partial h_{\mathfrak{b}}(x, \varepsilon\delta\mu)}{\partial x}, f(x, u)\right). \quad (20)$$

Пусть функции $v(t)$, $y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $v(t)$ — допустимое управление, $y(t)$ — непрерывная функция (не обязательно принадлежащая области G), удовлетворяют при некоторых ε и $\delta\mu$ системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(y, v), \\ R(y, v, \varepsilon\delta\mu) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

В дальнейшем, говоря о решении $v(t)$, $y(t)$ этой системы, мы всегда будем предполагать, что $v(t)$ — допустимое управление, $y(t)$ — непрерывная функция.

Если $y(t)$ лежит достаточно близко от $x(t)$ и $h(y(t_0), \varepsilon\delta\mu) = 0$, то $y(t) \in G$ при любом t, так как

$$\frac{d}{dt} h(y(t), \varepsilon\delta\mu) = R(y(t), v(t), \varepsilon\delta\mu) = 0$$

и, следовательно,

$$h(y(t), \varepsilon\delta\mu) \equiv h(y(t_0), \varepsilon\delta\mu) = 0.$$

Управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ удовлетворяют системе (21) при $\delta\mu = 0$.

Ниже мы опишем способ, позволяющий по заданной начальной точке вида

$$y(\theta) = x(\theta) + \varepsilon\delta x_\theta + o(\varepsilon), \qquad t_0 \leqslant \theta \leqslant t_1, \tag{22}$$

стандартным образом строить решение $v(t)$, $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (21), имеющее вид

$$v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon), \tag{23}$$

$$y(t) = x(t) + \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon), \tag{24}$$

где $\delta u(t)$ — кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая функция, $\delta x(t)$ — непрерывная функция.

Как уже отмечалось выше, если начальное значение (22) удовлетворяет уравнению $h(y(\theta), \varepsilon\delta\mu) = 0$, то вся траектория $y(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant t_1$, принадлежит замкнутой области G. Те участки траектории, которые не принадлежат объединению окрестностей O_{ξ_i}, входящих в определение функции $h(y, \varepsilon\delta\mu)$, лежат на границе $g(x) = 0$; если же $y(t) \in O_{\xi_i}$, то $y(t)$ принадлежит открытому ядру области G.

Следует в заключение отметить, что формулой (21) определяется не одна система, а целое множество систем, зависящих от выбора символа $\mathfrak{b}$ (см. (17)).

Построение решения системы (21) по начальному значению вида (22)

Отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ подразделим точками

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_1,$$

на частичные отрезки $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, достаточно малой длины. Точки τ_i выберем так, чтобы среди них содержались все точки разрыва управления и его производной. «Достаточная малость» длин частичных отрезков характеризуется требованием выполнимости всех описанных ниже построений. Будет непосредственно видно, что, в силу регулярности траектории $x(t)$, такой выбор точек деления (естественно, неоднозначный) возможен.

Допустим, что решение $v(t)$, $y(t)$ системы (21), представимое в виде (23), (24) и удовлетворяющее начальному условию (22), уже построено на отрезке $\theta \leqslant t \leqslant \tau_i$. Продолжим это решение, сохранив непрерывность траектории $y(t)$ и выраженные в равенствах (23), (24) свойства, до точки τ_{i+1} включительно.

Пусть $q_i(u)$, $i = 1, \ldots, s \ (s \geqslant 0)$, — функции (1) для точки $u(\tau_i + 0)$. В силу (19) и регулярности траектории $x(t)$ векторы

$$\frac{\partial R(x(\tau_i),\, u(\tau_i+0),\, \varepsilon\,\delta\mu)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u(\tau_i+0))}{\partial u}, \ \ldots, \ \frac{\partial q_s(u(\tau_i+0))}{\partial u}$$

линейно независимы. Так как длина отрезка $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ мала, то линейно независимы и векторы

$$\frac{\partial R(x(t),\, u(t),\, \varepsilon\delta\mu)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u(t))}{\partial u}, \ \ldots, \ \frac{\partial q_s(u(t))}{\partial u}$$

на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$. Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial u^1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial q_s}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial R}{\partial u^{s+1}} & \dfrac{\partial q_1}{\partial u^{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial q_s}{\partial u^{s+1}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{25}$$

Следовательно, вблизи системы значений τ_i, $u(\tau_i + 0)$, $x(\tau_i)$, $\varepsilon\delta\mu = 0$ система уравнений

$$R(y,\, v,\, \varepsilon\,\delta\mu) = \sigma_1(v,\, t) = \ldots = \sigma_s(v,\, t) = 0, \tag{26}$$

где $\sigma_i(v, t) = q_i(v) - q_i(u(t))$, $i = 1, \ldots, s$, однозначно разрешима относительно $s+1$ переменных $v^1, \ldots$ $\ldots, v^{s+1}$:

$$v^i = \eta^i(y,\, v^{s+2},\, \ldots,\, v^r,\, \varepsilon\delta\mu,\, t), \quad i = 1, \ldots, s+1, \tag{27}$$

где η^i, $i=1, \ldots, s+1$, — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Подставив в (27) вместо $v^{s+2}, \ldots, v^r$ соответственно $u^{s+2}(t), \ldots, u^r(t)$, получим $s+1$ функций $\vartheta^i(y, \varepsilon\delta\mu, t)$, $i=1, \ldots, s+1$. Определим теперь вектор-функцию $v(y, \varepsilon\delta\mu, t)$ равенством

$$v(y, \varepsilon\delta\mu, t) = \\ = \left(\vartheta^1(y, \varepsilon\delta\mu, t), \ldots, \vartheta^{s+1}(y, \varepsilon\delta\mu, t), u^{s+2}(t), \ldots, u^r(t)\right). \tag{28}$$

Подставим, наконец, в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(y, v)$$

вместо v функцию (28). Взяв решение полученного таким образом дифференциального уравнения на отрезке $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ с уже имеющимся начальным значением $y(\tau_i)$, мы получим желаемое продолжение решения $y(t)$.

Продолжением управления $v(t)$ на полуинтервал $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ служит функция

$$v(t) = v(y(t), \varepsilon\delta\mu, t), \qquad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \tag{29}$$

которая получается подстановкой в (28) вместо y продолжения $y(t)$, $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$.

Свойства, выраженные в равенствах (23), (24), проверяются для полученных нами продолжений непосредственно. Допустимость управления (29) следует из равенств (26). В самом деле, для любого $i=1, \ldots, s$

$$\sigma_i(v(t), t) = q_i(v(t)) - q_i(u(t)) = 0,$$

т. е.

$$q_i(v(t)) = q_i(u(t)) \leqslant 0, \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}.$$

З а м е ч а н и е. Описанная конструкция определяет решение системы (21) по заданному начальному значению (22) неоднозначно, так как выбор точек τ_i, $i = 1, \ldots, k$, а также выбор $s+1$ переменных v^i, относительно которых разрешается система (26), неоднозначен.

Легко, однако, видеть, что эту неоднозначность можно устранить, зафиксировав для заданного управления $u(t)$ и регулярной траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, как точки деления τ_i, так и те $s+1$ переменных (для каждого отрезка $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$), относительно которых разрешается система (26). После этого решение $v(t)$, $y(t)$ системы (21) можно уже строить стандартным образом по начальному значению (22). Во всех дальнейших построениях этого параграфа, в которых применяется описанная здесь конструкция, упомянутая стандартизация будет предполагаться выполненной.

Уравнение в вариациях для системы (21)

Пусть $v(t)$, $y(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant t_1$, — решение системы (21), построенное при помощи указанной выше конструкции и удовлетворяющее начальному значению (22). Мы докажем сейчас, что главная часть приращения $y(t)-x(t)$ или, что то же самое, вектор-функция $\delta x(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant t_1$, однозначно определяется главной частью начального смещения (т. е. вектором δx_θ) и удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению (см. уравнение (35)) с начальным значением δx_θ.

Для этого докажем прежде всего существование такой кусочно-непрерывной, кусочно-гладкой вектор-функции

$$\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \ldots, \lambda^n(t)),$$

определенной на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и зависящей только от $u(t)$, $x(t)$ (и, следовательно, не зависящей от вида функции R), что главная (по ε) часть $\delta u(t)$ разности $v(t)-u(t)$ удовлетворяет на отрезке $\theta \leqslant t \leqslant t_1$ уравнению

$$\left[\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u} + \Lambda(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u}\right]\delta u(t) = 0. \qquad (30)$$

Тот факт, что $\Lambda(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, не зависит не только от $v(t)$, но и от R, играет в дальнейшем важную роль.

Для доказательства существования такой функции предположим, что она уже построена на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_i$, $i \geqslant 0$, и определим ее на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$. Точки τ_i, $i = 1, \ldots, k$, выбраны, как и выше.

Пусть на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ система (26) разрешалась, например, относительно первых $s+1$ переменных $v^1, \ldots, v^{s+1}$. Тогда для каждого $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$ на этом полуинтервале определим $s+1$ непрерывных и гладких функций $\lambda^j(t)$, $l^j_\beta(t)$, $\beta = 1, \ldots, s$, как решение линейной неоднородной системы

$$\frac{\partial f^j(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta(t)\frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha} = 0,$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, s+1, \tag{31}$$

где $q_1(u), \ldots, q_s(u)$ — функции (1) для точки $u(\tau_i + 0)$. (Индекс α в уравнениях (31) пробегает $s+1$ значений, соответствующих номерам переменных v^α, относительно которых разрешается система (26) на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$; в рассматриваемом случае $\alpha = 1, \ldots, s+1$.)

Система (31) разрешима, так как ее определитель совпадает с определителем (25) при $\varepsilon\delta\mu = 0$.

Вектор-функция $(\lambda^0(t), \ldots, \lambda^n(t))$, $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$, и является желаемым продолжением.

Независимость функции $\Lambda(t)$ от функции R следует из независимости матрицы коэффициентов и свободных членов систем (31), $j = 0, 1, \ldots, n$, от R.

Докажем теперь формулу (30) для полуинтервала $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$, $\theta \leqslant \tau_i$.

Функция (23) имеет на полуинтервале $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ вид

$$v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon),$$

где

$$\delta u(t) = (\delta u^1(t), \ldots, \delta u^{s+1}(t), 0, \ldots, 0), \tag{32}$$

так как

$$v^{s+2}(t) = u^{s+2}(t), \ldots, v^r(t) = u^r(t).$$

Следовательно, умножая равенство (31) на δu^α и суммируя получающиеся соотношения по $\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s+1$, получим:

$$\sum_{\alpha=1}^{s+1}\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha} + \lambda^j\frac{\partial p}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta\frac{\partial q_\beta}{\partial u^\alpha}\right)\delta u^\alpha =$$

$$= \left(\frac{\partial f^j}{\partial u} + \lambda^j\frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta\frac{\partial q_\beta}{\partial u}\right)\delta u = 0, \; j = 0, 1, \ldots, n. \tag{33}$$

Определив вектор-функции $L_\beta(t)$ равенствами

$$L_\beta(t) = \left(l_\beta^1(t), \ldots, l_\beta^n(t)\right), \quad \beta = 1, \ldots, s,$$

перепишем равенства (33) в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \Lambda(t)\frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\beta=1}^{s} L_\beta(t)\frac{\partial q_\beta}{\partial u}\right)\delta u(t) = 0. \qquad (34)$$

В силу (26) функция $v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon)$ удовлетворяет равенствам ($\alpha = 1, \ldots, s$):

$$\sigma_\alpha(v(t), t) = \sigma_\alpha(u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon), t) =$$
$$= \sigma_\alpha(u(t), t) + \varepsilon\left(\frac{\partial\sigma_\alpha(u(t), t)}{\partial v}, \ \delta u(t)\right) + o(\varepsilon) = 0.$$

Но мы имеем:

$$\sigma_\alpha(u(t), t) = q_\alpha(u(t)) - q_\alpha(u(t)) = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_\alpha(u(t), t)}{\partial v} = \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u};$$

следовательно,

$$\left(\frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u}, \ \delta u(t)\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, s,$$

и соотношение (34) сводится к равенству

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \Lambda(t)\frac{\partial p}{\partial u}\right)\delta u(t) = 0, \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1},$$

которое и является доказываемым равенством (30).

Подставив выражения (23), (24) в систему (21) и приравняв члены при ε, получим:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u}\delta u,$$
$$\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u}\delta u + \frac{\partial R(x(t), u(t), 0)}{\partial\mu}\delta\mu = 0.$$

Умножив, далее, второе уравнение на $\Lambda(t)$ и сложив его с первым, получим, если учесть равенство (30), следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \left(\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} + \Lambda(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial x}\right)\delta x +$$
$$+ \Lambda(t)\frac{\partial R(x(t), u(t), 0)}{\partial\mu}\delta\mu. \qquad (35)$$

Полученное линейное неоднородное уравнение относительно $\delta x(t)$ мы назовем *уравнением в вариациях* для системы (21). Оно зависит только от самой системы (21), и, следовательно, главная часть приращения $\delta x(t)$ траектории $y(t)$ однозначно определяется начальным значением δx_0 и значением параметра $\delta\mu$.

По аналогии со сказанным в гл. 2 (стр. 97) мы будем говорить, что векторы $\delta x(t)$ получаются *переносом* вектора $\delta x(\theta) = \delta x_0$, заданного в точке $x(\theta)$, вдоль траектории $x(t)$, и введем для операции переноса, зависящей от параметра $\delta\mu$, обозначение

$$\delta x(t) = P_{t,\theta}(\delta\mu)\,\delta x_0.$$

Следующие формулы очевидны:

$$\left.\begin{aligned} &P_{t,\theta}(\delta\mu)\,\delta x = P_{t,\tau}(\delta\mu)\,P_{\tau,\theta}(\delta\mu)\,\delta x, \quad t \geqslant \tau \geqslant 0,\\ &P_{t,\theta}(\gamma\,\delta\mu)\,\gamma\,\delta x = \gamma P_{t,\theta}(\delta\mu)\,\delta x,\\ &P_{t,\theta}(\delta\mu_1 + \delta\mu_2)(\delta x_1 + \delta x_2) = P_{t,\theta}(\delta\mu_1)\,\delta x_1 + P_{t,\theta}(\delta\mu_2)\,\delta x_2. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Обозначим через $T(x(t))$ касательную плоскость границы $g(x) = 0$ в точке $x(t)$. Если $x(t)$ не принадлежит объединению окрестностей O_{ξ_t}, участвующих в определении символа (17), то, как уже отмечалось,

$$g(x(t) + \varepsilon\,\delta x(t) + o(\varepsilon)) = 0$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x},\ \delta x(t)\right) = 0, \tag{37}$$

т. е. $\delta x(t) \in T(x(t))$. В частности, всегда

$$\delta x(t_1) \in T(x(t_1)).$$

При $\delta\mu = 0$ уравнение (35) превращается в однородное уравнение

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \left(\frac{\partial f(x(t),\,u(t))}{\partial x} + \Lambda(t)\,\frac{\partial p(x(t),\,u(t))}{\partial x}\right)\delta x. \tag{38}$$

Наряду с этим уравнением рассмотрим сопряженное с ним уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial f(x(t),\,u(t))}{\partial x} + \Lambda(t)\,\frac{\partial p(x(t),\,u(t))}{\partial x}\right)\psi. \tag{39}$$

Во избежание недоразумений запишем уравнения (38), (39) покоординатно в виде двух систем $(n+1)$-го порядка:

$$\frac{d}{dt}(\delta x^i) = \sum_{\alpha=0}^{n}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} + \lambda^i \frac{\partial p}{\partial x^\alpha}\right)\delta x^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} + \lambda^i \frac{\partial p}{\partial x^\alpha}\right)\delta x^\alpha,$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} + \lambda^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^i}\right)\psi_\alpha, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Если $\delta \boldsymbol{x}(t)$, $\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — произвольные непрерывные решения уравнений (38), (39) соответственно, то

$$(\psi(t), \delta \boldsymbol{x}(t)) = \text{const} \tag{40}$$

(ср. стр. 98).

Фундаментальную систему решений уравнения (38) обозначим через

$$\tilde{\varphi}_0(t), \ \ldots, \ \tilde{\varphi}_n(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

а сопряженную с ней систему решений уравнения (39) — через

$$\tilde{\psi}^0(t), \ \ldots, \ \tilde{\psi}^n(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Имеем:

$$\left(\tilde{\psi}^i(t), \tilde{\varphi}_j(t)\right) = \delta^i_j.$$

Решение $\delta \boldsymbol{x}(t)$, $\theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2$, $t_0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant t_1$, неоднородного уравнения (35), удовлетворяющее начальному условию

$$\delta \boldsymbol{x}(\theta_1) = \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{\varphi}_\alpha(\theta_1)\,\delta x^\alpha(\theta_1),$$

запишется в виде

$$\delta \boldsymbol{x}(t) = P_{t,\,\theta_1}(\delta\mu)\,\delta \boldsymbol{x}(\theta_1) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{\varphi}_\alpha(t)\left[\delta x^\alpha(\theta_1) + \int_{\theta_1}^{t}\left(\tilde{\psi}^\alpha(\tau), \Lambda(\tau)\frac{\partial R}{\partial \mu}\delta\mu\right)d\tau\right]. \tag{41}$$

Вычисление производной $\dfrac{\partial R(\boldsymbol{x}(t), u(t), 0)}{\partial\mu}$

Нам понадобится явный вид этой производной, поэтому займемся здесь ее вычислением.

Имеем:

$$h(\boldsymbol{x}, \mu) = g\left(\boldsymbol{x} + \mu\sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(\boldsymbol{x}) N_\alpha\right) =$$
$$= g\left(x^0 + \mu\sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(\boldsymbol{x}) N_\alpha^0, \ \ldots, \ x^n + \mu\sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(\boldsymbol{x}) N_\alpha^n\right),$$

где $N_i = (N_i^0, \ldots, N_i^n)$. Введем обозначения:

$$\eta^i = x^i + \mu\sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(\boldsymbol{x}) N_\alpha^i, \quad i = 0, \ldots, n; \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta^0, \ldots, \eta^n).$$

Тогда

$$R(\boldsymbol{x}, u, \mu) = \sum_{\alpha, \beta=0}^{n} \frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta^\alpha}\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^\beta} f^\beta(x, u) =$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta^\alpha} f^\alpha(x, u) + \mu\sum_{\alpha, \beta=0}^{n}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta^\alpha}\frac{\partial a_i(\boldsymbol{x})}{\partial x^\beta} N_i^\alpha f^\beta(x, u) =$$
$$= \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{f}(x, u)\right) + \mu\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}}, N_i\right)\left(\frac{\partial a_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{f}(x, u)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R(\boldsymbol{x}, u, 0)}{\partial\mu} = \left(\sum_{\alpha, \beta=0}^{n}\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{\eta})}{\partial\eta^\alpha\,\partial\eta^\beta} f^\alpha(x, u)\sum_{i=1}^{s} a_i(\boldsymbol{x}) N_i^\beta\right)\Bigg|_{\mu=0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}, N_i\right)\left(\frac{\partial a_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{f}(x, u)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{\alpha, \beta=0}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{x})}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta} f^\alpha(x, u) N_i^\beta +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}, N_i\right)\left(\frac{\partial a_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{f}(x, u)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\frac{d}{dt}\left[a_i(\boldsymbol{x}(t))\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{x}(t))}{\partial\boldsymbol{x}}, N_i\right)\right].$$

Итак,

$$\frac{\partial R(x(t), u(t), 0)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{s} \frac{d}{dt}\left[a_i(x(t))\left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N_i\right)\right]. \quad (42)$$

Из определения сложения символов (17) непосредственно следует:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(R_{\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2}(x, u, 0)) = \frac{\partial R_{\mathfrak{b}_1}(x, u, 0)}{\partial \mu} + \frac{\partial R_{\mathfrak{b}_2}(x, u, 0)}{\partial \mu}. \quad (43)$$

Вариации решения $u(t), x(t)$

В гл. 2 был определен сначала класс варьированных управлений — вариаций исходного управления $u(t)$, а затем по заданному управлению, начальному отклонению и действительному числу δt строилась варьированная траектория (см. § 13).

Теперь мы уже не сможем независимо от варьированных траекторий определить класс варьированных управлений и потом при помощи этих последних строить варьированные траектории, так как они, вообще говоря, будут вылезать из замкнутой области G (поскольку траектория $x(t)$ лежит на границе области). Здесь приходится варьированные управления и соответствующие варьированные траектории строить одновременно, шаг за шагом, чтобы иметь возможность в каждый момент времени предотвратить упомянутую опасность и не выпускать варьированную траекторию за пределы области G. Это оказывается возможным благодаря регулярности траектории.

В соответствии со сказанным мы будем при строгих формулировках говорить теперь не о вариациях управления или вариациях траектории в отдельности, а о *вариациях решения* $u(t)$, $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (21).

Таким образом, мы построим класс Φ *варьированных решений* $u^*(t)$, $x^*(t)$ системы (21) — *вариаций* решения $u(t)$, $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (21) при $\delta\mu = 0$. Строго говоря, каждый элемент $(u^*(t), x^*(t))$ множества Φ будет являться не одним решением системы

(21), а целым *семейством решений*, зависящих от положительного бесконечно малого параметра ε. Тем не менее мы для удобства часто будем говорить о варьированном решении $(u^*(t), x^*(t)) \in \Phi$, а также о вариации $u^*(t)$ управления $u(t)$ или вариации $x^*(t)$ траектории $x(t)$, составляющих данное решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ системы (21).

Отметим здесь же, что множество Φ будет состоять из варьированных решений не одной какой-нибудь конкретной системы (21), а из варьированных решений всех систем вида (21), зависящих от выбора функции R (т. е. символа (17)). Однако каждый данный элемент $(u^*(t), x^*(t)) \in \Phi$ будет являться семейством решений одной и той же системы вида (21).

Варьированное управление строилось в гл. 2 заданием его параметров (см. определение символа $\mathfrak{a}$ на стр. 106). Точно так же и теперь каждое варьированное решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ системы (21) (точнее, семейство варьированных решений) будет строиться при помощи задания параметров этого решения. Поэтому мы определим сначала п а р а м е т р ы варьированного решения, а затем опишем способ построения самого решения по заданным параметрам.

Эти параметры естественно разбить на две группы: параметры строящегося управления $u^*(t)$ и параметры строящейся траектории $x^*(t)$.

Обозначения $\tau_1, \ldots, \tau_k$; $\delta t_1, \ldots, \delta t_k$; $I_1, \ldots, I_k$; $v_1, \ldots, v_k$; τ, δt будут иметь здесь тот же смысл, что и в § 13. Так как управление $u(t)$ кусочно-непрерывно, то $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — точки непрерывности управления $u(t)$. Точку τ мы всюду в дальнейшем будем считать совпадающей с концевой точкой t_1 отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (это возможно, так как управление $u(t)$ непрерывно в точке t_1). Далее, в качестве $v_1, \ldots, v_k$ мы разрешим брать только такие точки области управления U, что для любого $i = 1, \ldots, k$ точка $x(\tau_i)$ траектории $x(t)$ регулярна относительно точки v_i. Совокупность параметров $\tau_i, \delta t_i, v_i, \delta t$, входящих в определение варьированного управления $u^*(t)$, мы будем, как и в гл. 2, обозначать символом $\mathfrak{a}$. Однако варьированное управление $u^*(t)$, соответствующее символу $\mathfrak{a}$, мы определим не так, как в гл. 2 (см. стр. 101), а несколько иначе, проводя его построение одновременно с построением соответствующей варьированной траектории $x^*(t)$. Это объясняется тем, что при определении варьированного управления по способу, принятому в гл. 2, соответствующая варьированная траектория может на отрезках I_i выйти за пределы области G.

В качестве параметров строящейся варьированной траектории $x^*(t)$ мы примем величины, входящие в символ $\mathfrak{b}$ (см. (17)).

Переходим к построению решения $u^*(t)$, $x^*(t)$ системы (21), определяемого символами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Это решение будет определено на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\delta t$. Чтобы подчеркнуть зависимость решения $u^*(t)$, $x^*(t)$ от выбора символов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, мы будем обозначать функции u^*, x^*, когда потребуется, соответственно через

$$u^* = u^*_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}(t), \tag{44}$$

$$x^* = x^*_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}(t). \tag{45}$$

Начальное значение $x^*(t_0)$ траектории $x^*(t)$ определим формулой

$$x^*(t_0) = x(t_0) + \varepsilon\delta x_0, \tag{46}$$

где

$$\delta x_0 = -\delta\mu \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x(t_0))\, N_\alpha. \tag{47}$$

Из (46) следует, что при достаточно малом ε имеют место соотношения

$$a_i(x(t_0)) = a_i(x^*(t_0)), \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{48}$$

причем (при достаточно малом ε)

$$a_i(x^*(t_0)) = a_i(x(t_0)) = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_i \neq x(t_0),$$
$$a_i(x^*(t_0)) = a_i(x(t_0)) = 1 \quad \text{при} \quad \zeta_i = x(t_0).$$

Из (47) и (48) мы получаем:

$$h(x^*(t_0), \varepsilon\delta\mu) = g\left(x(t_0) + \varepsilon\delta x_0 + \varepsilon\delta\mu \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x^*(t_0))\, N_\alpha\right) = \\ = g(x(t_0)) = 0. \tag{49}$$

Из способа построения траектории (45) будет непосредственно следовать, что при $\varepsilon \to 0$ траектория $x^*(t)$ равномерно по t стремится к $x(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Поэтому из (49) следует, что $x^*(t)$ целиком лежит в замкнутой области G (см. стр. 307).

Как и в гл. 2 (ср. стр. 100), мы записываем полуинтервал I_i неравенствами

$$\tau_i + \varepsilon l_i < t \leqslant \tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i).$$

По заданному начальному значению (46) построим теперь на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \varepsilon l_1$ (т. е. от начальной точки t_0 до левого конца полуинтервала I_1) при помощи конструкции, описанной на стр. 307—310, решение системы (21) вида (23), (24) и положим функции (44), (45) равными этому решению на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \varepsilon l_1$. Таким образом,

$$u^*(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon),$$
$$x^*(t) = x(t) + \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \varepsilon l_1.$$

Следовательно, при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \varepsilon l_1$ функция $\delta x(t)$ является решением уравнения в вариациях (35):

$$\delta x(t) = P_{t,\,t_0}(\delta\mu)\,\delta x(t_0).$$

Мы продолжим теперь решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ с сохранением непрерывности функции $x^*(t)$ на полуинтервал I_1 (предполагая, что он не является пустым, т. е. $\delta t_1 \neq 0$) при помощи следующей конструкции.

Точка $x(\tau_1)$ по условию регулярна относительно v_1. Обозначим через $q_1(v), \ldots, q_s(v)$, $s \geqslant 0$, функции (1) для точки v_1. Тогда мы имеем (обозначая через R функцию $R_{\mathfrak{b}}$, где $\mathfrak{b}$ — символ, входящий в определение строящегося варьированного решения):

$$R(x(\tau_1),\ v_1,\ 0) = q_1(v_1) = \ldots = q_s(v_1) = 0,$$

и система

$$R(y,\ v,\ \varepsilon\delta\mu) = q_1(v) = \ldots = q_s(v) = 0 \qquad (50)$$

разрешима относительно некоторых $s + 1$ координат вектора v вблизи значений $x(\tau_1)$, v_1, $\varepsilon\delta\mu = 0$, например, относительно первых $s+1$ координат:

$$v^i = \vartheta^i(y,\ v^{s+2},\ \ldots,\ v^r,\ \varepsilon\delta\mu),$$
$$i = 1,\ \ldots,\ s+1, \quad 1 \leqslant s+1 \leqslant r,$$

где функции ϑ^i, $i = 1, \ldots, s+1$, непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Очевидно, аргумент y в функциях ϑ^i может принимать значение $x^*(\tau_1)$, так как при $\varepsilon \to 0$ полуинтервал I_1 стягивается к точке τ_1 и

$$x^*(\tau_1 + \varepsilon l_1) = x(\tau_1 + \varepsilon l_1) + \varepsilon\delta x(\tau_1 + \varepsilon l_1) + o(\varepsilon) \to x(\tau_1).$$

Подставив функции ϑ^i, $i = 1, \ldots, s+1$, в первое из уравнений системы (21), получим:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,\ \vartheta^1(y,\ v^{s+2},\ \ldots,\ v^r,\ \varepsilon\delta\mu),\ \ldots,\ v^r) =$$
$$= f_1(y,\ v^{s+2},\ \ldots,\ v^r,\ \varepsilon\delta\mu). \qquad (51)$$

Подставим теперь в правую часть вместо параметров $v^{s+2}, \ldots, v^r$ соответствующие координаты $v_1^{s+2}, \ldots, v_1^r$ точки v_1 и возьмем решение полученного дифференциального уравнения с начальным значением $x^*(\tau_1 + \varepsilon l_1)$ на полуинтервале I_1. Это решение $x^*(t)$ и будет служить на полуинтервале I_1 продолжением решения $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \varepsilon l_1$.

Продолжение управления $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \varepsilon l_1$, на полуинтервал I_1 зададим формулой

$$u^*(t) = (\vartheta^1(x^*(t),\ v_1^{s+2},\ \ldots,\ v_1^r,\ \varepsilon\delta\mu),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \vartheta^{s+1}(x^*(t),\ v_1^{s+2},\ \ldots,\ v_1^r,\ \varepsilon\delta\mu),\ v_1^{s+2},\ \ldots,\ v_1^r), \quad t \in I_1.$$

Допустимость управления $u^*(t)$, $t \in I_1$, и равенство

$$R(x^*(t),\ u^*(t),\ \varepsilon\delta\mu) = 0, \qquad t \in I_1,$$

очевидны. Из построения, кроме того, следует, что $u^*(t)$ — непрерывная на полуинтервале I_1 функция, равномерно стремящаяся на этом полуинтервале к значению v_1 при $\varepsilon \to 0$. Если $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_j < \tau_{j+1}$, то мы проделаем аналогичное построение на полуинтервалах $I_2, \ldots, I_j$ (взяв вместо v_1 соответственно точки $v_2, \ldots$ $\ldots, v_j$) и определим таким образом решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_j$.

Затем функции $u^*(t)$, $x^*(t)$ вновь продолжаются на отрезок $\tau_j \leqslant t \leqslant \tau_{j+1} + \varepsilon l_{j+1}$ (т. е. вплоть до левого конца полуинтервала I_{j+1}) при помощи конструкции, изложенной на стр. 307—310 (с уже имеющимся начальным значением $x^*(\tau_j)$) и т. д. вплоть до точки t_1.

Таким образом, если $\delta t \leqslant 0$, то семейство варьированных решений $u^*(t)$, $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\delta t$, системы (21) определено.

Пусть $\delta t > 0$. Решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ уже построено на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Легко видеть, что точка $x^*(t_1)$ регулярна относительно точки $u^*(t_1) = u^*(t_1 - 0)$. В самом деле, первое условие регулярности следует из того, что для значений t, близких к t_1, имеем:

$$R(x^*(t),\ u^*(t),\ \varepsilon\delta\mu) = p(x^*(t),\ u^*(t)) = 0,$$

ибо при этих значениях t точка $x^*(t)$ лежит на границе области G:

$$g(x^*(t)) = 0.$$

Второе и третье условия регулярности следуют из регулярности точки $x(t_1)$ относительно $u(t_1) = u(t_1 - 0)$ и из соотношений $x^*(t_1) \to x(t_1)$, $u^*(t_1) \to u(t_1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, конструкция, при помощи которой мы определили решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ на полуинтервалах I_i, позволяет нам непрерывно продолжить функции $u^*(t)$, $x^*(t)$ за t_1 вплоть до точки $t_1 + \varepsilon\delta t$.

Таким образом, по заданным параметрам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ мы построили семейство варьированных решений системы (21). Равенство (51), очевидно, выполняется и при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\delta t$.

Отметим, что траектория (45) не определяется параметрами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ однозначно. В самом деле, она зависит от выбора переменных v^i, относительно которых разрешается система уравнений (50) во время построения варьированного решения на полуинтервалах I_i. Аналогичный произвол имеется при продолжении решения на отрезок $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\delta t$ в случае $\delta t > 0$. Этот произвол легко устранить, зафиксировав для каждой точки $u(t)$ те переменные v^i, относительно которых разрешается система (50) вблизи системы значений $x(t)$, $u(t)$,

$\varepsilon\delta\mu = 0$, где $q_1, \ldots, q_s$, $s \geqslant 0$, — функции (1) для точки $u(t)$. (В случае, если t — точка разрыва управления $u(t)$, то переменные v^i, относительно которых разрешается система (50), могут быть различными для точек $u(t-0)$ и $u(t+0)$.)

После принятых соглашений заданием символов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ семейство траекторий (48) однозначно определяется, так как траектории этого семейства строятся на отрезках между полуинтервалами I_i однозначно (см. замечание на стр. 309).

Построение конусов K^*, k^*

Нас будет теперь, как и в гл. 2, интересовать отклонение конца варьированной траектории (45) от точки $\boldsymbol{x}(t_1)$.

Совершенно так же, как это сделано в гл. 2 (стр. 101—105), доказывается формула

$$\boldsymbol{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \boldsymbol{x}(t_1) + \varepsilon\Delta\boldsymbol{x}^* + o(\varepsilon), \tag{52}$$

где вектор $\Delta\boldsymbol{x}^*$ не зависит от ε и определяется формулой

$$\Delta\boldsymbol{x}^* = P_{t_1, t_0}(\delta\mu)\,\delta\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{f}(x(t_1), u(t_1))\,\delta t + \\ + \sum_{\alpha=1}^{k} P_{t_1, \tau_\alpha}(\delta\mu)\,[\boldsymbol{f}(x(\tau_\alpha), v_\alpha) - \boldsymbol{f}(x(\tau_\alpha), u(\tau_\alpha))]\,\delta t_\alpha. \tag{53}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость вектора $\Delta\boldsymbol{x}^*$ от выбора символов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, мы будем (если нужно) обозначать этот вектор символом $\Delta\boldsymbol{x}^*_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$.

Из равенства (37), справедливого для близких к t_1 значений t, следует, что

$$\Delta\boldsymbol{x}^* \in T(\boldsymbol{x}(t_1)). \tag{54}$$

Пусть теперь $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ и $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$ — две пары символов, определяющих варьирование управлений и траекторий, а λ' и λ'' — неотрицательные числа. Положим

$$\mathfrak{a} = \lambda'\mathfrak{a}' + \lambda''\mathfrak{a}'', \qquad \mathfrak{b} = \lambda'\mathfrak{b}' + \lambda''\mathfrak{b}''.$$

Из свойств переноса (см. формулы (36)) и из того факта, что в формулу (47) величина $\delta\mu$ входит линейно, а в формулу (53) величины δx_0, δt, δt_α входят линейно, непосредственно вытекает, что

$$\Delta x^*_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}} = \lambda' \Delta x^*_{\mathfrak{a}',\,\mathfrak{b}'} + \lambda'' \Delta x^*_{\mathfrak{a}'',\,\mathfrak{b}''}. \tag{55}$$

Полученная формула показывает, что всевозможные векторы вида $\Delta x^*_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$, отложенные в пространстве X от точки $x(t_1)$, образуют *выпуклый конус* с вершиной в точке $x(t_1)$, который мы будем обозначать через K^*. Из (54) следует, кроме того, что конус K^* лежит в касательной плоскости $T(x(t_1))$ границы $g(x) = 0$, проведенной в точке $x(t_1)$.

Конус K^* мы используем при доказательстве условий скачка (§ 36). Для доказательства же теоремы 22 нам потребуется другой выпуклый конус k^*, содержащийся в K^*. Именно, будем рассматривать только такие символы $\mathfrak{b}$, для которых ни одна из точек ξ_i не совпадает с начальной точкой $x(t_0)$ траектории $x(t)$. В этом случае из формулы (47) следует, что $\delta x_0 = 0$, т. е. что варьированная траектория $x^*(t)$ начинается в точке $x(t_0)$. Если $\mathfrak{b}'$ и $\mathfrak{b}''$ — символы указанного вида (т. е. не содержащие точки $x(t_0)$ среди точек ξ_i), а λ', λ'' — неотрицательные числа, то $\lambda'\mathfrak{b}' + \lambda''\mathfrak{b}''$ — также символ того же вида. Поэтому, откладывая от точки $x(t_1)$ всевозможные векторы вида $\Delta x^*_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$, где $\mathfrak{b}$ — символы, не содержащие точки $x(t_0)$ среди точек ξ_i, мы получаем выпуклый конус с вершиной в точке $x(t_1)$, который будем обозначать через k^*.

Так как $k^* \subset K^* \subset T\ (x(t_1))$, то конусы k^*, K^* не более чем n-мерны. Поэтому внутренностью этих конусов мы будем называть множество их внутренних точек по отношению к плоскости $T(x(t_1))$, а внутренними лучами — лучи с вершиной в $x(t_1)$, принадлежащие этим конусам и содержащие их внутренние точки.

§ 34. Доказательство теоремы 22 (окончание)

Для выполнимости всех построений предыдущего параграфа достаточно потребовать, чтобы траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, лежащая на границе области G, была *регулярной*.

Предположим теперь дополнительно, что $u(t)$ и $x(t)$ оптимальны.

Обозначим через L луч, выходящий из точки $x(t_1)$ и направленный вдоль отрицательной полуоси x^0. Очевидно, что $L \subset T(x(t_1))$.

Лемма 1. *Луч L не является внутренним лучом конуса k^*.*

Доказательство. Обозначим через π проекцию (например, ортогональную) пространства X на плоскость $T(x(t_1))$. Пусть $x^*(t)$ — варьированная траектория, соответствующая символам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ — символ, не содержащий точки $x(t_0)$ среди точек ξ_i (так что траектория $x^*(t)$ начинается в точке $x(t_0)$). Так как

$$x^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = x(t_1) + \varepsilon\,\Delta x^* + o(\varepsilon),$$

причем $x(t_1) \in T(x(t_1))$, $\Delta x^* \in T(x(t_1))$, то

$$\pi(x^*(t_1 + \varepsilon\delta t)) = x(t_1) + \varepsilon\,\Delta x^* + o(\varepsilon).$$

Следовательно, главные (линейные по ε) части векторов

$$\pi(x^*(t_1 + \varepsilon\delta t)) - x(t_1) \quad \text{и} \quad x^*(t_1 + \varepsilon\delta t) - x(t_1)$$

совпадают и потому заполняют в $T(x(t_1))$ один и тот же конус k^*.

Допустим теперь, что луч L является внутренним лучом конуса k^*. Тогда, в силу леммы 3 гл. 2, существует такое $\varepsilon > 0$ (которое можно предполагать как угодно малым) и такие символы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, что им соответствует варьированная траектория $x^*(t)$, начинающаяся в точке $x(t_0)$ и кончающаяся в такой точке $x^*(t_1 + \varepsilon\delta t)$, что $\pi(x^*(t_1 + \varepsilon\delta t))$ — отличная от $x(t_1)$ точка луча L.

Отображение π, рассматриваемое на границе $g(x) = 0$, является, вблизи точки $x(t_1)$, взаимно однозначным. Следовательно, если y — достаточно близкая к $x(t_1)$ точка границы $g(x) = 0$, то из $\pi(y) \in L$ вытекает, что $\pi(y) = y$. Так как при достаточно малом ε точка $x^*(t_1 + \varepsilon\delta t)$ (принадлежащая границе $g(x) = 0$) как угодно близка к точке $x(t_1)$, то из соотношения $\pi(x^*(t_1 + \varepsilon\delta t)) \in L$ вытекает, что $x^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \pi(x^*(t_1 + \varepsilon\delta t))$, и потому $x^*(t_1 + \varepsilon\delta t)$ есть отличная от $x(t_1)$ точка луча L. Однако это противоречит предположению об оптимальности решения $u(t)$, $x(t)$.

Таким образом, лемма I доказана.

Лемма II. *Существует такое непрерывное решение*

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{56}$$

уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} + \Lambda(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial x}\right)\psi, \tag{57}$$

что в каждой точке непрерывности оптимального управления $u(t)$ *выполняется условие максимума*

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = m(\psi(t), x(t)), \tag{58}$$

причем

$$m(\psi(t_1), x(t_1)) = 0, \tag{59}$$

и выполнены следующие условия:

а) $\psi_0(t) = \text{const} \leqslant 0$;

б) *вектор* $\psi(t_0)$ *неколлинеарен вектору*

$$\operatorname{grad} g(x(t_0));$$

в) *кусочно-гладкая скалярная функция* $\lambda(t) = -(\psi(t), \Lambda(t))$ *такова, что в точках ее дифференцируемости вектор*

$$\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{grad} g(x(t))$$

направлен внутрь области G *или обращается в нуль.*

Доказательство. На основании леммы I через вершину $x(t_1)$ конуса $k^* \subset T(x(t_1))$ можно провести $(n-1)$-мерную плоскость Γ, лежащую в $T(x(t_1))$ и отделяющую конус k^* от луча L. Обозначим через $\chi = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n)$ лежащий в плоскости $T(x(t_1))$ вектор, ортогональный к плоскости Γ и направленный таким образом, что луч L лежит в том замкнутом полупространстве, определяемом плоскостью Γ, в которое направлен вектор χ, а конус k^* — в другом замкнутом полупространстве. Тогда $\chi_0 \leqslant 0$ и для любого вектора $\Delta x \in k^*$ выполнено соотношение

$$(\chi, \Delta x^*) \leqslant 0. \tag{60}$$

Далее, так как вектор χ лежит в плоскости $T(x(t_1))$, то векторы

$$\chi \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} g(x(t_1)) \tag{61}$$

линейно независимы.

Определим искомую функцию $\psi(t)$ как решение уравнения (57) с конечным значением

$$\psi(t_1) = \chi. \tag{62}$$

Легко видеть, что равенство (58) выполняется. В самом деле, пусть в некоторой точке непрерывности τ_1 управления $u(t)$ выполнено неравенство

$$\mathscr{H}(\psi(\tau_1),\ x(\tau_1),\ u(\tau_1)) < m(\psi(\tau_1),\ x(\tau_1)),$$

т. е. существует такая точка $v_1 \in U$, относительно которой точка $x(\tau_1)$ регулярна, что

$$\mathscr{H}(\psi(\tau_1),\ x(\tau_1),\ v_1) > \mathscr{H}(\psi(\tau_1),\ x(\tau_1),\ u(\tau_1)). \tag{63}$$

Построим решение $u^*(t)$, $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы (21), взяв в качестве символа $\mathfrak{a}$ символ $\{\tau_1,\ v_1,\ \delta t_1 = 1,\ \delta t = 0\}$ и в качестве $\mathfrak{b}$ символ, в котором $s = 0$ (т. е. ζ_i, $a_i(x)$, N_i отсутствуют) и $\delta\mu = 0$. Из (53) следует, что в этом случае

$$\Delta x^* = P_{t_1,\,\tau_1}(0)\,(f(x(\tau_1),\ v_1) - f(x(\tau_1),\ u(\tau_1))).$$

Поэтому формулы (40), (63) дают

$$(\chi,\ \Delta x^*) = (\psi(t_1),\ P_{t_1,\,\tau_1}(0)\,(f(x(\tau_1),\ v_1) - f(x(\tau_1),\ u(\tau_1)))) =$$
$$= (\psi(\tau_1),\ f(x(\tau_1),\ v_1) - f(x(\tau_1),\ u(\tau_1))) > 0,$$

что противоречит неравенству (60).

Доказательство равенства (59) и условия а) совпадает с доказательством соответствующих формул (12) гл. 2.

Условие б) следует из независимости векторов (61) и равенства (62) (см. замечание 4 к теореме 22).

Докажем, наконец, условие в).

Пусть $u^*(t)$, $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — решение системы (21), соответствующее пустому символу $\mathfrak{a}$ (т. е. символу, для которого $k = 0$ и $\delta t = 0$) и некоторому символу $\mathfrak{b}$, не содержащему точки $x(t_0)$ в качестве одной из точек ζ_i.

Из формул (53), (41) следует, что в этом случае

$$\Delta x^* = P_{t_1, t_0}(\delta\mu)\,0 = \delta\mu \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{\varphi}_\alpha(t_1) \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\psi}^\alpha(t), \Lambda(t)) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt.$$

Формулы (62), (60) дают

$$(\chi, \Delta x^*) = \delta\mu \sum_{\alpha=0}^{n} \left(\psi(t_1), \tilde{\varphi}_\alpha(t_1) \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\psi}^\alpha(t), \Lambda(t)) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt \right) =$$

$$= \delta\mu \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t), \Lambda(t)) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt = -\delta\mu \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt \leqslant 0,$$

так как $\lambda(t) = -(\psi(t), \Lambda(t))$ и, в силу двойственности систем функций $(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$, $(\tilde{\psi}^1, \ldots, \tilde{\psi}^n)$, имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (\psi(t_1), \tilde{\varphi}_\alpha(t_1))\, \tilde{\psi}^\alpha(t) = \psi(t).$$

Подставив в последнее неравенство выражение для $\frac{\partial R}{\partial \mu}$ из (42) и учитывая, что $\delta\mu \geqslant 0$, получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{n} \left[a_\alpha(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N_\alpha \right) \right] dt \geqslant 0.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание равенства $a_i(x(t_0)) = a_i(x(t_1)) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d\lambda}{dt} \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N_\alpha \right) dt \leqslant 0. \qquad (64)$$

Так как точки ξ_i можно выбирать на траектории $x(t)$ произвольно (лишь бы они не совпадали с ее концами) и так как, далее, окрестности O_{ξ_i} сколь угодно малы, функции $a_i(x(t))$ неотрицательны и N_i — внешние векторы (по отношению к области G), то из неравенства (64) следует неравенство

$$\frac{d\lambda}{dt} \leqslant 0.$$

Это неравенство и выражает условие в), так как область G задается вблизи границы неравенством $g(x) \leqslant 0$ и, следовательно, $\operatorname{grad} g(x(t))$ — внешняя нормаль к границе $g(x) = 0$.

Для завершения доказательства теоремы 22 надо, во-первых, доказать, что скалярная функция $\lambda(t) = -(\psi(t), \Lambda(t))$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u} = \lambda(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha(t)\frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u}, \tag{65}$$

и, во-вторых, доказать равенство

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t-0)) = m(\psi(t), x(t))$$

в точках разрыва управления $u(t)$ и постоянство функции $\mathscr{H}(t) = \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t))$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В точках разрыва управления, согласно принятому условию, полагаем

$$\mathscr{H}(t) = \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t-0)).$$

Для доказательства равенства (65) заметим, что координаты вектора $\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \ldots, \lambda^n(t))$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f^j(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} l^j_\beta(t)\frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha} = 0,$$
$$j = 0, 1, \ldots, n, \qquad \alpha = 1, \ldots, s+1.$$

Умножая это уравнение на $\psi_j(t)$ и складывая полученные соотношения при всех $j = 0, 1, \ldots, n$, получим $s+1$ равенств $(\alpha = 1, \ldots, s+1)$

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} = \lambda(t)\frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} \nu_\beta(t)\frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha},$$

из которых функция $\lambda(t)$ однозначно определяется.

С другой стороны,

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = m(\psi(t), x(t))$$

и, по правилу множителей Лагранжа,

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u} =$$

$$= \lambda^*(t) \frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha^*(t) \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u};$$

следовательно, $\lambda(t) = \lambda^*(t)$.

Докажем теперь равенство

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = m(\psi(t), x(t)) \tag{66}$$

в точках разрыва управления $u(t)$.

Пусть в точке разрыва τ управления $u(t)$ выполнено соотношение

$$\mathscr{H}(\tau) = \mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau - 0)) \neq m(\psi(\tau), x(\tau)).$$

Тогда найдется такая точка $u_1 \in \omega(x(\tau))$, что

$$\mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau - 0)) < \mathscr{H}(\psi(\tau), x(\tau), u_1). \tag{67}$$

Из условия $u_1 \in \omega(x(\tau))$ непосредственно следует (см. стр. 297—298) существование такой непрерывной функции $u^*(t)$, определенной для значений t, близких к τ, что $u^*(t) \in \omega(x(t))$, $u^*(\tau) = u_1$. Учитывая, что функция $\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u^*(t))$ непрерывна по t, а управление $u(t)$ непрерывно в точке τ слева, мы для любой достаточно близкой к τ точки $t < \tau$ из неравенства (67) получим неравенство

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) < \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u^*(t)).$$

Следовательно, для рассматриваемых t получаем неравенство

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t)) < \mathscr{H}(\psi(t), x(t), u^*(t)) \leqslant m(\psi(t), x(t)),$$

противоречащее равенству (58). Равенство (66) доказано. Аналогично доказывается и равенство

$$\mathscr{H}(\psi(t), x(t), u(t + 0)) = m(\psi(t), x(t)). \tag{68}$$

Из равенств (66), (68) следует непрерывность функции $\mathscr{H}(t) = m(\psi(t), x(t))$. Следовательно, для доказательства постоянства функции $\mathscr{H}(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_1$ остается доказать, что она постоянна на каждом интервале одновременной дифференцируемости функций $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$.

Имеем (см. формулы (9), (10)):

$$\frac{d}{dt}\mathscr{H}(t) = \left(\frac{d\psi}{dt}, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \psi}\right) + \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x}, \frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u}, \frac{du}{dt}\right) =$$

$$= \left(\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\psi + \lambda \frac{\partial p}{\partial x}\right), f\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\psi, f\right) +$$

$$+ \left(\left(\lambda \frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\right), \frac{du}{dt}\right) = \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial x}, f\right) + \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{du}{dt}\right) +$$

$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial u}, \frac{du}{dt}\right) = \lambda(t)\frac{d}{dt} p(x(t), u(t)) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha(t) \frac{d}{dt} q_\alpha(u(t)) = \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha(t) \frac{d}{dt} q_\alpha(u(t)).$$

Докажем, что в рассматриваемых точках t выполнены соотношения $\frac{dq_\alpha(u(t))}{dt} = 0$, $\alpha = 1, \ldots, s$, и, следовательно,

$$\frac{d\mathscr{H}(t)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha(t) \frac{dq_\alpha(u(t))}{dt} = 0.$$

Допустим противное; пусть, например, в точке τ

$$\frac{dq_1(u(\tau))}{dt} \neq 0. \tag{69}$$

Мы имеем:

$$q_1(u(\tau)) = \ldots = q_s(u(\tau)) = 0,$$

где $q_1(u), \ldots, q_s(u)$ — функции (1) для точки $u(\tau)$. Следовательно, функция $q_1(u(t))$ меняет знак в точке τ, что, однако, противоречит предположению о допустимости управления $u(t)$, так как вблизи точки $u(\tau)$ множество

U задается неравенствами

$$q_1(u) \leqslant 0, \ \ldots, \ q_s(u) \leqslant 0,$$

и потому из допустимости управления $u(t)$ следует, что для любых достаточно близких к τ значений t

$$q_1(u(t)) \leqslant 0.$$

Итак, теорема 22 полностью доказана.

§ 35. Некоторые обобщения

В этом параграфе мы приведем несколько очевидных обобщений теоремы 22. Мы ограничимся формулировкой результатов, так как их доказательства лишь незначительно отличаются от доказательства теоремы 22.

При доказательстве теоремы 22 решающую роль играла зависимость между векторами $\boldsymbol{x}$, u, заданная уравнением

$$p(\boldsymbol{x}, u) = 0.$$

Вид функции

$$p(\boldsymbol{x}, u) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial \boldsymbol{x}}, f(x, u)\right)$$

был использован лишь при доказательстве условий б) — в) теоремы 22. Беглый анализ доказательства убеждает нас в справедливости нижеследующей теоремы 23.

Пусть заданы m непрерывно дифференцируемых функций $p_i(\boldsymbol{x}, u)$, $i = 1, \ldots, m$, не зависящих от координаты x^0. Регулярная относительно точки $u_0 \in U$ точка $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющая системе

$$p_1(\boldsymbol{x}, u_0) = \ldots = p_m(\boldsymbol{x}, u_0) = 0,$$

определяется так же, как и прежде, только в данном случае вместо независимости векторов (7) надо потребовать независимость векторов

$$\frac{\partial p_1(\boldsymbol{x}, u_0)}{\partial u}, \ \ldots, \ \frac{\partial p_m(\boldsymbol{x}, u_0)}{\partial u}, \ \frac{\partial q_1(u_0)}{\partial u}, \ \ldots, \ \frac{\partial q_s(u_0)}{\partial u}.$$

Т е о р е м а 23. *Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, а $\boldsymbol{x}(t)$ — соответствующая ему регулярная оптимальная траектория уравнения* (5), *удовлетворяющая* *на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ системе уравнений:*

$$p_1(x(t),\ u(t)) = \ldots = p_m(x(t),\ u(t)) = 0. \tag{70}$$

Тогда существует такая ненулевая непрерывная вектор-функция $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, что на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ функции $u(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ u) = \frac{\partial \mathscr{H}(\psi,\ x,\ u)}{\partial \psi},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}(\psi,\ x,\ u)}{\partial x} + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial p_\alpha(x,\ u)}{\partial x}$$

и выполняется условие максимума

$$\mathscr{H}(\psi(t),\ x(t),\ u(t)) = m(\psi(t),\ x(t)),$$

причем

$$m(\psi(t),\ x(t)) \equiv 0;$$

кусочно-гладкие функции $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, определяются из условия максимума как множители Лагранжа в формуле

$$\frac{\partial \mathscr{H}(\psi,\ x,\ u)}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial p_\alpha(x,\ u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \frac{\partial q_\alpha(u)}{\partial u};$$

кроме того,

$$\psi_0 = \text{const} \leqslant 0.$$

К сформулированной теореме легко сводится решение оптимальной задачи, в которой вместо равенств (70) фигурируют неравенства

$$p_1(x,\ u) \leqslant 0,\ \ldots,\ p_m(x,\ u) \leqslant 0. \tag{71}$$

В самом деле, введя m дополнительных скалярных управляющих параметров v_i, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих неравенствам $v_i \geqslant 0$, и рассматривая вместо неравенств (71) равенства

$$p_1(x,\ u) + v_1 = \ldots = p_m(x,\ u) + v_m = 0,$$

мы придем к условиям теоремы 23.

Наконец, отметим, что теорема 22 непосредственно обобщается на тот случай, когда область G задана вблизи границы несколькими, например двумя, неравенствами

$$g_1(x) \leqslant 0, \qquad g_2(x) \leqslant 0,$$

а регулярная оптимальная траектория лежит на $(n-2)$-мерном «ребре», заданном уравнениями

$$g_1(x) = g_2(x) = 0;$$

при этом, естественно, предполагается, что гиперповерхности

$$g_1(x) = 0, \qquad g_2(x) = 0$$

находятся в общем положении вдоль траектории, т. е. что векторы $\frac{\partial g_1(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial g_2(x)}{\partial x}$ линейно независимы.

§ 36. Условие скачка

Оптимальная траектория, лежащая в замкнутой области G, частично может лежать в открытом ядре области G, частично — на границе области. Для того чтобы однозначно проследить такую траекторию, недостаточно принципа максимума и теоремы 22. В самом деле, принцип максимума дает полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякий участок оптимальной траектории, целиком лежащий в открытом ядре области G, а теорема 22 дает небходимые условия, которым удовлетворяют участки, целиком лежащие на границе области G. Недостает еще *условия сопряжения*, которому удовлетворяет всякая пара примыкающих друг к другу участков оптимальной траектории, один из которых лежит в открытом ядре области G, а другой — на ее границе. Это условие мы называем *условием скачка* для вектор-функции $\psi(t)$, которая в момент перехода от одного участка к другому может терпеть разрыв (см. формулировку теоремы 24).

Докажем прежде всего одну простую лемму, которая нам понадобится ниже.

Лемма. Пусть $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — *траектория уравнения* (5), *лежащая в замкнутой области G и соответ-*

ствующая некоторому допустимому управлению, и пусть $x(t_0)$ *— единственная точка траектории, лежащая на границе* $g(x)=0$ *области* G. *Если вектор* $\delta x(t_0)$ *не касается границы* $g(x)=0$ *в точке* $x(t_0)$ *и направлен внутрь области* G, *то варьированная траектория* $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *с начальным значением* $x^*(t_0)=x(t_0)+\varepsilon\delta x(t_0)$ *целиком лежит в открытом ядре области* G.

Доказательство. Мы имеем:

$$x^*(t)=x(t)+\varepsilon\delta x(t)+o(\varepsilon), \quad \left(\frac{\partial g(x(t_0))}{\partial x},\ \delta x(t_0)\right)=a<0.$$

Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon>0$ величина

$$g(x^*(t))=g(x(t))+\varepsilon\left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x},\ \delta x(t)\right)+o(\varepsilon),\ \ t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

отрицательна. В самом деле, для значений $t>t_0$, близких к t_0, это следует из неравенств

$$g(x(t))<0, \qquad a<0.$$

Для значений t, удаленных от t_0, величина $|g(x(t))|$ больше величины

$$\left|\varepsilon\left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x},\ \delta x(t)\right)+o(\varepsilon)\right|$$

и, кроме того, $g(x(t))<0$.

Пусть $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, — допустимое управление, а $x(t)$ — соответствующая траектория (не обязательно оптимальная) уравнения (5), целиком лежащая в замкнутой области G. Некоторые участки траектории могут лежать на границе области G, некоторые — внутри области, т. е. в открытом ядре области G.

Точку $x(\tau)$ траектории, лежащую на границе области G, назовем *точкой стыка*, если $t_0<\tau<t_1$ и существует такое $\sigma>0$, что хотя бы один из участков траектории $x(t)$ при $\tau-\sigma<t<\tau$ или при $\tau<t<\tau+\sigma$ лежит в открытом ядре области G. В дальнейшем для определенности будем всегда считать, что внутри области G лежит участок траектории при $\tau-\sigma<t<\tau$. Время τ назовем *моментом стыка*.

Мы будем рассматривать траектории с конечным числом точек стыка, не оговаривая этого особо.

Траекторию $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, целиком лежащую в замкнутой области G, назовем *регулярной*, если регулярен всякий ее участок, лежащий на границе $g(x) = 0$ области G.

Предположим, что $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, а $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — соответствующая оптимальная регулярная траектория уравнения (5), лежащая целиком в области G. Пусть $x(\tau)$ — точка стыка траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Обозначим через $\tau_1 < t < \tau_2$ максимальный интервал отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, содержащий единственный момент стыка τ. Таким образом, участок траектории $x(t)$ при $\tau_1 < t < \tau$ лежит в открытом ядре области G; что же касается участка этой траектории при $\tau < t < \tau_2$, то он либо целиком лежит на границе $g(x) = 0$, либо также принадлежит открытому ядру области G, и тогда $x(\tau)$ — единственная точка участка $x(t)$, $\tau_1 < t < \tau_2$, лежащая на границе области G.

Следовательно, участок $x(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$, удовлетворяет принципу максимума (ср. стр. 295). Соответствующая этому участку ненулевая функция

$$\psi^-(t) = \left(\psi_0^-(t),\ \psi_1^-(t),\ \ldots,\ \psi_n^-(t)\right), \qquad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{72}$$

непрерывна и удовлетворяет системе уравнений (15) гл. I. Участок $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, удовлетворяет либо требованиям теоремы 22 (если он лежит на границе $g(x) = 0$), либо принципу максимума (если он лежит внутри области G). Соответствующая непрерывная ненулевая функция

$$\psi^+(t) = \left(\psi_0^+(t),\ \psi_1^+(t),\ \ldots,\ \psi_n^+(t)\right), \qquad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2, \tag{73}$$

удовлетворяет либо системе (10), (11) и условиям а) — в) теоремы 22, либо системе (15) гл. I.

Мы будем говорить, что в точке стыка $x(\tau)$ оптимальной регулярной траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, целиком лежащей в замкнутой области G, выполняется *условие скачка*, если существует такой участок $x(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, траектории, что $\tau_1 < t < \tau_2$ является максимальным интервалом отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, содержащим единственный момент стыка τ, и если для участков $x(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$, $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, определенные выше функции (72), (73) можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось одно из следующих двух (как легко видеть, не совместных между собой) условий:

$$\psi^{+}(\tau) = \psi^{-}(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)), \tag{74}$$

$$\psi^{-}(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0, \tag{75}$$

где μ — действительное число. Если участок $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе $g(x) = 0$, то условие (74) эквивалентно условию

$$\psi^{+}(\tau) = \psi^{-}(\tau),$$

так как начальное значение $\psi^{+}(\tau)$ функции $\psi^{+}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, можно изменять на произвольный вектор вида $\mu \operatorname{grad} g(x(\tau))$ (см. замечание 4 к теореме 22).

Теорема 24 (*условие скачка*). *Пусть регулярная оптимальная траектория уравнения* (5), *лежащая в замкнутой области* G, *содержит конечное число точек стыка. Тогда в каждой точке стыка выполняется условие скачка.*

Доказательство. Пусть $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальное управление, $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, $x(\tau)$ — точка стыка, $\tau_1 < t < \tau_2$ — максимальный интервал, содержащий единственный момент стыка τ. Для определенности считаем, что участок $x(t)$, $\tau_1 < t < \tau$, принадлежит открытому ядру области G, а участок $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе $g(x) = 0$.

Точка $x(\tau_1)$ может лежать как внутри области G, так и на ее границе. Мы предположим сначала, что $x(\tau_1)$ лежит внутри G; в этом случае, очевидно, $\tau_1 = t_0$.

Введем уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = -f(\xi, v) \tag{76}$$

и будем рассматривать его решение на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\delta\theta$, где $\delta\theta$ — любое действительное число. Очевидно, решением уравнения (76) являются функции

$$v(t) = u(\tau - t), \quad \xi(t) = x(\tau - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\delta\theta. \tag{77}$$

Обозначим через $A_{\tau-\tau_1, 0}$ оператор переноса вдоль траектории (77) уравнения (76) (см. стр. 97). Далее, пусть $\Delta\xi$ означает вектор смещения (ср. формулу (22) гл. 2) при произвольном варьировании траектории (77) уравнения (76). Наконец, пусть $\delta\xi_0$ — произвольный вектор, исходящий из точки $x(\tau)$ и либо направленный внутрь области G (не касательный к границе области G), либо равный нулю. Тогда определен вектор

$$\delta = A_{\tau-\tau_1,\,0}(\delta\xi_0) + \Delta\xi, \tag{78}$$

который мы будем считать исходящим из точки $x(\tau_1)$. Множество всех векторов (78) образует выпуклый конус K с вершиной в точке $x(\tau_1) = \xi(\tau - \tau_1)$ (ср. стр. 107). Через K^* обозначим конус, определенный в § 33, рассматривая его для траектории $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$. Точка $x(\tau_2)$ является вершиной конуса K^*. Конус K^* лежит в касательной плоскости $T(x(\tau_2))$ границы $g(x) = 0$, проведенной в точке $x(\tau_2)$, и образован всевозможными векторами вида

$$\delta^* = P_{\tau_2,\,\tau}(\delta t)(\delta x(\tau)) + \Delta x^*_{a,\,b} \tag{79}$$

(см. формулу (53)), исходящими из точки $x(\tau_2)$.

Важно заметить, что варьированная траектория $\xi^*(t)$ при достаточно малом ε лежит вся в замкнутой области G. В самом деле, если $\delta\xi_0 = 0$, то начальный кусок траектории $\xi^*(t)$ совпадает с траекторией $\xi(t)$, и потому точки траектории $\xi^*(t)$ при $t > 0$ являются внутренними точками области G. Если же $\delta\xi_0 \neq 0$, то, в силу выбора вектора $\delta\xi_0$, наше утверждение следует из леммы (стр. 333).

Траектория $x^*(t)$ также лежит в замкнутой области G (см. § 33).

Рассмотрим теперь прямое произведение

$$K \times K^* \subset X \times T(x(\tau_2)) \tag{80}$$

конусов K и K^*. Это прямое произведение $K \times K^*$ также является выпуклым конусом.

Через $\mathscr{K}$ обозначим содержащийся в $K \times K^*$ выпуклый конус, образованный всевозможными парами векторов (78), (79), для которых

$$\delta\xi_0 = \delta x(\tau). \tag{81}$$

Далее, обозначим через k выпуклый конус, определенный в § 14 и рассматриваемый для траектории $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1$, а через k^* — конус, определенный в § 33 и рассматриваемый для траектории $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$. Очевидно, что $k \subset K$, $k^* \subset K^*$, и потому

$$\mathscr{K} \supset k \times x(\tau_2), \qquad \mathscr{K} \supset x(\tau_1) \times k^*. \tag{82}$$

Обозначим через L луч, выходящий из $x(\tau_2)$ и направленный вдоль отрицательной полуоси x^0. Покажем, что луч $x(\tau_1) \times L$, лежащий в прямом произведении $K \times T(x(\tau_2))$, не является внутренним лучом конуса $\mathscr{K}$.

Допустим обратное. Тогда совершенно так же, как в § 34, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно доказать существование таких варьированных траекторий

$$\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1 + \varepsilon\delta\theta, \quad x^*(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t, \tag{83}$$

начальные смещения которых удовлетворяют условию (81), что точка

$$\xi^*(\tau - \tau_1 + \varepsilon\delta\theta), \qquad x^*(\tau_2 + \varepsilon\delta t) \tag{84}$$

лежит на луче $x(\tau_1) \times L$ и не совпадает с его началом $x(\tau_1) \times x(\tau_2)$. Иначе говоря,

$$\begin{gathered} \xi^*(\tau - \tau_1 + \varepsilon\delta\theta) = x(\tau_1), \\ x^*(\tau_2 + \varepsilon\delta t) = x(\tau_2) + \lambda(-1, 0, \ldots, 0), \end{gathered} \tag{85}$$

где $\lambda > 0$.

Определим допустимое управление $\tilde{u}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\delta\theta \leqslant \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t$, и соответствующую траекторию $\tilde{x}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\delta\theta \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t$, уравнения (5) формулами:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}(t) = v^*(\tau - t), \quad \tilde{x}(t) = \xi^*(\tau - t) \quad \text{при} \quad \tau_1 - \varepsilon\delta\theta \leqslant t \leqslant \tau, \\ &\tilde{u}(t) = u^*(t), \quad \tilde{x}(t) = x^*(t) \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t, \end{aligned}$$

где $\xi^*(t)$, $x^*(t)$ — варьированные траектории (83), $v^*(t)$, $u^*(t)$ — соответствующие им управления. Очевидно, функции $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\delta\theta \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t$, удовлетворяют уравнению (5), и, в силу условия (81), траектория $\tilde{x}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\delta\theta \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t$, непрерывна в точке τ и, следовательно, на всем отрезке $\tau_1 - \varepsilon\delta\theta \leqslant t \leqslant \tau_2 + \varepsilon\delta t$. Кроме того, согласно (85) имеем:

$$\tilde{x}(\tau_1 - \varepsilon\delta\vartheta) = x(\tau_1),$$
$$\tilde{x}(\tau_2 + \varepsilon\delta t) = (x^0(\tau_2) - \lambda,\ x^1(\tau_2),\ \ldots,\ x^n(\tau_2)), \qquad \lambda > 0.$$

Но эти неравенства противоречат тому факту, что участок $x(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, оптимальной траектории $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, также оптимален.

Итак, луч $x(t_1) \times L$ не является внутренним лучом для конуса $\mathscr{K}$. Из включения (80) следует, что размерность $\dim \mathscr{K}$ конуса $\mathscr{K}$ удовлетворяет неравенству $\dim \mathscr{K} \leqslant 2n + 1$.

Следовательно, существует опорная $2n$-мерная плоскость к конусу $\mathscr{K}$ в его вершине $x(\tau_1) \times x(\tau_2)$, лежащая в $X \times T(x(\tau_2))$ и отделяющая конус $\mathscr{K}$ от луча $x(\tau_1) \times \times L$. Обозначим через (χ, χ^*) исходящий из точки $x(\tau_1) \times x(\tau_2)$ вектор, ортогональный к этой плоскости, лежащий в $X \times T(x(\tau_2))$ и направленный таким образом, что луч $x(\tau_1) \times L$ лежит в том же замкнутом полупространстве, что и вектор (χ, χ^*), а конус $\mathscr{K}$ — в другом.

Мы имеем:

$$\chi^* = (\chi_0^*,\ \chi_1^*,\ \ldots,\ \chi_n^*) \in T(x(\tau_2)), \tag{86}$$

$$((\chi,\ \chi^*),\ (\delta,\ \delta^*)) = (\chi,\ \delta) + (\chi^*,\ \delta^*) \leqslant 0, \qquad \chi_0^* \leqslant 0, \tag{87}$$

где векторы δ, δ^* определяются формулами (78), (79) (при условии (81)). Далее,

$$(\chi,\ \chi^*) \neq 0 \tag{88}$$

и потому векторы χ, χ^* одновременно в нуль не обращаются.

Обозначим через

$$\zeta(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1, \tag{89}$$

решение уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial f(\xi(t),\ v(t))}{\partial \xi}\,\zeta,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\zeta(\tau - \tau_1) = \chi.$$

где функция $\xi(t)$ определена формулой (83), а $v(t)$ — соответствующее управление. Через

$$\psi^+(t), \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_2, \tag{90}$$

обозначим решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x}\psi$$

с краевым условием

$$\psi(\tau_2) = \chi^*.$$

Используя включения (82), так же как в гл. 2 и в § 34, получаем:

$$\left.\begin{aligned} (-\zeta(t), f(\xi(t), v(t))) = \mathscr{H}(-\zeta(t), \xi(t), v(t)) = \\ = \mathscr{M}(-\zeta(t), \xi(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1, \\ \mathscr{H}(\psi^+(t), x(t), u(t)) = m(\psi^+(t), x(t)) = 0, \\ \tau \leqslant t \leqslant \tau_2. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Кроме второго равенства (91), функция $\psi^+(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, удовлетворяет всем условиям теоремы 22, за исключением, быть может, условия б), так как равенство $\chi^* = 0$ и, следовательно, равенство $\psi^+(t) \equiv 0$ не исключены.

Пусть

$$\psi^-(t) = -\zeta(\tau - t), \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{92}$$

Очевидно,

$$\frac{d\psi^-(t)}{dt} = -\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x}\psi^-, \quad \psi^-(\tau_1) = -\chi, \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau,$$

$$\mathscr{H}(\psi^-(t), x(t), u(t)) = \mathscr{M}(\psi^-(t), x(t)) = 0.$$

Из неравенства (88) следует, что хотя бы одна из функций $\psi^-(t)$, $\psi^+(t)$ отлична от нуля. Ниже доказывается, что всегда $\psi^-(t) \neq 0$ и, следовательно, функция $\psi^-(t)$ удовлетворяет всем условиям принципа максимума.

Докажем теперь, что либо

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)), \quad x(t) \neq 0,$$

либо

$$\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)) = 0, \qquad \mu \neq 0.$$

Тем самым условия скачка будут доказаны, так как функцию $\psi^-(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$, можно принять за функцию (72), а функцию $\psi^+(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$,— за функцию (73), если $\psi^+(t) \neq 0$.

Выберем варьированные траектории $\xi^*(t)$, $x^*(t)$ следующим образом.

Положим

$$\delta\theta = \delta t = 0, \qquad v^*(t) = v(t), \qquad \delta\xi_0 = -N,$$

где N — произвольный вектор, не касательный к границе $g(x) = 0$ в точке $x(\tau)$ и направленный во вне области G. Эти данные однозначно определяют варьированную траекторию $\xi^*(t)$. Для определения варьированной траектории $x^*(t)$ мы будем считать символ $\mathfrak{a}$ пустым, а символ $\mathfrak{b}$ — содержащим единственную точку $\zeta_1 = x(\tau_1)$:

$$\mathfrak{b} = \{\zeta_1 = x(\tau_1),\ a_1(x),\ N,\ \delta\mu = 1\}.$$

Следовательно, в силу (47),

$$\delta x(\tau) = -N = \delta\xi_0,$$

т. е. условие (81) выполняется.

Для векторов, определенных формулами (78), (79), получим выражения (см. (53) и формулу (22) гл. 2):

$$\delta = -A_{\tau-\tau_1,\,0}(N) = -\sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha(\tau - \tau_1) N^\alpha, \tag{93}$$

$$\delta^* = \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{\varphi}_\alpha(\tau_2)\left(-N_*^\alpha + \int_{\tau}^{\tau_2} \left(\tilde{\psi}^\alpha(t), \Lambda(t)\right) \frac{\partial R}{\partial \mu}\, dt, \tag{94}$$

где

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \varphi_\alpha(0) N^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{n} \tilde{\varphi}_\alpha(\tau) N_*^\alpha = N.$$

Здесь через $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau - \tau_1$, обозначена фундаментальная система решений уравнения в вариациях для уравнения (76).

Через $\psi^0(t), \ldots, \psi^n(t)$ обозначим систему функций, сопряженную с $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Мы имеем:

$$-(\chi, \delta) = \sum_{\alpha=0}^{n} (\chi, \varphi_\alpha(\tau - \tau_1) N^\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha,\ \beta=0}^{n} (\chi_\beta \psi^\beta(\tau - \tau_1), \varphi_\alpha(\tau - \tau_1) N^\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{n} \chi_\alpha N^\alpha = (\xi(0), N),$$

где $\xi(0) = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \chi_\alpha \psi^\alpha(0)$ — начальное значение функции (89). Из равенства (92) следует:

$$(\chi, \delta) = (\psi^-(\tau), N). \tag{95}$$

Аналогично, равенство (94) дает:

$$(\chi^*, \delta^*) = -(\psi^+(\tau), N) + \int_\tau^{\tau_2} (\psi^+(t), \Lambda(t)) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt =$$

$$= -(\psi^+(\tau), N) - \int_\tau^{\tau_2} \lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt,$$

где $\lambda(t) = -(\psi^+(t), \Lambda(t))$. Используя выражение (42) для $\frac{\partial R}{\partial \mu}$ и интегрируя по частям, получим:

$$(\chi^*, \delta^*) = -(\psi^+(\tau), N) - \left[\lambda(t)\, a_1(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N\right)\right]\Bigg|_\tau^{\tau_2} +$$

$$+ \int_\tau^{\tau_2} \frac{d\lambda}{dt} a_1(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N\right) dt = -(\psi^+(\tau), N) +$$

$$+ \lambda(\tau) \left(\frac{\partial g(x(\tau))}{\partial x}, N\right) + \int_\tau^{\tau_2} \frac{d\lambda}{dt} a_1(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N\right) dt.$$

Складывая это равенство с (95) и учитывая неравенство (87), находим:

$$(\chi, \delta) + (\chi^*, \delta^*) = \left(\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau) + \lambda(\tau) \frac{\partial g(x(\tau))}{\partial x}, N\right) +$$

$$+ \int_\tau^{\tau_2} \frac{d\lambda}{dt} a_1(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N\right) dt \leqslant 0. \tag{96}$$

Величина

$$\int_{\tau}^{\tau_1} \frac{d\lambda}{dt} a_1(x(t)) \left(\frac{\partial g(x(t))}{\partial x}, N \right) dt$$

может быть сделана сколь угодно малой при заданном N за счет выбора малой окрестности O_{ξ_1}, входящей в определение функции $a_1(x)$, в то время как первое слагаемое равенства (96) от этой окрестности не зависит. Следовательно, для произвольного вектора N, не касательного к границе $g(x) = 0$ в точке $x(\tau)$ и направленного наружу относительно области G, справедливо неравенство

$$\left(\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau) + \lambda(\tau) \operatorname{grad} g(x(\tau)), N\right) \leqslant 0, \qquad (97)$$

которое, в силу произвольности вектора N, эквивалентно равенству

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)). \qquad (98)$$

Вектор $\psi^-(\tau) \neq 0$, так как из равенства $\psi^-(\tau) = 0$ и неравенства (88) следует неравенство $\psi^+(\tau) \neq 0$; с другой стороны, из (98) получаем соотношение

$$\psi^+(\tau) = \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)) \neq 0,$$

которое в силу соотношения $\psi(\tau_2) = \chi^*$ противоречит включению (86). При $\psi^+(\tau) = 0$ получаем:

$$\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Таким образом, теорема 24 доказана в том случае, когда $x(\tau_1)$ — внутренняя точка области G.

Пусть теперь $x(\tau_1)$ лежит на границе $g(x) = 0$. Этот случай легко сводится к рассмотренному: достаточно определить функцию $\psi_\theta^-(t)$ на отрезке $\theta \leqslant t \leqslant \tau$, где $\tau_1 < \theta$, и затем устремить точку θ к τ_1; мы получим семейство функций $\psi_\theta^-(t)$, $\theta \leqslant t \leqslant \tau$, для которых существует искомая предельная функция $\psi^-(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Замечание 1. Если участок $x(t)$, $\tau < t < \tau_2$, также принадлежит открытому ядру области G, то неравенство (97) заменится неравенством

$$\left(\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau),\ N\right) \leqslant 0,$$

из которого следует равенство

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)), \qquad \mu \geqslant 0.$$

Замечание 2. Если участок $x(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau_2$, лежит на границе $g(x) = 0$, то вектор $\operatorname{grad} g(x(\tau))$ и вектор $f(x(\tau),\ u(\tau + 0))$ ортогональны и условие скачка дает:

$$\begin{aligned}
&\left(\psi^-(\tau),\ f(x(\tau),\ u(\tau - 0))\right) = \\
&\quad = \left(\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)),\ f(x(\tau),\ u(\tau + 0))\right) = \\
&\qquad = \left(\psi^-(\tau),\ f(x(\tau),\ u(\tau + 0))\right) = \mathscr{M}\left(\psi^-(\tau),\ x(\tau)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что если система уравнений относительно u

$$\left(\psi^-(\tau),\ f(x(\tau),\ u)\right) = \mathscr{M} = 0$$

имеет единственное решение

$$u(\tau - 0) = u(\tau + 0),$$

то вектор

$$f(x(\tau),\ u(\tau - 0)) = f(x(\tau),\ u(\tau + 0))$$

касается границы $g(x) = 0$ в точке $x(\tau)$; другими словами, оптимальная траектория в точке стыка $x(\tau)$ остается гладкой.

Замечание 3. Если оптимальная траектория лежит на кусочно-гладкой границе области G (до сих пор мы рассматривали область G с гладкой границей), то уравнения всякого участка траектории, целиком лежащего на гладком куске границы, уже найдены в § 32. При переходе траектории с одного гладкого куска границы на другой выполняются условия скачка, вполне аналогичные условиям (74), (75).

§ 37. Формулировка основного результата. Примеры

Объединяя теоремы 22, 24 и принцип максимума, мы приходим к следующей теореме, дающей полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная оптимальная траектория, являющаяся решением оптимальной задачи § 31.

Теорема 25. *Пусть оптимальная траектория уравнения* (5) *целиком лежит в замкнутой области* G, *содержит конечное число точек стыка, и пусть всякий ее участок, лежащий на границе области* G, *регулярен. Тогда всякий участок траектории, лежащий в открытом ядре области* G (*за исключением, быть может, концов траектории*), *удовлетворяет принципу максимума; всякий ее участок, лежащий на границе области* G, *удовлетворяет теореме* 22; *в каждой точке стыка выполняется условие скачка* (*теорема* 24).

Пример 1

Условия скачка справедливы и для следующей оптимальной задачи.

Пусть фазовое пространство X разбито на две части X_1, X_2 гиперповерхностью $g(x) = 0$. Пусть в части X_1 уравнение движения фазовой точки имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, u),$$

а в части X_2 — вид

$$\frac{dx}{dt} = f_2(x, u).$$

Требуется выбрать такое допустимое управление, чтобы фазовая точка из начального положения $x_1 \in X_1$ попала на прямую $\Pi \subset X_2$, параллельную оси x^0, и координата x^0 конца траектории была минимальной.

Траектория движения в каждой из частей X_1, X_2 будет удовлетворять принципу максимума, а в момент перехода через границу раздела $g(x) = 0$ будет выполняться условие скачка.

При выводе условия скачка в рассматриваемом случае начальное смещение варьированной траектории должно лежать строго на границе раздела $g(x)=0$. Поэтому лемму, приведенную на стр. 333—334, невозможно использовать, и доказательство § 36 проходит лишь если ни один из векторов $f_1(x(\tau),\ u(\tau-0))$, $f_2(x(\tau),\ u(\tau+0))$ в точке стыка $x(\tau)$ не касается гиперповерхности $g(x)=0$.

Пример 2

Если изучается обычная вариационная задача, то из условия скачка непосредственно следуют известные условия преломления экстремалей. В качестве примера выведем здесь эти условия для простейшей вариационной задачи.

Пусть плоскость переменных x, y делится линией $g(x,\ y)=0$ на две части X_1, X_2 и пусть заданы две точки $(x_1,\ y_1)\in X_1$, $(x_2,\ y_2)\in X_2$. Требуется соединить эти точки непрерывной кусочно-гладкой линией $y=y(x)$ таким образом, чтобы достигался минимум функционала

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx,$$

где (f_1, f_2 — гладкие функции)

$$F(x,\ y,\ y')=\begin{cases} f_1(x,\ y,\ y') & \text{при} \quad (x,\ y)\in X_1, \\ f_2(x,\ y,\ y') & \text{при} \quad (x,\ y)\in X_2. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$x^0=\int\limits_{x_1}^{x} F(x,\ y,\ y')\,dx, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad u=y'.$$

Область управления U — открытое множество числовой прямой.

Принцип максимума записывается следующим образом (легко доказать, что $\psi_0\neq 0$ и, следовательно, можно положить $\psi_0=-1$):

$$\frac{dx^0}{dt}=F(x,\ y,\ y'), \quad \frac{dx^1}{dt}=1, \quad \frac{dx^2}{dt}=u=y';$$

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0, \quad \frac{d\psi_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d\psi_2}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y};$$

$$\mathscr{H}=-F(x,\ y,\ y')+\psi_1+\psi_2 y'=\max=0.$$

Условия $\mathscr{H} = \max$ и $\mathscr{H} = 0$ соответственно дают:

$$\psi_2 = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad \psi_1 = F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'.$$

Из условия скачка $\psi^+ = \psi^- + \mu \operatorname{grad} g(x, y)$ следует:

$$f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y'}(y^+)' = f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y'}(y^-)' + \mu N^1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial y'} + \mu N^2,$$

где (N^1, N^2) — вектор нормали к линии $g(x, y) = 0$ в точке перелома траектории. Обозначим через Y' тангенс угла наклона касательной к кривой $g = 0$ в точке перелома. Имеем:

$$\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial y'} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y'}}{f_2 - f_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y'}(y^-)' - \dfrac{\partial f_2}{\partial y'}(y^+)'} = -\frac{1}{Y'},$$

откуда получаем известную формулу (см. Гюнтер Н. М., «Курс вариационного исчисления», М. — Л., 1941)

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y'}(Y' - (y^-)') = f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y'}(Y' - (y^+)').$$

Пример 3

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую геометрическую задачу. В n-мерном евклидовом пространстве X переменной $x = (x^1, \ldots, x^n)$ задана замкнутая область B неравенством $g(x) \leqslant 0$, причем граница

$$g(x) = 0 \tag{99}$$

области B является гладкой регулярной поверхностью с непрерывно меняющейся кривизной, т. е. функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и вектор $\operatorname{grad} g(x)$ нигде на поверхности (99) в нуль не обращается. В области B заданы две точки x_0, x_1. Найти в области B кривую C наименьшей длины, соединяющую точки x_0 и x_1.

Мы покажем, что из теоремы 25 вытекает следующий геометрически очевидный результат. Пусть кривая C наименьшей длины состоит из нескольких участков, попеременно расположенных в открытом ядре области B

(кроме, быть может, концов участка) и на границе (99). Тогда участки, лежащие в открытом ядре области B, являются отрезками прямых; участки, лежащие на границе (99), являются геодезическими на поверхности (99), причем вектор главной нормали кривой C на этих участках направлен во вне области B; наконец, в точках стыка двух соседних участков прямолинейный участок, проходящий в открытом ядре области B, касается поверхности (99). Таким образом, линия C не имеет угловых точек.

Для доказательства рассмотрим следующую оптимальную задачу. Задана система уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где управляющий вектор $u = (u^1, \ldots, u^n)$ подчинен условию

$$(u, u) = \sum_{i=1}^{n} (u^i)^2 \leqslant 1,$$

т. е. областью управления U является единичный шар. Требуется найти лежащую в B оптимальную по быстродействию траекторию, соединяющую точки x_0 и x_1.

Пусть $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, — оптимальная траектория, являющаяся решением этой задачи и имеющая конечное число участков, попеременно расположенных в открытом ядре области B и на ее границе. Через $u(t)$ обозначим соответствующее оптимальное управление. Из условия максимума (теоремы 2 и 22) непосредственно вытекает, что $|u(t)| \equiv 1$, и потому параметр t является *длиной дуги* на линии $x(t)$. Из этого следует, что линия $x(t)$ является решением поставленной геометрической задачи.

Докажем теперь сформулированные выше свойства кривой C. Тот факт, что расположенные в открытом ядре участки кривой $x(t)$ являются прямолинейными отрезками, непосредственно вытекает из теоремы 2.

Рассмотрим теперь участок, целиком расположенный на границе области B. Область управления U определяется одним соотношением

$$q(u) = (u, u) - 1 \leqslant 0. \tag{100}$$

Далее, функция $p(x, u)$ (см. (6)) имеет вид

$$p(x, u) = (\operatorname{grad} g(x), u). \tag{101}$$

На рассматриваемом участке линии $x(t)$ выполняется соотношение

$$p(x, u) = (\operatorname{grad} g(x), u) = 0. \tag{102}$$

Система уравнений для переменных ψ_i (см. (10)) имеет вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \lambda \frac{\partial p}{\partial x^i} = \lambda \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 g(x(t))}{\partial x^i \, \partial x^\alpha} u^\alpha = \lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial g(x(t))}{\partial x^i},$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

или иначе

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda \frac{d}{dt} \operatorname{grad} g(x(t)). \tag{103}$$

Мы имеем:

$$\mathscr{H} = \psi_0 + (\psi, u), \tag{104}$$

и потому $\psi_0 \neq 0$ (в противном случае было бы $\psi \neq 0$ и тогда максимальное значение величины (ψ, u) было бы отличным от нуля, что противоречит соотношению (11)). Следовательно, мы можем положить $\psi_0 = -1$ и условие максимума (11) принимает вид

$$(\psi, u) = \max = 1. \tag{105}$$

Далее, в силу (100),

$$\operatorname{grad} q(u) = 2u, \tag{106}$$

и потому (см. (104), (8), (101), (106))

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = \psi = \lambda \frac{\partial p}{\partial u} + \nu \frac{\partial q}{\partial u} = \lambda \operatorname{grad} g(x) + 2\nu u. \tag{107}$$

Умножая полученное соотношение $\psi = \lambda \operatorname{grad} g(x) + 2\nu u$ скалярно на u, получаем, в силу (105), (102),

$$1 = (\psi, u) = \lambda (u, \operatorname{grad} g(x)) + 2\nu = 2\nu.$$

Таким образом, формула (107) принимает вид

$$\psi = \lambda \operatorname{grad} g(x) + u,$$

и потому (см. (103))

$$\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{grad} g(x(t))+\frac{du}{dt}=0.$$

Это означает, что вектор

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{du(t)}{dt}=-\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{grad} g(x(t))$$

коллинеарен нормали к поверхности (99), и потому линия $x(t)$ на рассматриваемом участке является геодезической, причем вектор ее главной нормали $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ направлен во вне области B (см. условие в) в теореме 22).

Наконец, из условий скачка нетрудно вывести, что кривая $x(t)$ не имеет угловых точек.

ГЛАВА 7

ОДНА СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предыдущие главы были посвящены решению задачи об оптимальном переводе управляемого объекта из одного заданного положения в другое заданное положение (или на заданное многообразие). Эту задачу можно трактовать также как задачу об оптимальном достижении управляемым объектом другого, неподвижного объекта.

Однако в технике в ряде случаев возникает другая задача — задача *преследования* управляемым объектом другого, *движущегося* объекта. При этом о характере движения второго объекта можно делать самые различные предположения. Можно, например, считать, что второй объект также является управляемым (ср. § 28). Пусть при этом фазовое движение первого объекта x описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, u^1, u^2, \ldots, u^r), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а движение второго объекта y — системой уравнений

$$\dot{y}^i = g^i(y^1, y^2, \ldots, y^n, v^1, v^2, \ldots, v^s), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где u^i — управляющие параметры первого объекта, v^i — управляющие параметры второго объекта, а x и y — векторы одного и того же фазового пространства X.

Тогда можно ставить следующую задачу. Зная технические возможности объекта y (т. е. соответствующую систему дифференциальных уравнений) и положение объекта y в каждый момент времени t, научиться выбирать управление u объектом x в каждый момент времени t таким образом, чтобы объект x достиг объекта y в кратчайшее время (или оптимально в каком-либо другом смысле); при этом — что очень существенно — не должно предполагаться известным управление объектом y в моменты времени, следующие за t.

В такой постановке задача преследования пока не решена.

В настоящей главе мы решаем несколько иную задачу преследования. Именно, мы считаем, что известен лишь вероятностный закон поведения «убегающего» объекта y, причем этот закон предполагается марковским и описывается уравнением типа Фокера — Планка — Колмогорова.

При решении этой задачи будут использованы некоторые понятия и факты теории вероятностей. В §§ 38 и 40 мы сообщаем эти факты, не всегда приводя, однако, полные доказательства, а ограничиваясь в основном небольшими пояснениями.

§ 38. Понятие о марковском процессе. Дифференциальное уравнение Колмогорова

Пусть в n-мерном фазовом пространстве R *случайно* движется некоторая точка, причем если известно ее положение x в момент σ, то однозначно определена вероятность $P(\sigma, x, \tau, E)$ ее нахождения в любом измеримом подмножестве E пространства R в произвольный момент $\tau > \sigma$. В таком случае процесс движения случайной точки называют процессом без последействия или *процессом марковского типа*. Полную характеристику движения случайной точки дает функция

$$p(\sigma, x, \tau, y), \tag{1}$$

равная плотности вероятности $P(\sigma, x, \tau, E)$ в точке y. Функция $p(\sigma, x, \tau, y)$ удовлетворяет, очевидно, следующему соотношению:

$$\int p(\sigma, x, \tau, y)\, dy = 1 \tag{2}$$

(здесь, как и всюду в дальнейшем, интегрирование производится по всему пространству R, если область интегрирования специально не указана). Другое соотношение, смысл которого также ясен, носит название *тождества Маркова*

$$p(\sigma, x, \tau, y) = \int p(\sigma, x, s, z)\, p(s, z, \tau, y)\, dz. \qquad (3)$$

Случайный процесс называется *непрерывным*, если за малые промежутки времени лишь с малой вероятностью координаты случайной точки могут получить заметные по величине приращения. Мы потребуем от марковского процесса несколько более сильной непрерывности, а именно: каково бы ни было положительное число δ, имеет место соотношение

$$\lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{|y-x| \geqslant \delta} p(\sigma - \Delta\sigma, x, \sigma, y)\, dy = 0. \qquad (4)$$

Мы сейчас выведем дифференциальное уравнение, которому (при выполнении некоторых дополнительных условий) удовлетворяет функция $p(\sigma, x, \tau, y)$. Это уравнение впервые было получено А. Н. Колмогоровым и носит название *уравнения Колмогорова*.

Предположим, что:

а) частные производные

$$\frac{\partial p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial^2 p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i\, \partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

существуют и непрерывны для любых σ, x, $\tau > \sigma$, y;

б) каково бы ни было $\delta > 0$, существуют пределы

$$\lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{|y-x| < \delta} (y^i - x^i)\, p(\sigma - \Delta\sigma, x, \sigma, y)\, dy = \\ = b^i(\sigma, x), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (5)$$

$$\lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{|y-x| < \delta} (y^i - x^i)(y^j - x^j)\, p(\sigma - \Delta\sigma, x, \sigma, y)\, dy = \\ = 2a^{ij}(\sigma, x), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6)$$

причем сходимость в соотношениях (5) и (6) равномерна относительно x.

Покажем, что *в этих предположениях функция $p(\sigma, x, \tau, y)$ как функция первой пары аргументов удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка параболического типа (уравнению Колмогорова)*

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma}+\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(\sigma,\ x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\,\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma,\ x)\frac{\partial p}{\partial x^i}=0. \qquad (7)$$

Доказательство. В силу тождества Маркова (3) мы имеем

$$p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \tau,\ y)=\int p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \sigma,\ z)\,p(\sigma,\ z,\ \tau,\ y)\,dz. \qquad (8)$$

Используя соотношение (8) и тождество

$$\int p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \sigma,\ z)\,dz=1, \qquad (9)$$

получаем:

$$\begin{aligned} p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \tau,\ y)-p(\sigma,\ x,\ \tau,\ y)&= \\ &=\int p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \sigma,\ z)\,p(\sigma,\ z,\ \tau,\ y)\,dz- \\ &\quad-p(\sigma,\ x,\ \tau,\ y)\int p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \sigma,\ z)\,dz= \\ =\int [p(\sigma,\ z,\ \tau,\ y)-p(\sigma,\ x,\ \tau,\ y)]&\,p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \sigma,\ z)\,dz. \end{aligned}$$

Разбивая интеграл по пространству R на два интеграла соответственно по областям $|z-x|<\delta$ и $|z-x|\geqslant\delta$ и раскладывая разность $p(\sigma, z, \tau, y)-p(\sigma, x, \tau, y)$ по степеням z^i-x^i, находим

$$\begin{aligned} \frac{p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \tau,\ y)-p(\sigma,\ x,\ \tau,\ y)}{\Delta\sigma}&= \\ =\frac{1}{\Delta\sigma}\int\limits_{|z-x|\geqslant\delta}&[p(\sigma,\ z,\ \tau,\ y)-p(\sigma,\ x,\ \tau,\ y)]\times \\ &\times p(\sigma-\Delta\sigma,\ x,\ \sigma,\ z)\,dz+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p(\sigma,\ x,\ \tau,\ y)}{\partial x^i}\times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{|z-x|<\delta} (z^i - x^i)\, p(\sigma - \Delta\sigma, x, \sigma, z)\, dz +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{|z-x|<\delta} (z^i - x^i)(z^j - x^j) \times$$

$$\times p(\sigma - \Delta\sigma, x, \sigma, z)\, dz + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i \partial x^j} \times$$

$$\times \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{|z-x|<\delta} o[|z-x|^2]\, p(\sigma - \Delta\sigma, x, \sigma, z)\, dz. \qquad (10)$$

Перейдем теперь в соотношении (10) к пределу при $\Delta\sigma \to 0$. Первое слагаемое правой части, в силу (4), имеет предел, равный нулю; предел второго слагаемого равен (см. (5))

$$\sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, x) \frac{\partial p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i};$$

третье слагаемое, ввиду (6), в пределе оказывается равным

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, x) \frac{\partial^2 p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Наконец, последнее слагаемое стремится к нулю при $\delta \to 0$. Так как, однако, левая часть равенства (10) от δ не зависит, то предел правой части равен

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, x) \frac{\partial^2 p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, x) \frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

Отсюда мы заключаем, что и у левой части равенства (10) существует при $\Delta\sigma \to 0$ предел, равный

$$-\frac{\partial p(\sigma, x, \tau, y)}{\partial \sigma}.$$

Итак, функция $p(\sigma, x, \tau, y)$ является решением уравнения (7).

Оказывается, что $p(\sigma, x, \tau, y)$ *является фундаментальным решением уравнения* (7). Это значит, что решение $u = u(\sigma, x)$ уравнения (7), удовлетворяющее наперед заданному начальному условию

$$u(\sigma, x) \xrightarrow[\sigma \to \tau]{} F(x), \tag{11}$$

где $F(x)$ — заданная функция n переменных $x^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n$, выражается по формуле

$$u(\sigma, x) = \int p(\sigma, x, \tau, y) F(y)\, dy. \tag{12}$$

Действительно, дифференцируя интеграл в правой части соотношения (12) по параметрам σ и x и используя уравнение (7), мы получаем соотношение

$$\frac{\partial u(\sigma, x)}{\partial \sigma} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, x) \frac{\partial^2 u(\sigma, x)}{\partial x^i\, \partial x^j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, x) \frac{\partial u(\sigma, x)}{\partial x^i} = 0,$$

которое показывает, что функция $u(\sigma, x)$ является решением уравнения (7).

Формула (11) доказывается следующим образом. Разобьем интеграл по пространству R, стоящий в правой части равенства (12), на два интеграла соответственно по областям $|y - x| < \delta$ и $|y - x| \geqslant \delta$. Так как при $|y - x| \geqslant \delta$ ввиду непрерывности процесса, очевидно, справедливо соотношение

$$p(\sigma, x, \tau, y) \xrightarrow[\sigma \to \tau]{} 0,$$

то

$$\lim_{\sigma \to \tau} \int p(\sigma, x, \tau, y) F(y)\, dy = \\ = \lim_{\sigma \to \tau} \int\limits_{|x-y| < \delta} p(\sigma, x, \tau, y) F(y)\, dy.$$

Принимая во внимание соотношение (2) и учитывая, что предел слева не зависит от δ, заключаем, что

$$\lim_{\sigma\to\tau}\int p(\sigma,\,x,\,\tau,\,y)\,F(y)\,dy=F(x),$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще одно важное свойство функции $p(\sigma, x, \tau, y)$, нужное нам в дальнейшем. Пусть требуется решить неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}+\sum_{i,\,j=1}^{n}a^{ij}(\sigma,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(\sigma,x)\frac{\partial u}{\partial x^i}=P(\sigma,\,x) \quad (13)$$

при нулевом начальном значении искомой функции. Оказывается, что *если $p(\sigma, x, \tau, y)$ — фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения, то искомое решение дается формулой*

$$u(\sigma,\,x,\,\tau)=-\int_{\sigma}^{\tau}ds\int p(\sigma,\,x,\,s,\,y)\,P(s,\,y)\,dy. \quad (14)$$

Доказательство получается непосредственным дифференцированием.

§ 39. Точная постановка статистической задачи

В этой главе фазовые координаты управляемой точки мы будем обозначать через $z^1, z^2, \ldots, z^n$. Таким образом, движение точки z в пространстве R описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot z^i=f^i(z^1,\,\ldots,\,z^n,\,u^1,\,\ldots,\,u^r),\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,n, \quad (15)$$

где $u^1, u^2, \ldots, u^r$ — управляющие параметры. Как и раньше, функции $f^i(z, u)$ мы будем считать непрерывно зависящими от всех переменных и непрерывно дифференцируемыми по $z^1, z^2, \ldots, z^n$.

Предположим, что в пространстве R *случайно* движется фазовая точка Q, причем так, что процесс ее движения в пространстве R есть *марковский процесс*, удовлетворяющий условиям усиленной непрерывности. Как мы видели в предыдущем параграфе, вероятностную характеристику этого процесса дает функция $p(\sigma, x, \tau, y)$, которую мы будем называть *плотностью* перехода случайной точки Q. Плотность перехода является фундаментальным решением уравнения (7). В дальнейшем мы будем считать, что *процесс движения случайной точки задан функцией* $p(\sigma, x, \tau, y)$.

Относительно коэффициентов уравнения (7) мы здесь сделаем некоторые предположения. Именно, мы будем считать, что:

1) коэффициенты $a^{ij}(\sigma, x)$, $b^i(\sigma, x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, определены, непрерывны и ограничены при $\sigma > 0$ и при любом $x \in R$;

2) все собственные значения матрицы $\| a^{ij}(\sigma, x) \|$ при этих значениях аргументов ограничены сверху и снизу положительными константами.

Пусть вместе с управляемой точкой z в пространстве R движется некоторая ее окрестность Σ_z, например, шар или область, ограниченная произвольной гладкой поверхностью, гладко меняющейся вместе с z. Если задан закон управления точкой z, т. е. управляющий параметр u задан как кусочно-непрерывная функция $u = u(t)$ времени t, то система дифференциальных уравнений (15) однозначно определяет непрерывное движение точки z в пространстве R. Следовательно, если заданы начальные положения управляемой точки z и случайной точки Q, то однозначно определяется вероятность встречи точки Q с окрестностью Σ_z на конечном отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ или на бесконечном отрезке времени $\sigma \leqslant t < < \infty$ и т. п. Эта вероятность является, таким образом, *функционалом* над управлением $u(t)$. Естественно возникает задача о таком выборе управления $u(t)$ точкой z, при котором этот функционал достигает максимального значения.

Чтобы точно сформулировать задачу, введем в рассмотрение неотрицательную и не превосходящую единицы функцию $h(t)$, определенную при $0 \leqslant t < \infty$. Обозначим, далее, через $\psi_u(\sigma, x, \tau)$ вероятность того, что случайная точка Q, находящаяся в момент времени σ в положении x, на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ встретится с окрестностью Σ_z управляемой точки z (предполагается, конечно, что начальное положение точки z, равное $z(\sigma)$, дано). Ставится следующая задача: *выбрать управление $u(t)$ точкой z таким образом, чтобы функционал*

$$J = \int_0^\infty h(s) \frac{\partial}{\partial s} [\psi_u(\sigma, x, s)] \, ds \tag{16}$$

достигал максимального значения.

Функция $h(t)$ определяет постановку оптимальной задачи; если, например,

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \sigma \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

то

$$J = \psi_u(\sigma, x, \tau),$$

т. е. функционал (16) есть просто вероятность встречи окрестности Σ_z с точкой Q на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$.

Управление $u(t)$ и соответствующую ему траекторию $z(t)$ системы (15), обеспечивающие экстремум функционалу (16), будем называть *оптимальными. Решение задачи, следовательно, сводится к вычислению функционала* (16) *и последующему применению принципа максимума.*

Конечно, функционал (16) зависит от размеров и формы окрестности Σ_z управляемой точки z. Как мы увидим в следующем параграфе, для его вычисления надо решать краевую задачу для параболического уравнения в частных производных (7). При этом нас будет интересовать не факт существования решения, а эффективная (хотя бы приближенная) формула для решения. Оказывается, что такую формулу можно получить, если окрестность Σ_z считать м а л о й. Но задача «накрыть» малой управляемой окрестностью случайную точку Q как раз и является естественной.

Таким образом, в последующем, начиная с § 41 настоящей главы, окрестность Σ_z мы будем считать малой. Для простоты мы будем считать, что Σ_z есть n-мерный шар радиуса ε с центром в точке z. Однако внимательно-ный читатель увидит, что наши рассуждения и сам результат почти не изменятся, если под Σ_z понимать произвольную область малого «радиуса», ограниченную гладкой поверхностью, гладко меняющейся вместе с z.

§ 40. Сведение вычисления функционала J к решению краевой задачи для уравнения Колмогорова

Перед тем как указать подход к вычислению функционала (16), сделаем одно общее замечание, относящееся к произвольному марковскому процессу. Выделим в пространстве R фиксированную область Γ, ограниченную $(n-1)$-мерной гладкой поверхностью S. Обозначим теперь через $q(\sigma, x, \tau, y)$ плотность вероятности того, что случайная точка, находящаяся в момент σ в положении x, окажется в момент τ в положении y, не заходя при этом на протяжении всего отрезка времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ в область Γ.

Оказывается, что всюду вне области Γ функция $q(\sigma, x, \tau, y)$ удовлетворяет тому же уравнению (7), что и функция $p(\sigma, x, \tau, y)$, и следующим начальному и граничному условиям:

$$\lim_{\sigma\to\tau} \int\limits_{R-\Gamma} q(\sigma, x, \tau, y)\, dy = \lim_{\sigma\to\tau} \int\limits_{R-\Gamma} p(\sigma, x, \tau, y)\, dy = 1, \tag{17}$$

$$\int\limits_{R-\Gamma} q(\sigma, x, \tau, y)\, dy \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \in S. \tag{18}$$

Строгое доказательство этого факта можно найти в специальной литературе по теории вероятностей. Мы приведем здесь лишь наводящие соображения, вполне, однако, достаточные для того, чтобы читатель уяснил себе справедливость сформулированного предложения.

Соотношение (17) довольно очевидно.

Справедливость соотношения (18) будет достаточно ясной, если процесс движения случайной точки Q представлять себе как броуновское движение частицы (такая модель заключает в себе основные черты всякого марковского процесса). Если частица Q находится на границе мысленно выделенной в сосуде области Γ, то вероятность ее захода в область Γ за время $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ равна единице. Этот факт и выражает соотношение (18).

Остается убедиться в том, что функция $q(\sigma, x, \tau, y)$ всюду вне области Γ удовлетворяет уравнению (7). Для этого достаточно вновь внимательно просмотреть вывод уравнения (7), данный в § 38. Весь этот вывод базировался на тождестве Маркова (3), которое, очевидно, справедливо и для функции $q(\sigma, x, \tau, y)$. Кроме тождества Маркова, было также использовано соотношение (9). В нашем случае

$$\int\limits_{R-\Gamma} q(\sigma-\Delta\sigma, x, \sigma, y)\,dy \neq 1. \tag{19}$$

Однако из условия усиленной непрерывности (4) нетрудно вывести соотношение

$$\int\limits_{R-\Gamma} q(\sigma-\Delta\sigma, x, \sigma, y)\,dy = 1 + o(\Delta\sigma), \tag{20}$$

которое и дает требуемый результат.

До сих пор область Γ мы считали фиксированной. Пусть теперь область Γ не фиксирована, а движется с течением времени, т. е. имеется однопараметрическое семейство областей Γ_t. Обозначим через $q(\sigma, x, \tau, y)$ плотность вероятности случайной точки Q, находящейся в момент σ в положении x, быть в момент τ в положении y, не встречаясь на протяжении времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ с движущейся областью Γ_t. Тогда, очевидно, функция

$$\int q(\sigma, x, \tau, y)\,dy \tag{21}$$

является решением уравнения (7) и удовлетворяет следующему граничному условию:

$$\int q(\sigma, x, \tau, y)\,dy \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \in S_\sigma. \tag{22}$$

Теперь мы можем указать подход к вычислению функционала (16). Пусть движущаяся область Γ_t представляет собой окрестность управляемой точки $z(t)$. В соответствии со сказанным в § 39 мы будем обозначать ее через $\Sigma_{z(t)}$. Положим

$$\psi(\sigma, x, \tau) = 1 - \int q(\sigma, x, \tau, y)\, dy. \qquad (23)$$

Так как уравнение (7) линейно, то функция $\psi(\sigma, x, \tau)$ по переменным σ и x удовлетворяет уравнению (7). Далее, из (17) и (22) следует, что начальное значение функции $\psi(\sigma, x, \tau)$ (при $\sigma = \tau$) равно нулю, а краевое значение на границе окрестности $\Sigma_{z(\sigma)}$ равно единице:

$$\left.\begin{aligned} \psi(\tau, x, \tau) &= 0, \\ \psi(\sigma, x, \tau)\big|_{S_\sigma} &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Непосредственно из определения следует, что функция $\psi(\sigma, x, \tau)$ представляет собой вероятность того, что случайная точка Q, находящаяся в момент времени σ в положении x, на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ будет «накрыта» окрестностью $\Sigma_{z(t)}$ управляемой точки z. Таким образом, функция $\psi(\sigma, x, \tau)$, определенная формулой (23), совпадает с функцией ψ_u, которая фигурирует в функционале (16). Следовательно, для вычисления функционала (16) мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i\, \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, x) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0 \qquad (25)$$

со следующими начальным и граничным условиями:

$$\psi(\sigma, x, \tau) \xrightarrow[\sigma \to \tau]{} 0, \qquad (26)$$

$$\psi(\sigma, x, \tau) \to 1 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \in S_\sigma. \qquad (27)$$

Как мы уже говорили раньше, мы будем решать эту задачу для случая, когда окрестность Σ_z управляемой точки z представляет собой шар радиуса ε. Мы увидим, что в этом случае решение задачи (25), (26), (27) представляется в виде

$$\psi(\sigma, x, \tau) = \varepsilon^{n-2} \Psi(\sigma, x, \tau) + o(\varepsilon^{n-2}), \qquad (28)$$

и вычислим функционал $\varepsilon^{n-2}\Psi(\sigma, x, \tau)$, представляющий собой главную часть вероятности $\psi(\sigma, x, \tau)$. Отметим сразу, что формула (28) справедлива лишь при $n > 2$. До конца настоящей главы мы предполагаем, что размерность фазового пространства R больше двух: $n > 2$.

§ 41. Вычисление функционала I в случае, когда уравнение Колмогорова имеет постоянные коэффициенты

В этом параграфе вероятность $\psi(\sigma, x, \tau)$ и, следовательно, функционал (16) будут приближенно вычислены для одного важного частного случая, а именно, для случая, *когда уравнение* (25) *имеет постоянные коэффициенты*. В процессе вычисления будут использованы некоторые факты из теории интегральных уравнений, а также понятие потенциала двойного слоя. Все это читатель может найти в учебниках по теории дифференциальных уравнений с частными производными, например, в книге: С. Л. Соболев, «Уравнения математической физики», Гостехиздат, М., 1954. В соответствующих местах мы приводим нужные определения и формулировки используемых теорем.

Итак, мы будем решать уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\, \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0 \tag{29}$$

(где a^{ij}, b^i — постоянные коэффициенты) при начальных и граничных условиях (26), (27), которые в дальнейшем мы будем записывать в виде

$$\psi(\tau, x, \tau) = 0, \tag{30}$$

$$\psi(\sigma, x, \tau)|_{S_\sigma} = 1; \tag{31}$$

через S_t мы обозначаем сферу радиуса ε с центром в точке $z(t)$.

Прежде всего перейдем от этой задачи к задаче с граничным условием на сфере радиуса ε с центром в начале координат. Для этой цели в пространстве (z, t) введем новые координаты по формулам

$$z = \xi + z(t), \qquad \sigma \leqslant t \leqslant s, \tag{32}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + z(\sigma), \\ y &= \eta + z(s). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

При таком преобразовании координат сфера S_σ перейдет в сферу S_ε, определяемую уравнением

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots + (\xi^n)^2 = \varepsilon^2. \qquad (34)$$

Положим

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau) = \psi(\sigma, \xi + z(\sigma), \tau). \qquad (35)$$

Для функции $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ сразу же получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \sum_{i=1}^{n} [b^i - z^{i\prime}(\sigma)] \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} = 0 \qquad (36)$$

и условия

$$\varphi(\tau, \xi, \tau) = 0, \qquad (37)$$

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau)|_{S_\varepsilon} = 1. \qquad (38)$$

Для того чтобы решить уравнение (36) при условиях (37), (38), нужны некоторые вспомогательные построения.

Нашим первым шагом будет построение некоторого специального решения уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \sigma} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = 0 \qquad (39)$$

с начальным условием

$$\varphi_0(\tau, \xi, \tau) = 0. \qquad (40)$$

От координат $\xi^1, \ldots, \xi^n$ перейдем специальным линейным преобразованием к координатам $\bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n$

$$\xi^1, \ldots, \xi^n \rightleftarrows \bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n, \qquad (41)$$

в которых уравнение (39) имеет вид

$$\frac{\partial \bar\varphi_0}{\partial \sigma} + \Delta \bar\varphi_0 = 0, \qquad (42)$$

где Δ — оператор Лапласа. При таком преобразовании координат сфера S_ε перейдет, очевидно, в эллипсоид $\bar S_\varepsilon$ с уравнением

$$\lambda^1 (\bar\xi^1)^2 + \ldots + \lambda^n (\bar\xi^n)^2 = \varepsilon^2, \qquad (43)$$

где
$$\lambda^1, \ldots, \lambda^n \tag{44}$$
— собственные значения матрицы (a^{ij}).

Докажем сначала следующее предложение.

Лемма 1. *Исчезающее в бесконечности решение внешней задачи Дирихле для уравнения*
$$\Delta\bar{v} \equiv \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{\xi}^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{\xi}^{n^2}} = 0 \tag{45}$$
с граничным условием на эллипсоиде (43)
$$\bar{v}(\bar{\xi})\,|_{\bar{S}_\varepsilon} = 1 \tag{46}$$
имеет вид
$$\bar{v}(\bar{\xi}) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon), \tag{47}$$
где α — положительная константа, однозначно определяемая размерами эллипсоида (43); *$r(\bar{\xi})$ — расстояние от точки $\bar{\xi}$ до начала координат; функция $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ при $|\bar{\xi}| < 1$ удовлетворяет следующим неравенствам:*
$$|\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)| < M\frac{\varepsilon^{n-1}}{r^{n-1}(\bar{\xi})}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}^i}\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)\right| < M\frac{\varepsilon^{n-1}}{r^{n}(\bar{\xi})}, \tag{48}$$
$$i = 1, \ldots, n \quad (M = \text{const}).$$

При доказательстве этой леммы нам понадобится понятие *потенциала двойного слоя*. Напомним читателю определение этого потенциала, а также некоторые его свойства.

Пусть S — гладкая замкнутая поверхность, расположенная в n-мерном пространстве, и $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — точка вне поверхности S. Координаты точек, лежащих на поверхности S, мы всегда будем обозначать через $y^1, \ldots, y^n$. Положим
$$\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2}. \tag{49}$$
Функция
$$\bar{\pi}(x) = \int\limits_S \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right)}{\partial\vec{n}}\,\mu(y)\,dS, \tag{50}$$

где $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ обозначает производную по внешней нормали к поверхности S, называется *потенциалом двойного слоя*, создаваемым поверхностью S в точке x, а функция $\mu(y)$ — его *плотностью*. Легко доказываются следующие свойства потенциала двойного слоя:

1. Всюду вне поверхности S функция $\bar{\pi}(x)$ является *гармонической*:

$$\Delta\bar{\pi}(x) = 0. \tag{51}$$

2. Потенциал двойного слоя имеет смысл, если вместо x подставить любую точку y поверхности S. Величину функции $\bar{\pi}(x)$ на поверхности S будем обозначать через $\bar{\pi}_0(y)$.

3. Функция $\bar{\pi}(x)$ имеет предел при стремлении точки x к любой точке поверхности S *извне*. Если этот предел обозначать через $\bar{\pi}_e(y)$, то имеет место формула

$$\bar{\pi}_e(y) = -\gamma(n)\mu(y) + \bar{\pi}_0(y), \quad \gamma(n) = \text{const} > 0. \tag{52}$$

4. Обозначим через $\varphi(\vec{n}, \rho)$ угол, составленный направлением внешней нормали в произвольной точке y поверхности S с радиусом-вектором ρ, проведенным из этой точки y в точку x. Тогда потенциал двойного слоя может быть представлен в виде

$$\bar{\pi}(x) = (n-2)\int_S \mu(y)\frac{\cos\varphi}{\rho^{n-1}}\,dS.$$

Все эти свойства непосредственно выводятся из определения потенциала двойного слоя. Доказательства читатель может провести сам или прочесть их в каком-либо учебнике по теории уравнений с частными производными, например, в цитированной книге С. Л. Соболева.

Доказательство леммы 1. Будем искать решение уравнения (45) с граничным условием (46) в следующем виде:

$$\bar{v}(\bar{\xi}) = \varepsilon^{n-2}\frac{a}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}), \tag{53}$$

где α — пока неопределенная константа, а $\bar{\pi}(\bar{\xi})$ — потенциал двойного слоя, создаваемый эллипсоидом (43) в точке $\bar{\xi}$ с неизвестной пока плотностью $\mu(\bar{\eta})$ (через $\bar{\eta}$ мы обозначаем координаты точек, лежащих на эллипсоиде S_ε). Так как $\bar{\pi}(\bar{\xi})$, в силу свойства 1, является решением уравнения (45), а функция

$$\frac{1}{r^{n-2}(\bar{\xi})}$$

также удовлетворяет уравнению (45) (что легко проверить простым дифференцированием), то функция $\bar{v}(\bar{\xi})$, определяемая формулой (53), удовлетворяет уравнению (45).

Граничное условие (46) дает нам

$$\bar{\pi}_e(\bar{\eta}) = 1 - \alpha\frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})} \tag{54}$$

для любого $\bar{\eta} \in \bar{S}_\varepsilon$. Но, в силу свойства 3, по формуле (52) имеем:

$$-\gamma(n)\mu(\bar{\eta}) + \bar{\pi}_0(\bar{\eta}) = 1 - \alpha\frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})}. \tag{55}$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} K(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1) &= \frac{1}{\gamma(n)}\frac{(n-2)\cos\varphi}{\rho^{n-1}(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)}, \quad \bar{\eta}, \bar{\eta}_1 \in \bar{S}_\varepsilon, \\ \Phi(\bar{\eta}) &= \frac{1}{\gamma(n)}\left[\alpha\frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})} - 1\right], \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

получаем неоднородное интегральное уравнение для неизвестной плотности $\mu(\bar{\eta})$:

$$\mu(\bar{\eta}) = \int_{\bar{S}_\varepsilon} K(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)\mu(\bar{\eta}_1)\,d\bar{S}_\varepsilon + \Phi(\bar{\eta}). \tag{57}$$

Уравнение (57) является *интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Для таких уравнений имеет место

Теорема Фредгольма. *Для разрешимости уравнения* (57) *необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален ко всем собственным* *функциям сопряженного однородного интегрального уравнения*

$$\nu(\bar{\eta}) = \int\limits_{\bar{S}_\varepsilon} K(\bar{\eta}_1, \bar{\eta})\, \mu(\bar{\eta}_1)\, d\bar{S}_\varepsilon. \tag{58}$$

Доказательство этой теоремы читатель может найти в уже цитированной книге. Там же доказано, что если ядро $K(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)$ определяется формулой (56), то уравнение (58) имеет *только одну собственную функцию*. Обозначим эту функцию через $\nu_0(\bar{\eta})$ и будем считать ее известной.

Условие ортогональности, о котором идет речь в формулировке теоремы Фредгольма, дает возможность определить значение константы α, при котором уравнение (57) разрешимо относительно $\mu(\bar{\eta})$.

В самом деле, запишем это условие ортогональности:

$$\frac{1}{\gamma(n)} \int\limits_{\bar{S}_\varepsilon} \left[\alpha \frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})} - 1\right] \nu_0(\bar{\eta})\, d\bar{S}_\varepsilon = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\int\limits_{\bar{S}_\varepsilon} \nu_0(\bar{\eta})\, d\bar{S}_\varepsilon}{\varepsilon^{n-2} \int\limits_{\bar{S}_\varepsilon} \frac{\nu_0(\bar{\eta})}{r^{n-2}(\bar{\eta})}\, d\bar{S}_\varepsilon}. \tag{59}$$

В этой формуле величина α, казалось бы, зависит от ε. Зависимость эта, однако, лишь кажущаяся. В самом деле, обозначим через $\bar{S}$ эллипсоид

$$\lambda^1(\bar{\eta}^1)^2 + \lambda^2(\bar{\eta}^2)^2 + \ldots + \lambda^n(\bar{\eta}^n)^2 = 1, \tag{60}$$

получающийся из эллипсоида $\bar{S}_\varepsilon$ увеличением всех осей в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз. Мы без труда обнаружим, что

$$\alpha = \frac{\int\limits_{\bar{S}} \nu_0(\bar{\eta})\, d\bar{S}}{\int\limits_{\bar{S}} \frac{\nu_0(\bar{\eta})}{r^{n-2}(\bar{\eta})}\, d\bar{S}}. \tag{61}$$

Таким образом, число α не зависит от ε и полностью определяется собственными значениями матрицы (a^{ij}). В формуле (61) под $v_0(\bar\eta)$ мы понимаем собственную функцию интегрального уравнения (58), записанного для поверхности $\bar S$.

Итак, функция $\bar v(\bar\xi)$, заданная формулой (53) (см. (47)) при значении α, определяемом из (61), является решением задачи (45), (46). Неравенства (48) могут быть доказаны на основании более подробного изучения свойств потенциала двойного слоя $\bar\pi(\bar\xi)$, определяемого формулой (50).

Доказанная лемма будет использована позже. Сейчас же мы воспользуемся лишь константой α, определенной в ходе доказательства леммы. Константу α мы назовем *размером эллипсоида* (60); размер эллипсоида, таким образом, гладко зависит от собственных значений матрицы (a^{ij}).

Переходим к построению одного специального решения уравнения (39), удовлетворяющего начальному условию (40).

Обозначим через $\bar g(\sigma, \bar\xi, \tau, \bar\eta)$ фундаментальное решение n-мерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \bar v}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar\xi^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar\xi^{n^2}} = 0. \tag{62}$$

Известно, что это фундаментальное решение имеет следующее явное выражение:

$$\bar g(\sigma, \bar\xi, \tau, \bar\eta) = \frac{1}{[4\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{|\bar\eta - \bar\xi|^2}{4(\tau-\sigma)}\right\}. \tag{63}$$

Положим теперь

$$\overline{\varphi_0^*}(\sigma, \bar\xi, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar\xi)} + \bar\pi(\bar\xi, \varepsilon) - \\ - \int \bar g(\sigma, \bar\xi, \tau, \bar\eta)\left[\varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar\eta)} + \bar\pi(\bar\eta, \varepsilon)\right] d\bar\eta, \tag{64}$$

или иначе

$$\overline{\varphi_0^*}(\sigma, \bar\xi, \tau) = \bar\varphi_0(\sigma, \bar\xi, \tau) + \delta\overline{\varphi_0^*}(\sigma, \bar\xi, \tau), \tag{65}$$

где

$$\bar{\varphi}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{a}{r^{n-2}(\bar{\xi})} - \int \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})\,\varepsilon^{n-2}\frac{a}{r^{n-2}(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta}. \tag{66}$$

Очевидно, что функция $\overline{\varphi_0^*}(\sigma, \bar{\xi}, \tau)$ является решением уравнения (62) и удовлетворяет начальному условию

$$\overline{\varphi_0^*}(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \tau. \tag{67}$$

Перейдем теперь от координат $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$ к координатам $\xi^1, \ldots, \xi^n$.

Пусть при этом функции

$$\bar{\varphi}_0^*(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \quad \bar{\varphi}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \quad \overline{\delta\varphi_0^*}(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \quad \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})$$

перейдут соответственно в функции

$$\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau), \quad \varphi_0(\sigma, \xi, \tau), \quad \delta\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau), \quad g(\sigma, \xi, \tau, \eta).$$

Нам впоследствии понадобится явное выражение для функции $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau)$. Чтобы выписать его, надо знать, как запишутся в координатах $\xi^1, \ldots, \xi^n$ функции $r(\bar{\xi})$ и $\bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})$. Это легко выяснить. В самом деле, обозначим через a_{ij} элементы матрицы, обратной матрице (a^{ij}):

$$\sum_{j=1}^{n} a^{ij} a_{jk} = \delta_k^i. \tag{68}$$

Тогда без труда можно убедиться, что

$$\left.\begin{aligned} r(\bar{\xi}) &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi^i\xi^j\right)^{\frac{1}{2}}, \\ |\bar{\eta} - \bar{\xi}| &= \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\eta^i - \xi^i)(\eta^j - \xi^j)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Учтем еще, что

$$d\bar{\eta} = \sqrt{\lambda^1\lambda^2 \ldots \lambda^n}\,d\eta. \tag{70}$$

Таким образом, функция $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau)$ имеет следующее явное выражение:

$$\varphi_0(\sigma, \xi, \tau) = \varepsilon^{n-2} \frac{\alpha}{\left(\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}\xi^i\xi^j\right)^{\frac{n-2}{2}}} - \\ - \int g(\sigma, \xi, \tau, \eta)\, \varepsilon^{n-2} \frac{\alpha\sqrt{\lambda^1 \ldots \lambda^n}}{\left(\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}\eta^i\eta^j\right)^{\frac{n-2}{2}}} d\eta, \quad (71)$$

где

$$g(\sigma, \xi, \tau, \eta) = \\ = \frac{1}{[4\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{\left[\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}(\eta^i - \xi^i)(\eta^j - \xi^j)\right]}{4(\tau-\sigma)}\right\}. \quad (72)$$

Итак, доказана следующая

Лемма 2. *Функция* $\varphi_0^* = \varphi_0(\sigma, \xi, \tau) + \delta\varphi_0^*$, *определенная формулами* (65), (71), (72), *является решением уравнения*

$$\frac{\partial\varphi_0^*}{\partial\sigma} + \sum_{i, j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2\varphi_0^*}{\partial\xi^i\partial\xi^j} = 0 \quad (73)$$

и удовлетворяет нулевому начальному условию

$$\varphi_0^*(\tau, \xi, \tau) = 0. \quad (74)$$

Следует отметить, что функция $\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau)$ не равна единице на сфере S_ε. Однако, как будет выяснено впоследствии, ее граничное значение в некотором смысле лишь *несущественно отличается от единицы*.

Теперь уже все подготовлено для решения уравнения (36). Сначала мы найдем некоторое специальное решение уравнения (36), удовлетворяющее нулевому начальному условию. Оценив затем граничное значение этого специального решения, мы увидим, что оно лишь *несущественно* отличается от единицы. Отсюда мы выведем, что и само это специальное решение лишь *несущественно*, с точностью до величин более высокого порядка малости, чем ε, отличается от точного решения задачи (36), (37), (38). После этого полученное специальное решение будет упрощено путем отбрасывания некоторых членов и, таким образом, мы получим приближенное решение задачи (36), (37), (38).

Приступим к осуществлению этой программы.

Будем искать специальное решение уравнения (36), удовлетворяющее нулевому начальному условию, в виде

$$\Phi^*(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau) + \varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau), \tag{75}$$

где φ_0^* — только что построенное решение уравнения (73), удовлетворяющее условию (74), а φ_1^* — пока неизвестная функция. Непосредственно проверяется, что функция φ_1^* должна удовлетворять следующему неоднородному параболическому уравнению:

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \sigma} + \sum_{i, j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \sum_{i=1}^{n} [b^i - z^{i\prime}(\sigma)] \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \xi^i} = -\sum_{i=1}^{n} [b^i - z^{i\prime}(\sigma)] \frac{\partial \varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau)}{\partial \xi^i} \tag{76}$$

и нулевому начальному условию:

$$\varphi_1^*(\tau, \xi, \tau) = 0. \tag{77}$$

Решить задачу (76), (77) во всем пространстве R с помощью формулы, аналогичной формуле (14) § 38, оказывается невозможным, так как правая часть уравнения (76) при $\xi = 0$ имеет полюс порядка n, получающийся при дифференцировании функции $\pi(\xi, \varepsilon)$. Однако эту трудность можно обойти, так как мы желаем знать решение $\varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau)$ лишь вне шара, ограниченного сферой S_ε. Для этого привлечем к рассмотрению функцию $q(\sigma, x, s, y)$, введенную в § 40 и равную плотности вероятности того, что случайная точка Q, находящаяся в момент времени σ в положении x, будет в момент s

находиться в положении y, не встречаясь при этом на протяжении времени $\sigma \leqslant t \leqslant s$ с шаром $\Sigma_{z(t)}$ радиуса ε с центром в управляемой точке $z(t)$. Очевидно, *функция*

$$q^*(\sigma, \xi, s, \eta) \equiv q(\sigma, \xi + z(\sigma), s, \eta + z(s)) = \\ = q(\sigma, x, s, y) \quad (78)$$

(*см. формулы* (32), (33)) *является вне сферы* S_ε *фундаментальным решением уравнения* (36) *и удовлетворяет граничному условию*

$$\int q^*(\sigma, \xi, s, \eta)\, d\eta \,|_{\xi \in S_\varepsilon} = 0, \quad (79)$$

а решением задачи (76), (77) *вне сферы* S_ε *будет функция*

$$\varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau) = \\ = \int\limits_\sigma^\tau ds \iint\limits_{R_\varepsilon} \left[q^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{i=1}^{n} (b^i - z^{i'}(s)) \frac{\partial \varphi_0^*(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^i} \right] d\eta, \quad (80)$$

где R_ε обозначает дополнение в R к шару, ограниченному сферой S_ε. Очевидно, что

$$\varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau)\,|_{\xi \in S_\varepsilon} = 0.$$

Таким образом, нами получена следующая

Лемма 3. *Функция*

$$\Phi^*(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau) + \varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau), \quad (81)$$

где $\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau)$ *определена формулой* (65), *а* $\varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau)$ — *формулой* (80), *является решением уравнения* (36), *удовлетворяет нулевому начальному условию* $\Phi(\tau, \xi, \tau) = 0$ *и имеет те же граничные значения на сфере* S_ε, *что и функция* $\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau)$.

Теперь мы докажем, что функция $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$ вне сферы радиуса r_0 (r_0 — любое конечное, не зависящее от ε число) аппроксимирует решение задачи (36), (37), (38). Доказательство этого факта базируется на одной важной лемме об оценке решений параболического уравнения. Сформулируем эту лемму.

Лемма 4 *(об оценке решений параболического уравнения). Пусть $u(\sigma, \xi, \tau)$ — решение параболического уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi^i} = L(u), \quad (82)$$

удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} u(\tau, \xi, \tau) &= 0, \\ u(\sigma, \xi, \tau)\big|_{\xi \in S_\varepsilon} &= w(\sigma, \tau), \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

где

$$w(\sigma, \tau) \leqslant \begin{cases} \text{const} & \text{при} \quad \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \\ \delta(\varepsilon) & \text{при} \quad \tau - \sigma > \varepsilon \end{cases} \quad (84)$$

($\delta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$). *Тогда для решения* $u(\sigma, \xi, \tau)$ *справедлива оценка*

$$|u(\sigma, \xi, \tau)| < \Delta(\xi, \varepsilon) + \delta(\varepsilon)\chi(\sigma, \xi, \tau), \quad (85)$$

где $\Delta(\xi, \varepsilon)$ — *положительная функция, имеющая при всех* $|\xi| > r_0$ *порядок* $o(\varepsilon^{n-2})$, *а* $\chi(\sigma, \xi, \tau)$ — *решение уравнения* (82), *имеющее при* $\sigma = \tau$ *нулевое начальное значение и на сфере* S_ε *принимающее значение единица.*

Доказательство леммы 4 не просто и требует значительных вычислений. В них существенно используются различные оценки для решений уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^{n^2}}\right] = -\Delta u. \quad (86)$$

Мы начнем с вывода этих оценок.

Фундаментальное решение уравнения (86) обозначим здесь через $g(\sigma, \xi, \tau, \eta)$:

$$g(\sigma, \xi, \tau, \eta) = \frac{1}{[4\pi(\tau - \sigma)]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\eta - \xi|^2}{4(\tau - \sigma)}}. \quad (87)$$

Положим, как и раньше, $r(\xi)=\sqrt{\xi^{1^2}+\ldots+\xi^{n^2}}$ и введем следующие обозначения:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau)=\int g(\sigma, \xi, \tau, \eta)\frac{1}{r^k(\eta)}\,d\eta, \tag{88}$$

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)=\int_\sigma^\tau ds\int g(\sigma, \xi, s, \eta)\frac{1}{r^k(\eta)}\,d\eta. \tag{89}$$

Чтобы интегралы, стоящие в правых частях формул (88) и (89), имели смысл, мы должны, конечно, считать, что $k<n$.

Нам нужны будут следующие три неравенства, оценивающие функции $\omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ и $\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ при условии, что точка ξ принадлежит сфере S_ε:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau)\big|_{\xi\in S_\varepsilon}<\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^k} \quad \text{при} \quad \tau-\sigma>\varepsilon, \tag{90}$$

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau)\big|_{\xi\in S_\varepsilon}<\frac{C}{\varepsilon^k} \quad \text{при} \quad \tau-\sigma\leqslant\varepsilon, \tag{91}$$

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)\big|_{\xi\in S_\varepsilon}<\frac{C\,|\ln\varepsilon|}{\varepsilon^{k-2}}. \tag{92}$$

Здесь C — константа, не зависящая от ε, а $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Вывод неравенств (90), (91). Легко видеть, что

$$\omega_k(\sigma, \xi^1, \ldots, \xi^n, \tau)=\omega_k(\sigma, r(\xi), 0, \ldots, 0, \tau)=$$
$$=\frac{1}{[4\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}}\int e^{-\frac{(\eta^1-r(\xi))^2+(\eta^2)^2+\ldots+(\eta^n)^2}{4(\tau-\sigma)}}\frac{1}{r^k(\eta)}\,d\eta. \tag{93}$$

Положим

$$\eta^i=r(\xi)\,x^i, \qquad \tau-\sigma=r^2(\xi)\,t. \tag{94}$$

Тогда из (93) мы получим:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau)=\frac{1}{r^k(\xi)}\,V(t), \tag{95}$$

где

$$V(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{(x^1-1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2}{4t}} \frac{1}{r^k(x)}\, dx. \tag{96}$$

Очевидно, что

$$V(t) \to 1 \quad \text{при } t \to 0. \tag{97}$$

Для дальнейшего еще отметим, что при больших значениях t функция $V(t)$ имеет следующую асимптотику:

$$V(t) = O\left(\frac{1}{t^{\frac{k}{2}}}\right). \tag{98}$$

Действительно, если в (96) сделать замену

$$2\sqrt{t}\, y^i = x^i,$$

то получим:

$$V(t) = \frac{K}{t^{\frac{k}{2}}} \int e^{-\left[\left(y^1 - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^n)^2\right]} \frac{1}{r^k(y)}\, dy, \tag{99}$$

где K — константа, откуда и следует соотношение (98). Итак, мы имеем:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau) < \frac{1}{r^k(\xi)} V\left(\frac{\tau-\sigma}{r^2(\xi)}\right). \tag{100}$$

Но легко видеть, что имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned} V\left(\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}\right) &< \delta(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \tau-\sigma > \varepsilon, \\ V\left(\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}\right) &< \text{const} \quad \text{при} \quad \tau-\sigma \leqslant \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

откуда и вытекают неравенства (90) и (91). Одновременно мы видели, что всегда

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau) < \frac{\text{const}}{r^k(\xi)}. \tag{102}$$

Вывод неравенства (92). Легко видеть, что

$$\Omega_k(\sigma, \xi^1, \ldots, \xi^k, \tau) = \Omega_k(\sigma, r(\xi), 0, \ldots, 0, \tau) =$$
$$= \int_\sigma^\tau ds \int \frac{1}{[4\pi(s-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(\eta^1 - r(\xi))^2 + (\eta^2)^2 + \ldots + (\eta^n)^2}{4(s-\sigma)}} \frac{1}{r^k(\eta)} d\eta.$$

Полагая $\eta^j = r(\xi)x^j$, $s - \sigma = r^2(\xi)t$, мы получим отсюда

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau) = \frac{1}{r^{k-2}(\xi)} \int_0^{\frac{\tau-\sigma}{r^2(\xi)}} V(t)\, dt, \tag{103}$$

где V — функция, определенная формулой (96). В частности,

$$\Omega(\sigma, \xi, \tau)|_{\xi \in S_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^{k-2}} \int_0^{\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}} V(t)\, dt. \tag{104}$$

Учитывая теперь асимптотику функции $V(t)$ при больших значениях t (см. формулу (98)), мы сразу получаем неравенства

$$\int_0^{\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}} V(t)\, dt < C|\ln\varepsilon| \quad \text{при} \quad k = 2, \tag{105}$$

$$\int_0^{\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}} V(t)\, dt < C \qquad \text{при} \quad k > 2, \tag{106}$$

из которых и следует неравенство (92). Одновременно мы видели, что

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau) < \frac{\text{const}}{r^{k-2}(\xi)}. \tag{107}$$

Замечание к неравенствам (90), (91), (92). Пусть $p^*(\sigma, \xi, \tau, \eta)$ — фундаментальное решение уравнения (82). Исходя из этого фундаментального решения, определим функции $\omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ и $\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ по формулам

(88), (89) (поставив в них вместо g функцию p^*). Оказывается, что для определенных таким образом функций $\omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ и $\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ справедливы те же неравенства (90), (91), (92). Действительно, в теории параболических уравнений доказывается, что при ограничениях на коэффициенты уравнения (82), которые мы предположили выполненными в § 39, фундаментальное решение уравнения (82) мажорируется фундаментальным решением некоторого уравнения теплопроводности, т. е. для него имеет место неравенство

$$p^*(\sigma, \xi, \tau, \eta) < \frac{C}{(\tau-\sigma)^{\frac{n}{2}}} e^{-\gamma \frac{|\eta-\xi|^2}{\tau-\sigma}},$$

где γ — константа. Эта оценка обеспечивает возможность буквального повторения вычислений, проведенных при выводе неравенств (90), (91), (92).

После этих предварительных оценок мы можем осуществить

Доказательство леммы 4. Положим

$$\bar{w}(\sigma, \tau) = \bar{w}_1(\sigma, \tau) + \bar{w}_2(\sigma, \tau), \tag{108}$$

где функции $\bar{w}_1(\sigma, \tau)$ и $\bar{w}_2(\sigma, \tau)$ определены следующим образом:

$$\bar{w}_1(\sigma, \tau) = \begin{cases} C & \text{при} \quad \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \tau - \sigma > \varepsilon; \end{cases} \tag{109}$$

$$\bar{w}_2(\sigma, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \\ \delta(\varepsilon) & \text{при} \quad \tau - \sigma > \varepsilon. \end{cases} \tag{110}$$

Решения уравнения (82), имеющие нулевые начальные значения и краевые значения $\bar{w}(\sigma, \tau)$, $\bar{w}_1(\sigma, \tau)$, $\bar{w}_2(\sigma, \tau)$, обозначим соответственно через $\bar{u}(\sigma, \xi, \tau)$, $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$, $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$. Очевидно, что

$$\bar{u}(\sigma, \xi, \tau) = \bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau) + \bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau). \tag{111}$$

Далее, на основании теоремы о максимальном значении решений параболических уравнений решение $u(\sigma, \xi, \tau)$ задачи (82), (83) оценивается следующим образом:

$$u(\sigma, \xi, \tau) \leqslant \bar{u}(\sigma, \xi, \tau). \tag{112}$$

Оценим отдельно функции $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ и $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$.

Для $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$ оценка сразу получается из той же теоремы о максимальном значении решения параболического уравнения:

$$\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau) \leqslant \delta(\varepsilon)\chi(\sigma, \xi, \tau). \qquad (113)$$

Для получения оценки функции $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ требуются более тонкие рассуждения. Прежде всего оценим $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$. Положим

$$\gamma(\xi) = K\frac{\varepsilon^{n-1}}{r^{n-1}(\xi)}, \qquad (114)$$

где $K = \text{const} > C$. Будем теперь искать решение уравнения (82) с начальными значениями, равными $\gamma(\xi)$, и с граничным значением на сфере S_ε, равным K, в виде

$$v(\sigma, \xi, \tau) = \gamma(\xi) + v_0(\sigma, \xi, \tau). \qquad (115)$$

Тогда для функции $v_0(\sigma, \xi, \tau)$ сразу же получаем неоднородное уравнение

$$\frac{\partial v_0}{\partial \sigma} + \sum_{i, j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, \xi)\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, \xi)\frac{\partial v_0}{\partial \xi^i} = L[\gamma(\xi)], \qquad (116)$$

которое мы должны решить при нулевых начальных и при нулевых граничных условиях. Такое решение, как мы знаем, вне сферы S_ε дается формулой

$$v_0(\sigma, \xi, \tau) = -\int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q(\sigma, \xi, s, \eta) L[\gamma(\eta)]\, d\eta. \qquad (117)$$

Итак,

$$v(\sigma, \xi, \tau) = \gamma(\xi) - \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q(\sigma, \xi, s, \eta) L[\gamma(\eta)]\, d\eta. \qquad (118)$$

Очевидно, что

$$\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau) \leqslant v(\sigma, \xi, \tau). \qquad (119)$$

Нам остается, таким образом, оценить лишь функцию $v(\sigma, \xi, \tau)$ при $|\xi| > r_0$. Сначала заметим, что

$$|L[\gamma(\xi)]| < \varepsilon^{n-1}\left[\frac{A_1}{r^{n+1}(\xi)} + \frac{A_2}{r^n(\xi)}\right], \tag{120}$$

где A_1, A_2 — достаточно большие константы. Далее, будем иметь в виду следующее неравенство:

$$q(\sigma, \xi, \tau, \eta) \leqslant p(\sigma, \xi, \tau, \eta). \tag{121}$$

Тогда из формулы (118) получаем:

$$v(\sigma, \xi, \tau) \leqslant \gamma(\xi) + \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p(\sigma, \xi, s, \eta)\, \varepsilon^{n-1} \frac{A_1}{r^{n+1}(\eta)}\, d\eta + \\ + \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p(\sigma, \xi, s, \eta)\, \varepsilon^{n-1} \frac{A_2}{r^n(\eta)}\, d\eta. \tag{122}$$

Интегралы, стоящие в правой части неравенства (122), обозначим соответственно через I_1, I_2. Оценим отдельно величины I_1 и I_2. Мы имеем:

$$I_1 < A_1 \varepsilon^{n-2-\nu} \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p(\sigma, \xi, s, \eta) \frac{1}{r^{n-\nu}(\eta)}\, d\eta < \\ < A_1 \varepsilon^{n-2-\nu} \int_\sigma^\tau \omega_{n-\nu}(\sigma, \xi, s)\, ds. \tag{123}$$

Принимая во внимание неравенство (102), отсюда сразу же получаем:

$$I_1 < A_1 C \frac{1}{r^{n-\nu}(\xi)} \varepsilon^{n-2-\nu} \int_\sigma^\tau ds, \tag{124}$$

где $0 < \nu < 1$. Следовательно, при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$ имеет место оценка

$$I_1 < M \frac{\varepsilon^{n-1-\nu}}{r^{n-\nu}(\xi)}, \tag{125}$$

т. е.

$$I_1 = o(\varepsilon^{n-2}) \tag{126}$$

при $|\xi| > r_0$. Аналогично получим:

$$I_2 = o(\varepsilon^{n-2}) \tag{127}$$

при $|\xi| > r_0$. Таким образом, функция $v(\sigma, \xi, \tau)$, мажорирующая на границе сферы S_ε решение $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ при $|\xi| > r_0$ и при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$, имеет порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Отсюда следует, что и само решение $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$ и при $|\xi| > r_0$ имеет порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Несколько изменяя предыдущее построение, можно легко убедиться в том, что такая же оценка для $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ имеет место и при $\tau - \sigma > \varepsilon$. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать, что функция $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$, фигурирующая в формулировке леммы 3, вне сферы любого конечного радиуса с точностью до величин порядка $o(\varepsilon^{n-2})$ аппроксимирует решение задачи (36), (37), (38). Иными словами, справедлива следующая

Лемма 5. *Пусть $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ — решение уравнения* (36), *удовлетворяющее начальным и граничным условиям* (37), (38), *а $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$ — решение уравнения* (36), *определенное в лемме* 3. *Тогда для любого r_0, не зависящего от ε, при $|\xi| \geqslant r_0$ решение $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$ с точностью до величин порядка $o(\varepsilon^{n-2})$ аппроксимирует решение $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$*:

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \Phi^*(\sigma, \xi, \tau) = o(\varepsilon^{n-2}). \tag{128}$$

Доказательство. Обозначим через $u(\sigma, \xi, \tau)$ разность функций φ и Φ^*:

$$u(\sigma, \xi, \tau) = \varphi(\sigma, \xi, \tau) - \Phi^*(\sigma, \xi, \tau). \tag{129}$$

Функция $u(\sigma, \xi, \tau)$ является решением уравнения (36) и удовлетворяет нулевому начальному условию. Далее, из формулы (80) видно, что граничные значения функции $u(\sigma, \xi, \tau)$ на сфере S_ε совпадают с граничными значениями функции $\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau)$. Оценим эти последние. Для этого запишем разность $\varphi - \varphi_0^*$ в следующем виде:

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau) =$$
$$= \left\{\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \left[\varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)\right]\right\} -$$
$$- \int \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})\left[\varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\eta})} + \bar{\pi}(\bar{\eta}, \varepsilon)\right] d\bar{\eta} \tag{130}$$

(см. формулу (64)). Граничные значения слагаемого заключенного в фигурные скобки в правой части формулы (130), равны нулю. Остается, таким образом, оценить лишь граничные значения второго слагаемого на сфере S_ε (в координатах $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$ — на эллипсоиде $\bar{S}_\varepsilon$). Так как для потенциала двойного слоя $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ имеет место оценка (48), то, очевидно, мы получим:

$$\left| \int \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta}) \left[\varepsilon^{n-2} \frac{a}{r^{n-2}(\bar{\eta})} + \bar{\pi}(\bar{\eta}, \varepsilon) \right] d\bar{\eta} \right| \leqslant$$
$$\leqslant A_1 \varepsilon^{n-2} \omega_{n-2}(\sigma, \bar{\xi}, \tau) + A_2 \varepsilon^{n-1} \omega_{n-1}(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \qquad (131)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, а ω_{n-2} и ω_{n-1} — функции, определенные формулой (88) соответственно при $k = n-2$, $k = n-1$. Используя теперь неравенства (90) и (91), сразу же получаем, что граничные значения второго слагаемого в формуле (130), а следовательно, и граничные значения $w(\sigma, \tau)$ функции $u(\sigma, \xi, \tau)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Следовательно, на основании леммы 4 об оценке решений параболического уравнения мы можем заключить, что соотношение (128) справедливо. Лемма 5, таким образом, доказана.

Теперь нам остается лишь упростить полученное приближенное решение $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$, отбросив в нем величины, имеющие при $|\xi| > r_0$ порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Чтобы сделать это, выпишем решение $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$ в явном виде. Вспоминая формулы (63), (64), (65), (75), (80), мы можем написать:

$$\Phi^*(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0(\sigma, \xi, \tau) + \delta\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau) +$$
$$+ \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{l=1}^n [b^l - z^{l'}(s)] \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \eta^l} [\varphi_0(s, \eta, \tau) + \delta\varphi_0^*] \, d\eta. \qquad (132)$$

Прежде всего ясно, что при $|\xi| > r_0$

$$\delta\varphi_0^*(\sigma, \xi, \tau) = o(\varepsilon^{n-2}). \qquad (133)$$

Несколько сложнее упрощается интеграл, стоящий в правой части формулы (132). Во-первых, можно отбросить член

$$I_1 = \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{i=1}^n [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial \delta\varphi_0^*(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^i} d\eta. \tag{134}$$

В самом деле,

$$|I_1| \leqslant \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{i=1}^n |b^i - z^{i'}(s)| \left| \frac{\partial \delta\varphi_0^*(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^i} \right| d\eta. \tag{135}$$

Так как, далее,

$$\left| \frac{\partial \delta\varphi_0^*}{\partial \eta} \right| < \varepsilon^{n-1} R(\eta) \tag{136}$$

(см. (65), (66)), где $R(\eta)$ в нуле имеет полюс порядка не более чем n, то

$$|I_1| < \varepsilon^{n-1-\nu} \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{i=1}^n |b^i - z^{i'}(s)| \, |R_1(\eta)| \, d\eta,$$

где $R_1(\eta)$ имеет теперь в нуле полюс порядка не более чем $n - \nu$ $(0 < \nu < 1)$. Таким образом,

$$I_1 = o(\varepsilon^{n-2}). \tag{137}$$

Нам остается теперь лишь упростить член

$$I_2 = \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{i=1}^n [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^i} \varphi_0(s, \eta, \tau) \, d\eta. \tag{138}$$

Докажем, что при $|\xi| > r_0$

$$I_2 = \int_\sigma^\tau ds \int p^*(\sigma, \xi, s, \eta) \sum_{i=1}^n [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^i} \varphi_0(s, \eta, \tau) \, d\eta + \\ + o(\varepsilon^{n-2}). \tag{139}$$

Мы имеем:

$$I_2=\int_\sigma^\tau ds\int p^*(\sigma,\ \xi,\ s,\ \eta)\sum_{i=1}^n [b^i - z^{i\prime}(s)]\frac{\partial}{\partial\eta^i}\varphi_0(s,\ \eta,\ \tau)\,d\eta+$$
$$+\int_\sigma^\tau ds\int_{R_\varepsilon}[p^*-q^*]\sum_{i=1}^n [b^i - z^{i\prime}(s)]\frac{\partial}{\partial\eta^i}\varphi_0(s,\ \eta,\ \tau)\,d\eta+$$
$$+\int_\sigma^\tau ds\int_{R-R_\varepsilon}p^*(\sigma,\ \xi,\ s,\ \eta)\sum_{i=1}^n [b^i - z^{i\prime}(s)]\frac{\partial}{\partial\eta^i}\varphi_0(s,\ \eta,\ \tau)\,d\eta. \tag{140}$$

Последнее слагаемое в формуле (140) имеет, очевидно, порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Обозначим второе слагаемое через $u(\sigma,\xi,\tau)$. Функция $u(\sigma,\xi,\tau)$ при $\sigma=\tau$ имеет нулевые начальные значения и является в области R_ε решением уравнения (36). Так как

$$\left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta^j}\right|<\varepsilon^{n-2}R(\eta), \tag{141}$$

где $R(\eta)$ имеет полюс порядка не более чем $n-1$, то граничные значения функции $u(\sigma,\xi,\tau)$ оцениваются следующим образом:

$$|u(\sigma,\ \xi,\ \tau)|\,|_{\xi\in S_\varepsilon}<M\varepsilon^{n-2}\Omega_{n-1}(\sigma,\ \xi,\ \tau)\,|_{\xi\in S_\varepsilon}. \tag{142}$$

Из неравенств (142), (92) мы заключаем, что

$$|u(\sigma,\ \xi,\ \tau)|\,|_{\xi\in S_\varepsilon}<\delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, всюду в области R_ε

$$|u(\sigma,\ \xi,\ \tau)|<\delta(\varepsilon)\,\varphi(\sigma,\ \xi,\ \tau). \tag{143}$$

Лемма 5 и полученные неравенства (133), (137), (143) доказывают следующую лемму.

Лемма 6. *Функция*

$$\Phi(\sigma,\ \xi,\ \tau)=\varphi_0(\sigma,\ \xi,\ \tau)+$$
$$+\int_\sigma^\tau ds\int p^*(\sigma,\ \xi,\ s,\ \eta)\sum_{i=1}^n [b^i - z^{i\prime}(s)]\frac{\partial\varphi_0(s,\ \eta,\ \tau)}{\partial\eta^i}\,d\eta, \tag{144}$$

где $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau)$ *определена формулой* (71), *при* $|\xi| > r_0$ (r_0 — *произвольное положительное не зависящее от* ε *число*) *с точностью до величин порядка малости* $o(\varepsilon^{n-2})$ *аппроксимирует решение* $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ *уравнения* (36), *удовлетворяющее начальному и граничному условиям* (37), (38).

Чтобы подвести итог всем рассмотрениям настоящего параграфа, остается вновь возвратиться к старым координатам x и y согласно формулам (32), (33). Проведя соответствующие замены, мы можем на основании леммы 6 сформулировать следующее предложение.

Теорема 26. *Пусть движение управляемой точки* z, *имеющей в начальный момент времени* σ *положение* $z(\sigma)$, *описывается системой дифференциальных уравнений* (15). *Пусть, далее, в пространстве* R *движется также случайная точка* Q, *плотность вероятности перехода которой* $p(\sigma, x, s, y)$ *удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению* (29) *с постоянными коэффициентами. Обозначим через* Σ_ε *шар радиуса* ε *с центром в точке* z, *движущийся вместе с* z. *Обозначим через* $\psi(\sigma, x, \tau)$ *вероятность того, что случайная точка* Q, *находящаяся в момент* σ *в положении* x, *на отрезке времени* $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ *будет «накрыта» шаром* Σ_ε. *Тогда вероятность* $\psi(\sigma, x, \tau)$, *являющаяся функционалом над управлением* $u(t)$, *представляется при* $|x - z(\sigma)| > r_0$, *где* r_0 — *произвольное положительное число, в следующем виде:*

$$\psi(\sigma, x, \tau) = \varepsilon^{n-2}[\psi_0(\sigma, x, \tau) + \psi_1(\sigma, x, \tau)] + o(\varepsilon^{n-2}). \quad (145)$$

Чтобы выписать явные выражения для функций $\varphi_0(\sigma, x, \tau)$ *и* $\psi_1(\sigma, x, \tau)$, *введем обозначения:*

а) $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ — *собственные значения матрицы* (a^{ij}).

б) (a_{ij}) — *матрица, обратная матрице* (a^{ij});

в) $G(\sigma, x, \tau, \eta) = g(\sigma, x - z(\sigma), \tau, \eta) =$

$$= \frac{1}{[4\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\eta^i - x^i + z^i(\sigma))(\eta^j - x^j + z^j(\sigma))}{4(\tau-\sigma)}\right\};$$

г) α — *константа, не зависящая от системы уравнений* (15) *и определенная формулой* (61).

Тогда

$$\psi_0(\sigma, x, \tau) = \frac{\alpha}{\left[\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x^i - z^i(\sigma))(x^j - z^j(\sigma))\right]^{\frac{n-2}{2}}} - \\ - \int G(\sigma, x, \tau, \eta) \frac{\alpha\sqrt{\lambda^1\lambda^2 \ldots \lambda^n}}{\left[\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\eta^i\eta^j\right]^{\frac{n-2}{2}}} d\eta,$$

$$\psi_1(\sigma, x, \tau) = \int_{\sigma}^{\tau} ds \int p(\sigma, x, s, y) \sum_{i=1}^{n} [b^i - z^{i\prime}(s)] \frac{\partial \psi_0(s, y, \tau)}{\partial y^i} dy.$$

Таким образом, теорема 26 дает явное выражение для главного члена вероятности $\psi(\sigma, x, \tau)$ и, следовательно, для главного члена функционала (16).

§ 42. Вычисление функционала J в общем случае

Здесь вероятность $\psi(\sigma, x, \tau)$, а следовательно, и функционал (16) будут вычислены в случае, когда коэффициенты уравнения Колмогорова зависят от σ и x. Предполагается, что эти коэффициенты удовлетворяют условиям, указанным в § 39. Вычисления в значительной степени воспроизводят схему, изложенную в § 41. Мы часто будем отсылать читателя к этому параграфу, проводя подробно лишь существенно новые построения.

Итак, нужно решить уравнение (25) при условиях

$$\psi(\tau, x, \tau) = 0, \qquad \psi(\sigma, x, \tau)\big|_{x \in S_\sigma} = 1. \tag{146}$$

Как и в § 41, с помощью замен (32), (33), (35) приведем эту задачу к задаче решения уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \sum_{i, j=1}^{n} a^{ij}(\xi + z(\sigma), \sigma) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} [b^i(\xi + z(\sigma), \sigma) - z^{i\prime}(\sigma)] \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} = 0 \tag{147}$$

при условиях

$$\varphi(\tau, \xi, \tau) = 0, \quad \varphi(\sigma, \xi, \tau)_{\xi = S_\varepsilon} = 1. \tag{148}$$

Перепишем уравнение (147) в несколько иной форме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, z(\sigma)) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} + \sum_{i,j=1}^{n} [a^{ij}(\sigma, \xi + z(\sigma)) -$$

$$- a^{ij}(\sigma, z(\sigma))] \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} + \sum_{i=1}^{n} [b^i(\sigma, \xi + z(\sigma)) - z^{i\prime}(\sigma)] \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i} = 0.$$

Нашим первым шагом будет конструкция некоторого специального решения $\varphi_0^\theta(\sigma, \xi, \tau)$ уравнения

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma} + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\theta, z(\theta)) \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} = 0 \tag{149}$$

с начальным условием $\varphi_0^\theta(\tau, \xi, \tau) = 0$. Чтобы получить это решение, как и в § 41, перейдем с помощью линейного преобразования от координат $\xi^1, \ldots, \xi^n$ к координатам $\bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n$, в которых уравнение (149) примет вид

$$\frac{\partial\bar\varphi_0}{\partial\sigma} + \Delta\bar\varphi_0 = 0.$$

Такое преобразование координат теперь уже зависит от параметра θ. Тогда сфера S_ε перейдет в эллипсоид $\bar S_\varepsilon$

$$\lambda^1(\theta)(\bar\xi^1)^2 + \ldots + \lambda^n(\theta)(\bar\xi^n)^2 = \varepsilon^2, \tag{150}$$

причем $\lambda^1(\theta), \ldots, \lambda^n(\theta)$ — собственные значения матрицы $(a^{ij}(\theta, z(\theta)))$. Почти буквальным повторением рассуждений § 41 доказывается

Лемма 1′. *Исчезающее в бесконечности решение внешней задачи Дирихле для уравнения*

$$\frac{\partial^2\bar v}{\partial\bar\xi^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2\bar v}{\partial\bar\xi^{n^2}} = 0$$

с граничным условием $\bar v(\bar\xi)|_{\xi = \bar S_\varepsilon} = 1$, *где* $\bar S_\varepsilon$ — *эллипсоид* (150), *имеет вид*

$$\bar v(\bar\xi) = \varepsilon^{n-2} \frac{\alpha(\theta)}{r^{n-2}(\bar\xi)} + \bar\pi(\bar\xi, \varepsilon).$$

Здесь $\alpha(\theta)$ — *положительная константа, гладко зависящая от параметра* θ *и однозначно определяемая разме-*

рами эллипсоида $\bar{S}_\varepsilon$; $r(\bar{\xi}) = \sqrt{(\bar{\xi}^1)^2 + \ldots + (\bar{\xi}^n)^2}$, *а для функции* $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ *и ее производных верны неравенства* (48).

Константа $\alpha(\theta)$ вычисляется по формуле (61), если под $\bar{S}$ понимать эллипсоид

$$\lambda^1(\theta)(\eta^1)^2 + \ldots + \lambda^n(\theta)(\eta^n)^2 = 1.$$

Введем функцию $\bar{g}^\theta(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})$ по формуле (63) и положим

$$\bar{\varphi}_0^{*\theta}(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon) - \\ - \int \bar{g}^\theta(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})\left[\varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{r^{n-2}(\bar{\eta})} + \bar{\pi}(\bar{\eta}, \varepsilon)\right] d\bar{\eta},$$

или иначе $\bar{\varphi}_0^{*\theta} = \bar{\varphi}_0^\theta + \delta\bar{\varphi}_0^{*\theta}$, где

$$\bar{\varphi}_0^\theta(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{r^{n-2}(\bar{\xi})} - \int \bar{g}^\theta(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})\, \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{r^{n-2}(\bar{\eta})}\, d\bar{\eta}.$$

Очевидно, что функция $\bar{\varphi}_0^{*\theta}(\sigma, \bar{\xi}, \tau)$ является решением уравнения (149) и удовлетворяет начальному условию $\bar{\varphi}_0^{*\theta}(\tau, \bar{\xi}, \tau) = 0$. Перейдем теперь от координат $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$ к координатам $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Пусть при этом функции $\bar{\varphi}_0^{*\theta}(\sigma, \bar{\xi}, \tau)$, $\bar{\varphi}_0^\theta$, $\delta\bar{\varphi}_0^{*\theta}$, $\bar{g}^\theta$ перейдут соответственно в функции $\varphi_0^{*\theta}(\sigma, \xi, \tau)$, φ_0^θ, $\delta\varphi_0^\theta$, g^θ.

Выпишем функцию $\varphi_0^\theta(\sigma, \xi, \tau)$ в явном виде. Обозначим через $a_{ij}(\theta, z(\theta))$ элементы матрицы, обратной матрице $(a^{ij}(\theta, z(\theta)))$. Тогда

$$\varphi_0^\theta(\sigma, \xi, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\theta, z(\theta))\,\xi^i\xi^j\right]^{\frac{n-2}{2}}} - \\ - \int g^\theta(\sigma, \xi, \tau, \eta)\,\varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)\sqrt{\lambda^1(\theta)\ldots\lambda^n(\theta)}}{\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\theta, z(\theta))\,\eta^i\eta^j\right]^{\frac{n-2}{2}}}\, d\eta,$$

$$g^\theta(\sigma, \xi, \tau, \eta) = \\ = \frac{1}{[4\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\theta, z(\theta))(\eta^i-\xi^i)(\eta^j-\xi^j)}{4(\tau-\sigma)}\right\}.$$

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau)$, т. е. построенную функцию при значении параметра θ, равном σ. Функция $\varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau)$ уже не удовлетворяет уравнению (149), в коэффициентах которого вместо θ подставлено σ. Однако, очевидно, справедлива следующая

Лемма 2′. *Функция* $\varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^{\sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \delta\varphi_0^{*\sigma}$ *является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial \varphi_0^{*\sigma}}{\partial \sigma} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, z(\sigma)) \frac{\partial^2 \varphi_0^{*\sigma}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\varphi_0^{*\theta}\right]\Big|_{\theta=\sigma} = 0$$

и имеет начальное значение $\varphi_0^{*\sigma}(\tau, \xi, \tau) = 0$.

Как и в § 41, можно искать специальное решение уравнения (147), имеющее нулевые начальные значения, в виде

$$\Phi^*(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau),$$

где $\varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau)$ — построенная функция, а φ_1^* — пока неизвестная функция. Подставляя $\Phi^*(\sigma, \xi, \tau)$ в уравнение (147) и учитывая лемму 2′, получим для $\varphi_1^*(\sigma, \xi, \tau)$ неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \sigma} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, \xi + z(\sigma)) \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[b^i(\sigma, \xi + z(\sigma)) - z^{i\prime}(\sigma)\right] \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \xi^i} = \\ = -\left\{ \sum_{i,\, j=1}^{n} \left[a^{ij}(\sigma, \xi + z(\sigma)) - a^{ij}(\sigma, z(\sigma))\right] \frac{\partial \varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \right. \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[b^i(z(\sigma), \xi + z(\sigma)) - z^{i\prime}(\sigma)\right] \frac{\partial \varphi_0^{*\sigma}(\sigma, \xi, \tau)}{\partial \xi^i} + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\varphi_0^{*\theta}(\sigma, \xi, \tau)\right]\Big|_{\theta=\sigma}$$

и начальное условие $\varphi_1^*(\tau, \xi, \tau) = 0$. Так как правая часть этого уравнения имеет при $\xi = 0$ полюс порядка лишь n (а не $n+1$), то мы можем почти буквально повторить все рассуждения и доказать леммы, аналогичные леммам 3, 5, 6. Лемма, соответствующая лемме 6, формулируется следующим образом:

Лемма 6′. *Функция*

$$\Phi(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau) +$$

$$+ \int_\sigma^\tau ds \int p(\sigma, \xi + z(\sigma), s, \eta + z(s)) \Biggl\{ \sum_{i,\, j=1}^n [a^{ij}(s, \eta + z(s)) -$$

$$- a^{ij}(s, z(s))] \frac{\partial^2 \varphi_0^\sigma(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^i \partial \eta^j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n [b^i(s, \eta + z(s)) - z^{i\prime}(s)] \frac{\partial \varphi_0^\sigma(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^i} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \bigl[\varphi_0^\theta(s, \eta, \tau)\bigr]\Bigr|_{\theta=\sigma} \Biggr\} d\eta,$$

при $|\xi| > r_0$ *(r_0 — произвольное положительное число, не зависящее от* ε*) с точностью до величин порядка малости* $o(\varepsilon^{n-2})$ *аппроксимирует решение* $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ *уравнения* (147), *удовлетворяющее начальному и граничному условиям* (148).

Чтобы сформулировать теперь окончательный результат, мы вновь должны перейти к координатам x и y по формулам (32), (33). Тогда из леммы 6′ следует теорема, аналогичная теореме 26 предыдущего параграфа. Мы не будем здесь выписывать окончательные формулы, так как при желании читатель легко может сделать это сам.

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1. Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
2. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1962.
3. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, ДАН СССР, **110**, № 1 (1956), стр. 7—10.
4. Болтянский В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, ДАН СССР, **119**, № 6 (1958), стр. 1070—1073.
5. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Теория оптимальных процессов. Принцип максимума, Изв. АН СССР, серия матем., **24**, № 1 (1960), стр. 3—42.
6. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Первый конгресс ИФАК, 1960.
7. Гамкрелидзе Р. В., К общей теории оптимальных процессов, ДАН СССР, **123**, № 2 (1958), стр. 223—226.
8. Красовский Н. Н., К теории оптимального регулирования, Автоматика и телемеханика, **18**, № 11 (1957), стр. 960—970.
9. Понтрягин Л. С., Оптимальные процессы регулирования, Успехи матем. наук, **14**, вып. 1 (1959), стр. 3—20.
10. Розоноэр Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, **20**, №№ 10—12 (1959), стр. 1320—1334, 1441—1458, 1561—1578.

К главе 2

См. [4], [5], [7], [9].

К главе 3

См. [2], [6], [9].

11. Болтянский В. Г., Моделирование линейных оптимальных быстродействий при помощи релейных схем, ДАН СССР, **139**, № 2 (1961), стр. 19—22.
12. Bushaw D. W., Ph. D. Thesis, Department of Math., Princeton Univ., 1952.
13. Гамкрелидзе Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, ДАН СССР, **116**, № 1 (1957), стр. 9—11.
14. Гамкрелидзе Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Изв. АН СССР, серия матем., **22**, № 4 (1958), стр. 449—474.

15. La Salle J. P., The Time Optimal Control Problem, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, V, Princeton, 1959.
16. Фельдбаум А. А., О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства, Автоматика и телемеханика, 16, № 2 (1955), стр. 129—149.

К главе 4

См. [5].
17. Болтянский В. Г., Оптимальные процессы с параметрами, Доклады Ак. наук Узб. ССР, № 10 (1959), стр. 9—13.
18. Болтянский В. Г., Применение теории оптимальных процессов к задачам приближения функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 60 (1961), стр. 82—95.
19. Харатишвили Г. Л., Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием, ДАН СССР, 136, № 1 (1961), стр. 39—42.

К главе 5

20. Блис Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.
21. Mc Shane, On Multipliers for Lagrange Problem, Amer. Journ. Math., 61 (1939), стр. 809—819.

К главе 6

22. Гамкрелидзе Р. В., Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых коодринатах, ДАН СССР, 125, № 3 (1959), стр. 475—478.
23. Гамкрелидзе Р. В., Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах, Изв. АН СССР, серия матем., 24, № 3 (1960), стр. 315—356.
24. Лернер А. Я., О предельном быстродействии систем автоматического управления, Автоматика и телемеханика, 15, № 6 (1954), стр. 461—477.
25. Розенман Е. А., О предельном быстродействии следящих систем с ограниченным по мощности, моменту и скорости исполнительным элементом, Автоматика и телемеханика, 19, № 7 (1958), стр. 633—653.

К главе 7

26. Kolmogoroff A., Uber die analutischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1931), стр. 415—458.
27. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Одна статистическая задача оптимального управления, ДАН СССР, 128, № 5 (1959), стр. 890—892.
28. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Об одной статистической задаче оптимального управления, Изв. АН СССР, серия матем., 25 (1961), стр. 477—498.
29. Колмогоров А. Н., Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Об одной вероятностной задаче оптимального управления, ДАН СССР, 145, № 5 (1962), стр. 993—995.