ПРОГРАММА КУРСА "ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ"

лектор Е.Н. Хайлов (5 семестр)

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Задача о брахистохроне. Примеры Гильберта и Вейерштрасса.
2. Изопараметрическая задача вариационного исчисления. Цепная линия.
3. Задача Лагранжа с неголономными связями. Примеры.
4. Задача Лагранжа с голономными связями. Уравнение движения материальной точки по поверхности.
5. Условия трансверсальности в задаче со свободным правым концом. Примеры.
6. Условия Вейерштрасса-Эрдмана. Негладкие экстремали. Примеры. Задача о кривой, образующей при своем вращении поверхность возможно меньшей площади.
7. Преобразование Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона.
8. Принцип максимума Понтрягина для линейно-квадратичной задачи оптимального управления.
9. Простейшая задача вариационного исчисления на сильный минимум. Функция Вейерштрасса. Примеры. Принцип максимума Понтрягина для задачи о простом движении.
10. Поле экстремалей. Уравнение Гамильтона-Якоби.
11. Инвариантный интеграл Гильберта. Решение уравнения Гамильтона-Якоби для квадратичной задачи вариационного исчисления.
12. Достаточные условия сильного минимума, использующие уравнение Гамильтона-Якоби и функцию Вейерштрасса. Примеры.
13. Вторая вариация. Условие Лежандра. Необходимые условия ~~слабого~~ сильн. минимума, использующие условие Лежандра.
14. Достаточные условия слабого минимума, использующие условие Лежандра.
15. Достаточные условия сильного минимума, использующие условие Лежандра. Примеры.
16. Сопряженные точки. Условие Якоби. Необходимые условия ~~слабого~~ сильн. минимума, использующие условие Якоби.
17. Достаточные условия слабого минимума, использующие условие Якоби.
18. Достаточные условия сильного минимума, использующие условие Якоби. Примеры.

~~Вопросы~~ Термин по ВИ

1 Задача о брахистохроне

Постановка: Найти форму желоба, чтобы время t движения мат. точки под действием силы тяжести было бы наименьшим $(t \to min)$

$A(t_0, x_0)$, $x = x(t) \in C^1$ $t_0 \le t \le t_1$
$B(t_1, x_1)$

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dfrac{1+\dot{x}^2(t)}{2g(x(t)-x_0)}}\, dt \longrightarrow min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Постановка задач

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \quad t \in [t_0, t_1]$$

(1) $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \longrightarrow min$

(2) $\Phi_0(x(t_0)) = 0$, $\Phi_1(x(t_1)) = 0$ | краевые условие

(3) $\int_{t_0}^{t_1} h_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = H_i$ $i = \overline{1,m}$ | изопериметрич. ограничение

(4) $g_j(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ $j = \overline{1,k}$, $t_0 < t < t_1$ | связи

(1) + (2) ПЗВИ
(1) + (2) + (3) Изопериметрич. задача
(1) + (2) + (4) задача ВИ со связями

Опр $x_*(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет слаб лок min, если

а) ф-ия $x_*(t)$ удовлетворяет огранич. задачи
б) $\exists \varepsilon > 0$, для $\forall x(t)$, удовл. огранич. задачи и неравенству $\max\{\max_{[t_0,t_1]} \|x(t) - x_*(t)\|, \max_{[t_0,t_1]} \|\dot{x}(t) - \dot{x}_*(t)\|\} < \varepsilon$
Справедливо нер-во $J(x) \ge J(x_*)$

Опр $x_*(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет сильный лок min, если

а) ф-ия $x_*(t)$ удовл. огр. задачи
б) $\exists \varepsilon > 0$ для $\forall x(t)$, удовл. огр. задачи и неравенству $\max_{[t_0,t_1]} \|x(t) - x_*(t)\| < \varepsilon$ справедливо нер-во $J(x) \ge J(x_*)$

Теор 1

Пусть $x_*(t) \in C^1[t_0,t_1]$ доставляет сильный лок min ф-ала $J(x)$. Тогда эта ф-ия доставляет и слаб лок min

Лемма (о скруглении углов)

Пусть в простейшей задаче ВИ, непр. по всем своим аргументам ($f(t,x,\dot{x}) \in C$).

Пусть $\hat{x}(t)$ – кусочно-дифф на $[t_0,t_1]$

Тогда $\exists \{x_k(t)\}_{k\geq 1}$, $x_k(t) \in C^1[t_0,t_1]$:

1) $x_k(t_0) = \hat{x}_k(t_0)$
   $x_k(t_1) = \hat{x}_k(t_1)$
2) $\max \| x_k(t) - \hat{x}(t) \| \to 0$ при $k \to +\infty$
3) $\lim\limits_{k\to+\infty} J(x_k) = J(\hat{x})$

Теор 2 В ПЗВИ абсолютно слаб лок min совпадает с абсолютно сильным min

Теор 3 На ф-ии $x_*(t)$, $t \in [t_0,t_1]$ доставляет слаб лок min, то первая вариация $=0$ ($\dot{I}(0)=0$)

Если $x_*(t)$ доставляет сильный лок min и при малых α $\max\|x_\alpha(t) - x_*(t)\| < \varepsilon$. $I(\alpha)$ имеет в $\alpha=0$ лок min $\Rightarrow \dot{I}(+0) \geq 0$ (производная справа)

ПЗВИ Ур-ние Эйлера

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Теор 4 Пусть $x_*(t) \in C^1[t_0,t_1]$ доставляет слаб лок min

Тогда $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0 \leftarrow$ Ур-ние Эйлера

Опр Решение ур-ние Эйлера – экстремали

$$-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s))\, ds - C + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) = 0$$ Интегральное уравнение Эйлера

$(f(t,x,\dot{x}) = f(x,\dot{x}))$ $H(x,\dot{x}) = \left(\dot{x}, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x})\right) - f(x,\dot{x})$ Интеграл Энергии

$(f(t,x,\dot{x}) = f(t,\dot{x}))$ $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x_*(t), \dot{x}_*(t)) = const$ Интеграл Импульса

$(f(t,x,\dot{x}) = f(t,x))$ $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_*(t)) = 0$ Интеграл Силы

Пример Гильберта

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 t^{2/3} \dot{x}^2\, dt \to \min \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

доставл. глоб. min

Пример Вейерштрасса

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 t^2 \dot{x}^2\, dt \to \min \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

экстремалей нет

② Задача с изопериметрич. ограничениями

$$(*)\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} h_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = H_i \quad i = \overline{1,m} \end{cases}$$

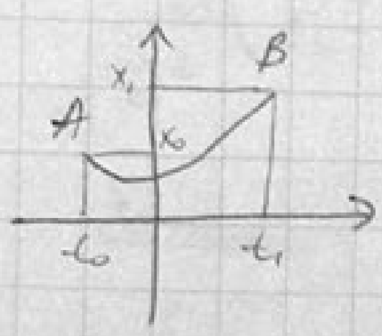
Теор $\quad$ $\exists$ $x_*(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставл. слаб. лок. min в $(*)$.

Тогда $\exists\ (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0$:

$L(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(t, x, \dot{x})$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), \lambda) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), \lambda) = 0$$

Цепная линия



однородная, гибкая цепь

H – длина цепи

Какую форму принимает цепь, подвешенная в 2-х точках

Потенциальная энергия $\to$ min

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\rho g \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} \cdot x(t)}_{f}\, dt \longrightarrow \min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}_{h}\, dt = H \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Вид экстремали $\quad x_*(t) = \dfrac{a}{\rho g}\, \operatorname{ch}\left(\dfrac{\rho g}{a} t + b\right) - \dfrac{\lambda}{\rho g}$

③ Задача Лагранжа

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

$g_i(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad i = \overline{1,k}$ $\qquad$ нет $\dot{x}$ голономная связь

есть $\dot{x}$ неголономная связь

Голономные связи

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ g_i(t, x(t)) = 0 \quad i = \overline{1,k} \end{cases} \qquad (*)$$

Теор $\exists f(\cdot,\cdot,\cdot),\ g_i(\cdot,\cdot) \in C^2$

$\exists x_*(t) \in C^1[t_0,t_1]$ доставляет слаб лок min в (*)

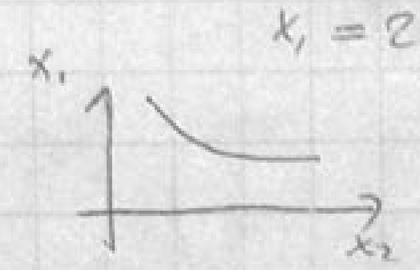
$\exists \left.\dfrac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(x_1,\dots,x_k)}\right|_{x=x_*(t)} \neq 0 \quad , g(t,x)=0$

Тогда $\exists$ такая ф-ия $\psi(t)=(\psi_1(t),\dots\psi_k(t))$ такая, что

$L(t,x_*,\dot x_*,\psi) = f(t,x_*,\dot x_*) + \sum\limits_{j=1}^{k}\psi_j(t)g_j(t,x_*)$ удовл. ур-нию Эйлера

Пример Движение без трения мат точки по плоскому желобу

$x_1 = r(x_2)$



$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1}\left\{ m\,\dfrac{\dot x_1^2(t)+\dot x_2^2(t)}{2} - mg\,x_1(t)\right\} dt \to \min \\ g(x_1,x_2) = x_1 - r(x_2) = 0 \end{cases}$$

④ Неголономные связи

$$(**)\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot x(t))\,dt \to \min \\ x(t_0)=x_0 \\ g_i(t,x(t),\dot x(t)) = 0 \qquad i=\overline{1,k} \qquad k<n \end{cases}$$

$f,g \in C^1(\cdot,\cdot,\cdot)$

Теор $\exists x_*(t) \in C^1[t_0,t_1]$ доставл. слаб лок min в (**)

$\exists \left.\dfrac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(\dot x_1,\dots,\dot x_k)}\right|_{\substack{x=x_*(t)\\ \dot x=\dot x_*(t)}} \neq 0 \quad \forall t\in[t_0,t_1]$

Тогда найдется $\psi(t) = (\psi_1(t),\dots,\psi_k(t)) \neq 0$

$L(t,x_*(t),\dot x_*(t),\psi(t)) = L \quad , \quad g(t,x_*(t),\dot x_*(t)) = g$

$f(\quad -\,\text{"}\,- \quad) = f$

$L = f + \sum\limits_{j=1}^{k}\psi_j(t)g_j$, то $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot x} = 0$ Ур-ние Эйлера

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot x}(t,x_*(t_1),\dot x_*(t_1),\psi(t_1)) = 0$

Пример (Линейно квадратичная задача)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{(Qy(t),y(t)) + (Ru(t),u(t))\right\}dt \longrightarrow \min$$

$\dot y(t) = Ay(t) + Bu(t)$

$y(t_0)=y_0,\ y\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^l,\ Q=Q^T>0,\ R=R^T>0$ матрицы

Замена, $x = (\bar x, \bar{\bar x})$ размерности $k+l=n>k$

$\bar x = y(t),\ \bar{\bar x} = \int_{t_0}^{t_1} u(s)\,ds$

$$\Rightarrow \begin{cases} J(x) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{ (Q\bar{x}(t), \bar{x}(t)) + (R\dot{\bar{\bar{x}}}(t), \dot{\bar{\bar{x}}}(t)) \} dt \longrightarrow \min \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{\bar{x}}(t) - A\bar{x}(t) - B\dot{\bar{\bar{x}}}(t) = 0 \end{cases}$$

5. <u>Условие</u> <u>трансверсальности</u> <u>с</u> <u>подвиж</u> <u>концами</u>

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min$$

На концах $\Phi(t_0, x(t_0)) = 0$

$\Psi(t_1, x(t_1)) = 0$

$$\exists \begin{pmatrix} \Phi : R^1 \times R^n \to R^k \\ \Psi : R^1 \times R^n \to R^\ell \end{pmatrix} \ni C^1$$

t_0, t_1 – могут быть не фикс.

<u>Условие</u> <u>трансверсальности</u>

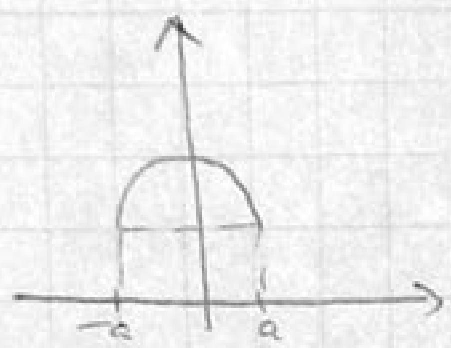
$$\{ f(\bar{t}_1, x_*(\bar{t}_1), \dot{x}_*(\bar{t}_1)) - (\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\bar{t}_1, x_*(\bar{t}_1), \dot{x}_*(\bar{t}_1)), \dot{x}_*(\bar{t}_1)) \} \delta t_1 +$$

$$+ (\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\bar{t}_1, x_*(\bar{t}_1), \dot{x}_*(\bar{t}_1)), \delta x_1) = 0$$

для $\forall (\delta t_1, \delta x_1)$ – касательный вектор к $\Psi(t, x) = 0$ в точке $(\bar{t}_1, x_*(t_1))$

6 Задача о нахождении кривой, образующей при своем вращении пов-ть возможно меньшей площади

$$J(x) = \int_{-a}^{a} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \min$$



$x(-a) = A$
$x(a) = A$
$a > 0$, $A > 0$

Экстремали задачи: $x(t) = C\,\mathrm{ch}\, t/C$

Краевые условия: $\frac{A}{C} = \mathrm{ch}\,\frac{a}{C}$ Замена $z = \frac{a}{C}$, $\alpha = \frac{A}{a}$ $\Rightarrow \alpha z = \mathrm{ch}\, z,\ z > 0$

$\exists\ \varphi(z) = \mathrm{ch} z - \alpha z$

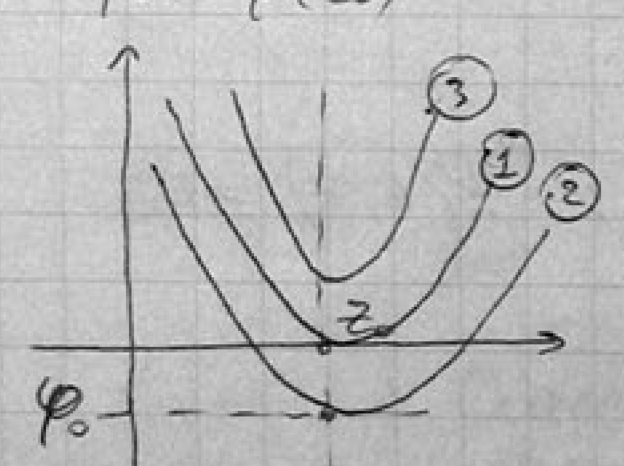
$\dot{\varphi}(z) = \mathrm{sh} z - \alpha = 0 \Rightarrow z_0 \overset{\min}{=} \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$

$\ddot{\varphi}(z) = \mathrm{ch} z > 0$

$\dot{\varphi}(+0) < 0$

$\dot{\varphi}(z) \to +\infty \mid z \to +\infty$

$\varphi_0 = \varphi(z_0)$



1 $\varphi_0 = 0$
корень 1 $\Rightarrow$ единств. $C_0 \Rightarrow$
$\exists$ единств. кривая $x_0^*(t) = C_0\,\mathrm{ch}\, t/C_0$

2 $\varphi_0 < 0 \to$ корней 2
$z_1 < z_0 < z_2$
$\Rightarrow \exists\, C_1, C_2 \Rightarrow \exists\ x_1^*(t) = C_1\,\mathrm{ch}\, t/C_1$
$x_2^*(t) = C_2\,\mathrm{ch}\, t/C_2$

3 $\varphi_0 > 0 \to$ корней нет

$$* \begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to \min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Лемма (Теор Гильберта о дифф)
$\exists\ x_*(t),\ t \in [t_0, t_1]$ — экстремаль в $*$
$\exists\ f(t, x, \dot{x}) \in C^2$. Тогда во всех точках $t \in (t_0, t_1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x_*(t), \dot{x}(t)) \neq 0$ ф-ия $x_*(t) \in C^2$ (дважды дифф

Теор (Условие Вейерштрасса — Эрдмана)
$\exists\ x_*(t),\ t \in [t_0, t_1]$ — кусочно-дифф ф-ия, доставляющая лок min и $\tau \in (t_0, t_1)$ — угловая точка.
Тогда:

1) $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau - 0)) = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau + 0))$

2) $f(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau-0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau-0)), \dot{x}_*(\tau-0)\right) =$
$= f(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau+0)) - \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau+0)), \dot{x}_*(\tau+0)\right)$

⑦ Преобразование Лежандра.

$f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$

ⓐ $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

ⓑ $\forall p \in \mathbb{R}^n \quad \exists x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x) = p$

Ур-ние Гамильтона

$\exists\ f(t, x, \dot{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$

ⓐ $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x, \dot{x}) > 0$ (Усиленное условие Лежандра)

ⓑ $\forall p \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) = p$ Разрешимо относительно $\dot{x} = \dot{x}(t, x, p)$

$\Rightarrow$ ф-ие Гамильтона $H(t, x, p) = (p, \dot{x}) - f(t, x, \dot{x})\Big|_{\dot{x} = \dot{x}(t,x,p)}$

$\exists\ x = x(t) \in C^1$

$p(t) = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$

$\frac{\partial f_*}{\partial p}(p) = x(p)$

$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t))}$ (1) Следствие преобразования Лежандра.

$\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p) = -\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \dot{x})$

$\exists\ x(t)$ удовл. ур-нию Эйлера.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}}_{p(t)}\Big) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t))}$ (2)

(1) + (2) – Система ур-ний Гамильтона
$\sim$ системе ур-ний Эйлера.

⑧ Принцип max для лин. квадратич. зад ОУ (ЛКЗОУ)

$\exists\ (x_*(t), u_*(t))$ – опт. реш. в ЛКЗОУ

Тогда для $\psi(t)$, удовл. зад. Коши:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t) + Q y(t) \\ \psi(t_1) = 0 \end{cases}$$

$$H(t, y_*(t), u_*(t), \psi(t)) = \max_{v \in R^e} H(t, y_*(t), v, \psi(t))$$

$$\boxed{u_*(t) = R^{-1} B^T \psi(t)}$$

⑨ Простейшая задача на сильный min

$$(*) \begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min \\ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Теор $\exists\ x_*(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет сильный лок min в (*)

$\Rightarrow$ для $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow E(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), v) \geq 0$, где

ф-ие Вейерштрасса $E(t, x_*, \dot{x}_*, v) = f(t, x, v) - f(t, x, \dot{x}) - \left(v - \dot{x}, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})\right)$

Пример 1

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^1 \dot{x}^3(t)\,dt \to \min \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

есть слаб лок min, но сильного нет.

Пример 2

$$\begin{cases} J(x) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \{ (P(x(t)), x(t)) + 2(Qx(t), \dot{x}(t)) + (R\dot{x}(t), \dot{x}(t)) \} dt \to \min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

~~Пример 3~~ (~~Н~~ сильвесто

Пример 4 (Задача о простом движении)

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt \to \min \\ \dot{x}(t) = u(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Теор $\exists\ u_*(t)$ — опт упр-ние и $x_*(t)$ — опт. траект. для некот. ф-ии $\psi(t) = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$

$$\Rightarrow -f(t, x_*(t), u_*(t)) + (\psi(t), u_*(t)) \geq -f(t, x_*(t), v) + (\psi(t), v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

или

$$-f(t, x_*(t), u_*(t)) + (\psi(t), u_*(t)) = \underset{\underset{u^*}{\parallel}}{\sup_{v \in R}} [-f(t, x_*(t), v) + (\psi(t), v)] \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

10 Поле экстремалей.

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt \to \min \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

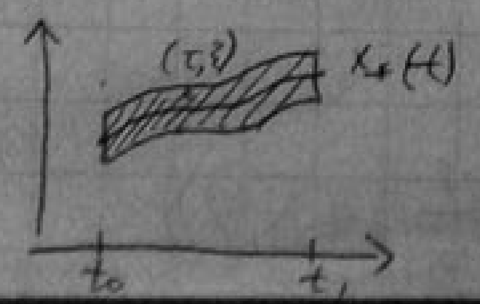
$\exists\ x_*(t),\ t \in [t_0, t_1]$ — экстремаль

$\exists\ x_*(t) \in \{x(t, \lambda)\},\ x(t,\lambda) \in C^2([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n)$

$\lambda \in \underset{\text{откр. мн-во}}{\Lambda} \subset \mathbb{R}^n$

$x_*(t) = x(t, 0)$

Опр 1 ~~Го~~ Экстремаль окружена полем экстремалей $\{x(t,\lambda)\}$, если $\exists$ окр-ть G графика $\Gamma_{x_*} = \{(t, x_*(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}, t \in [t_0, t_1]\}$ такая, что для $\forall\ (\tau, \xi) \in G$ имеется единственная экстремаль из семейства $\{x(t,\lambda)\}$, проходящей через эту точку



$\exists$ ф-ие $\lambda: G \to \mathbb{R}^n$, $\lambda = \lambda(\tau, \xi) \in C^1(G)$, что $x(\tau, \lambda) = \xi \Leftrightarrow \lambda = \lambda(\tau, \xi)$

<u>Опр2</u> Ф-ие $u: G \to \mathbb{R}^n$, $u(\tau, \xi) = \frac{dx}{dt}(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau}$

ф-ие наклона поле

<u>Опр3</u> $\exists\ \exists\ (\hat{t}, \hat{x})$, что $x(\hat{t}, \lambda) = \hat{x}$ для всех $\lambda \in \Lambda$

Тогда говорят, что экстремаль $x_*(t)$ окружена центральным полем экстремалей, $(\hat{t}, \hat{x})$ – центр поле

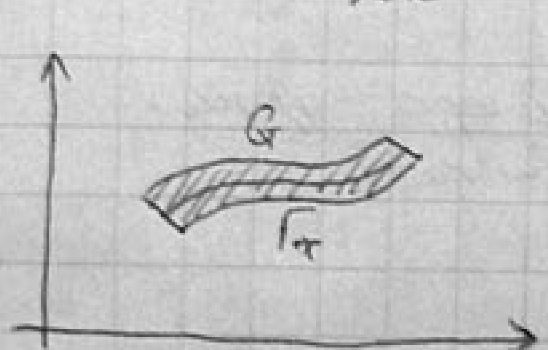
$\{x(t, \lambda)\}$ – центральные поле экстремалей

<u>Теор</u> $\exists$ экстремаль $x_*(t)$ окружена центральным полем экстремалей $\{x(t, \lambda)\}$ с центром $(\hat{t}, \hat{x})$ и определена ф-ие действия $S(\tau, \xi) \in C^1(G)$. Тогда её частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(\tau, \xi) = f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), u(\tau, \xi)\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}(\tau, \xi) = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi))$$

<u>Теор</u> $\exists$ экстремаль $x_*(t)$ окружена центральным полем экстремалей $\{x(t, \lambda)\}$, покрыв. некот. окр G_δ графика Γ_{x_*}, пуст $\forall (\tau, \xi) \in G$ и $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $E(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) \geq 0$. Тогда $x_*(t)$ доставляет сильний лок min



<u>Уравнение Гамильтона – Якоби</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) > 0 \quad t \in [t_0, t_1]$$

В окр-ти G графика Γ_{x_*} выполним преобразов. Лежандра.

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\left(\tau, \xi, \frac{dx}{dt}(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau}\right) = p(\tau, \xi)$$

Ф-ие Гамильтона $H(\tau, \xi, p(\tau, \xi)) = \left(p(\tau, \xi), \frac{dx}{dt}(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau}\right) - f\left(\tau, \xi, \frac{dx}{dt}(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau}\right)$

$$H(\tau, \xi, \underbrace{\frac{\partial S}{\partial \xi}(\tau, \xi)}_{\text{вместо } p(\tau, \xi)}) = \Big(\overbrace{\frac{\partial S}{\partial \xi}(\tau, \xi)}^{\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi))}, u(\tau, \xi)\Big) - f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) =$$

$$= -\left\{f(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) - \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\tau, \xi, u(\tau, \xi)), u(\tau, \xi)\right)\right\} = -\frac{\partial S}{\partial \tau}(\tau, \xi)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \tau}(\tau, \xi) + H\left(\tau, \xi, \frac{\partial S}{\partial \xi}(\tau, \xi)\right) = 0 \\ S(\hat{t}, \hat{x}) = 0 \end{cases}$$ Ур-ние Гамильтона – Якоби

(11) Лемма 1 (об инвариантности инт-ла Гильберта)

$\exists$ в G $\exists S(\tau, x) \in C^1(G)$ – решение ур-ние Г-Я

При $p(\tau, x) = \frac{\partial S}{\partial x}(\tau, x)$ значение $\Gamma(\gamma)$ по параметризов. кривой $\gamma \subset$ зависит лишь от концов

Лемма 2 (О существовании поля)

$\exists S(t, x) \in C^2(G)$ – решения ур-ние Г-Я в обл-ти G, тогда в окр-ти G графика Γ_{x_*} $\exists$ поле экстремалей

Лемма 3 $\exists$ $\gamma_* = \{(t, x_*(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}, t \in [t_0, t_1]\} = \Gamma_{x_*}$

экстремаль, которая окружена полем экстремалей, порож $S(t,x) \in C^2(G)$ – решение ур-ние Г-Я

Тогда $\Gamma(\gamma_*) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))\, dt = J(x_*)$

Теорема $\exists$ экстремаль $x_*(t)$ окружена полем экстремалей, которая покрывает окр-ть G графика Γ_{x_*} и порождена $S(t,x) \in C^1(G)$ – решение ур-ние Г-Я

$\exists$ в G $E(t, x, \frac{\partial H}{\partial p}(t, x), v) \geq 0$, где $p(t,x) = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)$ и

$\forall v \in \mathbb{R}^n$

Тогда $x_*(t)$ доставляет сильный лок min

Задача Коши для ур-ние Г-Я

$$\begin{cases} \dot{F}(t) + (F(t) - Q) R^{-1} (F(t) - Q) - P = 0 \\ F(\hat{t}) = 0 \end{cases}$$

Дифф. ур-ние Риккати

(13) Условие 2-го порядка в задаче ВИ

$$\begin{cases} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

$f(t, x, \dot{x}) \in C^2_{x, \dot{x}}$ кусочно-дифф. ф-ие

Теор $\exists$ $x_*(t)$ дост. слаб. лок. min. Тогда в точках непр-ти $\dot{x}_*(t)$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

Дост. условие сильного min, использ. ур-ние Г-Я . ф-ию Вейерштрасса

Теор $\exists$ $x_*(t)$ – экстремаль в ПЗВИ

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x, \dot{x}) > 0$

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial x}(t, x, \dot{x}) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right]^T \right\} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x, \dot{x}) \right]^{-1} \cdot$

$\cdot \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial x}(t, x, \dot{x}) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right]^T \right\} \geq 0$

выполнено в окр. $\Gamma_{x_* \dot{x}_*} = \{(t, x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ $\quad \|x - x_*(t)\| < \varepsilon$, $\|\dot{x} - \dot{x}_*(t)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1]\}$

Тогда $x_*(t)$ доставляет слаб лок min

(12) ~~достаточные условия сильного лок min~~

Теор $\exists x_*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ — экстремаль, погруженная в обл G в центр. поле экстремалей, порожд. дифф. ф-цией действ $S(t,x)$
$\exists \forall (t,x) \in G$ и $\forall w \in \mathbb{R}^n$ $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t,x,w) \geq 0$

Тогда $x_*(t)$ доставляет сильный лок min

Следствие $\exists x_*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ — экстремаль, явл. элементом поля экстремалей, порожденного непр-дифф решения ур-ние Г-Я $S(t,x)$ $\exists \forall (t,x) \in G$ и $\forall w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \geq 0$
Тогда $x_*(t)$ доставляет сильный лок min.

(16) $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \min$

$x(t_0) = x_0$
$x(t_1) = x_1$
$f(t,x,\dot{x}) \in C^3$, $\exists x_*(t)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$

Рассм.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(R(t)\dot{y}(t)) + (P(t) - \dot{Q}(t))y(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ \dot{y}(t_0) = \xi \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

Условие Якоби

$$\begin{cases} -R(t)\ddot{y}(t) - \dot{R}(t)\dot{y}(t) + (P(t) - \dot{Q}(t))y(t) = 0 \leftarrow \text{ур-ние Якоби} \\ y(t_0) = 0 \\ \dot{y}(t_0) = \xi \end{cases}$$

Если $\xi = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ $\varnothing$ $\Rightarrow$ будем рассм $\xi \neq 0$

Опр Если для нек. $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi = 0$ и $\tau \in (t_0, t_1]$: $y(\tau) = 0$, где $y(t)$ — решение зад. Коши, то τ — точка сопряженной с t_0

Теор Чтобы $x_*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ доставляла слаб лок min, необходимо, чтобы на интервале (t_0, t_1) не $\exists$ точек, сопряж с t_0

(14)

Теор $\exists x_*(t)$ – экстремаль в ПЗВЧ для которой выполнено усиленное условие Лежандра. Пусть $[t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряж с точкой t_0, тогда $x_*(t)$ доставляет слабый лок min