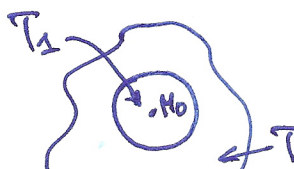


[0] [равн. ск-ть интеграла в точке] $Y(M) = \int_S F(M, P) f(P) dS_P$,
 где S - поверхность, $F(M, P) = \infty$ при $M=P$ ск-ая равн.-но в τ .
 $P_0 \in S \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \int_{S_\delta} F(M, P) f(P) dS_P \right| < \varepsilon$, где S_δ - любая
 область на S , $S_\delta \subset K_{P_0}^\delta$, $K_{P_0}^\delta$ - шар, $\forall M \in K_{P_0}^\delta$.

[0] $Y(M) = \iiint_\tau F(M, P) f(P) d\tau_P$ изв. равн. ск-ая в т. P_0 , если
 где $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$, т.е. $|Y_\delta(M)| = \left| \iiint_{T_\delta} F(M, P) f(P) d\tau_P \right| < \varepsilon$,
 где $\forall M \in K_{P_0}^\delta$, $K_{P_0}^\delta$ - шар, $T_\delta \subset K_{P_0}^\delta$, T_δ - любая область.

[1] $Y(M) \Rightarrow$ в т. $M_0 \Rightarrow Y(M)$ - непрерыв. в т. M_0 .

Доказ. н.г.: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall M : |M - M_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |Y(M) - Y(M_0)| < \varepsilon$.



$$Y = Y_1 + Y_2 \quad |Y(M_0) - Y(M)| \leq |Y_2(M_0) - Y_2(M)| +$$

$$\overset{\text{по } T}{\text{по } T_1} \quad + |Y_1(M_0)| + |Y_2(M)| \quad (\leq)$$

Выберем T_1 внутри сферы радиуса δ_1 , т.е. что

$|Y_1(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|Y_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Это можно сделать в силу равн.

ск-ти $Y(M)$ в т. M_0 .

$Y_2(M)$ - непрерыв. в т. M_0 , т.к. M_0 лежит вне области интегрир-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta_2 : |Y_2(M_0) - Y_2(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|M - M_0| < \delta_2$.

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{при} \quad \begin{cases} |M - M_0| < \delta_1 \\ \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \end{cases} \quad \text{т.е. } \underline{\delta}.$$

ЗАПИСЬ ОП-РА ЛАПЛАСА $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ В ДРУГИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

- полярная с-ма координат: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} =$
- цилиндрические с-ме координат:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z: \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- сферические с-ме координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta: \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u$$

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) \leftarrow \text{в сферических с.к.}$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ УР-Я ЛАПЛАСА, ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ РАДИУСА.

$$\textcircled{1} n=2, u=u(r): \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{du}{dr}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r \frac{du}{dr} = C_1 \\ r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow u(r) = C_1 \ln r + C_2 \Rightarrow u(r) = \ln \frac{1}{r} - \text{фундаментальное решение уравнения Лапласа на м-ти}$$

$$\textcircled{2} n=3, u=u(r): \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (ru) = 0 \Rightarrow ru = C_1 r + C_2, r \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} \Rightarrow u(r) = \frac{1}{r} - \text{фундаментальное решение уравнения Лапласа в ш-ве.}$$

потенциал точечного заряда

ФОРМУЛЫ ГРИНА

$$\text{Пусть } u, v \in C^1(\bar{T}) \cap C^2(T)$$

$$\text{I Ф-ла Грина: } \iiint_T u \Delta v d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_T (\nabla u \nabla v) d\tau$$

$$\text{II Ф-ла Грина: } \iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

$$\text{III Ф-ла Грина: } 4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n_p} \frac{1}{R_{M_0 P}} d\sigma - \iiint_T \frac{\Delta u}{R_{M_0 P}} d\tau$$

Если u - гармоническая ф-я, т.е. $\Delta u = 0$, тогда:

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n_p} \cdot \frac{1}{R_{M_0 P}} d\sigma.$$

ПОТЕНЦИАЛ	ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ	ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ
двойного слоя	$w(M) = \int_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}} \nu(P) dS_P$	$w(M) = \iiint_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}^2} \nu(P) dS_P$
простого слоя	$v(M) = \int_S \epsilon_n \frac{1}{r_{PM}} \rho(P) dS_P$	$v(M) = \iiint_S \frac{1}{r_{PM}} \rho(P) dS_P$
объёмный	$u(M) = \iiint_T \epsilon_n \frac{1}{r_{PM}} \mu(P) d\tau_P$	$u(M) = \iiint_T \frac{\mu(P) d\tau_P}{r_{PM}}$

РАЗРЫВ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

$$\begin{aligned} W_B(P_0) &= W(P_0) + 2\pi \nu(P_0) - \text{внутр. пред. значение} \\ W_H(P_0) &= W(P_0) - 2\pi \nu(P_0) - \text{внешн. пред. значение} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} W_B(P_0) &= W(P_0) + 2\pi \nu(P_0) - \text{внутр. пред. значение} \\ W_H(P_0) &= W(P_0) - 2\pi \nu(P_0) - \text{внешн. пред. значение} \end{aligned}} \right\} \text{в трёхмерном случае}$$

$$\begin{aligned} W_B(P_0) &= W(P_0) + \pi \nu(P_0) - \text{внутр. пред. значение} \\ W_H(P_0) &= W(P_0) - \pi \nu(P_0) - \text{внешн. пред. значение} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} W_B(P_0) &= W(P_0) + \pi \nu(P_0) - \text{внутр. пред. значение} \\ W_H(P_0) &= W(P_0) - \pi \nu(P_0) - \text{внешн. пред. значение} \end{aligned}} \right\} \text{в двумерном случае}$$

СКАЧОК НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПР. СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0) \right)_B = \mathcal{J}(P_0) - 2\pi \mu(P_0) - \text{внутр. пред. значение}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0) \right)_H = \mathcal{J}(P_0) + 2\pi \mu(P_0) - \text{внешнее пред. значение}$$

СВЕДЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ:

$$\nu(S_0) + \int_0^l K_1(S_0, S) \nu(S) dS = \frac{1}{4} f(S_0) - \text{интегр. ур-е для I краевой задачи (Дирихле)}$$

$$\mu(S_0) + \int_0^l K_2(S_0, S) \mu(S) dS = -\frac{1}{4} f(S_0) - \text{интегр. ур-е для II краевой задачи (Неймана)}.$$

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

$$G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_{MM_0}} + v(M_0, M), \text{ где } \Delta_M v = 0, v(M_0, M)|_{M \in S} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_{MM_0}}|_{M \in S}$$

$$\Rightarrow \text{виз. реш-е: } u(M_0) = - \iint_S \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M) u(M) dS_M.$$

1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка.

Рассм. $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1)$$

• Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от (x, y, u, u_x, u_y) , то ур-е (1) наз. квазилинейным.

• Если $F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + c u + f(x, y)$ и a_{ij}, b_i, c зависят только от x, y , то ур-е (1) наз.-е линейным.

$$(2) : a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y) = 0.$$

• Если $f=0$, то ур-е (2) наз. однородным

• Если $f \neq 0$, то ур-е (2) наз. неоднородным.

Ур-е Аппеля : $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \pm 1$; $\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} = \pm 1$

Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят только от x и y : $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad \begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + \\ &+ u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} ; \quad u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_y + \\ &+ u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} ; \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + \\ &+ u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

$$u_{\xi\xi} (a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2) + 2u_{\xi\eta} (a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{12} \xi_y \eta_y) + u_{\eta\eta} (a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2) + \bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \quad (3)$$

Если F - линейна относительно u, u_x, u_y , то $\bar{F}$ линейна относительно u, u_ξ, u_η

$$(4) : \bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = 0 \Leftrightarrow a_{11} \left(-\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\xi_x}{\xi_y} \right) + a_{22} = 0 \quad (5)$$

12 Если $\xi = \varphi(x, y)$ - решение (4), то $\eta(x, y) = C$ - общий интеграл уравнения (6) : $a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0$ (6).

(б) - характеристическое уравнение гнр (5).

Доп. во!: $\varphi(x, y) = C \Rightarrow d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Big|_{y=f(x, C)}$
Верно и обратное!

[12] Если $\varphi(x, y) = C$ - общий интеграл (6), то $\xi = \varphi(x, y)$ - реш-е (4).
[доп. во - аналогично предыдущему]

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} & (7.1) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} & (7.2) \end{cases} \quad (7) \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \text{ из. гнпр-мманом иск. уравнения}$$

1) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \Rightarrow$ гиперболический гнр; 2) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \Rightarrow$ эллиптический гнр; 3) $\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический гнр.

$$\Delta = \overline{a_{12}^2} - \overline{a_{11}a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \gamma^2, \text{ где } \gamma = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при замене гнр упр-я сокращается,

1) Рассм. одн-го G , во всех осях которой $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

$\xi = \varphi(x, y)$ - решение (7.1), $\eta = \psi(x, y)$ - решение (7.2) $\Rightarrow \overline{a_{11}} = \overline{a_{22}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\xi\eta = \Phi, \text{ где } \overline{\Phi} = -\frac{F}{2a_{12}} \end{aligned} \right\} \quad \text{— 1-ая каноническая форма гнр уравнения гиперболического гнра.}$$

замена: $\begin{cases} \alpha = (\xi + \eta) \cdot \frac{1}{2}, & \xi = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 2 \\ \beta = (\xi - \eta) \cdot \frac{1}{2}, & \eta = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &u\xi = u_\alpha \cdot \frac{1}{2} + u_\beta \cdot \frac{1}{2}, \\ &u\xi\eta = u_\alpha \alpha \frac{1}{4} + u_\beta \beta \left(-\frac{1}{4}\right) + \\ &+ u_\beta \alpha \frac{1}{4} + u_\beta \beta \left(-\frac{1}{4}\right) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &u_\alpha \alpha - u_\beta \beta = 4\overline{\Phi} \end{aligned} \right\} \quad \text{— 2-ая каноническая форма}$

2) Пусть в одн-ти G $\Delta = 0$, т.е. $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 = 0$.

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y) \mid a_{12}^2 = a_{11}a_{22}, a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}, \text{ тогда } \overline{a_{12}} = a_{11}\xi\eta_x + + \sqrt{a_{11}a_{22}}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + + \sqrt{a_{22}}\eta_y) \mid \overline{a_{11}} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0 \Rightarrow \overline{a_{12}} = 0$$

$$u\eta\eta = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

3) $\Delta < 0$: В этом случае (7.1) - (7.2) им. комплекс. реш-е: $\xi(x, y) = = \eta(x, y), \eta(x, y) = \psi(x, y)$

$$u_{\xi\eta} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) \quad , \quad \xi = \alpha + i\beta, \quad \alpha = \operatorname{Re} \zeta, \eta = \alpha - i\beta, \quad \beta = \operatorname{Im} \zeta.$$

$$\xi x = \alpha x + i\beta x, \quad \xi y = \alpha y + i\beta y$$

$$a_{11}\xi x^2 + 2a_{12}\xi x\xi y + a_{22}\xi y^2 = a_{11}(\alpha x + i\beta x)^2 + 2a_{12}(\alpha x + i\beta x)(\alpha y + i\beta y) + a_{22}(\alpha y + i\beta y)^2 = (a_{11}\alpha x^2 + 2a_{12}\alpha x\alpha y + a_{22}\alpha y^2) - (a_{11}\beta x^2 - 2a_{12}\beta x\beta y + a_{22}\beta y^2) + 2i(a_{11}\alpha x\beta x + a_{12}(\alpha x\beta y + \alpha y\beta x) + a_{22}\alpha y\beta y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}, \quad \overline{a_{12}} = 0 \Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta})$$

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ - уравнение колебаний струны;

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -a^2$$

$$D = 0 + a^2 > 0 \Rightarrow \text{гиперболический тип}$$

2) $u_t = a^2 u_{xx}$ - уравнение теплопроводности $\Rightarrow$ параболич. тип

3) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ - уравнение Лапласа : $D = -1 \Rightarrow$ эллипс. тип.

$$> 1]: u_{xx} = u_{yy} \quad : \text{реш.-я: } u = 0, 1, x, y, x^2 + y^2, \sin x \sin y$$

$$u = f_1(x+y) + f_2(x-y) - \text{общее решение}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{yy}, & x > 0, 0 < y < \pi, \\ u|_{x=0} = \sin y, & u_x|_{x=0} = \cos y \end{cases} \quad - \text{имеет единств. решение} \\ u(x, y) = \sin(x+y).$$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad - \text{имеет решение: } u = 0, \sin x \sin y, \sin kx \sin ky.$$

Как избавиться от первых произв. в ур-ях с нес. коэф-тами:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$$

Положим $a_{12} = 0$ (от него всегда можно избавиться):

$$a_{11}u_{xx} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0.$$

$$u = v e^{\lambda x + \mu y} \quad ; \quad u_x = v_x e^{\lambda x + \mu y} + v \lambda e^{\lambda x + \mu y}$$

$$u_y = v_y e^{\lambda x + \mu y} + \mu v e^{\lambda x + \mu y} \quad ; \quad u_{xx} = (v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v) e^{\lambda x + \mu y} ;$$

$$u_{yy} = (v_{yy} + 2\mu v_y + \mu^2 v) e^{\lambda x + \mu y} \quad \Rightarrow$$

$$a_{11}v_{xx} + a_{22}v_{yy} + v_x(2\lambda a_{11} + b_1) + v_y(2\mu a_{22} + b_2) + (c v + \lambda^2 v + \mu^2 v) + \tilde{f} = 0,$$

$$\text{где } \tilde{f} = f \cdot e^{-\lambda x - \mu y} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Если } a_{11}, a_{22} \neq 0, \text{ то можно} \\ \text{выбрать } \lambda \text{ и } \mu, \text{ такие что: } \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 2\lambda a_{11} + b_1 = 0, \\ 2\mu a_{22} + b_2 = 0 \end{array} \right]$$

2. Некоторые задачи, приводящие к уравнению гиперболического типа.

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ - простейший вид ур-я колебаний.

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$a_{11} = a^2, a_{12} = 0, a_{22} = -1. \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 > 0.$$

замена: $y = at \Rightarrow u_{yy} = u_{xx}$ - обычно опис. колеб. процессы.

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

струна: толкая, ширкая, гибкая



вдоль струны вводится одномерная система координат.

$u(x, t)$ - смещение точки с координатой x в момент времени t .

1. поперечные колебания: $u_1(x, t) = 0$;

2. продольные колебания: $u_2(x, t) = 0$; Пусть $u_2(x, t) = u(x, t)$

3. будем рассм-ть малые колебания, т.е. $|u_x(x, t)| \ll 1$

$$\Rightarrow l(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx \approx x_2 - x_1 \quad \text{т.к. } u_x \text{ малая}$$

длина не меняется со временем.

при поперечных колебаниях суммарная сила вдоль оси $Ox = 0$.

НАТЯЖЕНИЕ: 1. $T_x = T_0^{(x)} \cos \alpha = \frac{T_0(x)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \approx T_0(x),$

$$T_x(x_2) \approx T(x_2), \quad -T_x(x_1) \approx -T(x_1)$$

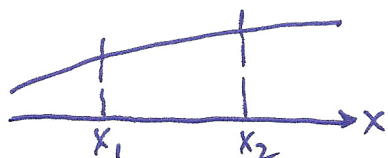
$\Rightarrow$ натяжение не зависит от $x \Rightarrow$ это - константа T_0 .

2. $T_y(x, t) = T_0 \sin \alpha = T_0 \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} = T_0 u_x(x, t).$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \text{ или если } \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \text{с-на мал. тел, } \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$\vec{F}_i$ - внутренние + внешние силы; $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,1} + \vec{F}_{i,2}$

$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$; $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,2}$; $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ - сумма внешних сил для всей с-мы тел.



- выделим кусок струны.

$$P = \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) \rho(x) dx \quad ; \quad \rho(x) - \text{линейная плотность.}$$

$$F(t) = T_0 (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) + \int_{x_1}^{x_2} F(t, x) dx \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{силы, не связанные с} \\ \text{самой струной.} \end{array}$$

принтерпирем ур-е: $P(t_2) - P(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$

$$P(t_2) - P(t_1) = \int_{x_1}^{x_2} (u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)) \rho(x) dx = T_0 \int_{t_1}^{t_2} (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt.$$

Предположим, что u имеет непрерывные вторые производные по x и по $t \Rightarrow$ воспользуемся $\mathbb{R}$ -ой теоремой о среднем значении:
Лагранжа и $\mathbb{R}$ -ой среднего значения;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^*, t^*)(t_2 - t_1)(x_2 - x_1) \rho(x^*) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^{**}, t^{**})(x_2 - x_1)(t_2 - t_1) + F(x^{***}, t^{***})(t_2 - t_1)(x_2 - x_1).$$

Перейдем к пределу в точке (x, t) : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho(x) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t).$

Если струна однородна $\Rightarrow \rho(x) = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0} F(x, t)$

Обозн. $\frac{T_0}{\rho_0} = a^2$, $\frac{1}{\rho_0} F(x, t) = f(x, t) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)}$$

УР-Е ПОПЕРЕЧНЫХ МАЛЫХ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ.

Если $F(x, t) \neq 0$, то это - вынужденные колебания.

3. Математическая постановка задачи для уравнения колебания струны.

простейший вид ур-я колебаний: $a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$

$$a_{11} = a^2, a_{12} = 0, a_{22} = -1 : D = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = a^2 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ур-е гиперболического типа.

Вдоль струны вводится ортогональная система координат;

$u(x, t)$ - смещение точки с координатой x в момент времени t .

колебания $\rightarrow$ поперечные: $(u_1(x, t) = 0)$
 $\rightarrow$ продольные: $(u_2(x, t) = 0)$.

Пусть $u_2(x, t) = u(x, t)$.

Будем рассм-ть малые колебания, т.е. тг угла наклона

$$|u_x(x, t)| \ll 1$$

$$\Rightarrow l(x_1, x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx \approx x_2 - x_1 \Rightarrow \text{натяжение}$$

струны со временем не меняется.

$$① T_x = T_0(x) \cos \alpha = \frac{T_0(x)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} \approx T_0(x) ; T_x(x_2) \approx T_2 ;$$

$$-T_x(x_1) \approx -T(x_1) \Rightarrow \text{натяжение не зависит от } x.$$

$$② T_y(x, t) = T_0 \sin \alpha = T_0 \frac{u_x(x, t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x, t)}} = T_0 u_x(x, t).$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (\text{или } \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F})$$

$$\Rightarrow \text{с-на материальных точек} : \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i, i = \overline{1, n}$$

$$\vec{F}_i - \text{внутренние + внешние силы} ; \vec{F}_i = \vec{F}_{i,1} + \vec{F}_{i,2}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i ; \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,2}$$

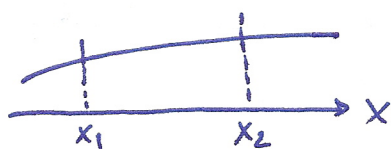
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \text{ где } F - \text{сила внешних}$$

для всей системы сил.

Выделим кусок струны:

$\rho(x)$ - плотность - линейная

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) \rho(x) dx = p$$



силы, не связанные с самой струной

$$F(t) = T_0 (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) + \int_{x_1}^{x_2} F(t, x) dx$$

проинтегрируем ур-е: $p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$

$$\begin{aligned} p(t_2) - p(t_1) &= \int_{x_1}^{x_2} (u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)) \rho(x) dx = \\ &= T_0 \int_{t_1}^{t_2} (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Предположим, что u имеет непр. вторые производные по x и по $t \Rightarrow$ восп-ся $\oint$ -ной формул. приращений

Лагранжа и $\oint$ -ной среднего значения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1^*, t^*) (t_2 - t_1) (x_2 - x_1) \rho(x^*) &= T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^{***}, t^{***}) (x_2 - x_1) \cdot \\ &\cdot (t_2 - t_1) + F(x^{***}, t^{***}) (t_2 - t_1) (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Переходим к пределу в т. (x, t) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho(x) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t)$$

Если струна однородна, то $\rho(x) = \text{const} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0} F(x, t)$$

Обозн. $T_0/\rho_0 = a^2$, $\frac{1}{\rho_0} F(x, t) = f(x, t)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)} \quad - \quad \text{УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ, МАЛЫХ, ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ.}$$

Если $f(x, t) \neq 0$, то это - вынужденные колебания.

Постановка задач

I] струна конечной длины.

начальные условия : $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$



граничные условия : 1) $u(0,t) = \mu_1(t)$ - граничное усл-е I-го рода
если $\mu_1(t) = 0$, то $u(0,t) = 0$
← усл-е закреплённого конца

2) $u_x(0,t) = \nu_1(t)$ - граничное усл-е II-го рода

То $u_x(0,t) = T_0 \nu_1(t) \Rightarrow$ сила внешнего воздействия : $-T_0 \nu_1(t)$

Если $\nu_1(t) = 0$, то это - условие свободного конца.

3) $\alpha_1 u_x(0,t) - \beta_1 u(0,t) = \chi_1(t)$ - гр. усл-е III-го рода.

НАПРИМЕР:] упр. сила, т.е. возм. упр. сила, тянущая

струну иззаг : $T_0 u_x(0,t) = \gamma u(0,t) \Rightarrow T_0 u_x(0,t) - \gamma u(0,t) = 0$.

Если для правого конца, то $\alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = \chi_2(t)$

I :
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \varphi(x); & u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), & u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

II : неограниченная струна (только свободные колебания):

II :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, & 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

III : полнеограниченная струна:

III :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, & 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu(t). \end{cases}$$

4. Метод распространяющихся волн.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УР-Я КОЛЕБАНИЙ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

перейдем к I_{00} кан. форме: $(dx)^2 - (adt)^2 = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow x - at = c_1 \vee x + at = c_2 : \text{ замена: } \begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta) \Rightarrow u = \underbrace{\int f(\eta) d\eta}_{f_2} + f_1(\xi)$$

$$\Rightarrow u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at).$$

для $u_1(x, t) = f_1(x - at)$ выполним преобр-е Галилея: $t' = t$,

$x' = x - at \Rightarrow u_1 = f_1(x') \Rightarrow u_1$ - волна, бегущая вправо;

аналогично: u_2 - волна, бегущая влево.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = f_1'(x - at)(-a) + a f_2'(x + at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -a f_1'(x) + a f_2'(x) = \psi(x).$$

f_1 и f_2 - функции
одного аргумента.

Продифференцируем по x $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$:

$$\begin{cases} -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + C, \\ f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds - \frac{C}{2}, \\ f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + \frac{C}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \left(\int_{x_0}^{x+at} \psi(s) ds - \int_{x_0}^{x-at} \psi(s) ds \right).$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

ФОРМУЛА
ДАЛАМБЕРТА

- Если решение $\exists$ -ет, то оно - единственно и экв. Даламбера.
- Чтобы представить данное реш-е в ур-е, нужно, чтобы φ была дважды дифф. ф-я, ψ - один раз дифф. ф-я.
- Пусть даны две задачи:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ & 0 < t < \infty. \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases}$$

[Л] Если начальные условия в двух задачах Коши обн. δ -близостью: $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \delta, |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \delta$ и если процесс рассм. в течение конечного промежутка времени $[0, t_0]$, то $\forall \varepsilon$ можно указать δ и t_0 , т.е. $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon$.

Доказ-во! $u_1 - u_2 = u \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) = \psi(x). \end{cases}$

$\Rightarrow$ реш-е - ф-я Даламбера: $|u(x, t)| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a} \cdot 2at_0\delta \leq \delta + t_0\delta \leq \varepsilon \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$, т.е. δ зависит от ε и t_0 .
 (т.е. доказательство нестр. зав-ть реш. от вх. данных.)

ПОНЯТИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

задачи Коши для ур-я колебаний:

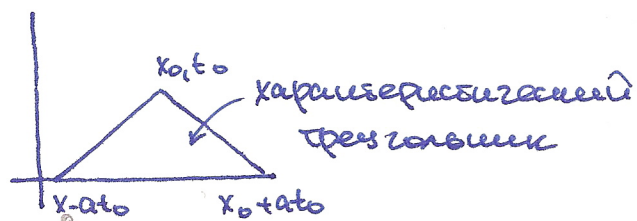
Построим пос-ть гладких функций

$\varphi_n \Rightarrow \varphi(x); \psi_n(x) \Rightarrow \psi(x)$

Для $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ $\exists$ реш-е: $u_n(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi_n(x-at) + \varphi_n(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(s) ds.$

Перейдём к пределу при $n \rightarrow \infty \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$
 ↳ обобщённое решение з. Коши для негладких начальных условий.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОР-ЛЫ ДАЛАМБЕРА



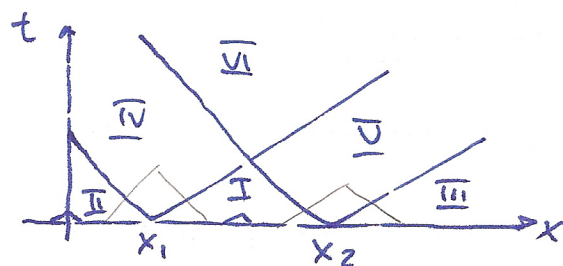
$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} (\psi(x_0 - at_0) + \psi(x_0 + at_0)) + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \Psi(s) ds.$$

Построим характеристики: $\begin{cases} x - at = x_0 - at_0, \\ x + at = x_0 + at_0. \end{cases}$

$$x = x_0 - at_0, x = x_0 + at_0.$$

$\Rightarrow$ где реш-я можно найти полагая u в г. $(x_0 - at_0)$ и $(x_0 + at_0)$ и проинтегр-ть Ψ между этими точками;

Решение в некоторой точке зависит от начальных условий, лежащих на основании характ. Δ -ка



В I касе: решение опр-ся Φ . Даламбера;

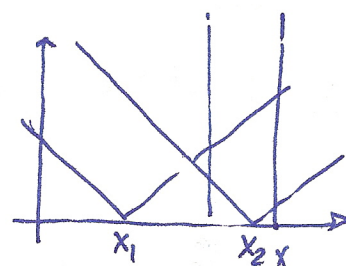
Во II касе: вне сегм-та $[x_1, x_2]$ начальные усл-я $= 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ во II и III касе $u(x, t) = 0$.

В IV касе: $u(x, t) = \frac{1}{2} \psi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x+at}^{x+at} \Psi(s) ds$

В V касе: $u(x, t) = \frac{1}{2} \psi(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x_2} \Psi(s) ds$

В VI касе: $u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} \Psi(s) ds.$



Т.о. Φ -ла Даламбера пошезывает, как в разных точках развивается процесс.

ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ.

$$\text{III: } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < +\infty, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \psi(x), u_t(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty. \\ u(0, t) = \mu(t). \end{cases}$$

Будем искать решение в виде суммы двух функций:

$$u = u_1 + u_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ u_1(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u_1(0, t) = \mu(t) \end{cases} \quad (\text{III a}) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \\ u_2(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \\ u_2(0, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{III б})$$

А Если в задаче Коши для неогр. системы нез. ф-ии евр. нечётными осн-но $\varepsilon \cdot x = 0$, то $u(0, t) = 0$. Если в з. Коши для неогр. системы нез. ф-ии евр. чётными осн. т. $x = 0$, то $u_x(0, t) = 0$.

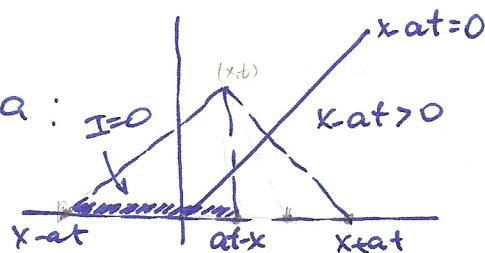
Доп-во: $u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$

φ, ψ - нечётные $\Rightarrow u(0, t) = 0$; φ, ψ - чётные $\Rightarrow u_x(0, t) = 0$. ч.г.з

(III б) (всё же задачу для неогр. системы нечётно продолжим на обл. отрицат. значений: $\begin{cases} \varphi(x) = -\varphi(-x), x < 0, \\ \psi(x) = -\psi(-x), x < 0. \end{cases}$

Решим задачу II при усл. $x > 0 \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$

① $x-at > 0 \Rightarrow$ обычная ф-ла Даламбера:



② $x-at < 0 \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} (-\varphi(at-x) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds =$
 $= \frac{1}{2} (-\varphi(at-x) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds.$

5. Метод разделения переменных для уравнения колебаний.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), t > 0, 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (I)$$

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ : (от противного): Пусть $\exists$ два разл. реш-я u_1 и $u_2 \Rightarrow v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

$v(x, t)$ удовл-ет однородному ур-ю:

Построим функцию:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, \\ v(x, t) = 0, v_t(x, t) = 0. \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (\tau_0 v_x^2(x, t) + \rho_0 v_t^2(x, t)) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'(t) = \int_0^l (\tau_0 v_x(x, t) v_{xt}(x, t) + \rho_0 v_t(x, t) v_{tt}(x, t)) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_0 v_x(x, t) v_t(x, t) \Big|_0^l + \int_0^l (-\tau_0 v_{xx}(x, t) v_t(x, t) + \rho_0 v_t(x, t) v_{tt}(x, t)) dx =$$

$$= \int_0^l (-\tau_0 v_{xx}(x, t) + \rho_0 v_{tt}(x, t)) v_t(x, t) dx = 0 \Rightarrow E'_t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(t) = \text{const в смысле ур-я и зр. усл-й}; E(t) = E(0) = 0 \text{ в смысле зр. усл-й}$$

$$\Rightarrow v_x \equiv 0 \text{ и } v_t \equiv 0 \Rightarrow v(x, t) = \text{const} \Rightarrow v(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2, \text{ т.е. } \underline{\text{X}}$$

ЗАМЕЧАНИЕ: т.е. единственность имеет место и для задачи с зр. усл-ями второго рода.

ЗАМЕЧАНИЕ: $E(t)$ - функция скорости $\Rightarrow$ по теореме $\Rightarrow$ функция сохранения.

$$I: \begin{cases} u_{xx} = a^2 u_{tt}, 0 \leq t, 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, 0 \leq t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, t) = X(x) T(t), \\ u(x, t) \neq 0. \end{cases}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \Leftrightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Leftrightarrow T'' X = a^2 T X'' \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \quad (**) \\ X(x) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0, \\ T(t) \neq 0. \quad (***) \end{cases}$$

↑
задача Штурма-Лиувилля на собствен. значения и собствен. функции.

Умножим на собствен. функц. сопр-ю Φ -ю и проинтегрируем от 0 до l .

$$\begin{aligned} - \int_0^l X'' X^* dx &= \lambda \int_0^l X X^* dx \Rightarrow -X' X^* \Big|_0^l + \int_0^l X'(X^*)' dx = \lambda \int_0^l X X^* dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^l |X'|^2 dx &= \lambda \int_0^l |X|^2 dx \Rightarrow 0 < \frac{\int_0^l |X'|^2 dx}{\int_0^l |X|^2 dx} = \lambda \Rightarrow \lambda > 0. \end{aligned}$$

$$X(x) = C \cos \sqrt{\lambda} x + D \sin \sqrt{\lambda} x, \quad X(0) = C = 0, \quad X(l) = D \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \bar{\pi} n \Rightarrow \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\bar{\pi} n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots; \quad X(x) = X_n(x) = D \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l}.$$

Собственные функции определены с точностью до амплитуды

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\bar{\pi} n a}{l} t + B_n \sin \frac{\bar{\pi} n a}{l} t.$$

$$u(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\bar{\pi} n a}{l} t + B_n \sin \frac{\bar{\pi} n a}{l} t \right) \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

частота: $\omega_k = \frac{\bar{\pi} n a}{l}$; узлы: $\frac{k}{n} l, k = \overline{1, n}$; амплитуда: $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$

$\omega_1 = \frac{\bar{\pi}}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ - основной тон; величины, кратные ω_1 - обертоны.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБ. КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛ. КОНЦАМИ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\bar{\pi} n a}{l} t + B_n \sin \frac{\bar{\pi} n a}{l} t \right) \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l} = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\bar{\pi} n a}{l} \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l} = \psi(x)$$

$f(x)$ - непрер., кусочно-гладкая $\left. \begin{matrix} f(0) = f(l) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ можно разложить в ряд:

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l} dx$$

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l} dx \quad (2); \quad B_n = \frac{l}{\bar{\pi} n a} \psi_n = \frac{2}{n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\bar{\pi} n x}{l} dx$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = v_0 \frac{x(l-x)}{l^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_n &= \frac{2}{\pi n a} \int_0^l V_0 \frac{x(l-x)}{e^2} \sin \frac{\pi n x}{e} dx = \frac{2V_0}{\pi n e^2 a} \left(\frac{-l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{e} x(l-x) \Big|_0^l + \right. \\ &+ \left. \int_0^l \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{e} (l-2x) dx \right) = \frac{2V_0}{\pi^2 n^2 a e} \left(\frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{e} (l-2x) \Big|_0^l + \right. \\ &+ \left. \frac{2l}{\pi n} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{e} dx \right) = \frac{4V_0}{\pi^3 n^3 a} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{e} dx = \frac{4V_0}{\pi^4 n^4 a} \left(-\cos \frac{\pi n x}{e} \Big|_0^l \right) = \\ &= \frac{4V_0 l}{\pi^4 n^4 a} (1 - (-1)^n) \Rightarrow B_n = \frac{4V_0 l (1 - (-1)^n)}{\pi^4 n^4 a} \\ u(x, t) &= \frac{4V_0 l}{\pi^4 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} \sin \frac{\pi n a}{l} t \sin \frac{\pi n}{e} x. \end{aligned}$$

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ.

Принтегрируем исходный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$;
 $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \frac{l}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\psi_n|$
 Если $f(x)$ на $[0, l]$ имеет
 m непр. производных и $m+1$ усл.-непр. и $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(l) = 0$,
 $0 \leq 2k \leq m$, то $\sum_{n=1}^{\infty} n^m |f_n| < \infty$.
 Проинтегрируем $u_t(x, t)$: $\sum_{n=1}^{\infty} n |\varphi_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|$.
 $u_{tt}(x, t) (u_{xx}(x, t)) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\varphi_n|, \sum_{n=1}^{\infty} n |\psi_n|$ — если ряды сходятся, то сходится и все производные.
 Рассм. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\varphi_n|$: проверим, что $m=2$, $\varphi(x)$ — непр., $\varphi'''(x)$ —
 — усл. непр., $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.
 Рассм. $\sum_{n=1}^{\infty} n |\psi_n|$: проверим, что $m=1$, $\psi(x)$ — непр., $\psi'(x)$ —
 — усл. непр., $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

> Т.е. данные ограничения входят в т.о. 3-ий пункт 3-ей.

ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Решение 1-го, общего случая в виде: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$ (1)

Подставим в уравнение: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin \frac{\pi n x}{l} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} +$
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$, где $f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n'' = - \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 u_n + f_n, \\ u_n(0) = 0, u_n'(0) = 0. \end{cases}$$

линейное неоднородное уравнение,
 однородное с нач. условиями.
 Решается методом вариации
 постоянных

$$u_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$u_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t d\tau \left(\int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \right) \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) d\tau.$$

$$\left[u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi \quad (3), \right.$$

$$\left[G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n a} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \sin \frac{\pi n a}{l} (t-\tau) \quad (4) \right.$$

Рассм. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$: $u(x,t) = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} d\tau \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} G(x,\xi,t-\tau) \cdot$
 $\cdot f(\xi,\tau) d\xi$ (если f — непрерывна по x и t) = $\int \tau$. о среднем? =
 $= G(x, \xi^*, t - \tau^*) \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} d\tau \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(\xi,\tau) d\xi$ — аналогичное воздействие
 силы на поверхность: $\frac{F}{S}$.

Стянем в точку, сократим $I \Rightarrow \frac{1}{S} G(x, x_0, t - t_0)$, G — δ -функция сосредоточ. мгновенно действ. импульса.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow u = u_1 + u_2$ — задача о вынужд. колебаниях с вын. возд. усл-иями;
 ↑
 решение задачи о свобод. колебаниях стержня.

! Для нестационарных граничных условий прямого метода нет.

[Всё аналогично для уравнения в частных производных 2-го и смешанных усл-ий]

($u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ или $u_x(0,t) = u(l,t) = 0$).

Оба метода достаточно универсальны и позвол.

метод общ. решения
 метод разделения переменных

решать все задачи.

I	II	III
	+	+
+		

6. Задача с данными на характеристиках.

$$u_{xt} + au_x + bu_t + cu = f(x, t) \quad (1).$$

рассм. задачу в четверти m -ой: $x \geq 0, t \geq 0$, $u(x, 0) = \varphi_1(x)$,
 $u(0, t) = \varphi_2(t)$. (2)

характеристики этого ур-я: $x = c_1, t = c_2$.

(1)-(2) - ЗАДАЧА ПУРСА (с данными на характеристиках)
условие - согласованные, т.е. $u(0, 0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ - нет противоречий.

Пусть $a, b, c = 0$, т.е. $u_{xt} = f(x, t)$ (3).

Рассм. (3)-(2): интегрируем ур-е по переменным:

$$\int_0^{x_0} dx \int_0^{t_0} u_{xt}(x, t) dt = \int_0^{x_0} dx \int_0^{t_0} f(x, t) dt$$
$$\int_0^{x_0} dx \cdot u_x(x, t) \Big|_0^{t_0} = \int_0^{x_0} (u_x(x, t_0) - u_x(x, 0)) dx = u(x, t_0) \Big|_0^{x_0} - u(x, 0) \Big|_0^{x_0} =$$
$$= u(x_0, t_0) - u(0, t_0) - u(x_0, 0) + u(0, 0).$$

$$u(x_0, t_0) = \varphi_1(x_0) + \varphi_2(t_0) - \varphi_1(0) + \int_0^{x_0} \int_0^{t_0} f(x, t) dt$$

$$u(x, t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^t f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (4) \Rightarrow \text{реш-е -}$$

- единственно.

Если f -непр. и φ_1 и φ_2 - глг-лы, то можно подставить в ур-е!

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(0) - \varphi_2(0) = \varphi_1(x); \quad u(0, t) = \varphi_2(t).$$

Теперь рассм. ур-е в общем виде: $u_{xt} = F(x, t)$

$$F(x, t) = f(x, t) - au_x - bu_t - cu \Rightarrow u(x, t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) +$$
$$+ \int_0^x \int_0^t F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_2(0) + \int_0^x \int_0^t f(\xi, \tau) d\xi d\tau -$$
$$- \int_0^x \int_0^t (au_\xi + bu_\tau + cu) d\xi d\tau \quad (5).$$

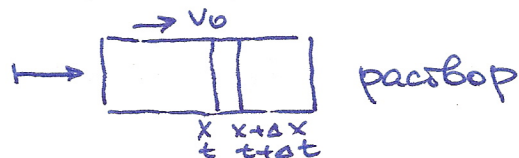
далее, можно восп-ся методом последовательного приближ-я:

$$u^{[0]}(x, t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^t f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (6)$$

$$u^{[n+1]}(x, t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_2(0) + \int_0^x \int_0^t f(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_0^x \int_0^t (au_\xi^{[n]} + bu_\tau^{[n]} + cu^{[n]}) d\xi d\tau \quad (7).$$

Можно док-ть, что процесс (6)-(7) - сходя $\Rightarrow$ решение з-чи (1)-(2) существует.

ЗАДАЧА СОРБУЦИИ.



составим у-е баланса вещества: $u(x, t)$ - концентрация вещ-ва
 $a(x, t)$ - связанное вещ-во.

$$u(x, t) S v_0 \Delta t - u(x + \Delta x, t) S v_0 \Delta t = u(x, t + \Delta t) S \Delta x - u(x, t) S \Delta x +$$

$$+ a(x, t + \Delta t) S \Delta x - a(x, t) S \Delta x \Rightarrow -v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad \text{— закон сор-ции} \quad ; \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - F(a)), \quad \begin{matrix} F(a) - \text{изотерма сорбции} \\ \beta - \text{гистерезисный коэф-т сорбции} \end{matrix}$$

$\xi = x, \quad \tau = t - \frac{x}{v_0}$ — локальное время.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad ; \quad \frac{\partial a}{\partial t} = 0 + \frac{\partial a}{\partial \tau} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 - \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{v_0}.$$

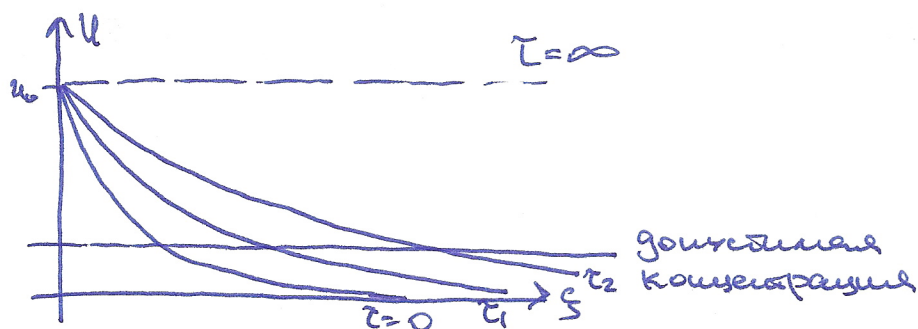
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - F(a)). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\beta}{v_0}(u - F(a)), \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - F(a)). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0, \tau) = u_0, \\ a(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \tau \partial \xi} = \beta \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - F'(a) \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) = -\beta \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial a}{\partial \tau} - \beta F'(a) \frac{\partial a}{\partial \xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 a}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\beta}{v_0} \frac{\partial a}{\partial \tau} + \beta F'(a) \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0. \quad \text{Положим } \tau = 0:$$

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \xi} = -\frac{\beta}{v_0} u \quad \begin{matrix} u(\xi, 0) = c e^{-\frac{\beta}{v_0} \xi} \\ u(\xi, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{v_0} \xi} \end{matrix}$$

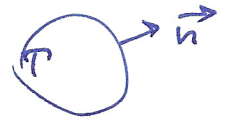


7. Некоторые задачи, приводящие к уравнениям параболы-эллипса.

1. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА (у-ние непрерывности)

$w(\mu, t)$ - плотность в-ва / энергии; $\vec{P}(\mu, t)$ - поток в-ва / энергии;

$F(\mu, t)$ - плотность источников в-ва / энергии.



приращение в-ва / энергии в T :

$$Q_1 = \iiint_T (w(\mu, t_2) - w(\mu, t_1)) d\tau; \quad Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint_S (\vec{P}(\mu, t) \cdot \vec{n}) dS \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_T \operatorname{div} \vec{P}(\mu, t) d\tau$$

← выход энергии / в-ва из T .

Количество выделенной энергии / в-ва источниками:

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_T F(\mu, t) d\tau \Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_3 - \text{у-ние баланса.}$$

объем T

$$Q_1 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t}(\mu^*, t^*) (t_2 - t_1) \underbrace{\int_T}_{Q_3} + \operatorname{div} \vec{P}(\mu^{**}, t^{**}) (t_2 - t_1) \underbrace{\int_T}_{Q_2} =$$

$$= F(\mu^{***}, t^{***}) (t_2 - t_1) \underbrace{\int_T}_{Q_3} \Rightarrow \text{сходим в одну точку!}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{P} = F - \text{уравнение баланса.}$$

Если $w = \rho$ массы, то $\vec{P} = \rho \vec{v} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ - у-ние неразрывности гидродинамики.

2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

$u(\mu, t)$ - темп-ра в μ в момент времени t ;

$w(\mu, t) = c \rho u(\mu, t)$ - плотность тепловой энергии;

$\vec{P} = -\kappa \operatorname{grad} u$ - тепловой поток

$$\Rightarrow c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) + F(\mu, t) \quad (1) - \text{у-ние теплопроводности в ПР-ВЕ}$$

Если среда - однородная и κ не зависит от координат, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\mu, t) \quad (2), \text{ где } a^2 = \frac{\kappa}{c \rho}, \quad f = \frac{1}{c \rho} F$$

в одномерном случае: $c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (3)$

в однородной среде: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$ (4).

3. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ.

$u(\mu, t)$ - плотность в-ва; поток диффузии направлен в сторону уменьшения u -ти в-ва по градиенту $\vec{P} = -D \vec{\text{grad}} u$
коэф-т диффузии.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(D \text{grad} u) + F(\mu, u)$$

среда однородна: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(\mu, u)$

одномерный случай: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t).$

среда однородна: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$

8. Математическая постановка задачи при ур-е теплопроводности.



$u(x, 0) = \varphi(x)$; $u(0, t) = \mu(t)$ - гранич. усл-е I рода
 $u(l, t) = 0$ - однородное гр. усл-е I рода.

$u_x(0, t) = \gamma(t)$ - граничное условие второго рода.

$u_x(0, t) = 0$ - условие теплоизолированного сечения.

$\alpha u_x(0, t) - \beta u(0, t) = \chi(0, t)$ - условие теплообмена.



$$\Rightarrow -\kappa u_x(0, t) = \lambda(\theta(t) - u(0, t)) \Rightarrow \kappa u_x(0, t) - \lambda u(0, t) = -\lambda \theta(t)$$

$$\text{I} \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, 0 < t < \infty \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), 0 \leq t < \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty \\ u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq t < \infty \\ |u(x, t)| \leq M \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u(0, t) = \mu(t), \\ |u(x, t)| \leq M \end{cases}$$

ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОГО И МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЙ

Пусть $u(x, t)$ - вып-на и непрерывна в обл-ти $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \leq T$$

аналогично min значение

$$t=0, x=0, x=l: \max \{ u(x, 0), u(0, t), u(l, t) \} \stackrel{\forall}{=} \max \{ u(x, t) \}$$

Доказ-во: (от противного). Пусть $\exists (x_0, t_0): 0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leq T$;

$$u(x_0, t_0) = \max \{ u(x, 0), u(0, t), u(l, t) \} + \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

$$\text{Введём вспомогательную ф-ю } v(x, t) = u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2T} (t_0 - t).$$

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{\varepsilon}{2T} (t - t_0); \quad v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0); \quad \left| \frac{t_0 - t}{T} \right| \leq 1.$$

$$|v(x, 0), v(0, t), v(l, t)| \leq M + \varepsilon/2$$

$$\text{Обозн. } M = \max \{ u(x, 0), u(0, t), u(l, t) \} \Rightarrow v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ наибольшее зн-е v достигается в некоторой внутр. точке

$$(x_1, t_1): 0 < x_1 < l, 0 < t_1 \leq T \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) \geq 0 \text{ (т.к. либо внутр., либо гр.)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) + \frac{e}{2T} > 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{в этой точке } (x_1, t_1) \text{ не выполняется} \\ \text{уравнение теплопроводности} \Rightarrow \underline{\text{х.т.с.}}$$

Рассм. 2 ур-я: $i=1, 2$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, 0 < t < \infty, \\ u(0, t) = \mu_{1i}(t), u(l, t) = \mu_{2i}(t), 0 \leq t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi_i(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 1: Если $\mu_{11}(t) \leq \mu_{12}(t)$; $\mu_{21}(t) \leq \mu_{22}(t)$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, то $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$.

Доказ. $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t) = v(x, t)$ на $z.p.$ и в $u_{z.}$.
момент времени - необратимые $\Rightarrow v(x, t)$ выполняется также х.т.с.

СЛЕДСТВИЕ 2: $|\mu_{11}(t)| \leq \mu_{12}(t)$; $|\mu_{21}(t)| \leq \mu_{22}(t)$, $|\varphi_1(x)| \leq \varphi_2(x)$
 $\Rightarrow |u_1(x, t)| \leq u_2(x, t)$.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И НЕПР. ЗАВИС-ТИ РЕШ-Я ОТ ИСХОДНЫХ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

П.1 Задача I не может иметь двух различных решений.

Доказ. (от противного): $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ - решения.

Рассм. $v(x, t) = u_1 - u_2$: $v(x, t)$ удовл. однородн. ур-ю с $u_{z.}$ и $z.p.$ усл-ями.

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, v(x, 0) = 0. \end{cases} \xrightarrow{\text{пр.т.с.}} v(x, t) \equiv 0, \underline{\text{х.т.с.}}$$

П.2 Если $|\mu_{11} - \mu_{12}| \leq \varepsilon$, $|\mu_{21} - \mu_{22}| \leq \varepsilon$, $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon$, то

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon.$$

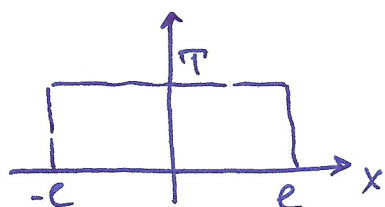
Доказ. $v(x, t) = u_1 - u_2 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ $\begin{cases} v(0, t) = \mu_{11}(t) - \mu_{12}(t), \\ v(l, t) = \mu_{21}(t) - \mu_{22}(t), \\ v(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x). \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (СЛЕДСТВИЕ 2) $\Rightarrow |v(x, t)| \leq \varepsilon, \underline{\text{х.т.с.}}$

П.3 Задача II не может иметь двух различных решений.

Доказ. (от противного) Пусть u_1 и u_2 - реш-я; $v = u_1 - u_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; v(x, 0) = 0; |v(x, t)| \leq M_1 + M_2 = M.$$



Фиксируем l и T и рассм. задачу только в этой области.

Введём вспомогательную функцию:

$$w(x, t) = \frac{M}{l^2} (x^2 + 2a^2 t) ; \quad w(x, 0) = \frac{M}{l^2} x^2 \geq |v(x, t)| = 0$$

$$w(\pm l, t) = M (1 + 2a^2 \frac{t^2}{l^2}) \geq M \geq |v(x, t)| \Rightarrow \text{Во всём прямоугольнике } w(x, t) \geq |v(x, t)|, \quad -l \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$l \rightarrow \infty \Rightarrow w(x, t) \rightarrow 0 \Rightarrow v(x, t) = 0 \Rightarrow v(x, t) \equiv 0, \quad \underline{\text{т.с.с.}}$$

Т: Рассм. гва ур-я, $i=1, 2$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty, \\ u(x, 0) = \varphi_i(x), & |u(x, t)| \leq M \end{cases}$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{тогда} \quad |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon.$$

Доу-во: $v = u_1(x, t) - u_2(x, t) \Rightarrow v_t = a^2 v_{xx}$

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x); \quad |v(x, t)| \leq M.$$

далее, аналогично предыдущему, но $w(x, t) = \frac{M}{l^2} (x^2 + 2a^2 t) + \varepsilon, \quad \underline{\text{т.т.т.}}$

Т: Задача III не может иметь двух разл. решений.

[доу-во аналогично Т] для задачи II, но обл-ть: 

Т: Рассм. гва ур-я $i=1, 2$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi_i(x), \quad u(0, t) = \mu_i(x) \\ |u(x, t)| \leq M. \end{cases} \quad \begin{cases} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \\ |\mu_1(x) - \mu_2(x)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{тогда} \quad |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon.$$

9) Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Интеграл Пуассона.

$$\Pi: \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), |u(x, t)| \leq M \end{cases}$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА!

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ |u(x, t)| \leq M, \\ u(x, t) = X(x)T(t), u(x, t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'X = a^2 T X'' \Rightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} - \text{разделение переменных.}$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ |X(x)| \leq M_1, \\ X(x) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0, \\ |T(t)| \leq M_2, \\ T(t) \neq 0. \end{cases}$$

$$\lambda = k^2 \geq 0, 0 \leq k < \infty \quad \left. \begin{matrix} e^{ikx}, e^{-ikx} \end{matrix} \right\} \Rightarrow e^{ikx}, -\infty < k < \infty.$$

$$T(t) = A e^{-k^2 a^2 t} \Rightarrow A e^{ikx - k^2 a^2 t}, -\infty < k < \infty - \text{все решения вспомогательной задачи.}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ.

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - k^2 a^2 t} dk \quad (1), \quad u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk = \varphi(x).$$

$$A(k) = \mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx \quad (2), \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - k^2 a^2 t} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} \varphi(\xi) d\xi \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t + i(x-\xi)k} dk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 a^2 t + ik(x-\xi)} dk \quad (4)$$

Вычислим интеграл (4): $-k^2 a^2 t + ik(x-\xi) = -(k^2 a^2 t - 2ka\sqrt{t} \times$

$$\times \frac{i(k-\xi)}{2a\sqrt{t}} - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}) = -\left(ka\sqrt{t} - i \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}$$

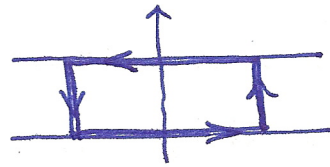
$$\Rightarrow G(x, \xi, t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ka\sqrt{t} - i \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}})^2} dk$$

$$s = ka\sqrt{t} - i \frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} \quad dk = ds/a\sqrt{t}$$

$$\Rightarrow G(x, \xi, t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

по прямой, параллельной действительной оси
интегрируем

$\Rightarrow$ воспользуемся т. Коши для
аналогичных функций:



$\Rightarrow$ интеграл по сдвинутой прямой равен ин-лу по действ. оси

$$\Rightarrow G(x, \xi, t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds \Rightarrow G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

Функция влияния сосредоточенного источника тепла.

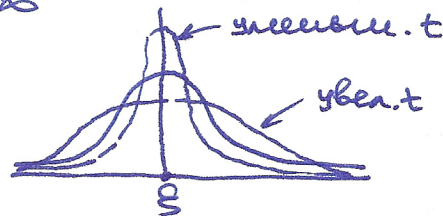
свойства ф-ии G :

1. $G(x, \xi, t)$ - определена при $t > 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) dx = 1$.

Доказ.: $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = s, dx = ds \cdot 2a\sqrt{t}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) dx = \frac{2a\sqrt{t}}{2a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = 1, \underline{\text{т.е.}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) dx = 1.$$

Фигурчел ξ и $t \Rightarrow$



при $t \rightarrow \infty$: 0

при $t \rightarrow 0$: δ -ф-я

Если G расем., как темп-ру, то закон сохранения энергии $\oint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = 0$.

10. Теорема о существовании решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

[Т:] Если φ -я $\varphi(x)$ -непр-на и оцр-на, то формулы (*) и (**) дают решение задачи Коши (II):

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (5) \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ |u(x, t)| \leq m. \end{cases}$$

Введём в (*) замену переменных x :

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = S \Rightarrow \xi = x + S2a\sqrt{t}; \quad d\xi = 2a\sqrt{t} dS \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S^2} \varphi(x + S2a\sqrt{t}) dS \quad (6)$$

$\Rightarrow$ если в φ -ле (6) положить $t=0$, то получим (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ непр-во перехода.

$\varphi(x)$ -оцр-на $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса, инф-л ск-ая равн-но.

ослабев гоч-то возм-то гд φ -я под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial t}(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4a\sqrt{t}} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2} \frac{1}{2a\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{S^2}{t} \right) e^{-S^2} \varphi(x + S2a\sqrt{t}) dS \end{aligned}$$

$$\left| \frac{S^2 - \frac{1}{2}}{t} e^{-S^2} \varphi(x + S2a\sqrt{t}) \right| \leq m \frac{S^2 + \frac{1}{2}}{t} e^{-S^2} \quad \text{самое маленькое } \Rightarrow \text{ наибольшее значение.}$$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса, инф-л ск-ая равн-но $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно гд φ -то по t . Дл гд φ -я по x -аналогично.

Выводы: 1. Решение ур-я теплопроводности имеет производные любого порядка.

2. $\varphi(x) \neq 0$ на $[x_1, x_2]$ и $= 0$ вне $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow$ получим реш-е, которые распространяются с бесконечной скоростью, если рассм. т.х вне отрезка $[x_1, x_2]$.

$\Rightarrow$ получаем противоречие с физикой.

3. Непрерывная зав-ть решений от начальных условий.

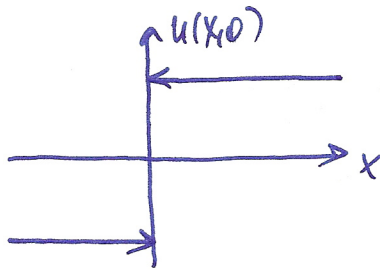
$$(*) : u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad ; \quad (**) : G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{t}a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ |u(x, t)| \leq M \end{cases} \quad \begin{cases} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon \\ \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \end{cases} \quad \begin{aligned} v(x, t) &= u_1(x, t) - u_2(x, t) \\ v(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \Rightarrow \\ &\Rightarrow |v(x, t)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

для задачи с разрывными нач. усл-ями

требуем, чтобы $u(x, t)$ при $t=0$ была непрерыв. в точках непрерыв. $\varphi(x)$ и непрерыв. в окр. точках разрыва (разрывы I-го рода)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \begin{cases} -u_0, & x < 0, \\ u_0, & x > 0. \end{cases} \\ |u(x, t)| \leq M \end{cases}$$



$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi = -u_0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

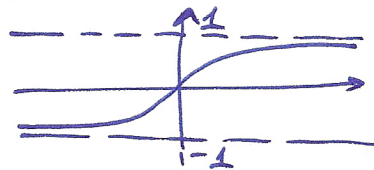
$$+ u_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad \text{замена: } \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}} = s \Rightarrow \xi = s \cdot 2a\sqrt{t} + x$$

$$\Rightarrow u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

$$\left[\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds \right] - \text{функция ошибок } \operatorname{erf}(z)$$

$$\Phi'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} > 0,$$

$$\Phi''(z) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2}$$



$$\Rightarrow u(x, t) = -\frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + 1 \right) + \frac{u_0}{2} \left(1 - \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) =$$

$$= -\frac{u_0}{2} \left(-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + 1 \right) + \frac{u_0}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) = u_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

$$\text{Если } t \rightarrow 0 \text{ и } x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2a\sqrt{t}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow 1 \Rightarrow u(x, t) \rightarrow u_0$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{x}{2a\sqrt{t}} \rightarrow -\infty \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \rightarrow -1 \Rightarrow u(x, t) \rightarrow -u_0$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{x}{2a\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0.$$

11. Решение задачи для уравнения теплопроводности на полупр. прямой.

Будем искать реш-е в виде $u = u_1 + u_2$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = f(t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ |u(x,t)| \leq M \end{cases}$$

можно решить с помощью известного продолжения.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x) \\ |u_1(x,t)| \leq M_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ u_2(0,t) = f(t) \\ u_2(x,0) = 0, \\ |u_2(x,t)| \leq M_2 \end{cases}$$

Рассмотрим набор частных задач (принцип Даламбера):

$$\textcircled{1.} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = f(t) = 1, \\ u(x,0) = 0, |u(x,t)| \leq M. \end{cases} \quad v(x,t) = 1 - u(x,t) \Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v(0,t) = 0, \\ v(x,0) = 1, |v(x,t)| \leq M \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{известно} \Rightarrow \text{продолжим} \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \\ |v(x,t)| \leq M. \end{cases} \Rightarrow v(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \Rightarrow u(x,t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{-x}{4at^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{\pi} 2at^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = U(x,t) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$. Все след. производ-ые в 0 равны нулю.

$$\textcircled{2.} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 1, & t_0 < t \end{cases} \\ u(x,0) = 0, |u(x,t)| \leq M. \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ U(x, t-t_0), & t > t_0 \end{cases}$$

Если продолжить:

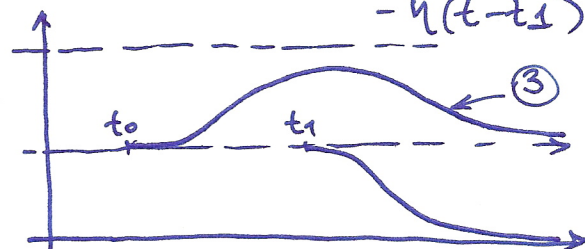
$$U(x,t) = \begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = U(x, t-t_0)$$

$$\textcircled{3.} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ \eta, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \end{cases} \\ u(x,0) = 0, |u(x,t)| \leq M. \end{cases}$$

Введём вспомогательную функцию:

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow u(0,t) = \eta(t-t_0) - \eta(t-t_1) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow u(x,t) = \eta(U(x, t-t_0) - U(x, t-t_1))$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$$

$\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_n$

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \mu_i (U(x, t-t_{i-1}) - U(x, t-t_i))$$

полная интерполи-
ная сумма

по Φ -ле разлагая: $\sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-t_i^*) \Delta t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0, t) = \mu(t), u(x, 0) = 0, \\ |u(x, t)| \leq M. \end{cases} \Rightarrow u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t, 0 < x < l \\ u(0, t) = \mu(t) \\ u(l, t) = 0, u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

- сначала решение для $u(0, t) = 1$
- и записать решение, как $U(x, t)$.
- а затем воспользоваться линеар. формулой.

(аналогично получают при решении упр. 2 задачи)

$$\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} = s^2 \Rightarrow t - \tau = \frac{x^2}{4a^2 s^2} \Rightarrow \tau = t - \frac{x^2}{4a^2 s^2} \Rightarrow d\tau = \frac{2x^2}{4a^2 s^3} ds$$

$$u(x, t) = \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{2a^3 s^2 x}{x^3 2a\sqrt{t}} \cdot \frac{2x^2}{4a^2 s^3} e^{-s^2} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2 s^2}\right) ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2 s^2}\right) ds$$

ПРИМЕР:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ |u(x, t)| \leq M \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = U(x, t).$$

12. Решение смешанной задачи для ур-я теплопроводности на отрезке.

Вспомогательная задача:

$$I \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, t) = X(x) T(t), \\ u(x, t) \neq 0. \end{cases}$$

$$T' X = a^2 T X''$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, X(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0, \\ T(t) \neq 0. \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, X_n = \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

$$\Rightarrow u_n(x, t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ I: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (1)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x) \Rightarrow C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1, при $n \rightarrow \infty$ $u(x, t) \rightarrow 0$: на n -й член ряда стремился к нулю с разной скоростью.

$$u(x, t) = e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \left\{ c_1 \sin \frac{\pi x}{l} + c_2 e^{-3\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{2\pi x}{l} + c_3 e^{-5\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right\}$$

$$\Rightarrow u(x, t) \approx c_1 e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi x}{l} : \text{смысла членов. Времене после}$$

$$c_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx$$

измене процесса, беск. ряд

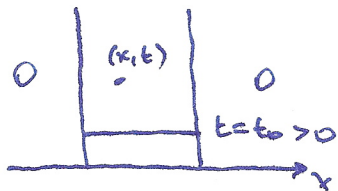
будет през-ен своим 1-м членом
Такая скорость процесса из-р. непрерыв-ным решением.

Гл 1 (существования) Если $\varphi(x)$ -непр., непрерывно-задана и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то решение задачи I есть и задается ф-лами (1)-(2).

Доп-во: и.г.-то, что ф-я, опре-я ряд, опре-на и непр-на в $0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty$ и вост-ая краевые. и из-за-ны. уса-я - это следует из з-на-я на ф-ю $\varphi(x)$ т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| < \infty$, а этот числовой ряд явл-ся мажорантой для ф-нц. ряда $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\Rightarrow$ ф-нц. ряд ск-я равн-но.

Наз. и пр. чсл-я вын-я автомобилями.

и.г-во, что φ -я удовл. ур-ю и.е. возм-ть посл-го гиф-я:



$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u^2 e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Рассм. б. (x, t) , лежащую выше $t=t_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |c_n| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |u(x)| dx \Rightarrow$ построим мажоранты для $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n^2 e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t_0} \Rightarrow \text{Функция. ряд с-я равн-ия при } t \geq t_0 > 0.$$

$\leftarrow$ этот числ. ряд с-я

для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - аналогично $\Rightarrow$ почленное гиф-е возможно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \text{ур-ние вын-я. э.д.г}$$

Функция влияния сосредоточенного источника тепла

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \right) \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} =$$

$$= \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} \right) \varphi(\xi) d\xi \Rightarrow u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2 t} \quad (4)$$

[ряд (4) в элементарных ф-лах явно просуммировать нельзя]

РЕДУКЦИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(0, t) = \mu_1(t), u(l, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Будем искать решение задачи

в виде $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0, \\ u_2(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0, t) = u_2(l, t) = 0, \\ u_1(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_4}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \\ u_4(0, t) = 0, u_4(l, t) = \mu_2(t), \\ u_4(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ u_3(0, t) = \mu_1(t), u_3(l, t) = 0, \\ u_3(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} ; f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} ,$$

$$\text{где } f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \Rightarrow \begin{cases} u_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n = f_n(t), \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \quad \Leftarrow$$

u_3 и u_4 находим с помощью принципа Даламбера:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ u_3(0,t) = 1, u_3(l,t) = 0, \\ u_3(x,0) = 0. \end{cases}$$

Рассм. $u_3(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) - v(x,t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ найдем однород. ур-е сепарир-ми:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = 1 - \frac{x}{l} \end{cases} \quad \leftarrow \text{изб., чтоб} \\ \text{решать эту} \\ \text{задачу.}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \quad (1) ; C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (2)$$

$$C_n = -\frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l + \frac{2}{\pi n} \left(-\frac{1}{l}\right) \int_0^l \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{\pi n}.$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \Rightarrow u_3 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) - v(x,t) = U(x,t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (принцип Даламбера) $\Rightarrow$ реш-е u_3 в одн. буге:

$$\left| u_3(x,t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \tau}(x, t-\tau) \mu_1(\tau) d\tau \right|$$

13. Некоторые задачи, приводящие к ур-ям Лапласа и Пуассона.

1. стационарные задачи теплопроводности и диффузии

1) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t) \Rightarrow$ если процесс - стационарный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta u = -\frac{1}{a^2} f(x, y, z)$

2) потенциальное течение несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 - \text{ур-е непр.}$$

жидкость несжимаема $\Rightarrow \rho = \text{const} = \rho_0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$.

если течение потенциально, то есть $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$, то

$\Delta u = 0 \leftarrow$ ур-е Лапласа.

2. уравнение электростатики

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho$, где ρ - объёмная плотность зарядов

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ - материальное уравнение

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= -\operatorname{grad} u \\ D &= -\epsilon \operatorname{grad} u \\ \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) &= -4\pi \rho \end{aligned}$$

Если среда - однородная (т.е. ϵ не зависит от координат),

то $\Delta u = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \leftarrow$ ур-е Пуассона.

14. Формулы Грина.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА, ЗАВИСЯЩЕГО ТОЛЬКО ОТ РАДИУСА.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ; \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Если рассм. реш-я, завис. только от радиуса, то мы получим

$$\text{вд } \varphi: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 : \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{т.к. зав-ть только от радиуса.}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{du}{dr} = C \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{C}{r^2} \Rightarrow u(r) = -\frac{C}{r} + C_1 -$$

-общее решение ; $u_1(r) = 1, u_2(r) = \frac{1}{r}$ - частные решения

↑
Фундаментальное реш-е ур-я Лапласа.

[$u_2(r)$ - потенциал точечного заряда, помещ. в начало коорд-т]

3-мерный случай: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{du}{dr} = C \Rightarrow u = C \ln r + C_1$

$u_1(r) = 1, u_2(r) = -\ln r = \ln \frac{1}{r}$ - Фунд. реш-е ур-я Лапласа в 3-мерном случае.

[$u_2(r)$ - потенциал 3-мерного точечного заряда].

ФОРМУЛЫ ГРИНА

Формула Остроградского: $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \iint_S (P \cos \alpha +$

$\vec{n} = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \} -$

$+ Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$

-единичная внешняя нормаль ; $\vec{A} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k} . \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_T \operatorname{div} \vec{A} d\tau = \iint_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS$$

Предположения:

- P, Q, R - имеют непрерывные частные производные в открытой обл-ти
- P, Q, R - непрерывны в замкнутой области
- гладкость S .

Рассм. скалярные ф-ии u и v : $P = v \frac{du}{dx}$, $Q = v \frac{du}{dy}$, $R = v \frac{du}{dz}$

$$\boxed{\iiint_T (\text{grad } u \cdot \text{grad } v + v \Delta u) d\tau = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS} \quad \text{1-ая ф-ла Грина}$$

(2-я ф-ла Грина

- v -непр. в замкнутой области
- u -непр. в замкнутой области вместе со своими 1-ми произв-ми
- произв-ые v и u -непр. и ор. в открытой области (приём где $v \neq 0$ - первые произв-ые, а где u - вторые).

Положим ф-ии u и v равными: $\iiint_T (\text{grad } u \cdot \text{grad } u + u \Delta u) d\tau = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$
и вычтем из през. формулы:

$$\boxed{\iiint_T (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS} \quad \text{2-ая ф-ла Грина}$$

Заменим 2-ю ф-лу Грина для $v = \frac{1}{r_{M_0 n}}$, выберем т.мо с координатами радиуса $\varepsilon \Rightarrow$ возьмем одн-цу T_ε . т.мо-фикс., координ. т.мо-параметры, тогда:

$$\iiint_{T_\varepsilon} (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS + \iint_{S_{M_0}} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

устрашим $\varepsilon \rightarrow 0$: $\left| \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r_{M_0 n}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) dS_M \right| \leq M \iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dS = M \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi \varepsilon^2 \rightarrow 0$
положим т.к. произв-я по внешн. нормали мажоранта $\frac{\partial u}{\partial n}$

$$\iint_{S_\varepsilon} u \frac{1}{\varepsilon^2} dS = u(M^*) \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi \varepsilon^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi u(M_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{S_{M_0}} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS \rightarrow 4\pi u(M_0)$$

$$\iiint_{T_\varepsilon} v \Delta u d\tau \rightarrow \iiint_T \frac{1}{r_{M_0 n}} \Delta u(M) d\tau_M \Rightarrow$$

↑
необов. интеграл

$$\Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r_{M_0 n}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{M_0 n}} \right) \right) dS_M - \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{1}{r_{M_0 n}} \Delta u(M) d\tau_M$$

3-ья (основная) формула Грина.

15. Свойства гармонических функций.

[Т₁]: Если u - гармонич. в обл-ти T , то она имеет в этой точке частные производные любого порядка.

Доказ-во:

u - гармонич. $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \Delta u = 0$



по ф. Грина: т.к. u - гарм., то $\Delta u(M) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right) dS_M \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ив-л можно выбрать $\forall$ число раз, з.т.с.

[Т₂]: Если u - гармонич. в обл-ти T , то $\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}(M) dS_M = 0$
(полный поток через замкн. поверхность = 0) $\rightarrow$

Доказ-во: 1ая формула Грина для T_{Σ} и $v=1$:

$$\iiint_{T_{\Sigma}} \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS \Rightarrow \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \text{ з.т.с.}$$

$\overset{0, \text{т.к. } u - \text{гарм.}}{T_{\Sigma}}$

СЛЕДСТВИЕ 1 Если u - гарм. в обл-ти T и u и все ее частные производные vanish на границе, то $\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$.

[Т₃]: Если u - гарм. в обл-ти T , то для $\forall M_0$: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{M_0}^a} u(M) dS$

Доказ-во: по ф-ле Грина: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{M_0}^a} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right) dS_M = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{M_0}^a} u(M) dS_M.$

[Т₄]: (принцип максимального и минимального значений):

Если u - гарм. в обл. T - отр. и непрерывна в замкнутой области $T+S$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений на гр-це области на пов-ти S .

Доказ-во: из непрерывности $\Rightarrow \exists$ наиб. и наименьш. значения

Пусть $u(M_0) = M \geq u(M)$, где M_0 - внутр. область.

Рассм. сферу, лев. внутри T с центром в τ . $u_1(M) = M - \varepsilon$ -
 - введем шар с центром M_1 : $u(M) \leq M - \varepsilon/2$.

Обозн. поверхность пересек-я Σ_1 , а внешней по-во шара - Σ_2

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} u(M) dS = \iint_{\Sigma_1} u(M) dS + \iint_{\Sigma_2} u(M) dS$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} u(M) dS \leq M 4\pi a^2 - \frac{\varepsilon}{2} \overline{S_1} =$$

$$(M - \varepsilon/2) \overline{S_1} + M \overline{S_2} = M(\overline{S_1} + \overline{S_2}) - \frac{\varepsilon}{2} \overline{S_1} = M 4\pi a^2$$

$\Rightarrow$ на всей сфере значение $u(M) = M \Rightarrow$ можно пойти
 до границы $\Rightarrow \exists$ точка на гр-це, где $u(M)$ принимает макс. зн-е.

СЛЕДСТВИЕ 1: u_1 и u_2 - гарм. в T и непрерыв. в $T + S$ и $u_1(M) \leq u_2(M)|_S$
 $\Rightarrow u_1(M) \leq u_2(M)$ во всей обл-ти T .

СЛЕДСТВИЕ 2: $|u_1(M)| \leq u_2(M)|_S \Rightarrow |u_1(M)| \leq u_2(M)$ во всей
 обл-ти T .

16. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа

x, y, z - пространственные переменные

- ур-е Лапласа решается в неогр. обл-ти, форма которой может быть достаточно сложной.
- решение ур-е Лапласа удовл. доп. усл-ям на границе обл-ти (внутр. задачи - реш. внутри области, внешн. задачи - реш. вне обл-ти)

ВНУТРЕННИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

1^{ая} кр. задача (задача Дирихле)

u - оупр. и непр. в замкн. обл-ти и на кр-це:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ в } T, \\ u|_S = f(u) \end{cases}$$

[Т:] (единственность) Внутр. задача Дирихле не может иметь 2 решения. Доу-во! u_1, u_2 - реш-я: $v = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } T \\ v|_S = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{принцип макс. и мин. зн-я} \Rightarrow v \equiv 0, \text{ к.т.с.}$$

[Т:] (о оупр. завис-ти реш.)
$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 \text{ в } T, \\ u_i|_S = f_i(u) \end{cases} \quad i=1,2$$

 $|f_1(u) - f_2(u)|_S < \varepsilon$

Тогда реш-я этих задач $|u_1(u) - u_2(u)| \leq \varepsilon$ в T .

Доу-во! $v(u) = u_1 - u_2$;
$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } T, \\ v_i(u)|_S = f_1(u) - f_2(u) \end{cases}$$

$$|v(u)|_S \leq \varepsilon \xRightarrow{\text{ср.}} |v(u)| \leq \varepsilon \text{ в } T, \text{ к.т.с.}$$

2^{ая} кр. задача (задача Неймана)
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(u)|_S = f(u) \end{cases}$$

- необх. усл-е f -я реш-я з. Неймана: $\int_S f(u) dS = 0$
- если задача разрешима, то решение не единственно.

[Т:] Пусть u_1 - реш-е задачи Неймана. Тогда для того, чтобы u_2 было решением той же задачи Неймана, необх. и дост., чтобы $u_2 = u_1 + C$.

Доу-во! $\Rightarrow v = u_1 - u_2$,
$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } T, \\ \frac{\partial v}{\partial n}(u)|_S = 0 \end{cases}$$

$$1^{ая} \varphi\text{-на Грине } (u=v): \int_T (\nabla u \nabla v + \text{grad } v \text{ grad } v) d\tau = \int_S v \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{grad } v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow v = \text{const, к.т.з.}$$

⊖ - осевую.

ВНЕШНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА.

сфера единичн. радиуса:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, r > 1, \\ u|_{r=1} = 1 \end{cases}$$

Решение: $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{r}$

$u = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2$ - однопараметрическое семейство решений.

[Можно ввести требование, что $u \rightarrow 0$ - тогда сдвинулось $\frac{1}{r}$]

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T, \\ u(u)|_S = f(u), \\ u(u) \rightarrow 0 \text{ - равн. осн.} \end{cases} \quad \begin{matrix} \varepsilon > 0, R(\varepsilon): |u(u)|_{S_{R(\varepsilon)}} \leq \varepsilon \\ \text{[Т:]} \text{ (единственности): не может быть} \\ \text{двух разных решений.} \end{matrix}$$

Доп-во: $u_1, u_2 \Rightarrow v = u_1 - u_2$; $\Delta v = 0$ в T , $v(u)|_S = 0$, $v(u) \rightarrow 0$.

Пусть $u_0 \in T$, $v(u_0) = A > 0$, $\varepsilon = \frac{A}{2} \Rightarrow$ где обл-ти, отр. внутри шр. S , а снаружи - S_R : по принципу мин. и макс. зн-й не может быть такого $A \Rightarrow \text{X, к.т.з.}$

[Т:] (унп-ть реш-я):
$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 \text{ в } T, \\ u_i(u)|_S = f_i(u), \\ u_i(u) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} |f_1(u) - f_2(u)| \leq \varepsilon, \\ \text{тогда } |u_1 - u_2| \leq \varepsilon. \end{matrix}$$

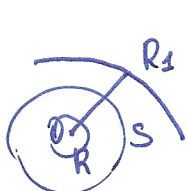
Доп-во: (аналогично предыдущему):
$$\begin{cases} \Delta u = 0, r > 1, \\ u|_{r=1} = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1 = 1, \\ u_2 = 1 + \ln r \end{matrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решение, $\rightarrow 0$ не

тогда потребуем ограниченность:
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T, \\ u(u)|_S = f(u), \\ |u(u)| \leq A \end{cases}$$

[Т:] (единственности): Внешняя двумерная задача не может иметь 2 решения.

Доп-во: $u_1, A_1; u_2, A_2; v = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \\ v(u)|_S = 0, \\ |v(u)| \leq A \end{cases}$



Рассм. $W = A \frac{\ln \frac{r_0 R}{R}}{\ln \frac{R_1}{R}}$

Если $u \in S \Rightarrow w(u)|_S > 0$, $w(u)|_S > v(u)|_S = 0$,

$w(u)|_{S_{R_1}} = A$, $w(u)|_{S_{R_1}} \geq |v(u)|_{S_{R_1}} \Rightarrow w(u)$ - мажоранта для $v(u)$ во всей обл-ти.

$|v(u)| \leq w(u)$. Устремим $R_1 \rightarrow \infty \Rightarrow w(u) \rightarrow 0 \Rightarrow v(u) \equiv 0$, т.д.

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА КЕЙМАНА

$$|u(u)| \leq \frac{A}{\varepsilon} ; \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{A}{\varepsilon^2} ; \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{A}{\varepsilon^2} ; \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \leq \frac{A}{\varepsilon^2}$$

Такая Φ -я изз. регулярной из бесконечности.

Для таких Φ и Φ -ны Грина справедливы следующие теор. соотн.

$$\iiint_{T_\varepsilon} (v \Delta u + \text{grad } v \text{ grad } u) d\tau = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iint_{S_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$v \frac{\partial u}{\partial n} = v \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right] \Rightarrow \left| v \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq 3A^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \iint_{S_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} dS \right| \leq 3A^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^3} \cdot 4\pi \varepsilon^2 = \frac{12\pi A^2}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow \infty.$$

$$\text{grad } v \text{ grad } u = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} ; |\text{grad } v \text{ grad } u| \leq \frac{3A}{\varepsilon^4}$$

$$\iiint_{T_\varepsilon} (\text{grad } v \text{ grad } u) d\tau \rightarrow \iiint_T (\text{grad } u \text{ grad } v) d\tau. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_{T_\varepsilon} v \Delta u d\tau \text{ тоже имеет предел при } v \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_T (v \Delta u + \text{grad } v \text{ grad } u) d\tau = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Остальные Φ -ны док-ся аналогично.

[Т.] (единственности): Внешняя задача Кеймана не может иметь двух разных решений.

Док-во: u_1 и u_2 - решения: $v = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n} |_{S} = 0, \\ v(u) - \text{регулярная} \end{cases}$

$\Rightarrow \Phi$ -на Грина $\Rightarrow \iiint_T (v \Delta v + \text{grad } v \text{ grad } v) d\tau =$

$= \iint_S v \frac{\partial v}{\partial n} dS$ (из регулярности) $\Rightarrow v \equiv 0$, т.д.

Внешняя задача Кеймана имеет обоих неограниченно быстрых-х.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ:

1. Метод разделения переменных;
2. Метод Φ -ны Грина;
3. Метод конформных отображений;
4. Метод потенциалов

5. Вариационный метод
6. Метод конечных разностей.

1^{ый} метод ищ-ся только для простых областей

3^{ий} метод ищ-ся для двумерных областей с неп. аналит. Φ -й.

5^{ый} метод: найти $\min F[u] = \iiint_{\Gamma} \text{grad}^2 u \, d\tau, u(u)|_S = f(u).$

Вариационные задачи м. быть $\neq$ решены численно (особенно, если сложная область).

6^{ой} метод: основной численный метод

17. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом разделения переменных.

ур-е Лапласа в полярных координатах: $\Delta u = 0, u = u(r, \varphi),$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0.$$

Метод разделения переменных: $u = R(r) \Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} + r \frac{(rR')'}{R} = 0 \Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

- если $\varphi \in [0, 2\pi]$, то satisfied усл-е периодичности: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \forall \varphi$
- если задача расст. в полукруге и на границах заданы однородные условия, то satisfied обычные условия.

$$\begin{cases} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \forall \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \lambda \Phi = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi), \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \begin{matrix} 1) \lambda = 0 \Rightarrow \Phi_0 = 1 \\ 2) \lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = \\ = C_1 \sin \sqrt{\lambda} \varphi + C_2 \cos \sqrt{\lambda} \varphi \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = C_1 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi + C_2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi, \\ C_1 = C_1 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - C_2 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi + C_2 (\cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 1) = 0, \\ C_1 (1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi) + C_2 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{опред-ль} = 0 : \Delta = \sin^2 \sqrt{\lambda} 2\pi + (1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi)^2 = 0$$

$$\sqrt{\lambda} \cdot 2\pi = 2\pi n \Rightarrow \lambda_n = n^2$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \Phi_n^{(1)} = \cos n\varphi, \\ \Phi_n^{(2)} = \sin n\varphi \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{однотипные} \text{ и } \text{свободные} \text{ функции} \\ \text{свободные} \text{ функции} - \text{зависят от} \end{matrix}$$

$$\text{если } \lambda = 0 \Rightarrow (rR')' = 0 \Rightarrow R(r) = a_0 + b_0 \ln r;$$

$$\text{если } \lambda = n^2 \Rightarrow r \frac{(rR')'}{R} - n^2 = 0.$$

$$\text{уравнение Эйлера} \rightarrow r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

$$\text{ищем решение в виде } R(r) = r^\mu : \mu(\mu-1)r^\mu + \mu r^\mu - n^2 r^\mu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^2 - \mu + \mu - n^2 = 0 \Rightarrow \mu = n \vee \mu = -n \Rightarrow R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ общее решение ур-я Лапласа в полярных координатах

$$\text{имеет следующий вид: } u = u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi)$$

$$\text{или } u = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right]$$

1) если решается внутренняя задача Дирихле, то

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \text{ т.к. } u \in C(r \leq a).$$

2) если решается внешняя задача $r > a$: $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=a} = g(\varphi) \end{cases}$, то на бесконечности нужно положить условие: в двумерном случае — ограниченность, в трёхмерном случае — равенство стремление решению к 0.

т.к. $|u| < M$, то $b_0 = 0, a_n, b_n = 0$; $u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi)$

3) если решается задача в кольце $a < r < b$, то берётся полное решение, и для определения коэф-тов раскл-ся в ряд Фурье ф-ции на внешней и внутренней границе кольца.

[для внешн. и внутр. задачи реш-е и сверить и под-ть ф. Пуассона]

Формула Пуассона для внутренней задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a, \\ u|_{r=a} = g(\varphi) \end{cases} : u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 - 2ar \cos(\varphi - \psi) + a^2} g(\psi) d\psi$$

(аналогичная ф-ла для внешней задачи Дирихле).

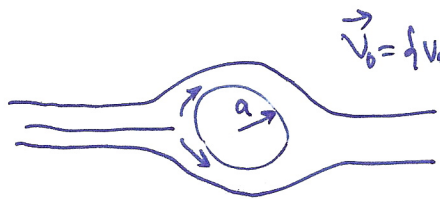
Выбираем такую систему координат, в которой граница области является координатной линией /поверхностью/.

При раздел-ии пер-ых в полярных координатах:

$$u_0(r) = A_0 \ln r + B_0; \quad u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - \text{внутр. задача}$$

$$u_n(r, \varphi) = r^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - \text{внешняя задача}.$$

Задача об обтекании цилиндра:



$$\vec{V}_0 = \{V_0, 0, 0\}$$

Будем искать u : $\vec{v} = -\text{grad } u$

$$u_0 = -V_0 x = -V_0 r \cos \varphi$$

$$\Delta u = 0, r > a$$

Скорость потока имеет только тангенциальную составляющую: $\frac{\partial u}{\partial r}(a, \varphi) = 0$, $\text{grad}(u - u_0) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$

$$u(r, \varphi) = u_0(r, \varphi) + W(r, \varphi) \Rightarrow \begin{cases} \Delta W = 0, r > a \\ \frac{\partial W}{\partial r}(a, \varphi) = -\frac{\partial u_0}{\partial r} = V_0 \cos \varphi \\ \text{grad } W \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

$$W(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \left(\frac{a}{r}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{используем граничные условия: } \frac{\partial W}{\partial r}(a, \varphi) = \frac{A_0}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \frac{n}{a} =$$

$$\Rightarrow A_n = 0, n=0, 2, 3, \dots; B_n = 0, n=1, 2, 3, \dots \quad = V_0 \cos \varphi$$

$$A_1 = -V_0 a$$

$$\boxed{W(r, \varphi) = B_0 - V_0 \frac{a^2}{r} \cos \varphi}$$

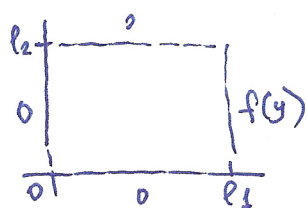
$$u(r, \varphi) = B_0 - V_0 \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \varphi$$

$$V_r = -\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \varphi \Rightarrow V_r(a, \varphi) = 0$$

$$V_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -V_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \varphi; \quad V_\varphi(0) = V_\varphi(\pi) = 0 \text{ при } r=a;$$

$$V_\varphi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp 2V_0 \text{ при } r=a.$$

Решение задачи для прямого цилиндра:



Вспомогательная задача

$$\Rightarrow \begin{cases} X''Y + XY'' = 0, \\ \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda. \end{cases}$$

$$\Delta u = 0$$

$$u(0, y) = 0, u(l_1, y) = 1,$$

$$u(x, 0) = u(x, l_2) = 0$$

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, X(l_1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(l_2) = 0. \end{cases}$$

$$X(x) = A \operatorname{ch} \frac{\pi n}{l_1} x + B \operatorname{sh} \frac{\pi n}{l_1} x, \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n l_1}{l_2}}; \quad Y = Y_n = \sin \frac{\pi n y}{l_2} \Rightarrow u_n(x, y) = C_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n x}{l_1}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n l_1}{l_2}} \sin \frac{\pi n y}{l_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n x}{l_1}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n l_1}{l_2}} \sin \frac{\pi n y}{l_2}$$

для задачи Дирихле: $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n y}{l_2} = f(y)$

$$C_n = f_n = \frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} f(y) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy$$

[аналогично решается задача для прямого цилиндра, наклоненного].

18. Функция Грина для оператора Лапласа.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ ГРИНА.



$$\Delta u = 0 \text{ в } T$$

$$u(M)|_S = f(M)$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{M_0 M}} \right) \right) dS_M$$

решение нельзя получить, т.к. $\frac{\partial u}{\partial n}$ и u на гр-це заданы независимо

Рассм. $\Delta v = 0$:

$$\iiint_T (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

$$\Rightarrow 0 = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n} v) dS_M \Rightarrow \text{сочетая две формулы:}$$

$$\Rightarrow u(M_0) = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial n}(M) \left(\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} + v \right) - u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} + v \right) \right) dS_M$$

Подберём v так, чтобы $\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} + v = 0$

Ф-я Грина: $G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} + v(M_0, M)$, где $\Delta v = 0$.

$$v(M_0, M)|_{M \in S} = -\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} \Rightarrow u(M_0) = - \iint_S \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M) u(M) dS_M$$

чтобы найти Ф-ю Грина, можно решить задачу Дирихле

[все совокупности задач Дирихле сводятся к единств. з. Дирихле]

$$\begin{cases} \Delta G(M_0, M) = 0 \text{ при } M \neq M_0 \\ G(M_0, M) \approx \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} \text{ при } M \rightarrow M_0 \\ G(M_0, M)|_{M \in S} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ если решение задачи Дирихле з-ес, то оно — единственно.

В двумерном случае: $G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} + v(M_0, M)$,

$$\text{где } \Delta v(M_0, M) = 0; v(M_0, M)|_{M \in S} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}}|_{M \in S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(M_0) = - \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M) u(M) dS_M$$

свойства функции Грина!

① $G(M_0, M) \geq 0$: Окружаем т. M_0 сферой радиуса ε . В обл-ти



$T \setminus \text{сферы } S_\varepsilon$ радиуса ε Ф-я Грина гармонична,

на гр-це обл-ти T Ф-я Грина $= 0$. На сфере S_ε :

$$\frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{можно сделать Ф-ю Грина положительной}$$

$\Rightarrow$ по принципу миним. з-я $\Rightarrow$ Ф-я Грина положительна.

② $G(M_0, M) = G(M, M_0)$: Рассм. $u(M) = G(M_1, M)$, $v(M) = G(M_2, M)$.

2-я теорема Грина $\Rightarrow \iiint_{T_E} (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_{S_1 \cup S_2} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS_1$



$$\iint_{S_1} (G(M_2, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) - G(M_1, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M)) dS +$$

$$+ \iint_{S_2} (G(M_2, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) - G(M_1, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M)) dS = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \iint_{S_1} (\frac{1}{4\pi\epsilon} + W(M_1, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M)) dS_1 = -(\frac{1}{4\pi\epsilon} + W(M_1, M^*)) \times$$

$$\times \frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M^*) 4\pi\epsilon^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} + \frac{\partial W}{\partial n}(M_1, M) \Rightarrow \iint_{S_1} G(M_2, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) dS =$$

$$= G(M_2, M^*) (\frac{1}{4\pi\epsilon^2} + \frac{\partial W}{\partial n}(M_1, M^*)) \cdot 4\pi\epsilon^2 \rightarrow G(M_2, M_1)$$

$$\iint_{S_1} 1 \rightarrow -G(M_1, M_2) \Rightarrow G(M_2, M_1) - G(M_1, M_2) = 0 \Rightarrow G(M_2, M_1) = G(M_1, M_2),$$

теорема

Функция Грина для полуплоскости и полупространства

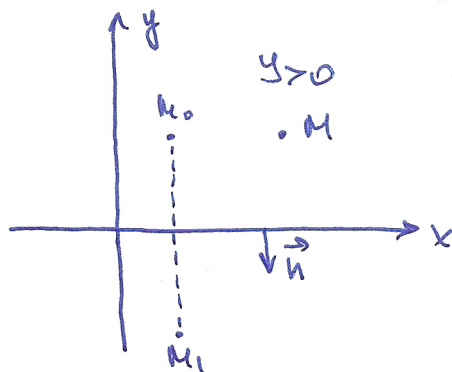
① полуплоскость:

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2u} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} + v(M_0, M)$$

Возьмём $v(M_0, M) = -\frac{1}{2u} \ln \frac{1}{r_{M_1 M}}$

$$\Rightarrow G(M_0, M) = \frac{1}{2u} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} - \frac{1}{2u} \ln \frac{1}{r_{M_1 M}} =$$

$$= \frac{1}{2u} \ln \frac{r_{M_1 M}}{r_{M_0 M}} = \frac{1}{4u} \ln \frac{r_{M_1 M}^2}{r_{M_0 M}^2}$$



$$M_0 = \{x_0, y_0\}; M_1 = \{x_0, -y_0\}, y_0 > 0; M = \{\xi, \eta\}, \eta > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(x_0, y_0, \xi, \eta) = \frac{1}{4u} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, y > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = - \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(x, y, \xi, \eta) f(\xi) d\xi =$$

$$= \int_S \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta=0} f(\xi) d\xi; u(x, y) = \frac{1}{4u} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2(y+\eta)}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} - \frac{2(\eta-y)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) \Big|_{\eta=0} d\xi =$$

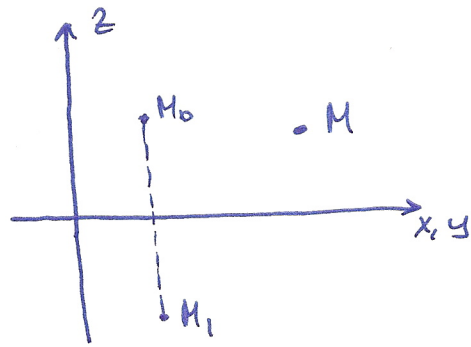
$$= \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi) d\xi = \frac{y}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi) d\xi \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\xi-x}{y} = t \\ \xi = x+ty; d\xi = dt \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow$$

используя замену

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+ty) dt}{(1+t^2)} \rightarrow f(x) \text{ при } y \rightarrow 0.$$

② полупространство: $G(u_0, u) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_{u_0 u}} - \frac{1}{4\pi \varepsilon_{M, u}}$ $\begin{cases} \Delta u = 0, z > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \end{cases}$

$M_0 = \{x, y, z\}; M_1 = \{x, y, -z\}, M = \{\xi, \eta, \zeta\}$



$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right)$$

$$u(x, y, z) = - \iint_S \frac{\partial G}{\partial n} (u_0, u) f(u) dS_u = \iint_S \frac{\partial G}{\partial \zeta} (u_0, u) \Big|_{\zeta=0} f(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} (x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{2(z-\zeta)}{2[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} + \frac{2(z+\zeta)}{2[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$u(x, y, z) \stackrel{z \rightarrow 0}{=} f(x, y)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, y > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases} \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi-x}{y} = t, \\ \xi = x + ty, d\xi = y dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \arctg t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-x/y}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{x}{y} \right).$$

19. Применение конформных отображений к решению краевых задач для ур-я Лапласа.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧНОСТИ ПРИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖ.

$$z = (x, y), f(z) = \xi + i\eta, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$f: \begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

$T \xrightarrow{\sim} T_1$, $f(z)$ - аналитическая ф-я, $f'(z) \neq 0$.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad - \text{условие Коши-Римана.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \Delta \xi = 0, \Delta \eta = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2 = 0. \end{aligned}$$

$$u(x, y) = U(\xi, \eta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} \Delta \eta \right) \stackrel{\text{усл. К-Р.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Будем считать, что преобр-е было конформным, т.е. выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0.$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2, \quad f'(z) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \Delta U \cdot |f'(z)|^2 \Rightarrow \text{св-во гармоничности сохраняется.}$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ ОТБРАЖЕНИЙ.

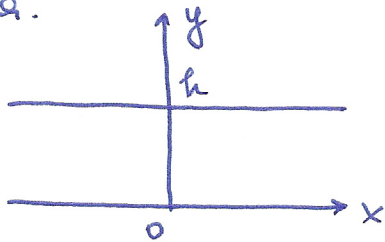
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в } T, \\ u(x, y)|_{\Gamma} = g(x, y) \end{cases} \quad \begin{matrix} T \xrightarrow{f(z)} T_1 & \xi = \varphi(x, y) \\ \Gamma \rightarrow \Gamma_1 & \eta = \psi(x, y) \end{matrix}$$

$$\Delta U = 0 \text{ в } T_1; \quad U(\xi, \eta)|_{\Gamma_1} = G(\xi, \eta)$$

конф. отображения обратимы $\Rightarrow x = \Phi(\xi, \eta)$ и $y = \Psi(\xi, \eta) \Rightarrow$
 $\Rightarrow g(x, y) = g(\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)) = G(\xi, \eta)$.

Т.о. задача Дирихле в обл-ти T была сведена к задаче Дирихле в обл-ти T_1 . Если T_1 проще, чем T , то мы добились желаемого упрощения.

ПРИМЕР:



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, 0 < y < h \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, h) = u_0 \end{cases}$$

$$f(z) = e^{\frac{\pi}{h}z} = e^{\frac{\pi}{h}(x+iy)} = e^{\frac{\pi}{h}x} (\cos \frac{\pi}{h}y + i \sin \frac{\pi}{h}y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = e^{\frac{\pi}{h}x} \cos \frac{\pi}{h}y \\ \eta = e^{\frac{\pi}{h}x} \sin \frac{\pi}{h}y \end{cases}$$

Прямая, //ная Ox переходит в $\eta = 0$
 $x = \text{const} \rightarrow$ полукруг-тв.

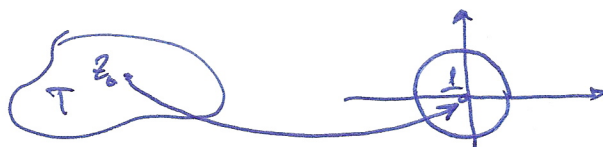
Итак, отображим полосу на полукруг-тв: $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0, \eta \geq 0$,

$$\begin{aligned} U(\xi, 0) &= \begin{cases} 0, & 0 < \xi < \infty \\ u_0, & -\infty < \xi < 0 \end{cases} \Rightarrow U(\xi, \eta) = \frac{u_0}{h} \int_{-\infty}^0 \frac{\eta}{(\xi-s)^2 + \eta^2} ds = \\ &= \begin{cases} \frac{s-\xi}{\eta} = t \\ s = \xi + t\eta, ds = \eta dt \end{cases} = \frac{u_0}{h} \int_{-\infty}^{-\frac{\xi}{\eta}} \frac{\eta^2 dt}{\eta^2 t^2 + \eta^2} = \frac{u_0}{h} \int_{-\infty}^{-\frac{\xi}{\eta}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{u_0}{h} \arctg t \Big|_{-\infty}^{-\frac{\xi}{\eta}} = \\ &= \frac{u_0}{h} (-\arctg \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi}{2}) = \frac{u_0}{h} \arctg \frac{\xi}{\eta} \Rightarrow u(x, y) = \frac{u_0}{h} \arctg \ctg \frac{\pi}{h} y = \frac{u_0}{h} y. \end{aligned}$$

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ ОТБРАЖЕНИЙ.

$$\xi = f(z_0, z)$$

$$z_0 \mapsto 0$$



Берём
 $\rightarrow G(M_0, M) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z_0, z)|, \quad \xi = -\frac{1}{2\pi} \ln f(z_0, z)$

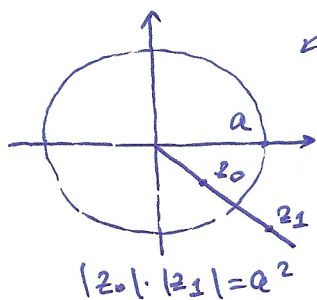
$$\operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln(f(z_0, z)) \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z_0, z)|; \quad G(M_0, M) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} \right|$$

$$\times |z - z_0| = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} \right| - \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0|$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2\pi} \ln \zeta_{\text{ном}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\zeta_{\text{ном}}}$$

$G(u, u)|_{\text{мет}} = 0$ - очевидно.

ПРИМЕР: круг радиуса $a \mapsto$ круг единичного радиуса



z_0 и z_1 - сопряжённые точки.

при $z_0 \mapsto 0 : z_1 \mapsto \infty, a \mapsto 1$.

$$\xi = \frac{z-z_0}{z-z_1} \cdot A \quad ; \quad 1 = \frac{a-z_0}{a-z_1} \cdot A \Rightarrow A = \frac{a-z_1}{a-z_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{z-z_0}{z-z_1} \cdot \frac{a-z_1}{a-z_0}$$

$$z_0 = re^{i\varphi} \quad z_1 = \frac{a^2}{r} e^{i\psi} \quad z = \rho e^{i\varphi}$$

$$G(u, u) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{|z-z_0|^2 |a-z_0|^2}{|z-z_1|^2 |a-z_1|^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|z-z_1|^2 |a-z_0|^2}{|z-z_0|^2 |a-z_1|^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{\rho^2 - 2\rho \frac{a^2}{r} \cos(\varphi - \psi) + \frac{a^4}{r^2}}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + r^2} \right] \times$$

$$\frac{a^2}{r} (r^2 - 2ar \cos \varphi + a^2)$$

$$\times \left[\frac{a^2 - 2ar \cos \varphi + r^2}{a^2 - 2a \frac{a^2}{r} \cos \varphi + \frac{a^4}{r^2}} \right] = \frac{1}{4\pi} \ln \left[\frac{\frac{\rho^2 r^2}{a^2} - 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + a^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + r^2} \right]$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a \\ u(a, \varphi) = g(\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r, \varphi) = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial n} (r, \varphi, \rho, \psi) \Big|_{\rho=a} g(\psi) d\psi =$$

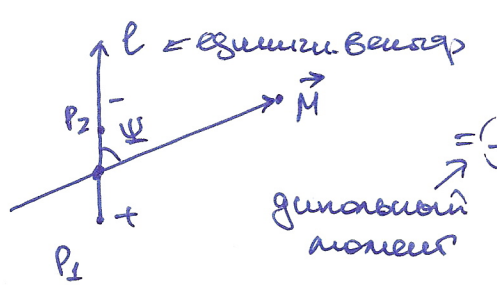
$$= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} a \left[\frac{\frac{2\rho r^2}{a^2} - 2r \cos(\varphi - \psi)}{\frac{\rho^2 r^2}{a^2} - 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + a^2} - \frac{2\rho - 2r \cos(\varphi - \psi)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + r^2} \right] \Big|_{\rho=a} g(\psi) d\psi =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - a^2}{r^2 - 2ra \cos(\varphi - \psi) + a^2} g(\psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ra \cos(\varphi - \psi) + a^2} g(\psi) d\psi$$

интеграл Пуассона для круга

20. Потенциал двойного слоя. Существование на поверхности.
Поведение вне поверхности.

$W(M) = \frac{e}{r_{PM}}$ - потенциал точечного заряда.



$$W(M) = \frac{e}{r_{PM}} - \frac{e}{r_{P_2M}} = -e \left(\frac{1}{r_{P_2M}} - \frac{1}{r_{P_1M}} \right) =$$

$$= \underbrace{(-e \Delta l)}_N \frac{\frac{1}{r_{P_2M}} - \frac{1}{r_{P_1M}}}{\Delta l} = -N \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) =$$

$$= -N \vec{l} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r_{PM}}.$$

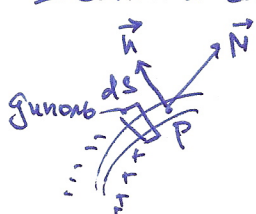
$M = \{x, y, z\}; P = \{\xi, \eta, \zeta\} \quad \frac{1}{r_{PM}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) = - \frac{2(\xi-x)}{2((\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2)^{3/2}}$$

$$\text{grad}_P \frac{1}{r_{PM}} = \frac{(x-\xi)\vec{i} + (y-\eta)\vec{j} + (z-\zeta)\vec{k}}{r_{PM}^3} = \frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^3}$$

$$W(M) = -N \frac{(\vec{l} \cdot \vec{r}_{PM})}{r_{PM}^3} = -N \frac{|\vec{l}| \cos \varphi}{r_{PM}^3} = -N \frac{\cos \varphi}{r_{PM}^2} = -N \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right)$$

Двойной слой



$\mathcal{D}$ - плотность дипольных моментов.

$$W(M) = - \iint_S \frac{\partial}{\partial \rho_P} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \cdot \mathcal{D}(P) dS_P = - \iint_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}^2} \mathcal{D}(P) dS_P =$$

$$= \iint_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}^2} \mathcal{D}(P) dS_P. \quad \leftarrow \text{потенциалом дв. слоя}$$

невозм. если из 3-х ит-тов.

Если M попадает на пов-ть S , то ит-л перестаёт быть Римановым; вне S ит-срл определён всегда; ит-р-но зависит от параметров.

$\Rightarrow \Delta W = 0$ вне S (г-во в конце см.)

Потенциал двойного слоя в 3-мерном случае:

$$W(M) = - \int_S \frac{\partial}{\partial \rho_P} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} \right) \mathcal{D}(P) dS_P = - \int_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}} \mathcal{D}(P) dS_P =$$

$$= \int_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}} \mathcal{D}(P) dS_P$$

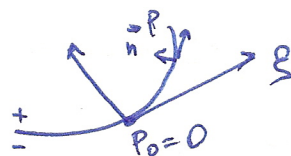
существование потенциала дв. слоя в точках поверхности S .

Если пов-ть S обладает гладкостью 2-го порядка в окр-ти т. P_0 , а $\mathcal{D}$ - о.р. и ит-ма, то потенциал дв. слоя $\mathcal{I}$ в точках

гашной поверхности.

Будем рассм. гв. непрерывный случай: выберем начало координат в т. P_0 , оси - по нормали и по касательной:

по ξ -лам Тейлора: $\eta(\xi) = \eta''(0) + \xi \eta'(0) + \frac{1}{2} \xi^2 \eta''(s_1)$; $\eta'(\xi) = \eta'(0) + \xi \eta''(s_2)$



единичный вектор касательный в т. P : $\vec{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}}, \frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \right)$

вектор внутр. нормали в т. P : $\vec{n} = \left(-\frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \right)$

$\vec{\tau}_{P0} = \{1 - \xi_1, -\eta(\xi)\}$.

$$(\vec{n}, \vec{\tau}_{P0}) = \frac{\xi \eta'(\xi) - \eta(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \stackrel{\text{Ф.Тейл.}}{=} \frac{\xi^2 \eta''(s_2) - \frac{1}{2} \xi^2 \eta''(s_1)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} = \tau_{P0} \cdot \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \varphi}{\tau_{P0}} = \frac{\xi^2 \eta''(s_2) - \frac{1}{2} \xi^2 \eta''(s_1)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)} \cdot \tau_{P0}^2} = \frac{\eta''(s_2) - \frac{1}{2} \eta''(s_1)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)} (1 + \frac{\xi^2}{4} (\eta''(s_1))^2)}$$

Требование гладкости существенно, чтобы $\cos \varphi \rightarrow 0$.

$$\frac{\cos \varphi}{\tau_{P0}} \mapsto \frac{1}{2} \eta''(0).$$

Поэтому $\Delta W(M) = 0$:

$$\Delta W(M) = - \int \int_S \Delta_M \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \nu(p) dS_p =$$

$$= - \int \int_S \underbrace{\frac{\partial}{\partial n_p} \Delta_M \left(\frac{1}{r_{PM}} \right)}_0 \nu(p) dS_p = 0 \quad \text{вне } S$$

В гв. непрерывном случае аналогично.

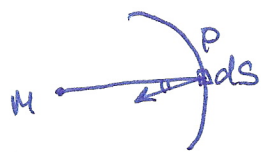
21. Разрыв потенциалов двойного слоя на поверхности.

[Т:] [в трёхмерном случае]: $W_B(P_0) = W(P_0) + 2\pi D(P_0) - \text{внутр. предел. 3D-е}$
 $W_H(P_0) = W(P_0) - 2\pi D(P_0) - \text{наруж. предел. 3D-е.}$

Пов-ть в окр-ти т. P_0 обладает 2-м порядком гладкости, D -отр. и интегрируема, D -непр. в т. P_0 , любой из пересечений поверхности в конечном числе точек.
 (кривоуго при $n=2$)

[Т:] [в двумерном случае]: $W_B(P_0) = W(P_0) + \pi D(P_0)$
 $W_H(P_0) = W(P_0) - \pi D(P_0)$

Загл-во: (где двуче.сл.) ① $D = \text{const} = D_0$, $W(M) = D_0 \int_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}} dS_P$
 S контур.



$\Rightarrow ds \times \cos \varphi = d\Omega$ - проекция ds на луч от P_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cos \varphi ds}{r_{PM}} = \frac{d\Omega}{r_{PM}}$ - угловая мера $d\Omega$ - угол, под которым из т. M видно $d\Omega$ и, как следствие, ds

дуга от P_0 с центром в т. M и рад. PM

$\Rightarrow$ подынтегральное выражение - угол, под которым видно $ds \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ если взять интеграл, то будет полный угол видимости, под которым видно всю пов-ть [с учётом знаков].

$\Rightarrow$ Если линия S замкнута, а точка M - внутри $\Rightarrow$ угол $= 2\pi$!

$W(M) = \begin{cases} 2\pi D_0, & \text{если } M \text{ внутри } S \\ 0, & \text{и вне } S \\ \pi D_0, & \text{если } M \text{ на } S \end{cases} \Rightarrow \text{итб. Верно.}$

② Другой случай (*). Расем. $W^0(M) = D(P_0) \int_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}} dS_P$.

Будем исследовать: $I(M) = W(M) - W^0(M) = \int_S \frac{\cos \varphi(P, M)}{r_{PM}} (D(P) - D(P_0)) dS_P$

$W^0(M)$ - разрывна (из ①) } $\Rightarrow W(M)$ будет разрывна.
 значит, что $I(M)$ - непр.

Расем. $I(M) = \int_S F(M, P) f(P) dS_P$

$I(M)$ не-св. равн-но в т. $P_0 \in S \stackrel{\text{дф}}{=} \text{где } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \left| \int_{S_\delta} F(M, P) f(P) dS_P \right| < \varepsilon$
 где $S_\delta \subset K_{P_0}^\delta$, $\forall M \in K_{P_0}^\delta$.

(*) Б.т., что S -замкн. Внут. сл.-замкнёт и дополнит $\nu(P) = 0$ на S' .

$$|Y(M)| \leq \int_{S^0} \frac{|\cos \varphi(M, P)|}{r_{MP}} |\mathcal{D}(P) - \mathcal{D}(P_0)| dS_P \leq \max_{S^0} |\mathcal{D}(P) - \mathcal{D}(P_0)| \times \int_{S^0} \frac{|\cos \varphi(M, P)|}{r_{MP}} dS_P \leq \max_{S^0} |\mathcal{D}(P) - \mathcal{D}(P_0)| \int_{S^0} \frac{1}{r_{MP}} dS_P \leq$$

но - макс. значение точек пересечения

конечное значение

✓ путь с конформ

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi r_0} \cdot 2\pi r_0 = \varepsilon \Rightarrow Y \text{ непрерывна в } P_0.$$

$$W(M) = W^0(M) + Y(M); \quad W(P_0) = W^0(P_0) + Y(P_0) \text{ при } P_0 \in S.$$

$$W^0(M) = \begin{cases} 2\pi P_0 - M \text{ внутри } S, \\ 0, M \text{ вне } S, \\ \pi P_0 - M \text{ на } S \end{cases} \quad Y(M) - \text{непр.}$$

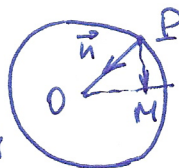
ПРИМЕР: S-кривая, т.е. окружность.

$P = \{a, \alpha\}$ - полюс по окружности (центр окружности)

$$M = \{r, \theta\}$$

Внутр. нормаль: $\vec{n} = \{-\cos \alpha, -\sin \alpha\}$

$$\vec{r}_{PM} = \{r \cos \theta - a \cos \alpha, r \sin \theta - a \sin \alpha\}$$



$$(\vec{n}, \vec{r}_{PM}) = a - r \cos(\theta - \alpha) = r_{PM} \cos \varphi(M, P).$$

$$\frac{\cos \varphi}{r_{PM}} = \frac{(\vec{n}, \vec{r}_{PM})}{r_{PM}^2} = \frac{a - r \cos(\theta - \alpha)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2}$$

$$W(r, \theta) = W(M) = \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos(\theta - \alpha)) \mathcal{D}(P)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha$$

$$\text{Рассм. } W(a, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 (1 - \cos(\theta - \alpha)) \mathcal{D}(P) d\alpha}{2a^2 (1 - \cos(\theta - \alpha))} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathcal{D}(\alpha) d\alpha.$$

$$\text{Рассм. } \mathcal{D} = \text{const} = \mathcal{D}_0: \quad W(r, \theta) = \mathcal{D}_0 \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha =$$

$$= \mathcal{D}_0 \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos \beta) d\beta}{a^2 - 2ar \cos \beta + r^2} = W(r).$$

Если $\mathcal{D} = \text{const}$, то W не зависит от θ .

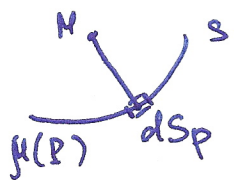
$$0 \leq r < a$$

$$r=0: W(0) = 2\pi \mathcal{D}_0$$

$$r=a: W(a) = \pi \mathcal{D}_0$$

$$r > a: W(r) = 0.$$

(22) Потенциал простого слоя. Существование и непрерывность во всем пространстве.



$$U(M) = \iint_S \frac{\mu(P) dS_P}{r_{MP}} \quad - \text{в трёхмерном случае};$$

$$V(M) = \int_S \ln \frac{1}{r_{MP}} \mu(P) dS_P \quad - \text{в двумерном случае}$$

$$\Delta V = \iint_S \Delta \mu \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \mu(P) dS_P = 0 \quad \text{при } M \notin S$$

Существование и непрерывность в точках поверхности S:

Доказано:



$$M = \{x, y, z\}$$

$$z = z(x, y)$$

$$P = \{\xi, \eta, \zeta(\xi, \eta)\}$$

$$P_0 = \{0, 0, 0\}$$

$$r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta(\xi, \eta))^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$\cos \gamma dS_P = d\xi d\eta \Rightarrow dS_P = \frac{d\xi d\eta}{\cos \gamma}$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos \gamma \leq 1, \quad |\mu(P)| \leq A.$$

$$\begin{aligned} |V_\delta(M)| &= \left| \iint_{S_\delta} \frac{\mu(P) dS_P}{r_{MP}} \right| \leq 2A \iint_{S_\delta} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leq 2A \iint_{\sum_M} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \\ &= 2A \cdot 2\pi \int_0^{2\delta} \frac{2dr}{2} = 8A\pi\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

На плоскости: ($n=2$) $M = \{x, y\}$, $P = \{\xi, \eta(\xi)\}$, $P_0 = \{0, 0\}$.

$$V(M) = \int_S \ln \frac{1}{r_{MP}} \mu(P) dS_P \quad ; \quad r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta(\xi))^2} \geq |x-\xi|$$

$$dS_P = \sqrt{1 + (\eta'(\xi))^2} d\xi \quad (|\mu(P)| \leq A)$$

$$\begin{aligned} |V_\delta(M)| &= \left| \int_S \ln \frac{1}{r_{MP}} \cdot \mu(P) dS_P \right| \leq A \int_{-\delta}^{\delta} \ln \frac{1}{|x-\xi|} \sqrt{1 + \eta'^2(\xi)} d\xi \leq \\ &\leq -2A \int_{-\delta}^{\delta} \ln |\xi - x| d\xi = \{\xi - x = t\} = -2A \int_{-2\delta}^{2\delta} \ln |t| dt = -4A \int_0^{2\delta} \ln |t| dt = \\ &= -4A t (\ln t - 1) \Big|_0^{2\delta} = -4A 2\delta (\ln 2\delta - 1) = 8\delta (1 - \ln 2\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 < \varepsilon \end{aligned}$$

23. Скачок нормальной производной потенциала прямого слоя на поверхности.

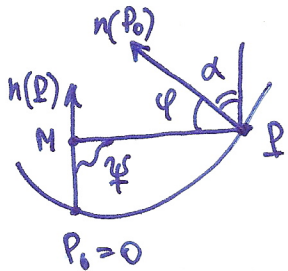
$$\boxed{n=3:} \quad \frac{\partial V}{\partial n}(M) = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \mu(P) dS_P = \gamma(M)$$

$$\boxed{\text{т.п.}} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0) \right)_B = \gamma(P_0) [-2\pi \mu(P_0), n=3] [-\pi \mu(P_0) \text{ где } n=2]$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0) \right)_H = \gamma(P_0) [+2\pi \mu(P_0), n=3] [+ \pi \mu(P_0) \text{ где } n=2]$$

l - направление дифференцирования

$$\boxed{n=2:} \quad \frac{\partial V}{\partial l}(M) = \int_S \frac{\partial}{\partial l} \ln \frac{1}{r_{MP}} \mu(P) dS_P = - \int_S \frac{\vec{l} \cdot \vec{l}_{MP}}{r_{MP}^2} \mu(P) dS_P$$



Рассм. $\vec{l} = \vec{n}(P_0)$

$$\frac{\partial V}{\partial n}(M) = - \int_S \frac{\cos \varphi(M, P) \mu(P) dS_P}{r_{MP}} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(M, P) = \\ = \varphi(M, P) + \alpha(P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow - \int_S \frac{\cos \varphi(M, P) \cos \alpha(P) \mu(P)}{r_{MP}} dS_P +$$

$$+ \int_S \frac{\sin \varphi(M, P) \sin \alpha(P) \mu(P)}{r_{MP}} dS_P = \underbrace{\quad}_{u(M)} = -W(M) + u(M)$$

$u(M)$ - непрерывна? = проверим: $M = \{0, y\}$, $P = \{\xi, \eta(\xi)\}$, $P_0 = \{0, 0\}$.

$$\sin \alpha(P) = \frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1 + \eta'^2(\xi)}}, \quad \eta(\xi) - \text{уравнение кривой } S; \quad dS_P = \sqrt{1 + \eta'^2(\xi)} d\xi$$

$$|u_\delta(M)| = \left| \int_{S_\delta} \frac{\sin \varphi \sin \alpha}{r_{MP}} \mu(P) dS \right| = \left| \int \frac{\sin \varphi \mu(P) \cdot \eta'(\xi)}{\sqrt{\xi^2 + (y - \eta(\xi))^2}} d\xi \right| =$$

все ξ непрерывны, но касательная в $P_0 = 0$ по выбору с-мы к-р, δ

$$= \{ \eta'(\xi) = \eta'(0) + \xi \eta''(\theta \xi) \} = \int_{-\delta}^{\delta} |\sin \varphi \mu(P)| \frac{|\eta''(\xi)| |\xi|}{\sqrt{\xi^2 + (y - \eta(\xi))^2}} d\xi \quad \text{все по-прежнему} \quad \Leftrightarrow$$

константа, отсюда все непрерывно выражение

$\Rightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Rightarrow$ интеграл $u(M)$ сходится равномерно в т. $P_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u(M)$ - непрерывна в т. P_0 .

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}(P_0)\right)_B = -W_B(P_0) + \overbrace{u(P_0)}^{\text{непр.}} = -W(P_0) - \bar{u}\mu(P_0) + u(P_0) = \\ = \psi(P_0) - \bar{u}\mu(P_0).$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}(P_0)\right)_H = -W_H(P_0) + u(P_0) = -W(P_0) + \bar{u}\mu(P_0) + u(P_0) = \\ = \psi(P_0) + \bar{u}\mu(P_0) \Rightarrow \text{т.о. доказан скачок.}$$

ПРИМЕР: [потенциал пр. заряда сс сферы].

$$M = \{r, \theta, \varphi\}, P = \{a, \alpha, \beta\}; r_{MP}^2 = r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)$$

$$V(r, \theta, \varphi) = \int_0^{\bar{u}} \int_0^{2\pi} \frac{\mu(u, \beta) a^2 \sin \alpha d\alpha d\beta}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \gamma + a^2}}$$

Пусть $\mu(u, \beta) = \mu_0$, $V = V(r)$, тогда
 $M = \{r, 0, \varphi\} \Rightarrow \cos \gamma = \cos \alpha$

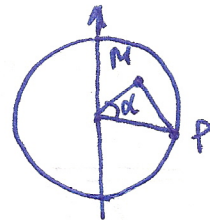
$$V(r) = \mu_0 \int_0^{\bar{u}} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin \alpha d\alpha d\beta}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \alpha + a^2}} =$$

$$= 2\pi \mu_0 a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \alpha + a^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 2ar \cos \alpha + a^2 = t^2 \\ 2t dt = 2ar \sin \alpha d\alpha \Rightarrow \sin \alpha d\alpha = \frac{t dt}{ar} \end{cases} \Leftrightarrow$$

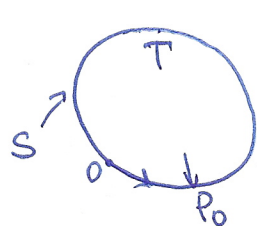
$$\Leftrightarrow 2\pi \mu_0 a^2 \frac{1}{ar} \int_{|a-r|}^{a+r} dt = 2\pi \mu_0 \frac{a}{r} (a+r - |a-r|)$$

1) $0 \leq r \leq a \Rightarrow V(r) = 4\pi \mu_0 a = \text{const};$

2) $0 \leq a \leq r \Rightarrow V(r) = 4\pi \mu_0 \frac{a^2}{r} = \frac{c}{r}.$



(24.) Сведение первой краевой задачи для уравнения Лапласа к интегральному уравнению.



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T, \\ u(M)|_S = f(M) \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(M) = w(M) = \int_S \frac{\cos \varphi(M, P)}{r_{P_0 P}} \nu(P) dS_P,$$

где $\nu(P)$ - пока неизвестная функция.

$\nu(P)$ - выбирается в зависимости от граничного условия, т.к. уравнение выполняется автоматически.

$$u(P_0)|_S = w(P_0)|_S = f(P_0); \quad \bar{n} \nu(P_0) + \int_S \frac{\cos \varphi(P, P_0)}{r_{P_0 P}} \nu(P) dS = f(P_0).$$

$$\nu(P_0) + \frac{1}{4} \int_S \frac{\cos \varphi(P_0 P)}{r_{P_0 P}} \nu(P) dS = \frac{1}{4} f(P_0) \quad \text{— интегральное ур-е}$$

Фредгольма 2-го рода.

$$P \rightarrow S; P_0 \rightarrow S_0: \quad \frac{1}{4} \frac{\cos \varphi(P_0, P)}{r_{P_0 P}} = K_1(S_0, S), \quad \text{в-длина } S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu(S_0) + \int_0^l K_1(S_0, S) \nu(P) dS = \frac{1}{4} f(S_0) \quad (1), \quad K_1(S_0, S) \text{ — ядро интегр. уравнения}$$

$$\text{Решаем однородное: } \nu(S_0) + \int_0^l K_1(S_0, S) \nu(P) dS = 0 \quad (2)$$

Пусть наибольшее по мод-ю значение ν достигается в т.б: (решение ур-я (2) ν),

$$\text{т.е. } |\nu(\zeta)| \geq |\nu(S)| \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} \int_0^l \frac{\cos \varphi}{r(P_0, P)} dS = \int_0^l K_1(S_0, S) dS = 1 \quad \forall S_0$$

$$\Rightarrow \int_0^l K_1(S_0, S) (\nu(S_0) + \nu(S)) dS = 0 \Rightarrow \int_0^l \underbrace{K_1(\zeta, S)}_{\neq 0} (\underbrace{\nu(\zeta) + \nu(S)}_{\text{не может быть знак}}) dS = 0$$

$\Rightarrow$ поразительная ф-я — знакострел

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{поразит. вып-е} &= 0 \\ K_1(\zeta, S) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \nu(\zeta) + \nu(S) &= 0 \\ 2\nu(\zeta) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu(S) \equiv 0.$$

Если однородное ур-е имеет только тривиальное решение, то неоднородное ур-е разрешимо, и причем единственным образом.

Если линия S обладает гладкостью второго порядка и явл-ся выпуклой, то $\exists$ реш-е задачи Дирихле.

ПРИМЕР:

задача в круге:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a, \\ u(a, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

Б. искать реш-е в виде потенциала гв. слоя:

$$u(r, \theta) = w(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} \bar{v}(\alpha) d\alpha$$

$$u(a, \theta) = w(a, \theta) = \bar{v}(\theta) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{v}(\alpha) d\alpha = f(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v}(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{v}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} f(\theta) \quad (*) \quad K_1(S_0, S) = \frac{1}{2\pi}.$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \bar{v}(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \bar{v}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \leftarrow \text{нравится предположение} \Rightarrow$$

or 0 go 2π no $d\theta$.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \bar{v}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} \bar{v}(\beta) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) d\beta$$

$$(*) \Rightarrow \bar{v}(\theta) = \frac{1}{\pi} f(\theta) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) d\beta \Rightarrow u(r, \theta) = w(r, \theta) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} f(\alpha) d\alpha - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha.$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} f(\beta) d\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r \cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} f(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2\pi}$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2a(a - r \cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} - 1 \right] f(\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\alpha)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \alpha) + r^2} d\alpha = u(r, \theta).$$

25. Сведение второй краевой задачи для уравнения Лапласа к интегральному уравнению.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(M)|_c = f(M) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{будем искать решение в виде потенциала} \\ \text{простого слоя:} \end{array}$$

внутр. нормаль

$$u(M) = V(M) = \int_0 \ln \frac{1}{r_{MP}} \mu(P) dS_P \quad \boxed{n=2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(P_0)|_c = \left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0) \right) \Big|_{\text{внутр.}} = f(P_0) ; \left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0) \right)_{\text{вн.}} = \gamma(P_0) - \pi \mu(P_0) = f(P_0)$$

$$\Rightarrow -\pi \mu(P_0) - \underbrace{\int_0 \frac{\cos \varphi(P_0, P)}{r_{P_0 P}} \mu(P) dS_P}_{\gamma(P_0)} = f(P_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(P_0) + \frac{1}{\pi} \int_0 \frac{\cos \varphi(P_0, P)}{r_{P_0 P}} \mu(P) dS_P = -\frac{1}{\pi} f(P_0)$$

параметры

$S \rightarrow P, S_0 \rightarrow P_0$

$$K_2(S_0, S) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos \varphi(S_0, S)}{r_{S_0 S}}$$

$$\mu(S_0) + \int_0^l K_2(S_0, S) \mu(S) dS = -\frac{1}{\pi} f(S_0) \quad (1)$$

$$\mu(S_0) + \int_0^l K_2(S_0, S) \mu(S) dS = 0 \quad (2) ; \mu(S_0) + \int_0^l \bar{K}_2(S_0, S) \mu(S) dS = 0 \quad (3),$$

$$\text{где } \bar{K}_2(S_0, S) = K_2(S, S_0), \text{ но: } \bar{K}_2(P_0, P) = K_2(P, P_0) =$$

$$= -K_1(P_0, P) = -K_1(S_0, S).$$

$$\Rightarrow \mu(S_0) - \int_0^l K_1(S_0, S) \mu(S) dS = 0 \quad (\text{т.к. по (3)})$$

$$\Rightarrow \int_0^l K_1(S_0, S) (\mu(S_0) - \mu(S)) dS = 0$$

$$\text{условие разрешимости: } \int_0^l f(S_0) dS = 0 ; \int_0^l f(P) dS_P = 0.$$

Задача Неймана для круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < a, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(a, \varphi) = \left(-\frac{\partial u}{\partial r}(a, \varphi) \right) = f(\varphi) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{"-"} \text{, т.к. нормаль внутренняя} \\ M = \{r, \varphi\}, P = \{a, \alpha\} \end{array}$$

Будем искать реш-е в виде потенциала простого слоя.

$$u(r, \varphi) = V(r, \varphi) = a \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha) + r^2}} \mu(\alpha) d\alpha \quad \textcircled{=}$$

$$\ominus - \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2a \cos(\varphi - \alpha) + r^2) \mu(\alpha) d\alpha$$

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial r}(r, \varphi)\right) = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2r - 2a \cos(\varphi - \alpha)}{a^2 - 2a \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \mu(\alpha) d\alpha$$

$$\left\{-\frac{\partial V}{\partial r}(a, \varphi)\right\}_B = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1 - \cos(\varphi - \alpha))}{2a^2(1 - \cos(\varphi - \alpha))} \mu(\alpha) d\alpha - \bar{\mu} \mu(\varphi) = f(\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{\pi} f(\varphi) \quad (*). \quad K_2 = -\frac{1}{2\pi} = -K_1$$

Продифференцируем по $d\varphi$ обе части (*):

$$\int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi - \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$$

$$\mu(\varphi) = -\frac{1}{\pi} f(\varphi) + \mu_0, \text{ где } \mu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(r, \varphi) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2a \cos(\varphi - \alpha) + r^2) f(\alpha) d\alpha + \\ + \frac{a\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2a \cos(\varphi - \alpha) + r^2) d\alpha.$$

—————

ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА:

[T₁] Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма $\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$ имеет единств. реш-е $\Leftrightarrow$, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

[T₂] $\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$ и $\varphi(x) = \int_a^b \bar{K}(x, s) \varphi(s) ds$, где $\bar{K}(x, s) = K(s, x)$, имеют одинаковое число ЛНЗ решений.

[T₃] Если однородное уравнение Фредгольма $\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$ имеет K ЛНЗ решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_K(x)$, то неоднородное уравнение $\varphi(x) = \int_a^b \bar{K}(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$ разрешимо $\Leftrightarrow \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = 0$, $i = \overline{1, K}$

26. Обобщенный потенциал. Существование и непрерывность во всем пр-ве.

$$\boxed{0} \quad Y(M) = \iiint_{\tau} F(M, P) f(P) d\tau_P \text{ из. равн. ск-ся в т. } P_0, \text{ если где}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon), \text{ т.к. } |Y_\delta(M)| = \left| \iiint_{\tau_\delta} F(M, P) f(P) d\tau_P \right| < \varepsilon, \text{ где}$$

$$\forall M \in K_{P_0}^\delta, \tau_\delta - \text{любая область: } \tau_\delta \subset K_{P_0}^\delta.$$

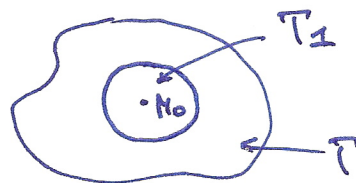
$$\boxed{1:} \quad Y(M) \Rightarrow B \in M_0 \Rightarrow Y(M) \text{ непр. в т. } M_0.$$

Доказ.: н.г.: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \forall M, |M - M_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |Y(M) - Y(M_0)| < \varepsilon$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

но τ но $\tau \setminus \tau_1$



$$|Y(M_0) - Y(M)| \leq |Y_2(M_0) - Y_2(M)| + |Y_1(M_0)| + |Y_1(M)| \leq$$

Выберем τ_1 внутри сферы радиуса δ_1 , т.к. $|Y_1(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ и

$|Y_1(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Это можно сделать в силу равн. ск-ти $Y(M)$ в т. M_0 .

$Y_2(M)$ - непр. в т. M_0 , т.к. M_0 лежит вне обл-ти интегрир-я $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \delta_2: |Y_2(M_0) - Y_2(M)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } |M - M_0| < \delta_2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ при } \begin{cases} |M - M_0| < \delta_1 \\ \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \end{cases}, \text{ к.т.д.}$$

По признаку сходимости несобств. интегралов,

$$u(M) = \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\tau_P \text{ ск-ся в } \forall M \quad [n=3],$$

т.к. $\frac{|\rho(P)|}{r_{MP}} \leq \frac{\rho}{r^\alpha}, \alpha = 1 < 3$ [где 3-мерного сигнала - асимптотично].

Покажем, что где $\forall M_0 u(M) \Rightarrow B M_0$:

$$\left| \iiint_{\tau_\delta} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\tau_P \right| \leq C \left| \iiint_{K_{M_0}^\delta} \frac{d\tau_P}{r_{MP}} \right| \leq C \left| \iiint_{K_M^{2\delta}} \frac{d\tau}{r_{MP}} \right| = C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\delta} \frac{r^2 \sin\theta}{r} dr =$$

шар с центром M_0 шар с центром M

$$= C \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\delta} \frac{r^2 \sin\theta}{r} dr = C \cdot 2\pi (-\cos\theta) \Big|_0^\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{2\delta} = C \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\delta^2 = 8\pi C \delta^2 < \varepsilon$$

при $\delta < \frac{\varepsilon}{2nc}$ $\Rightarrow$ где $\forall M_0: n(M) \Rightarrow$ в т. $M_0 \Rightarrow n(M)$ -центр. в т. $M_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ доказано сущ-е и центр-ть обвѣстного космического во
всех нр-ве.

27. Существование первых производных объёмного потенциала.

$$u(M) = \iiint_T \frac{\rho(P) d\tau_P}{r_{MP}} - \text{ОБЪЁМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) &= \iiint_T \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \iiint_T \frac{\xi-x}{r_{MP}^3} \rho(P) d\tau_P = X(x, y, z) \quad \left[\begin{array}{l} \text{если } M \notin T, \text{ то гравитационный} \\ \text{закон Ньютона} \end{array} \right] \end{aligned}$$

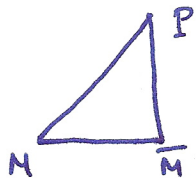
Пусть $M \in T$. Докажем: $\frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} - X(x, y, z) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

$$T_1 = K_M^\delta, T_2 = T \setminus K_M^\delta \Rightarrow u(M) = \iiint_T \frac{\rho(P) d\tau_P}{r_{MP}} = u_1 + u_2; X = X_1 + X_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Рассм.: } & \left| \frac{u_1(x+\Delta x, y, z) - u_1(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{u_2(x+\Delta x, y, z) - u_2(x, y, z)}{\Delta x} - \right. \\ & \left. - X_1(x, y, z) - X_2(x, y, z) \right| \leq \left| \frac{u_1(x+\Delta x, y, z) - u_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| + |X_1| + \\ & + \left| \frac{u_2(x+\Delta x, y, z) - u_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2(x, y, z) \right| \\ & \quad \quad \quad \uparrow \text{при } |\Delta x| < \tilde{\delta} \\ & \quad \quad \quad \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } |X_1| &\leq \iiint_{T_1} \frac{|\xi-x|}{r_{MP}^3} \overbrace{|\rho(P)|}^{\leq c} d\tau_P \leq c \iiint_{T_1} \frac{1}{r_{MP}^2} d\tau_P = \\ & \quad \quad \quad \delta \quad \quad \quad \text{отр. } \vec{r} \text{ - } \vec{r}; \quad \frac{|\xi-x|}{r} \leq 1 \text{ в } T_1 \\ &= c \cdot 4\pi \int_0^\delta dr = 4\pi c \delta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \left| \frac{u_1(x+\Delta x, y, z) - u_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \iiint_{T_1} \left| \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP}} \right) \right| |\rho(P)| d\tau_P \leq \\ &\leq \frac{c}{|\Delta x|} \iiint_{T_1} \left| \frac{r_{MP} - r_{MP}}{r_{MP} r_{MP}} \right| d\tau_P \leq c \iiint_{T_1} \frac{1}{r_{MP} r_{MP}} d\tau_P \leq \\ &\leq c \iiint_T \frac{1}{r_{MP} r_{MP}} d\tau_P \leq \frac{c}{2} \iiint_T \left(\frac{1}{r_{MP}^2} + \frac{1}{r_{MP}^2} \right) d\tau_P \leq \end{aligned}$$



$$\leq \frac{c}{2} (4\pi\delta + 4\pi \cdot 2\delta) = 6\pi c \delta \Rightarrow f_1 + |X_1| < 10\pi c \delta < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при}$$

при $\delta < \frac{\varepsilon}{20\pi c}$ - выберем такое δ и тем самым определим

T_1 и T_2 по произвольному ε . Берем $\delta_1 = \min(\delta, \tilde{\delta})$.

28. Существование вторых производных объёмного потенциала.

Уравнение Пуассона.

$$\text{т.н. вне } T \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \iiint_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \rho(P) d\tau_P = \iiint_T \frac{3(S-x)^2 - r_{PM}^2}{r_{PM}^5} \rho(P) d\tau_P$$

$\Delta u = 0$ вне T .

ρ - оцр. и кнб.; ρ - кнр. гнф-ма в оцр-ти т.н

$T_1 = K_M^\delta$, $T_2 = T \setminus K_M^\delta$: $u(M) = u_1(M) + u_2(M)$ имеет все произв-ые, т.к. $M \notin T_2$

$$r_{PM} = ((x-S)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2)^{1/2} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right) \right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \rho(P) d\tau_P = - \iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \rho(P) d\tau_P =$$

$$= - \iiint_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_{PM}} \rho(P) \right) - \frac{1}{r_{PM}} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) \right] d\tau_P \stackrel{\text{по ф. Остроградского}}{=} - \iint_{\Sigma_M^\delta} \frac{\cos \theta}{r_{PM}} \rho(P) dS_P +$$

$$+ \underbrace{\iiint_{T_1} \frac{1}{r_{PM}} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) d\tau_P}_{T_2}$$

можно гнф-ть, т.к. $\tau_{\text{об}} - \text{нор. интеграл на сфере}$

допускает' симметричное гнф-е, т.к. $\tau_{\text{об}} - \text{объёмн. н-ал с н-тью } \frac{\partial \rho}{\partial \xi}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = - \iint_{\Sigma_M^\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{MP}} \right) \rho(P) \cos \alpha dS_P \stackrel{\substack{\uparrow \\ \xi-x \\ r_{PM}}} {=} \\ = - \iint_{\Sigma} \frac{\xi-x}{r_{PM}^3} \cos \alpha \rho(P) dS_P = - \iint_{\Sigma_M^\delta} \frac{1}{r_{PM}^2} \cos^2 \alpha \rho(P) dS_P =$$

$$= - \iint_{\Sigma_M^\delta} \frac{\cos^2 \alpha}{\delta^2} \rho(P) dS_P = - \frac{1}{\delta^2} \rho(P^*) \iint_{\Sigma_M^\delta} \cos^2 \alpha dS_P =$$

$$= - \frac{1}{\delta^2} \rho(P^*) \int_{\Sigma_M^\delta} \frac{1}{3} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS_P \stackrel{(\text{т.к. } \iint \cos^2 \alpha = \iint \cos^2 \beta = \iint \cos^2 \gamma)}{=} \ominus$$

$$\ominus - \frac{1}{\delta^2} \rho(P^*) \frac{4\pi \delta^2}{3} = - \frac{4\pi}{3} \rho(P^*) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} - \frac{4\pi}{3} \rho(M).$$

объяснение - в конце (*)

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iiint_{T_1} \frac{\xi-x}{r_{PM}^3} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) d\tau_P \quad ; \quad \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| \leq C_1 \iiint_{T_1} \frac{1}{r_{PM}^2} d\tau_P \stackrel{\text{т.к. } \tau_{\text{об}}}{=} 4\pi \delta C_1 \rightarrow 0$$

Переходим к пределу при $\delta \rightarrow 0$: (т.к. T_1 и T_2 не зависят от δ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = - \frac{4\pi}{3} \rho(M) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \iiint_{T_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \rho(P) d\tau_P \quad \leftarrow \iiint_{T_2} \frac{3(S-x)^2 - r_{PM}^2}{r_{PM}^5} \rho(P) d\tau_P$$

$\Rightarrow$ 2ое слагаемое обязано иметь предел при $\delta \rightarrow 0$. Но это δ предел получается при спец. способе предельного перехода $\Rightarrow$ это - интеграл в смысле главного значения (т.е. может менять значение при изменении формы областей $T_2(\delta)$).

$$\text{Итак, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M) = -\frac{4\bar{u}}{3} \rho(M) + \iiint_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \rho(P) d\tau_P =$$

$$= -\frac{4\bar{u}}{3} \rho(M) + \iiint_{T_2} \frac{3(s-x)^2 - r_{PM}^2}{r_{PM}^3} \rho(P) d\tau_P.$$

Потому $\Delta u = -4\bar{u}\rho(M)$ в обл-ти T - интеграл по T_2 обну-
ляется, т.к. подынтегральное выражение получается равным

$$\Delta \left(\frac{1}{R} \right) = 0.$$

$$\Rightarrow \Delta u = \begin{cases} -4\bar{u}\rho(M) & \text{в } T, \\ 0, & \text{вне } T. \end{cases}$$

ПРИМЕР:



$$M = \{r, 0, \varphi\}$$

$$P = \{s, \alpha, \beta\}$$

$$r_{PM} = \sqrt{r^2 - 2rs \cos \alpha + s^2}$$

$$u(r) = 2\bar{u} \int_0^a s^2 ds \int_0^\pi \frac{\rho(s) \sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 - 2rs \cos \alpha + s^2}} =$$

$$= 2\bar{u} \int_0^a \rho(s) s^2 ds \int_0^\pi \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 - 2rs \cos \alpha + s^2}} = \left\{ t^2 = r^2 - 2rs \cos \alpha + s^2 \right\} =$$

$$2t dt = 2rs \sin \alpha d\alpha$$

$$= 2\bar{u} \int_0^a \rho(s) s^2 ds \int_{|r-s|}^{r+s} \frac{t dt}{rst} = 2\bar{u} \int_0^a \frac{\rho(s) s}{r} (|r+s| - |r-s|) ds.$$

$$\underline{r > a:} \quad u(r) = \frac{1}{r} 4\bar{u} \int_0^a \rho(s) s^2 ds = \frac{e}{2} = \frac{4\bar{u} a^3 \rho_0}{3r}$$

$$\underline{0 < r < a:} \quad u(r) = \frac{2\bar{u}}{r} \rho_0 \left\{ \int_0^r 2s^2 dr + r \int_r^a 2s ds \right\} = \frac{2\bar{u} \rho_0}{r} \left\{ \frac{2}{3} r^3 + r(a^2 - r^2) \right\} =$$

$$= 2\bar{u} \rho_0 \left\{ a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right\}$$

$$u(a-0) = \frac{4\bar{u}}{3} \rho_0 a^2; \quad u(a+0) = \frac{4\bar{u}}{3} \rho_0 a^2$$

$$\underline{r > a:} \quad u(r) = -\frac{4\bar{u}}{3} a^3 \rho_0 \frac{1}{r^2}$$

$$\underline{0 \leq r < a:} \quad u(r) = -\frac{4\bar{u}}{3} \rho_0 r$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\underline{r > a:} \quad \Delta u = 0,$$

$$\underline{0 < r < a:} \quad \Delta u = -4\bar{u} \rho_0.$$

$$(*) \quad \iiint_{T_1} \frac{1}{r_{MP}^2} d\tau_P = \int_0^\varphi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^r \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr =$$

$$= \int_0^\varphi 2\pi (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 4\pi \varphi.$$

29. Краевая задача на собств. функции и собств. значения для оператора Лапласа.

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 \text{ в } T, \\ v(M)|_S = 0 \\ v(M) \neq 0 \end{cases}$$

$G(M, P)$ - ф.-я Грина для оператора

$$\mathcal{L}(u) = \Delta u + \lambda u \text{ (как в дил. 18)}$$

$$\Delta v = -\lambda v \Rightarrow v(M) = \lambda \int_T G(M, P) v(P) d\tau_P$$

$$v(M) \neq 0$$

однородное интегральное ур-е Фредгольма
важное св-во этого ур-я: симметричность ядра

Свойства:

1. { бесконечная послед-ть с.зн-ий, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$

- каждому собств.зн-ю принадлежит конечное число ЛНЗ собств. функций. Система собственных функций - замкнута.

2. $\lambda_n > 0$

3. собств. ф.-ии, принадлежащие разным собств. значениям, ортогональны, т.е. $\int_T v_n(M) v_m(M) d\tau = 0$.

4. [П:] (разложимость, Стеклова): Всякая дважды непр. диф.-я в обл.-ти T ф.-я, обращ-ая в 0 на границе области, может быть разложена в абс. и равномерно сходясь ряд по собственным функциям. $(f(M) \in C(T+S) \cap C^2(T), f(M)|_S = 0)$.

Доу-во: (св-во 2)

1-ая формула Грина: $\int_T (v_n \Delta v_n + \underbrace{\text{grad } v_n \text{ grad } v_n}_{\nu\text{-нормаль}}) d\tau = \int_S v_n \underbrace{\frac{\partial v_n}{\partial \nu}}_{\substack{0 \\ \text{из ур.вен.}}}$

$$\Rightarrow \int_T (\text{grad } v_n \text{ grad } v_n - \lambda_n v_n^2) d\tau = 0 \Rightarrow \lambda_n > 0, \text{ к.т.г.}$$

Доу-во: (св-во 3) $v_n \xrightarrow{\text{собств.}} \lambda_n, v_m \xrightarrow{\text{собств.}} \lambda_m, \lambda_n \neq \lambda_m$

2-ая формула Грина: $\int_T (v_n \Delta v_m - v_m \Delta v_n) d\tau = \int_S (v_n \frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m \frac{\partial v_n}{\partial \nu}) dS$ 0 из ур.вен.

$$\Rightarrow \int_T (\lambda_n - \lambda_m) v_n v_m d\tau = 0 \Rightarrow \int_T v_n v_m d\tau = 0, \text{ к.т.г.}$$

Доу-во: (св-во 4)

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots : \begin{array}{l} \lambda_1 : v_{1,1} \dots v_{1,s_1} \dots \\ \lambda_2 : v_{2,1} \dots v_{2,s_2} \dots \\ \lambda_3 : v_{3,1} \dots v_{3,s_3} \dots \\ \dots \end{array}$$

каждой из собств. ф-ий

можно заметить на ортогональную систему $\Rightarrow$ полную ортогональную систему всех собственных функций.

Пусть $f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(u) \cdot v_m(u)$ и проинтегрируем

$$\iiint_{\tau} f(u) v_m(u) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \iiint_{\tau} v_n(u) v_m(u) d\tau = f_m N_m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_m = \frac{1}{N_m} \iiint_{\tau} f(u) v_m(u) d\tau_m \quad \iiint_{\tau} v_m^2 d\tau = \|v_m\|$$

30. Внутренние задачи для уравн. $\Delta u + cu = -f$.

$$\begin{cases} \Delta v + cv = -f(\mu) \\ v(\mu)|_S = g(\mu) \end{cases} \quad \text{Пусть } v_1 \text{ и } v_2 - \text{решения, } w = v_1 - v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta w + cw = 0 \text{ в } \Gamma \\ w(\mu)|_S = 0 \end{cases} \quad \bullet \text{ Если } c \neq \lambda_n, \text{ то задача имеет только тривиальные решения} \Rightarrow \text{иск. задача имеет единств. решение.}$$

• Если $c = \lambda_{n_0}$, то ег-е не будет, т.е. либо она имеет бесконечно реш-й, либо не имеет решений.

• Если $c \leq 0$, то единственное реш-е, т.к. $\lambda_n > 0$

• Если $c = -\mathbb{E}^2 < 0 \Rightarrow \Delta v - \mathbb{E}^2 v = 0$ в Γ - не может иметь макс. или мин. значения на границе.

Доп-во; (от противного): $\mu_0 : v(\mu_0) > 0 \Rightarrow \Delta v(\mu_0) \leq 0 \Rightarrow \times$

Рассм. $\begin{cases} \Delta v + cv = -f(\mu) \text{ в } \Gamma \\ v(\mu)|_S = 0. \end{cases}$ с уравнением, слож

Будем искать решение в виде ряда: $v(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(\mu)$,

где $\Delta v_n = -\lambda_n v_n$, $f(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(\mu)$, где $f_n = \frac{1}{N_n} \iiint_{\Gamma} f(\mu) v_n(\mu) d\tau_n$

$\Rightarrow$ подставим в уравнение:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n v_n(\mu) + c \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(\mu) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A_n \lambda_n + c A_n = f_n \Rightarrow A_n (\lambda_n - c) = f_n$$

Если $c \neq \lambda_n$, то $A_n = \frac{f_n}{\lambda_n - c}$;

2) если $c = \lambda_{n_0}$: $A_{n_0} \cdot 0 = f_{n_0}$; $A_n (\lambda_n - \lambda_{n_0}) = f_n$

• если $f_{n_0} \neq 0 \Rightarrow$ решений нет;

• если $f_{n_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{N_{n_0}} \iiint_{\Gamma} f(\mu) v_{n_0}(\mu) d\tau = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n_0}} f_n$ при $n \neq n_0$; A_{n_0} - любое.

ФОРМУЛЫ РИКА ПОТЕНЦИАЛОВ $\Delta U + cU = 0$.

$$r = r(z) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dz} \left(r^2 \frac{dU}{dz} \right) + cU = 0$$

Рассм. $w = Ur \Rightarrow U = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{dU}{dz} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{1}{r} - w \frac{1}{r^2}$

$$r^2 \frac{dU}{dz} = r \frac{dw}{dz} - w$$

$$\frac{d}{dz} \left(r^2 \frac{dU}{dz} \right) = r \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dz} \Rightarrow w'' + cw = 0$$

Рассм. $c = -\alpha^2 < 0$: $U_1(z) = \frac{e^{\alpha z}}{r}$; $U_2(z) = \frac{e^{-\alpha z}}{r}$

Рассм $c = k^2 > 0$: $U_1 = \frac{e^{ikz}}{r}$; $U_2 = \frac{e^{-ikz}}{r}$

$$u_1(r, t) = \frac{e^{i(\omega t + kz)}}{r}, \quad u_2(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kz)}}{r}$$

31. Задача для уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = -f$ в неограниченной пр-ве.

$$\Delta v + cv = 0$$

Пусть $v = v(r)$: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dv}{dr}) + cv = 0$.

Рассм. $w = vr \Rightarrow v = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{dw}{dr} \cdot \frac{1}{r} - w \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 \frac{dv}{dr} = r \frac{dw}{dr} - w$

$$\frac{d}{dr} (r^2 \frac{dv}{dr}) = r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - \frac{dw}{dr} \Rightarrow w'' + cw = 0.$$

При $c = -\kappa^2 < 0$: $v_1(r) = \frac{e^{\kappa r}}{r}$; $v_2(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}$

$$\Delta v + cv = -f$$

$$\Delta[v] = \Delta v + cv = 0.$$



$$\iiint_T (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

$$\iiint_T (v \Delta u + v c u - u \Delta v - u c v) d\tau = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_T (v \Delta[u] - u \Delta[v]) d\tau = \iint_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

Если $c = -\kappa^2 < 0$: $u = \frac{e^{-\kappa r}}{r}$; $r = r(M_0, M)$;

$$V(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \frac{\partial v(M)}{\partial n} - v(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) \right) dS_M -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_T \Delta[v] \frac{e^{-\kappa r}}{r} d\tau_M$$

$$\boxed{V(M) = \iiint_T \frac{e^{-\kappa r}}{r} \rho(P) d\tau_P, r = r_{MP}} \text{ — формула объёмного потен-ла}$$

Свойства:

① Если $\rho(P)$ — орг. и непрерывна, то объёмный потенциал определён, непрерывен и имеет первые частн. производные во всем пр-ве.

Приём, производные можно выв-ть диф-ем под знаком интеграла.

② Вне области T вторые производные объёмного потенциала, приём их можно выв-ть диф-ем под знаком интеграла.

③ В точках области T , в окр-ти которых ρ — непрерывна, вторые производные объёмного потенциала, выв-ся так:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(u) = \iiint_T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-\alpha x}}{x} \right) \rho(P) d\tau_P - \frac{4\pi}{3} \rho(u), \Delta[V] = -4\pi \rho(u).$$

ЗАДАЧА ДЛЯ 3D-я $\Delta V - \alpha^2 V = -f(u)$ в неогр. ОР-ВЕ (*)

[$f(u)$ непрерывна всюду, но имеет ограниченный носитель T .]

$V \rightarrow 0$ на бесконечности $\equiv \forall \varepsilon > 0 \exists S_\varepsilon$ -сфера: $|v(u)| < \varepsilon$.

[Т:] Задача (*) не может иметь двух разных решений

$$V_1, V_2: W = V_1 - V_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta W - \alpha^2 W = 0, \\ W \rightarrow 0 \end{cases}$$

$\exists M_1: W(M_1) = A > 0$. Расст. $\varepsilon = A/2 \rightarrow S_2: |W(u)| < \varepsilon \Rightarrow$ внутри

сферы $\exists t. M_2: W(M_2)$ имеет локал. минимум $\Rightarrow$ $\times$ с гранич-

ными мин. и макс. значениями $\Rightarrow W = 0$.

33. Задачи, приводящие к уравнениям колебаний и теплопроводности в пространстве.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{Z} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{Z} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$$

О' из поел. ур-я

$$\Delta \vec{H} = \Delta H_x \vec{i} + \Delta H_y \vec{j} + \Delta H_z \vec{k}$$

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{H} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$u = H_x, H_y, H_z$$

$$\boxed{\Delta u = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}}$$

1. Непроводящая среда! $\sigma = 0 \Rightarrow$ обычное уравнение колебаний: $\Delta u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где $a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

2. Током среды можно пренебречь (медленный процесс) $\Rightarrow \Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ - уравнение диффузии.

УРАВНЕНИЕ АКУСТИКИ:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, & \text{- ур-ие непрерывности} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, & \text{- ур-ие движения} \\ p = f(\rho). \end{cases}$$

$\rho_0, p_0, \vec{v} = 0$ - тривиальный случай

т.е. малые движения на равномерном фоне $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно линеаризовать эти уравнения!

$$s = \frac{p - p_0}{p_0}, \quad |s| \ll 1, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\gamma} - \text{адиабатический процесс}$$

$$p = p_0(1+s); \quad p = p_0(1+s)^{\gamma} \approx p_0(1+\gamma s);$$

$$\frac{1}{p_0(1+s)} p_0 \gamma \operatorname{grad} s = \frac{p_0 \gamma}{p_0(1+s)} \operatorname{grad} s =$$

$$= \frac{p_0 \gamma}{p_0} (1 - s + s^2 + \dots) \operatorname{grad} s = \frac{p_0 \gamma}{p_0} \operatorname{grad} s$$

$$\operatorname{div}(p \vec{v}) = \operatorname{grad} p \vec{v} + p \operatorname{div} \vec{v} \approx p_0 \operatorname{div} \vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 \frac{\partial s}{\partial t} = -p_0 \operatorname{div} \vec{v}$$

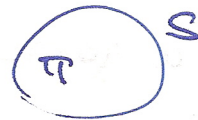
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{p_0 \gamma}{p_0} \operatorname{grad} s$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{p_0 \gamma}{p_0} \Delta s \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{p_0 \gamma}{p_0} \Delta s - \text{уравнение колебаний.}$$

$$a^2 = \frac{p_0 \gamma}{p_0}$$

34. Задача Коши для уравнения колебаний.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ.



$$\text{Ia} \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(M, t), M \in T, t > 0 \\ u(M, t)|_S = \mu(M, t), \\ u(M, 0) = \varphi(M), u_t(M, 0) = \psi(M) \end{cases}$$

[Т:] Задача Ia не может иметь двух различных решений.

Доказано: $u_1, u_2: v = u_1 - u_2$

Введем $E(t) = \frac{1}{2} \iiint_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \text{grad } v \text{grad } v \right\} d\tau$ — энергия

$$\text{IIa} \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v, \\ v(M, t)|_S = 0, \\ v(M, 0) = 0, v_t(M, 0) = 0. \end{cases} \quad E'(t) = \iiint_T \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \text{grad } v \times \right. \\ \left. \times \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t} \right\} d\tau$$

$$\text{grad } v \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \text{grad } v \right) - \frac{\partial v}{\partial t} \Delta v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'(t) = \iiint_T \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \Delta v \right] + \text{div} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \text{grad } v \right) \right\} d\tau =$$

$$= \iint_S \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

$$E(0) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S = 0 \Rightarrow E'(t) = 0 \Rightarrow E(t) = \text{const} \left. \vphantom{\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S = 0} \right\} \Rightarrow E(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow v(t) = 0, \text{ т.е. } g.$$

$$\text{Ib:} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M, t), \\ u(M, t)|_S = \mu(M, t), \\ u(M, 0) = \varphi(M) \end{cases}$$

[Т:] Задача Ib не может иметь двух решений

Доказано: $u_1, u_2: v(M, t) = u_1 - u_2$

$$\text{IIb:} \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v, \\ v(M, t)|_S = 0, v(M, 0) = 0 \end{cases}$$

Пр. [привести min и max значения для однородного уравнения теплопроводности]: $u(M, t): u_t = a^2 \Delta u, u \in C(\bar{T}), T: 0 < t \leq t_0, T \cup S = \bar{T} \Rightarrow u$ достигает наиб. и наим. зн-я либо на ∂T , либо при $t=0$

$\Rightarrow$ в силу принципа мин и макс, $v \equiv 0$, где v - реш-е $\bar{u} \delta \Rightarrow \Rightarrow$ решение $I \delta$ единственно.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОГРАН. ОБЛ.

$$Ia: \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \\ u(M, t)|_S = 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M), u_t(M, 0) = \psi(M) \end{cases} \Leftrightarrow \bar{u}a: \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \\ u(M, t)|_S = 0, \\ u(M, t)|_S = 0, u(M, t) = v(M)T(t) \neq 0. \end{cases}$$

$$I\delta: \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u(M, t)|_S = 0 \\ u(M, t) = \varphi(M) \end{cases} \Leftrightarrow \bar{u}\delta: \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \\ u(M, t)|_S = 0, \\ u(M, t) = v(M)T(t) \neq 0. \end{cases}$$

$$Ia: \begin{cases} VT'' = a^2 T \Delta V \\ \frac{T''}{a^2 T} = \frac{\Delta V}{V} \equiv \lambda \end{cases} \quad \bar{u}: \begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0, \\ V(M)|_S = 0, \\ V(M) \neq 0. \end{cases} \quad \bar{u}a: \begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0, \\ T(t) \neq 0 \end{cases}$$

$$u_n(M, t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) V_n(M) - \bar{u}a$$

$$u_n(M, t) = C_n e^{-\lambda_n a^2 t} V_n(M) - \bar{u}\delta.$$

$$Ia: u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) V_n(M)$$

$$u(M, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(M) = \varphi(M), A_n = \frac{1}{\|V_n\|^2} \iiint_T u(M) V_n(M) d\tau_M$$

$$u_t(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\lambda_n} a V_n(M) = \psi(M); B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a \|V_n\|^2} \iiint_T \psi(M) V_n(M) d\tau_M$$

$$I\delta: u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} V_n(M); C_n = \frac{1}{\|V_n\|^2} \iiint_T \varphi(M) V_n(M) d\tau_M.$$