7.5.3. *Примеры решения задач по статистической физике и термодинамике*

Задача 1. В сосуде объемом V_1 = 3 л находится газ под давлением 0,2 МПа, в другом сосуде объемом V_2 = 4 л находится тот же газ под давлением 0,1 МПа. Температура в обоих сосудах одинакова. Под каким давлением будет находиться газ, если сосуды соединить трубкой?

Дано:

$$V_1 = 3\ \text{л} = 3\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$$
$$p_1 = 0{,}2\ \text{МПа} = 0{,}2\cdot 10^{6}\ \text{Па}$$
$$V_2 = 4\ \text{л} = 4\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$$
$$p_2 = 0{,}1\ \text{МПа} = 0{,}1\cdot 10^{6}\ \text{Па}$$
$$T = \text{const}$$
$$\mu = \text{const}$$

Найти: p

Решение: По закону Дальтона:

$$p = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \qquad (1)$$

где $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ - парциальные давления.

Из уравнения Менделеева-Клапейрона до соединения сосудов получим:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT, \quad (2) \qquad p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu}RT \qquad (3)$$

где m_1 и m_2 - масса газа в первом и во втором сосудах;
? - молярная масса;
R - газовая постоянная.

Аналогично для парциальных давлений (после соединения):

$$\tilde{p}_1(V_1 + V_2) = \frac{m_1}{\mu}RT \qquad (4) \qquad \text{и} \qquad \tilde{p}_2(V_1 + V_2) = \frac{m_2}{\mu}RT \qquad (5)$$

Так как T = const и ? = const, то правые части уравнений (2) и (4), а также уравнений (3) и (5) равны. Тогда:

$$p_1V_1 = \tilde{p}_1(V_1 + V_2);$$
$$p_2V_2 = \tilde{p}_2(V_1 + V_2).$$

Отсюда:

$$\tilde{p}_1 = p_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2} \quad (6) \qquad \text{и} \qquad \tilde{p}_2 = p_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2} \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (1), получим:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 0{,}1 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= 0{,}14 \cdot 10^6 \ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 0{,}14 \text{ МПА} = 1{,}4 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Ответ: $P = 1{,}4 \cdot 10^5$ Па

Задача 2. Какая часть молекул кислорода при температуре T = 273 К обладает скоростями, лежащими в интервале от $v_1 = 100$ м/с до $v_2 = 110$ м/с? Чему равна наиболее вероятная скорость движения молекул?

Дано:

$T = 273$ К

$v_1 = 100$ м/с

$v_2 = 110$ м/с

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Найти: $v_в$, $\frac{\Delta N}{N}$

Решение: Найдем наиболее вероятную скорость молекул:

$$v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

где R - газовая постоянная,
? - молярная масса.

Подставим численные значения:

$$v_в = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} = 375{,}5 \text{ м/с}$$

Интервал скоростей: $\Delta v = v_2 - v_1 = 110 - 100 = 10 \text{ м/с}$

Это много меньше v_1 и v_2. Поэтому можно использовать приближенную формулу:

$$\Delta N = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u \qquad (1)$$

где ?N - число частиц, обладающих скоростями в интервале от v_1 до v_2 ,
N - полное число частиц,

$$u = \frac{v}{v_в}; \qquad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_в}.$$

Относительное число частиц или доля молекул, обладающих скоростями в заданном интервале, найдем из формулы (1) при $u = \frac{v_1}{v_в}$:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} u^2 \Delta u \qquad (2)$$

Вычислим: $u = \frac{v_1}{v_в} = \frac{100}{375{,}5} = 0{,}27$, подставим в (2) и учтем, что $e^{-u^2} = e^{-0{,}073} \approx 1$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{3{,}14}} e^{-0{,}073} (0{,}27)^2 \frac{10}{375{,}5} = 0{,}0043 = 0{,}43\%$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}43\%$ $\quad v_в = 375{,}5 \text{ м/с}$

Задача 3. Определить среднюю длину свободного пробега молекул и число соударений за 1 с, происходящих между всеми молекулами кислорода, находящегося в сосуде емкостью 2 л при температуре 27°С и давлении 100 кПа.

Дано:

$V = 2\ л = 2 \cdot 10^{-3}\ м^3$

$\mu = 32 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$

$T = 300\ К$

$p = 100\ кПа = 10^5\ Па$

$d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}\ м$

Найти: $<?>$, z

Решение: Средняя длина свободного пробега молекул вычисляется по формуле:

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \qquad (1)$$

где d - эффективный диаметр,
n - концентрация, т.е. число молекул в единице объема.

Давление связано с концентрацией:

$$p = nkT$$

где k - постоянная Больцмана.

Выразим n:

$$n = \frac{p}{kT} \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и получим:

$$<\lambda> = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \qquad (3)$$

Число соударений, происходящих между всеми молекулами за 1 с равно:

$$z = \frac{1}{2} < z > N \qquad (4)$$

где N - число молекул в сосуде объемом V,
< z > - среднее число соударений одной молекулы за 1 с.

Число молекул в сосуде равно:

$$N = nV \qquad (5)$$

Среднее число соударений молекулы за 1 с:

$$< z > = \sqrt{2}\pi d^2 n < v > \qquad (6)$$

где < v > - средняя арифметическая скорость молекулы.

$$< v > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \qquad (7)$$

Подставим в (4) выражения (5), (6), (7):

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi d^2 n \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} V = 2\pi d^2 n^2 \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}} V$$

Учтем (2):

$$z = \frac{2\pi d^2 p^2 V}{k^2 T^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi\mu}}$$

Подставим численные значения:

$$z = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20}\ \text{м}^2 \cdot 10^{10}\ \text{Па}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3}{1{,}38^2 \cdot 10^{-46}\ \text{Дж}^2 \cdot 9 \cdot 10^4\ \text{К}^2} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{8{,}31 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\right) \cdot 300\ \text{К}}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} = 9 \cdot 10^{28}\ \text{с}^{-1}$$

$$< \lambda > = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-29}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 300\ \text{К}}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20}\ \text{м}^2 \cdot 10^5} = 3{,}56 \cdot 10^{-8}\ \text{м}$$

Ответ: $z = 9 \cdot 10^{28}$ с-1, < ? > = $3{,}56 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 4. Горячая вода некоторой массы отдает теплоту холодной воде такой же массы и температуры их становятся одинаковыми. Показать, что энтропия при этом увеличивается.

Решение: Обозначим температуру горячей воды T_1, холодной T_2, а температуру смеси Q. Определим температуру смеси, исходя из уравнения теплового баланса.

$$m \cdot c(T_1 - Q) = m \cdot c(Q - T_2)$$

где c - удельная теплоемкость, m - масса.

Тогда: $T_1 - Q = Q - T_2$

Отсюда температура смеси равна:

$$Q = \frac{T_1 + T_2}{2} \qquad (1)$$

Изменение энтропии, происходящее при охлаждении горячей воды:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{Q} \frac{dQ_T}{T}$$

Элементарное количество теплоты равно:

$$dQ_T = c \times m \times dT$$

Тогда:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{Q} \frac{c \cdot m \cdot dT}{T} = c \cdot m \cdot \ln \frac{Q}{T_1}$$

Изменение энтропии, происходящее при нагревании холодной воды:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{Q} \frac{c \cdot m \cdot dT}{T} = c \cdot m \cdot \ln \frac{Q}{T_2}$$

Изменение энтропии системы равно:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = c \cdot m \cdot \ln \frac{Q}{T_1} + c \cdot m \cdot \ln \frac{Q}{T_2} = c \cdot m \cdot \ln \frac{Q^2}{T_1 T_2}$$

С учетом (1) получим:

$$\Delta S = c \cdot m \frac{\ln (T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}$$

Так как $T_1 > T_2$, то $(T_1 + T_2)^2 > 4T_1T_2$, следовательно: $\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} > 1$ и $\ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} > 0$.

Тогда $\Delta S. > 0$, т.е. энтропия возрастает.