Программа курса А.В. Дмитрука

"Выпуклый анализ"

(313 группа ф-та ВМК, весна 2009 г.)

1. Выпуклое множество. Элементарные свойства (пересечение, сумма, образ и прообраз, проекция). Выпуклый конус. Выпуклая оболочка. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компакта.

2. Внутренность и замыкание выпуклого множества. Размерность выпуклого множества. Непустота относительной внутренности выпуклого множества.

3. Теоремы об отделимости (точки от выпуклого множества, двух выпуклых множеств, компакта от выпуклого множества).

4. Существование опорного функционала в граничной точке выпуклого множества. Крайние точки выпуклого множества. Теорема Минковского о представлении выпуклого компакта в виде выпуклой оболочки множества своих крайних точек.

5. Поляра множества. Элементарные свойства. Ограниченность множества и принадлежность нуля внутренности его поляры. Поляра образа множества при линейном отображении. Теорема о второй поляре.

6. Сопряженный конус. Элементарные свойства. Теорема о втором сопряженном. Сопряженный конус к сумме конусов.

7. Касательный конус и конус внешних нормалей к выпуклому множеству в данной точке.

8. Теорема Дубовицкого--Милютина о непересечении выпуклых конусов. Сопряженный конус к пересечению конусов.

9. Замкнутость конечнопорожденного конуса. Лемма Фаркаша (сопряженный к конечногранному конусу).

10. Выпуклые функции. Определение с помощью надграфика и с помощью неравенства Йенсена. Сумма, позитивная комбинация и максимум выпуклых функций. Опорная функция, функция Минковского и их выпуклость.

11. Критерий выпуклости дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций.

12. Непрерывность выпуклой функции на внутренности своего *dom'* а.

13. Липшицевость выпуклой функции на любом компакте, содержащемся во внутренности ее *dom'* а. Лемма о компакте, лежащем в открытом множестве.

14. Полунепрерывность функции снизу, ее эквивалентность замкнутости надграфика и замкнутости множеств подуровней. Замыкание выпуклой функции.

15. Существование аффинной миноранты у собственной выпуклой функции. Теорема Минковского о представлении собственной замкнутой выпуклой функции в виде верхней грани аффинных минорант.   Аффинные функции, опорные к выпуклой.

16. Субдифференциал выпуклой функции в точке. Теорема Моро--Рокафеллара о субдифференциале суммы выпуклых функций. Субдифференциал индикаторной функции. Непустота и компактность субдифференциала выпуклой функции в любой внутренней точке ее *dom'* а.

17. Сублинейные функции и опорные к ним линейные. Субдифференциал сублинейной функции. Представление сублинейной функции в виде верхней грани своих опорных. Теорема Дубовицкого--Милютина о субдифференциале максимума сублинейных функций.

18. Производная выпуклой функции по направлению. Однородность, выпуклость и непрерывная зависимость производной от направления. Совпадение субдифференциала выпуклой функции в точке и субдифференциала ее производной по направлениям. Представление производной по направлениям через максимум по опорным к выпуклой функции в данной точке.

19. Производная по направлению от максимума конечного числа выпуклых функций. Теорема Дубовицкого--Милютина о субдифференциале максимума выпуклых функций в точке.

20. Преобразование Лежандра--Юнга--Фенхеля. Сопряженная функция. Неравенство Юнга. Классическое преобразование Лежандра. Сопряженные к сублинейной и к индикаторной функции.

21. Вторая сопряженная функция. Теорема Фенхеля--Моро. Взаимная однозначность операции сопряжения на множестве собственных замкнутых выпуклых функций.

22. Задача о минимуме выпуклой функции на выпуклом множестве. Глобальность локального минимума. Необходимое и достаточное условие минимума.

23. Задача о минимуме выпуклой функции при выпуклых ограничениях. Теорема Куна--Таккера.   Множители Лагранжа и условия дополняющей нежесткости. Принцип Лагранжа снятия ограничений.

24. Максимум семейства выпуклых функций, зависящих от параметра, и формула для его производной по направлению. Теорема о субдифференциале максимума (об "очистке"). Седловые точки функции двух аргументов и перестановка операций *inf* и *sup*. Выпукло-вогнутые функции на произведении компактов. Теорема о минимаксе.

Рекомендуемая литература

(в этих книгах содержатся элементы выпуклого анализа
и рассматриваются его приложения к теории оптимизации)

Р.Рокафеллар. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973.
А.Д.Иоффе, В.М.Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.
В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979.
И.В.Гирсанов. Лекции по математической теории экстремальных задач. МГУ, 1970.
В.Г.Болтянский. Оптимальное управление дискретными системами. М., Наука, 1973 (глава III).
Б.Н.Пшеничный. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., Наука, 1980.
Б.Н.Пшеничный. Необходимые условия экстремума. М., Наука, 1982.
Б.Т.Поляк. Введение в оптимизацию. М, Наука, 1983.
Ф.П.Васильев. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988 (глава 4).
Е.В.Шикин. Линейные пространства и отображения. М., МГУ, 1987 (глава 7 и Добавление).
Е.В.Шикин. Выпуклые множества: топологическая структура и дифференциальные свойства. М., МГУ, 1984.
Е.Г.Белоусов. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М., МГУ, 1984 (гл. I, II).
С.А.Ашманов, А.В.Тимохов. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М., Наука, 1991 (глава 3).
Х.Никайдо. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., Мир, 1972.
В.И.Благодатских. Введение в оптимизацию. М., Высшая школа, 2001.
Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров. Выпуклый анализ и его приложения. М., УРСС, 2000.
Е.С.Половинкин, А.В.Балашов. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., Физматлит, 2004.