Вопросы по курсу функционального анализа
(весна 2010 г.)

1. Гильбертовы пространства, тождество параллелограмма, теорема об элементе с наименьшей нормой.
2. Теорема Леви об ортогональной проекции, ортопроектор на одномерное подпространство, дефект ядра линейного ограниченного функционала.
3. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала, рефлексивность гильбертова пространства, некоторые соотношения для слабо сходящихся последовательностей.
4. Полные, замкнутые системы в сепарабельном гильбертовом пространстве, неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, теорема Рисса-Фишера.
5. Теорема об ортогонализации, изоморфизм гильбертовых пространств.
6. Понятие обобщенной производной, пространство $W_2^1(0,1)$, теорема о вложении и компактности оператора вложения. Некоторые обобщения.
7. Существование и единственность обобщенного решения из W_2^1 первой краевой задачи для обыкновенного уравнения.
8. Неравенство Пуанкаре. Существование и единственность обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ первой краевой задачи для оператора Лапласа.
9. Существование и единственность обобщенного решения для общего эллиптического оператора первой и второй краевой задач.
10. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Существование и единственность сопряженного оператора, равенство их норм.
11. Вполне непрерывные операторы, вполне непрерывность сопряженного оператора, компактные операторы, эквивалентность компактности и вполне непрерывности оператора.
12. Интегральный оператор в L_2, сопряженной к нему, компактность интегрального оператора.
13. Аппроксимация вполне непрерывных операторов конечномерными. Замкнутость множества вполне непрерывных операторов.
14. Теорема об априорной оценке на множестве ортогональном к ядру фредгольмова оператора. Замкнутость образа значений фредгольмова оператора.
15. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства. Третья теорема Фредгольма. Конечномерность ядра фредгольмова оператора.
16. Теорема о стабилизации ядер степеней фредгольмова оператора, начиная с некоторой степени. Первая теорема Фредгольма.
17. Вторая теорема Фредгольма. Альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода в пространстве L_2.
18. Спектр линейного оператора, резольвентное множество, замкнутость спектра, тождество Гильберта.
19. Определение точечного, непрерывного и остаточного спектра. Примеры оператора умножения на переменную в C(0,1) и $L_2(0,1)$, оператора сдвига в l_2.
20. Непустота спектра линейного оператора. Принадлежность нуля к спектру вполне непрерывного оператора, единственность предельной точки у спектра вполне непрерывного оператора.
21. Теорема о норме самосопряженного оператора. Необходимое и достаточное условие самосопряженности оператора.
22. Спектр самосопряженного компактного оператора, расположение его на вещественной прямой, границы спектра, ортогональность собственных функций. Теорема о наличии собственного значения, равного по модулю норме оператора.
23. Теорема Гильберта-Шмидта для компактного самосопряженного оператора.
24. Теорема Гильберта-Шмидта для истокообразно представимых функций в случае интегрального оператора.
25. Нелинейные проекторы Шаудера, теорема о неподвижной точке Шаудера.
26. Применение теоремы Шаудера для решения краевых задач для одного нелинейного дифференциального уравнения, и для решения одного нелинейного интегрального уравнения.
27. Теорема Лере-Шаудера и три теоремы как следствие из теоремы Шаудера.

34. Показать, что из сходимости в $L_1[0,1]$ не следует сходимость в $L_2[0,1]$. Пример:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}, x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right], \\ 0, x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]. \end{cases}$$

35. Доказать полноту пространства $C[0,1]$.

36. Будет ли полным пространство многочленов на сегменте $[0,1]$, если метрика вводится по формуле $\rho(x,y) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|$?

37. Доказать, что пространство l_2 сепарабельно.

38. Пусть A - компактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $x \in X$ найдется точка $y \in A$ такая, что $\rho(x, A) = \|x - y\|$.

39. Если на метрическом компакте $\rho(Ax, Ay) \leqslant \rho(x,y)$ для любых x, y, принадлежащих компакту, то оператор A имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности?

40. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$, таких что

$$|x(0)| \leqslant K_1; \int\limits_0^1 |x'(t)|^2 dt \leqslant K_2,$$

где $K_1, K_2 > 0$ - постоянные, компактно в пространстве $C[0,1]$.

41. Будет ли компактным множество всех степеней $x^n, n = 1, 2, ...$ в пространстве $C[0,1]$.

42. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве вполне ограничено.

43. Доказать, что в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество относительно компактно.

44. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными и непрерывными и найти их нормы:

a) $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$,

b) $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$,

c) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$.

45. Пусть X - множество функций $f(x)$, определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max\limits_x |f(x)|$. Будет ли пространство X банаховым?

46. Является ли пространство непрерывных на отрезке $C[0,1]$ функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задано следующим образом: $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$?

47. Показать, что если в гильбертовом пространстве H любая последовательность x_n, слабо сходящаяся к x, обладает свойством, что $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$, то последовательность x_n сходится сильно.

48. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.

49. Найти норму оператора A, действующего в пространстве $C[0,1]$/или в пространстве $L_2[0,1]$/: $Ax = tx(t)$.

50. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A : l_2 \to l_2$, где $A(x_1, ..., x_n, ...) = (0, x_1, ..., x_n, ...)$.

51. Определить спектр оператора A, действующего в пространстве $l_2 : A(x_1, ..., x_n, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...)$.

52. В пространстве $C[0,1]$ задан оператор A:

a) $Ax(t) = tx(t)$,

b) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$,

c) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$.

Будет ли оператор A компактным?

53. В пространстве l_2 задан оператор A:

$$A(x_1, ..., x_n, ...) = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right).$$

Доказать, что оператор A компактен, найти его спектр.

54. Привести пример линейных, но не непрерывных функционалов.