Задачи по курсу "Выпуклый анализ"

(лектор А.В. Дмитрук)

Выпуклые множества

1) Представить единичный замкнутый круг на плоскости в виде пересечения замкнутых полупространств. Выписать их явно.

2) Найти $ex\,A$ для множеств:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2, \;\; x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\},$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq |x_1|, \;\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

3) Доказать, что множество

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_1 x_3 + x_2^2 \leq 0, \;\; x_3 \geq 0\}$$

есть выпуклый конус.

4) Найти выпуклые оболочки множеств:

а) $x^2 + y^2 \leq 1, \;\; xy = 0;$

б) $x^2 + y^2 = 1, \;\; x - y = 0;$

в) $x^2 + y^2 = 1, \;\; |x| \leq 1, \;\; |y| \leq 1;$

г) $y \leq e^x, \;\; y \geq |x|$.

5) Для произвольного множества A пусть $\widetilde{A}$ состоит из всех отрезков $[a, b]$, у которых концы $a, b \in A$. Верно ли, что $\widetilde{A} = co\,A$?

6) Пусть $Q-$ неотрицательно определенная $n \times n-$ матрица. Доказать, что $\forall\, c$ множество $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (Qx, x) \leq c\}$ выпукло.

7) Доказать, что если множество A выпукло, то $A + A = 2A$. Для невыпуклого A построить контрпример.
Более общо: если A выпукло и $\mu, \nu \geq 0$, то $\mu A + \nu A = (\mu + \nu)A$.

8) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n-$ непустой замкнутый выпуклый конус. Тогда следующие четыре свойства эквивалентны:

а) K не содержит ни одной прямой (т.е. если $\pm\, x \in K$, то $x = 0$), б) $int\, K^*$ непуста,

в) существует вектор $p \in \mathbb{R}^n$ такой, что $(p, x) > 0 \quad \forall\, x \in K,\ x \neq 0.$

г) существует вектор $p \in \mathbb{R}^n$ и число $c > 0$ такие, что $(p, x) \geq c|x| \quad \forall\, x \in K.$

Такой конус называется *острым.*

9) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n-$ замкнутый выпуклый конус, $K \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\}$. Тогда $\exists\, p \in -K^*$, у которого все координаты $p_i > 0$ (вектор цен).

10) Пусть $K \subset \mathbb{R}^n-$ выпуклый конус. Тогда $K - K^* = \mathbb{R}^n, \quad K \cap (-K^*) = \{0\}.$

11) Пусть A_1, A_2- выпуклые множества, и $A = A_1 + A_2$. Доказать, что $ex\, A \subset ex\, A_1 + ex\, A_2$, т.е. если $a_0 \in ex\, A$, то $a_0 = a_1 + a_2$, где $a_1 \in ex\, A_1$, $a_2 \in ex\, A_2$. Привести пример, что обратное включение неверно.

12) Пусть $A-$ выпуклый компакт, $x \in \mathbb{R}^n$, и пусть $a-$ самая удалённая от x точка в A. Тогда $a-$ выступающая в A.

13) Пусть A выпукло, $x_0 \in int\, A$. Тогда для любого подпространства $L \ni x_0$ имеет место равенство $reint\,(A \cap L) = (int\, A) \cap L$. Показать, что условие $x_0 \in int\, A$ существенно.

14) Пусть A выпукло, $int\, A$ непусто, $L-$ подпространство, $\pi-$ проекция на L. Тогда $reint\, \pi(A) = \pi(int\, A)$. Более общо: $reint\, \pi(A) = \pi(reint\, A)$.

Еще более общо. Пусть задано аффинное $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, и $A-$ выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $reint\, P(A) = P(reint\, A)$.

15^*) Пусть $A-$ связное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $co\, A$ состоит из выпуклых комбинаций не более n элементов множества A. Показать, что здесь достаточно требовать, чтобы A имело не более n связных компонент.

16) Доказать, что если $A^0 = A$, то $A = B_1(0)-$ единичный шар.

17) Доказать, что если A открыто, то и $co\, A$ открыто.

17а) Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots -$ возрастающая последовательность выпуклых множеств. Будет ли их объединение выпукло?

18) Пусть A замкнуто. Будет ли $co\, A$ замкнуто?

19) Пусть A, B замкнуты и выпуклы. Будет ли $A + B$ замкнуто?

19b) Пусть A, B замкнутые полиэдральные множества. Доказать, что тогда $A+B$ замкнуто.

19a) Пусть $K-$ выпуклый конус, $x \in K$, $y \in int\, K$. Тогда $x+y \in int\, K$. Другими словами, $K + int\, K \subset int\, K$.

20^*) Пусть $A-$ выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда $ex\, A$ есть пересечение не более чем счётного числа открытых множеств (т.е. множество типа G_δ).

21a) Пусть выпуклые компакты $A_k \xrightarrow{\text{H}} A$ (по Хаусдорфу), где $A-$ компакт. Тогда A выпукло.

21) Пусть выпуклые компакты $A_k \xrightarrow{\text{H}} A$ (По Хаусдорфу), где A также выпуклый компакт, и $0 \in int\, A$. Тогда $A_k^0 \xrightarrow{\text{H}} A^0$.

22) Пусть $A,\, B-$ выпуклые множества. Доказать, что они строго отделимы $\iff$ $\rho(A,B) = \inf\{\,|a-b|\,:\, a\in A,\, b \in B\,\} > 0 \iff 0 \notin \overline{A-B}$.

23) Привести пример замкнутого выпуклого множества, проекция которого на некоторое подпространство не замкнута.

24) Пусть $A-$ выпуклое замкнутое множество. Доказать, что $ex\, A$ непусто $\iff$ A не содержит прямых.

25^*) Пусть $A,\, B-$ полиэдры (многогранные множества), и они не пересекаются. Тогда они строго отделимы (даже если они не ограничены).

26) Пусть $A-$ выпуклый компакт, $z \notin A$. Тогда $\exists\, y \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\forall\, x \in A$ выполнено неравенство $|x-y| < |z-y|$, т.е. $A \subset intB_{|z-y|}(y)$.

27^*) Пусть $A-$ выпуклый компакт, $p \neq 0$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, p' \in \mathbb{R}^n$, $|p'-p| < \varepsilon$ такой, что $A_{p'} = Argmax\,(p', A)$ состоит из одной точки.

28) *(Поляра линейного прообраза.)* Пусть дано линейное отображение $S : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{R}^n$, и выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для его прообраза $B = S^{-1}(A)$ справедливо равенство $B^0 = S^* A^0$.

29) Пусть $A-$ неограниченное замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$.
Доказать, что

а) $\forall\, x_0 \in A\ \ \exists\, h \neq 0$ такой, что $x_0 + \mathbb{R}_+ h \subset A$;

б) если $x_0 + \mathbb{R}_+ h \subset A,$ то и $\forall\, x \in A$ будет $x + \mathbb{R}_+ h \subset A$
(такой вектор h называется рецессивным направлением);

в) множество всех рецессивных направлений, обозначаемое $Rec\,(A),$ есть замкнутый выпуклый конус.

30*) *Теорема Дубовицкого-Милютина для выпуклых множеств.* Пусть $A_1, \dots, A_m,$ $A_{m+1}-$ выпуклые множества, из которых первые m открыты. Тогда $A_1 \cap \dots A_m \cap A_{m+1} = \emptyset \iff$ существует нетривиальный набор векторов $p_i \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\sum_1^{m+1} p_i = 0, \qquad \sum_1^{m+1} \inf\,(p_i, A_i) \geq 0.$$

31*) Пусть A – замкнутое множество в $\mathbb{R}^n,$ и $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ имеется единственная ближайшая точка в A (относительно евклидовой нормы). Тогда A выпукло. Показать, что для нормы $||x||_\infty = \max\,|x_i|$ это неверно.

32*) Множество A называется локально выпуклым, если для любой точки $x \in A$ существует её окрестность U_x такая, что $U_x \cap A$ выпукло.

Доказать, что замкнутое связное локально выпуклое множество выпукло.

33) Пусть $a_1, \dots, a_k$ – различные точки в $\mathbb{R}^n,$ и $M = co\,\{a_1, \dots, a_k\}.$ Точку a_i назовём *существенной*, если $co\,\{a_j,\ j \neq i\} \neq M.$ Доказать, что a_i – крайняя в $M \iff$ она существенная.

34) Пусть A – компакт в $\mathbb{R}^n,$ $0 \notin A.$ Доказать, что $con\,A \cup \{0\} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha A$ – замкнутый конус. Показать, что оба условия здесь существенны.

34a) Множество A называется строго выпуклым, если его граница не содержит отрезков. Другими словами, если $x,\, y \in \partial\, A,$ $x \neq y,$ то $\frac{1}{2}\,(x+y) \in int\,A.$)

Пусть A выпукло и замкнуто. Доказать, что тогда: A строго выпукло $\iff$ $ex\,A = \partial A \iff S(A) = \partial A.$

34b) Пусть $A-$ выпуклый компакт, а V_R есть пересечение всех шаров радиуса $\leq R,$ содержащих $A.$ Доказать, что V_R строго выпукло и $h(V_R, A) \to 0$ при $R \to \infty.$

34c) Пусть A – выпуклый телесный компакт. Доказать, что $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется многогранник $M_\varepsilon \supset A$ такой, что $h(M_\varepsilon\,, A) < \varepsilon.$

35) Найти касательный конус и конус внешних нормалей к множеству:

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ y - 2x \leq 0\Big\} \qquad \text{в точке} \quad (0,0).$$

36) Найти поляру к полиэдру на плоскости:

$$\{-3x_1 + 2x_2 \le 7, \quad x_1 + 5x_2 \le 9, \quad x_1 - x_2 \le 3, \quad -x_2 \le 1\}.$$

37) Пусть K – конус в $\mathbb{R}^n_+$. Доказать, что он выпуклый $\Longleftrightarrow$ множество $\{x \in K \mid \sum x_i = 1\}$ выпукло.

38*) Пусть множество A замкнуто, и обладает свойством: $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists r > 0$ такое, что $A \cap B_r(x)$ непусто и выпукло. (В отличие от задачи 32, требования связности A здесь нет.) Доказать, что A выпукло.

39) Пусть $A-$ выпуклое в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что A компакт $\Longleftrightarrow$ для любой прямой l множество $A \cap l-$ компакт. Показать, что выпуклость A здесь существенна.

40) Пусть множество A таково, что $\forall x, y \in A$ точка $\frac{1}{2}(x+y) \in A$. Будет ли A выпукло?

40а) Пусть $A = co\, M$, $L =$ Aff M. Тогда $L =$ Aff A.

41) Пусть $A-$ выпуклое замкнутое множество, имеющее одну крайнюю точку 0. Доказать, что это выпуклый замкнутый конус с вершиной в 0.

42) Найти рецессивный конус для множеств в $\mathbb{R}^3$:

а) $x + y + z \ge 1$, б) $x^2 + y^2 \le 1$,

в) $\begin{cases} -x - y - 2z \le 0 \\ -x + y \le 0 \\ -y - z \le 2 \\ -x + 2y + z \le 2 \end{cases}$ г) $\begin{cases} -1 \le -x + y \le 3 \\ x + y + 2z \ge 0 \\ x + z \ge -1 \, . \end{cases}$

43) Найти наименьший выпуклый конус, содержащий множества в $\mathbb{R}^2$:

а) $y = x^2$
б) $y = x^2, \ \ x \ge 0$
в) $y = x^2 + x, \ \ x \ge 0$
г) $xy = 1, \ \ x > 0$
д) $y = \sin x, \ \ 0 \le x \le \pi$
е) $y = e^x$.

44) Пусть A – выпуклое множество. Тогда $K = \{\, \alpha x \mid \alpha > 0, \quad x \in A \,\}$ есть наименьший выпуклый конус, содержащий A.

45^*) Пусть $A-$ замкнутое выпуклое множество. Доказать, что A строго выпукло $\iff$ $\forall\ x \in \partial A$ любая опорная гиперплоскость H в точке x к множеству A пересекается с A только по точке $x:\ \ H \cap A = \{x\}$.

46) Пусть $A-$ замкнутое выпуклое в $\mathbb{R}^n$, причём его дополнение также выпукло. Доказать, что тогда $A-$ полупространство.

47) Пусть $A,\ B-$ замкнутые выпуклые множества, причём $A \cap B = \emptyset$. Следует ли отсюда, что $\exists\, p$ такой, что $(p, x) < (p, y) \qquad \forall\, x \in A,\ y \in B$?

48) Пусть $A_1,\, A_2\ -$ замкнутые выпуклые множества, $C\ -$ ограниченное множество, и выполнено равенство $A_1 + C = A_2 + C$. Тогда $A_1 = A_2$ (т.е. можно сокращать обе части равенства на одно и то же множество).

49) Пусть $A\ -$ выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $dim\ A = m$. Доказать, что A имеет не менее $m+1$ крайних точек.

49a) Пусть $A\ -$ выпуклое множество, $0 \in A$. Доказать, что 0 — крайняя точка в $A \iff A \bigcap (-A) = \{0\}$.

50) Пусть $A\ -$ произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что множество всех $p \in \mathbb{R}^n$, таких что $\sup\,(p,\, A) < +\infty$, есть выпуклый замкнутый конус. Он называется *барьерным конусом* множества A (обозначим его $Bar\, A$).

51a) Пусть аффинная оболочка точек $x_1, \dots, x_k$ есть все пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда для любых $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_k > 0$ точка $\sum \alpha_i x_i \in int\, co\, \{x_1, \dots, x_k\}$.

51) Пусть $A\ -$ выпуклое множество, $x_k \in A$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \dots,$; $\sum_1^\infty \alpha_k = 1$, и ряд $z = \sum \alpha_k x_k$ сходится. Доказать, что тогда $z \in A$ (т.е. можно брать выпуклые комбинации бесконечного числа элементов A).

52) Доказать, что образ многогранного множества (выпуклого многогранника, многогранного конуса) при линейном отображении также является многогранным множеством (выпуклым многогранником, многогранным конусом)

53) Пусть $A_1, \dots, A_m$ выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что

$$co\, \left(\bigcup_1^m A_i \right) = \ \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_1^m \alpha_i x_i,\ \ x_i \in A_i,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1, \dots, m;\ \sum_1^m \alpha_i = 1\,\}.$$

54) Точки $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ называются аффинно зависимыми, если $\exists$ числа

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$, не все $= 0$, такие, что: $\sum_1^m \lambda_i x^i = 0$, $\sum_1^m \lambda_i = 0$. В противном случае точки называются аффинно независимыми.

Доказать, что следуюшие свойства эквивалентны:

а) точки $x^1, \dots, x^m$ аффинно независимы.

б) точки $(x^2 - x^1), \dots, (x^m - x^1)$ линейно независимы.

в) точки $(x^1, 1), \dots, (x^m, 1)$ линейно независимы.

55) Найти размерность выпуклого множества $A \in \mathbb{R}^3$, задаваемого следующими ограничениями:

$$\text{а) } x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad x + y - z^2 \ge 1;$$

$$\text{б)} \begin{cases} x + y + z = 1, & x + y^2 + z^2 \le 1, \\ x^2 + y + z^2 \le 1, & x^2 + y^2 + z \le 1; \end{cases} \quad (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$$

$$\text{в)} \begin{cases} x + y + z \le 1, & x + 2y - 2z \le 1, \\ 2x + 3y - z \ge 2, & x + y + z^2 \le 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } x + y + z \le 3, \quad xyz \ge 1, \quad (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$$

56) Доказать, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ таково, что $A + A = A$, то $0 \in \overline{A}$.
(Верно ли это в $\mathbb{R}^n$?)

57) Пусть $A -$ выпуклое множество. Доказать, что $\forall\, x \in A$, $\forall\, \varepsilon > 0$

$$dim\,(B_\varepsilon(x) \bigcap A) \ = \ dim\, A\, .$$

57a) Пусть $A -$ выпуклый конус, содержащий 0. Тогда минимальное линейное подпространство, содержащее K, есть $K - K =$ Aff K, а максимальное линейное подпространство, содержащееся в K, есть $K \cap (-K)$.

58) Пусть $A-$ непусто, выпукло и ограничено. Доказать, что $\mathbb{R}^n \setminus A$ не выпукло.

59) Доказать, что полиэдральное моžество может иметь лишь конечное число крайних точек. Может ли оно не иметь ни одной крайней точки?

59a) Доказать, что пересечение конечного числа замкнутых полупространств ограничено (т.е. многогранник) $\iff$ выпуклая оболочка их внешних нормалей содержит ноль в качестве внутренней точки.

59b) Пусть A_1 , $A_2 -$ непустые выпуклые компакты, пересечение которых пусто. Тогда найдутся полиэдральные множества $M_1 \supset A_1$ и $M_2 \supset A_2$, пересечение которых также пусто. Это же верно для любого конечного числа попарно непересекающихся компактов.

60) Найти поляру следующих множеств на плоскости:

а) угла $x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \leq kx \; (k > 0)$;

б) круга $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$;

в) круга $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq 1$;

г) квадрата $|x| \leq 1, \; |y| \leq 1$;
д) прямоугольника $|x| \leq 1, \; |y| \leq \frac{1}{2}$;

е) надграфика гиперболы $y^2 \geq x^2 + 1, \qquad y > 0$;

ж) надграфика гиперболы $y^2 \geq 2x^2 + 1, \qquad y > 0$;

з) надграфика гиперболы $y^2 \geq x^2 + 2, \qquad y > 0$;

и) надграфика гиперболы $x\,y \geq 1, \; x > 0, \; y > 0$;

к) надграфика параболы $y \geq x^2 + c$ (для случаев $c < 0, \; c = 0, \; c > 0$);

л) полукруга $x^2 + y^2 \leq 1, \; y \geq 0$;

м) четверти круга $x^2 + y^2 \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0$;

н) множества $|x|^\alpha + |y|^\alpha \leq \alpha, \quad (\alpha > 1)$.

60а) Найти поляру полупространства $(a, x) \leq b \quad (a \in \mathbb{R}^n, \; b \geq 0)$.

61) Найти конус касательных направлений в точке (0,0) к множеству A на плоскости:

а) $-1 \leq x_1 \leq 1, \quad x_2 \leq \sqrt[3]{x_1}, \quad x_2 \geq x_1$;

б) $x_2 \geq x_1^2$; $\qquad$ в) $x_2 = -x_1^3$;

г) $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1 = \{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq x_1^2\}$,

$$A_2 = \{x_1 \leq 0, \; -2x_1 \leq 3x_2 \leq -x_1\} \; ;$$

д) A есть график функции $y = x \sin \frac{1}{x}$.

62) Пусть $Q-$ непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $L-$ линейное подпространство. Рассмотрим многозначное отображение $F(x) = Q \bigcap (x + L)$. Пусть $dom\, F = \{x \,|\, F(x)$ непусто $\}$. Показать, что
а) если $dim\, L = n - 1$ (т.е. L есть гиперплоскость), то $F(x)$ непрерывно по Хаусдорфу зависит от $x \in dom\, F$; $\qquad$ б) в общем случае это неверно.

63) Пусть $K_1, K_2 -$ замкнутые выпуклые конусы, $K_1 \cap (-K_2) = \{0\}$. Тогда конус $K_1 + K_2$ замкнут.

64) Пусть $0 \in A \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что $K_A(0) = \overline{\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A}$.

65) Пусть D есть круг $x^2+y^2 \le 1$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, а I – отрезок $[(0,0,-1),\,(0,0,1)]$. Как выглядит их выпуклая комбинация с коэффициентами $\alpha,\,\beta$?

66) Пусть A – выпуклое замкнутое множество. Доказать, что его барьерный и рецессивный конусы являются взаимно двойственными: $Bar\,A = (Rec\,A)^0$.

67*) Пусть A – выпуклый телесный компакт. Точка $x \in \partial A$ наз. угловой, если $int\,N_A(x)$ непусто, или, эквивалентно, если конус $K_A(x)$ острый. Доказать, что множество угловых точек не более чем счетно. Могут ли угловые точки быть всюду плотными на ∂A ?

68) Пусть A – выпуклый телесный компакт. Доказать, что для любых двух точек $x \ne y$ из ∂A выполнено $int\,N_A(x) \bigcap int\,N_A(y) = \emptyset$.

69) Доказать, что касательный конус к любому множеству всегда замкнут.

70) Пусть A – компакт, K – замкнутый выпуклый конус. Доказать, что $Rec\,(A+K) = K$.

71) *(Конус неотрицательных полиномов).* Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^n$ состоит из всех $a = (a_0,\,a_1,\ldots,a_{n-1})$, для которых полином $P(a,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} \ge 0$ для всех $t \in [0,1]$. Доказать, что K – выпуклый замкнутый острый конус, а его внутренность состоит из всех a, для которых $P(a,t) > 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$.

Доказать, что K^* состоит из всех функционалов l вида

$$(l,a) = \int_0^1 P(a,t)\,d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ – произвольная неубывающая функция, а интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. (Фактически, это вариант леммы Фаркаша.)

72) *(Конус будущего).* Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с элементами (x,t) задано неравенствами $(x,x) \le t^2, \quad t \ge 0$. Доказать, что K – выпуклый замкнутый острый конус.

73) Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ задано неравенствами $(Sx,x) \le (a,x)^2, \quad (a,x) \ge 0$, где $S \ge 0$ – произвольная симметричная матрица, $a \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор. Доказать, что K – выпуклый замкнутый конус. Всегда ли он будет острым?

74) Пусть $A-$ выпуклое замкнутое множество. Тогда $\forall x \in A$

$$Rec\, A = \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon(A - x)\ .$$

75*) Пусть $A-$ выпуклый замкнутый компакт, точки $x_i \in \partial A$, ненулевые векторы $p_i \in N_A(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Построим полиэдр $P = \{x \mid p_i(x - x_i) \le 0, \ \ i = 1, \ldots, N$. Ясно, что $P \supset A$.

Доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall N$, $\forall x_i \in \partial A$, $i = 1, \ldots, N$, образующих $\delta-$ сеть на ∂A, выполнено $h(P, A) < \varepsilon$.

76) Пусть конус $K \subset \mathbb{R}^n$ задан неравенствами $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge 0$. Найти K^*. *Указание:* воспользоваться формулой

$$(x, y) = \ (x_1 - x_2)y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + (x_3 - x_4)(y_1 + y_2 + y_3) + \ldots$$

$$\ldots + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + x_n(y_1 + \ldots + y_n).$$

77*) Пусть конус $K \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ есть конус симметричных неотрицательно определенных матриц. Найти K^*.

Выпуклые функции

1) Найти все опорные аффинные функции к функциям:

$$f = e^x; \quad \frac{1}{x} \ \text{ на } \ (0, \infty)\ ; \quad x^2; \quad \sqrt{1+x^2}.$$

2) Пусть f и $-f$ выпуклы и собственны на $\mathbb{R}^n$. Тогда f аффинна и конечна на всём $\mathbb{R}^n$.

3^*) Доказать с помощью теоремы об отделимости, что если f выпуклая функция $D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in int\, D$, то $\partial f(x_0)$ непусто.

4) Будет ли выпуклой функция:

$$f(x) = \frac{x^2}{|x|+1} : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ?$$

5) Будет ли выпуклой функция: $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = inf\, \{z_1^2 + z_2^2 \mid z_1 + z_2 = x\} \ \ ?$$

6) Доказать, что если выпуклая функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена, то $f \equiv \text{const}$.

7) Пусть $A-$ замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что функция расстояния $\rho(x, A)$ выпукла на $\mathbb{R}^n \iff A-$ выпукло.

8) Найти сопряжённые функции к:

$$\text{а) } f = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ +\infty, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } f = |x| + |x-a|$$

$$\text{в) } f = \begin{cases} \sqrt{1+x^2}, & |x| < 1 \\ +\infty, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{г) } f = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ +\infty, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{д) } f = a\sqrt{1+x^2}$$

$$\text{e) } f = \begin{cases} x^a/a, & x \geq 0 \\ 0, & |x| < 0 \end{cases} \quad (a > 1)$$

Будут ли данные f замкнутыми ?

9) Найти субдифференциал функции $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3|x+y-2|$ в точках $(1,0)$ и $(1,1)$.

10*) Пусть $D-$ выпуклое множество, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию: $\forall\, x,y \in D \quad f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$. Будет ли f выпукла ?

11) Пусть выпуклое множество $A \ni 0$. Доказать, что функция Минковского $\mu_A(x) = \inf\{r > 0 \,|\, x \in rA\}$ выпукла.

12) При каких p,q функция $f = x^p y^q$ будет выпуклой (вогнутой) на $int\,\mathbb{R}^2_+$? (То же для $f = x^p y^q z^r$ на $int\,\mathbb{R}^3_+$).

13) Доказать, что функция Кобба–Дугласа

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \; : \; \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

где все $\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$, выпукла вверх (т.е. вогнута) и положительно однородна. Будет ли она вогнутой, если $\sum \alpha_i < 1$?

14*) Функция f называется строго выпуклой на D , если $\forall\, x,y \in D$, $\forall\, \alpha \in (0,1)$ неравенство Йенсена выполняется строго: $f(\alpha x + (1-\alpha y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.

Пусть f строго выпукла на $\mathbb{R}^n$, и достигает своего минимума. Доказать, что тогда $f(x) \longrightarrow \infty +$ при $|x| \to \infty$.

15*) Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла, и множество M_0 е„ точек минимума непусто и ограничено. Тогда $f(x) \longrightarrow +\infty$ при $|x| \longrightarrow \infty$.

16*) Пусть $A-$ выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $f(x) = \rho(x,A)-$ расстояние от точки x до A. Доказать, что она дифференциируема в любой точке $x \notin A$.

Показать, что если расстояние между точками $||x-y||$ не евклидово, а есть $\max|x_i - y_i|$, то указанное свойство перестаёт быть верным.

17) Функция называется квазивыпуклой, если $\forall\, c$ е„ множество подуровня $L_c = \{x \,|\, f(x) \leq c\}$ выпукло. Доказать, что f квазивыпукла $\Longleftrightarrow$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \alpha,\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, выполнено неравенство $f(\alpha x + \beta y) \leq \max[f(x), f(y)]$.

18) Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такова, что $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}\,(f(x) + f(y)))$. Будет ли f выпуклой?

19) Пусть f выпукла на открытом выпуклом множестве D . Тогда она дифференцируема в точке $x_0 \in D \iff$ она имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),\;\; i = 1, \dots, n.$

20*) Пусть $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ выпукла, $f(0) = 0$. Доказать, что тогда функция $g(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ тоже выпукла.

21) Пусть $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}-$ собственные выпуклые функции. Доказать, что тогда функция

$$(f \oplus g)(x) = \inf\,\{\, f(x_1) + g(x_2) \,|\, x_1 + x_2 = x\,\}$$

(называемая конволюцией этих функций) также будет выпуклой.
Будет ли она собственной?

22) Пусть f определена и выпукла на выпуклом множестве A; пусть точки $x_i \in A$, числа $\alpha_i \ge 0$, $\sum \alpha_i = 1$, и ряд $\sum \alpha_i x_i$ сходится. Верно ли, что

$$f\left(\sum_1^\infty \alpha_i x_i\right) \;\le\; \sum_1^\infty \alpha_i f(x_i)\ ?$$

23) При каких значениях параметра α будут выпуклыми функции:

а) $f = \alpha x^2 y^2 + (x + y)^4$,
б) $f = \alpha x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2$?

24) На плоскости найти области, в которых функция $f = e^{xy}$ является выпуклой (вогнутой).

25) Пусть $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ произвольная функция на выпуклом множестве A . Расмотрим функцию $(co\, f)(x) = \inf \sum \alpha_i f(x_i)$, где $\inf$ берётся по всевозможным конечным наборам $x_i \in A$, $\alpha_i \ge 0$, $\sum \alpha_i = 1$ таким что $\sum \alpha_i x_i = x$. Доказать, что $co\, f$ есть верхняя грань всех выпуклых функций $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, таких что $\varphi \le f$.

26) Пусть $A, B-$ выпуклые замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi_A(x)$, $\varphi_B(x)-$ их опорные функции. Доказать, что $\varphi_{A\cap B}(x) = \inf\,\{\,\varphi_A(x_1) + \varphi_B(x_2)\}$, где $\inf$ берётся по всем $x_1 + x_2 = x$, т.е. $\varphi_{A\cap B}(x) = (\varphi_A \oplus \varphi_B)(x)$ (см. предыдущую задачу).

27) Будет ли выпуклой функция: $f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x) \quad (0 < x < 1)$?

28) Пусть $f-$ выпуклая функция на открытом множестве D, точка $x_0 \in D$, вектор $p \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что следующие три условия эквивалентны:

а) $p_0 \in \partial f(x_0)$,

б) $x_0 \in \partial f^*(p_0)$,

в) $(p_0, x_0) = f(x_0) + f^*(p_0)$.

29*) Пусть $f-$ выпукла на открытом выпуклом множестве D. Тогда $\partial f(x)$ есть полунепрерывное сверху многозначное отображение из D в $\mathbb{R}^n$ с выпуклыми компактными значениями, и оно локально ограничено, т.е. $\forall\, x \in D$ существует окрестность $U(x)$ и шар $B \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $\forall\, x' \in U(x)$ выполнено включение $\partial f(x') \subset B$.

30) Пусть $f(x)$ квазивыпукла. Верно ли, что $\exists$ монотонно неубывающая $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g(f(x))$ выпукла ?

Или: что существуют выпуклая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ и монотонная $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(x) = h(\varphi(x))$?

31) Вычислить $\partial f(0)$ для функций:

$f(x) = \max(x, 0)$; $\quad f(x) = \max(e^x, 1 - x)$

$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum |x_i|$;

$f(x_1, \ldots, x_n) = \max |x_i|$;

$f(x) = \max x_i$; $\quad f(x) = \max\{0, (a, x)\}$, $a \in \mathbb{R}^n$.

32) Каким должно быть множество A , чтобы сублинейный функционал $\varphi(x) = \sup\{(a, x) \,|\, a \in A\}$ был монотонно неубывающим в том смысле, что если $x_2 \geq x_1$ (т.е. $x_2 - x_1 \in \mathbb{R}^n_+$), то $\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1)$?

Доказать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $A \subset \mathbb{R}^n_+$.

33) Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(y_1, y_2) = y_1 + y_2 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2\alpha y_1 y_2}.$$

Доказать, что при $|\alpha| \leq 1$ она выпукла и монотонно неубывает.

34) Пусть $f-$ выпуклая функция, $x_0 \in dom\, f$. Доказать, что вектор p есть субградиент к f в точке $x_0 \iff$ гиперплоскость $y - y_0 = p\,(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, опорна к $epi\, f$ в точке (x_0, y_0).

35) Пусть $f, g -$ выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$, $A -$ выпуклое множество. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A, \;\; g(x) \leq z\}$. Доказать, что φ выпукла и невозрастает: $z_1 \leq z_2 \implies \varphi(z_1) \geq \varphi(z_2)$.

36) Пусть дана симметричная матрица $Q \geq 0$. Доказать, что функция $\varphi(x) = \sqrt{(Qx, x)}$ выпукла. Другими словами, если дана неотрицательная квадратичная форма $q(x) = (Qx, x)$, то функция $\varphi(x) = \sqrt{q(x)}$ выпукла.

37) Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – выпуклые функции, $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ выпукла и монотонна в том смысле, что если $(x', y') \leq (x'', y'')$, то $\varphi(x', y') \leq \varphi(x'', y'')$. Тогда функция $h(x) = \varphi\left(f(x), g(x)\right)$ выпукла.

38) Пусть квадратичная функция $q(x) = \frac{1}{2}(Qx, x) + (a, x) + b$ выпукла на аффинном подпространстве L. Тогда она выпукла на любом аффинном подпространстве $\widetilde{L}$, параллельном L.

39) Пусть квадратичная функция $q(x)$ выпукла на некотором выпуклом множестве A. Тогда она выпукла на подпространстве $L = Aff\, A$.

40) Пусть $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – аффинное отображение, и $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция. Доказать, что сложная функция $\varphi(x) = f(g(x))$ аргумента $x \in \mathbb{R}^m$ выпукла.

41) Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – аффинное отображение. Доказать, что функция $\mu(y) = \inf\left\{f(x) \mid h(x) = y\right\}$ выпукла.

42) Пусть $A-$ непустой выпуклый компакт, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}-$ выпуклая функция, непрерывная на A. Доказать, что $Argmax\, f$ содержит хотя бы одну крайнюю точку множества A.

43) Пусть $A, C-$ выпуклые компакты, и $\exists\, r > 0$ такое, что $\varphi_A(x) + r|x| \leq \varphi_C(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что тогда $A + B_r(0) \subset C$.

44) Пусть $A -$ выпуклый телесный компакт, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus A$. Тогда функция $\rho(x, A) - \lambda\rho(x, \Omega)$ выпукла $\forall\, \lambda \leq 1$ и не выпукла $\forall\, \lambda > 1$.

Выпуклые задачи

1) Найти все точки локального минимума функции

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 3|x + y - 3|.$$

2) В задаче

$$\begin{cases} (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2 \longrightarrow min \\ x_1^2 \le x_2, \quad x_2 \le 4 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

исследовать на минимум точку $(2,4)$ с помощью теоремы Куна–Таккера.

3) Найти минимум функции $f(x) = \frac{1}{2}(x+a)^2 + |x|$, при $x \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2$.

4) На плоскости даны три точки. Найти точку, для которой сумма расстояний до этих тр„х минимальна.

5) Найти минимум функции $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\max(x,y)$.

6) Найти расстояние от точки (a_1, a_2, a_3) до конуса $x_3 \ge \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

7^*) Среди полиномов вида $t^2 + x_1 t + x_2$ найти полином, имеющий наименьшую норму в пространстве $C[-1,1]$.

8) Решить выпуклые задачи:

а) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3|x - y - 2| \longrightarrow \min$;

б) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4\ \max(x,y) \longrightarrow \min$;

в) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \longrightarrow \min$;

г) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\alpha\,|x + y - 1| \longrightarrow \min, \ (\alpha > 0)$.

9^*) Пусть $f-$ выпуклая функция на выпуклом множестве A , причём f дифференцируема в некоторой окрестности множества A, и пусть $\inf f(A) > -\infty$. Тогда последовательность $x_k \in A$ – минимизирующая для f на $A \iff \forall x \in A$ $\underline{lim}\ (f'(x_k), x - x_k) \ge 0$.

10) Найти ближайшую точку от $y = (1,0,2)$ до множества

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1,\ x_2 \ge x_1^2\}.$$