

УДК 517.977.58

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹**С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселёв**

В первой части статьи описывается метод продолжения по параметру в алгоритмах решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов для решения краевых задач, в том числе краевых задач, возникающих в теории оптимального управления. Схему вариации параметра (метод продолжения) можно рассматривать как специальное развитие и модификацию классического метода Ньютона. Основная идея рассматриваемого подхода допускает сжатую формулировку: *сведение краевой задачи к задаче Коши*. При рассмотрении задачи Коши в качестве элементарной операции мы приходим к компактному описанию алгоритма решения краевой задачи методом продолжения по параметру. Интерес к данной тематике связан с исследованием численных алгоритмов решения линейной задачи быстрого действия и нацелен на краевые задачи принципа максимума. Разработанная нами программа *BVP* позволяет решать в среде Maple регулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторые краевые задачи принципа максимума, возникающие в оптимальном управлении, задачи поиска периодических решений, предельных циклов и т.д. Во второй части статьи описывается простой алгоритм для построения множеств достижимости (управляемости) в плоских линейных управляемых системах, примеры его применения. Основой алгоритма служат параметрические уравнения границы плоского строго выпуклого компакта, заданного своей опорной функцией. Подход позволяет строить двумерные проекции множеств достижимости многомерных линейных управляемых систем. В третьей части статьи излагаются достаточные условия оптимальности для нелинейных управляемых систем в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина.

1. Алгоритмы решения краевых задач**1.1. Метод продолжения для нелинейного векторного уравнения в \mathbb{R}^n**

Рассмотрим векторное уравнение

$$\Phi(p) = 0, \quad (1.1)$$

где $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — гладкая векторная функция. Предполагается разрешимость уравнения (1.1). Классический метод Ньютона

$$p_{k+1} = p_k - [\Phi'(p_k)]^{-1}\Phi(p_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

требующий невырожденности вдоль процесса матрицы

$$\Phi'(p) = (\partial\Phi_i(p)/\partial p_j)_{i,j=1}^n, \quad (1.3)$$

в случае сходимости обладает квадратичной скоростью сходимости, но он обычно требует “достаточно хорошего” начального приближения p_0 . Этот недостаток метода Ньютона преодолевается в методе продолжения, который вырабатывает “хорошее” начальное приближение к решению при грубом начальном приближении. В методе продолжения проблема поиска решений уравнения (1.1) сводится к некоторой задаче Коши. Это можно сделать при определённых предположениях, формулируемых ниже. В методе продолжения рассматривается уравнение

$$\Phi(p) = (1 - \mu)\Phi(p_0), \quad \mu \in [0, 1], \quad (1.4)$$

¹Работа поддержана грантами НШ-7581.2006.1, РНП 2.1.1.1714, РФФИ 06-01-00359-а, 05-01-00193.

содержащее параметр μ . Здесь p_0 — некоторая фиксированная точка из \mathbb{R}^n , которую можно рассматривать в качестве начального приближения к решению уравнения (1.1); погрешность этой аппроксимации не предполагается “малой”. Уравнение (1.4) при $\mu = 0$ имеет решение p_0 . Для $\mu = 1$ уравнение (1.4) совпадает с исходным уравнением (1.1). В методе продолжения по параметру решение p_0 трансформируется в искомое решение уравнения (1.1). Закон этой трансформации описывается задачей Коши. Заметим, что вспомогательное уравнение (1.4) может быть выбрано в общей форме: $H(p, \mu) = 0$, $H(p_0, 0) = 0$, $H(p, 1) = \Phi(p)$; конкретный выбор функции H может быть сделан с учётом специфики решаемой задачи. Ограничимся рассмотрением вспомогательного уравнения метода продолжения в форме (1.4). Ниже считаются выполненными следующие два предположения.

Предположение 1 (о гладкой ветви). Уравнение (1.4) при любом $\mu \in [0, 1]$ имеет решение

$$p = p(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1; \quad (1.5)$$

функция (1.5) является гладкой функцией параметра μ и удовлетворяет начальному условию

$$p(\mu)|_{\mu=0} = p_0. \quad (1.6)$$

Предположение 2 (о невырожденности). Матрица (1.3) невырождена вдоль ветви (1.5).

Справедливость предположений 1 и 2 зависит от уравнения (1.1) и от выбора точки p_0 . Конечно, прямая проверка этих предположений в сложных нелинейных задачах невозможна. Успешное завершение вычислительного процесса может служить косвенным подтверждением их выполнения. Подстановка (1.5) в (1.4) приводит к тождеству

$$\Phi(p(\mu)) = (1 - \mu)\Phi(p_0), \quad \mu \in [0, 1].$$

Дифференцирование этого тождества по параметру μ влечёт соотношение

$$\Phi'(p(\mu)) \frac{dp(\mu)}{d\mu} = -\Phi(p_0). \quad (1.7)$$

Из (1.6), (1.7) следует, что функция (1.5) является решением векторной задачи Коши

$$\text{IVP} : \quad \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(\mu)|_{\mu=0} = p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (1.8)$$

Численное решение задачи Коши (1.8) позволяет найти функцию $p(\mu)$, $0 \leq \mu \leq 1$; вектор

$$p(\mu)|_{\mu=1} \quad (1.9)$$

должен быть точным решением (1.1) в идеальной ситуации точного нахождения решения $p(\mu)$. В реальных вычислениях вектор (1.9) даёт новое приближение для решения; точность решения зависит от использованного численного метода и его параметров. Один шаг итерационной процедуры ассоциируется с решением задачи Коши (1.8). Итерационный процесс p^0, p^1, p^2, \dots поиска решения уравнения (1.1) представим схемой

$$p^0 \xrightarrow{\text{IVP}(1.8), p_0=p^0} p^1 = p(\mu)_{(1.8)}|_{\mu=1} \xrightarrow{\text{IVP}(1.8), p_0=p^1} p^2 = p(\mu)_{(1.8)}|_{\mu=1} \longrightarrow \dots \quad (1.10)$$

Процесс (1.10) включает широкий спектр дискретных численных схем, определяемых привлекаемым численным методом решения задачи Коши. Метод Эйлера с шагом $\Delta\mu = 1$ в задаче Коши (1.8) превращает процесс (1.10) в процесс Ньютона (1.2). Задача Коши (1.8) допускает модификации (см., например, [6], уравнение продолжения с обратной связью).

1.2. Метод продолжения в краевых задачах

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad R(x(a), x(b)) = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

Здесь $f(t, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $R(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ являются гладкими векторными функциями. Предполагая существование решения краевой задачи (1.11), обсудим алгоритмические вопросы поиска её решения. Решение краевой задачи можно свести к некоторому нелинейному векторному уравнению в \mathbb{R}^n . Выберем некоторую точку $t_* \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_*} = p \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Свобода выбора точки t_* может быть полезна для вычислительной практики. Пусть

$$x(t, p), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.13)$$

— решение задачи Коши (1.12). Предполагается продолжимость решения (1.13) на весь отрезок $[a, b]$ для любого p . Начальное значение параметра $p \in \mathbb{R}^n$ ищется из векторного граничного условия в задаче (1.11), т.е. искомое p является решением уравнения

$$\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0. \quad (1.14)$$

Итак, краевая задача (1.11) сведена к конечному векторному уравнению (1.14). Далее к уравнению (1.14) применяется метод продолжения, описанный в 1.1. Матрица $\Phi'(p)$ определяется равенством $\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a, p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b, p)}{\partial p}$. Здесь $(n \times n)$ -матрицы $R'_x(x, y)$, $R'_y(x, y)$ вычисляются вдоль решения (1.13), т.е. при $x = x(a, p)$, $y = x(b, p)$. Введём обозначение $X(t, p) \equiv \frac{\partial x(t, p)}{\partial p}$ для $(n \times n)$ -матрицы производных решения (1.13) по начальному условию. Матрица $X(t, p)$ определяется дифференциальным уравнением в вариациях

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b,$$

где $A = A(t, p) \equiv f'_x(t, x)|_{x=x(t, p)}$ есть $(n \times n)$ -матрица, I — единичная матрица. Основная задача Коши схемы продолжения по параметру имеет вид

$$\mathbf{IVP} : \quad \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(0) = p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (1.15)$$

где $\Phi(p) = R(x(a, p), x(b, p))$, $\Phi'(p) = R'_x(x(a, p), x(b, p))X(a, p) + R'_y(x(a, p), x(b, p))X(b, p)$.

Для одновременного вычисления векторной функции $x(t, p)$ и матричной функции $X(t, p)$ может быть записана следующая векторно-матричная задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), & x|_{t=t_*} &= p, \\ \dot{X} &= f'_x(t, x)X, & X|_{t=t_*} &= I, \quad a \leq t \leq b. \end{cases} \quad (1.16)$$

Задачу Коши (1.15) будем называть *внешней задачей*, задачу Коши (1.16) — *внутренней задачей*. Таким образом, предлагается итерационный процесс (1.10) для решения рассматриваемой краевой задачи (1.11) на основе внешней задачи (1.15) и внутренней задачи (1.16). На одном шаге итерационного процесса выполняется решение внешней задачи (1.15), в ходе решения которой происходит многократное обращение к решению внутренней задачи Коши (1.16) при различных значениях параметра p . Описанная схема применялась нами при разработке программы *BVP* в среде Maple для численного решения краевой задачи (1.11). При формировании матриц f'_x , R'_x , R'_y привлекаются возможности среды по выполнению аналитических вычислений.

Краевая задача принципа максимума Понтрягина может содержать разрывные или негладкие функции, например, функции *сигнатуры* (sign), *насыщения* (sat), *мёртвой зоны* (dez) и т.д. Поэтому описанный подход для решения гладких краевых задач, как правило, не может быть использован непосредственно в краевых задачах принципа максимума. Другая веская причина для сглаживания заключается в том, что в задачах с управлениями *релейного типа* (bang-bang) обрабатываемая матрица может оказаться вырожденной в некоторых областях, а при сглаживании можно добиться невырожденности соответствующих матриц, поэтому оправдана предварительная работа по сглаживанию краевой задачи принципа максимума. Некоторые методы сглаживания задач управления описаны в [7–13, 16, 18]. Эти процедуры сглаживания связаны с изменением размерности управления. Регуляризация задачи иногда достигается без изменения размерности управления. Простые формулы сглаживания приводятся ниже.

Функция *сигнатуры* $\text{sign}(s)$ может быть приближена гладкими функциями

$$\text{SGN1}(s, \nu) = \frac{s}{\sqrt{\nu + s^2}}, \quad \text{SGN2}(s, \nu) = \text{th} \frac{s}{\nu}, \quad \text{SGN3}(s, \nu) = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{s}{\nu}.$$

Функция *насыщения* и функция *мёртвой зоны*

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} s, & |s| \leq 1, \\ \text{sign}(s), & |s| > 1, \end{cases} \quad \text{dez}(s) = \begin{cases} 0, & |s| < 1, \\ \text{sign}(s), & |s| > 1, \end{cases}$$

соответственно аппроксимируются следующими функциями:

$$\text{SAT}(s, \nu) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\nu + (s+1)^2} - \sqrt{\nu + (s-1)^2} \right),$$

$$\text{DEZ}(s, \nu) = \frac{1}{2} \left(\frac{s+1}{\sqrt{\nu + (s+1)^2}} + \frac{s-1}{\sqrt{\nu + (s-1)^2}} \right).$$

Параметр сглаживания ν является некоторым малым положительным числом. Соответствующие формулы сглаживания для экстремальных управлений при применении принципа максимума [15] могут быть получены в результате подходящего “малого” возмущения функционала.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Краевая задача двух тел [3].

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad x(0) = a_1, \quad y(0) = a_2, \quad x(T) = b_1, \quad y(T) = b_2.$$

Эта краевая задача переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & \dot{x}_2 = x_4, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = b_1, \\ \dot{x}_3 = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, & \dot{x}_4 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = b_2. \end{cases}$$

Для данных $T = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1.0738644361$, $b_2 = -1.0995343576$, при выборе параметра $t_* = 0$, для начальных приближений $p_{01} = [2, 0, -0.5, 0.5]$ и $p_{02} = [2, 0, 0.5, -0.5]$ получены два разных решения со следующими векторами начальных условий в момент времени t_* :

$$\text{ans1} = [2., 0., 0.0000004834, 0.5000000745] \quad \text{и} \quad \text{ans2} = [2., 0., 0.4510782034, -0.2994186665].$$

Соответствующие траектории **1** и **2** системы (с начальной точкой S и конечной точкой F) в плоскости x_1x_2 показаны на рис. 1. Здесь и в следующих примерах для решения задачи Коши использовался метод Рунге — Кутты — Фельберга (rkf-45). Выбранная точность: 10^{-4} для решения внешней задачи, 10^{-6} для решения внутренней задачи. Число итераций — 3.

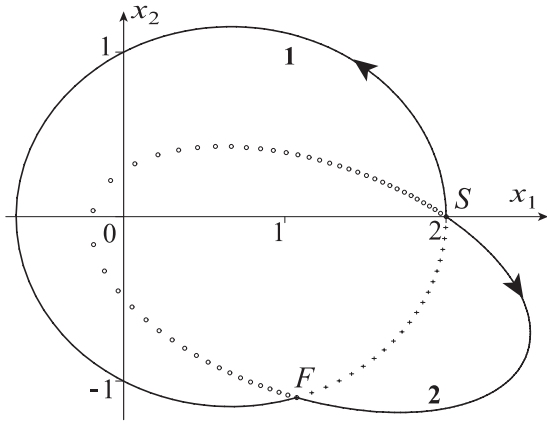


Рис. 1:

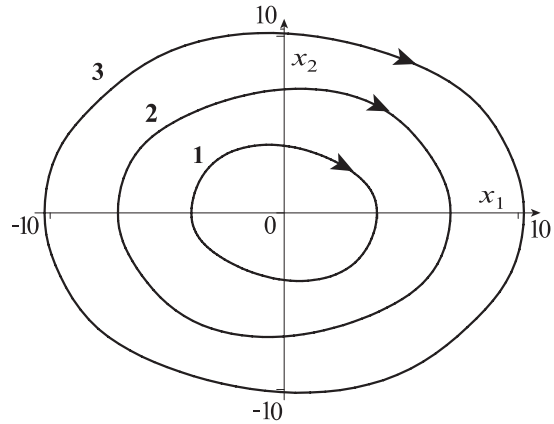


Рис. 2:

Пример 2. Предельные циклы в системе Эквейлера [14].

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \sin(x_2).$$

Эта система имеет счётное множество предельных циклов. Некоторые из них вычисляются вместе с неизвестными периодами T . Выбор различных начальных векторов p_0 позволяет находить различные предельные циклы. Поиск предельного цикла сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2, & \dot{x}_3 = 0, & x_1(0) = x_4(0), & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_1 + \sin(x_2)), & \dot{x}_4 = 0, & x_1(1) = x_4(1), & x_2(1) = 0. \end{cases}$$

Здесь введены вспомогательные переменные: $x_3 = T$ – период, и $x_4 = x_1(0)$ – абсцисса точки пересечения предельного цикла с осью x_1 . Выбирая точку $t_* = 0$, для начальных векторов $p_{01} = [2, 0, 2\pi, 2]$, $p_{02} = [6.5, 0, 2\pi, 6.5]$, $p_{03} = [9, 0, 2\pi, 9]$ получаем следующие векторы начальных условий в момент времени t_* :

$$\begin{aligned} \text{ans1} &= [3.9655467678, 0, 6.4661401325, 3.9655467678], \\ \text{ans2} &= [7.1078664573, 0, 6.3387892836, 7.1078664573], \\ \text{ans3} &= [10.2456910360, 0, 6.3101121791, 10.2456910360]. \end{aligned}$$

Соответствующие предельные циклы **1**, **2**, **3** показаны на рис. 2.

Пример 3. Функционал типа “энергия” для трёхкратного интегратора. Рассмотрим задачу управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = u, & |u| \leq 1, & x(0) = (1, 0, 0), & x(T) = (0, 0, 0), & T = 3.275, \\ L = \frac{1}{2} \int_0^T u(t)^2 dt \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1.17)$$

Для задачи управления в \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad L(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt \rightarrow \min, \quad T > 0 \text{ задано,}$$

с одномерным ограниченным управлением краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\dot{x} = Ax + b \cdot \text{sat}(b^* \psi), \quad \dot{\psi} = -A^* \psi, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0,$$

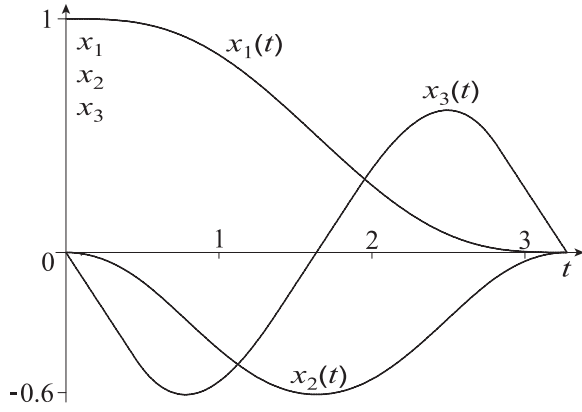


Рис. 3:

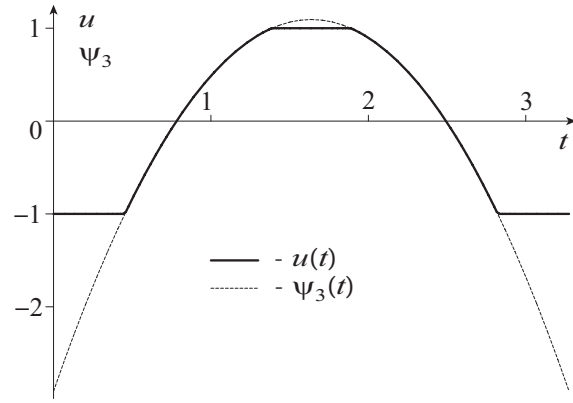


Рис. 4:

(здесь и далее символ * означает транспонирование), а в частном случае (1.17), при сглаженной функции насыщения, — вид системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = x_3, & \dot{x}_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\nu + (x_6 + 1)^2} - \sqrt{\nu + (x_6 - 1)^2} \right), \\ \dot{x}_4 = 0, & \dot{x}_5 = -x_4, & \dot{x}_6 = -x_5 \end{cases}$$

с граничными условиями из (1.17). Эта краевая задача решена программой *BVP* ($t_* = T$, $\nu = 10^{-10}$) с вектором начальных значений p в момент t_* : $\text{ans} = [0, 0, 0, -2.9850435834, 4.8880088678, -2.9083874537]$. Зависимость оптимальных фазовых переменных и управления от t показана на рис. 3, 4.

Пример 4. Задача быстрогодействия с областью управления в форме лунки [16].

Сглаживание негладкой области управления U , т.е. построение её гладкой выпуклой аппроксимации U_μ , предполагает конструктивное описание опорной функции сглаженного² множества U_μ . Рассмотрим задачу быстрогодействия с областью управления U в форме лунки:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, & \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 + u_2, & x_1(0) = a_1, & x_1(T) = 0, & x_2(0) = a_2, & x_2(T) = 0, \\ u = (u_1, u_2) \in U = S_{\sqrt{2}}((+1, 0)) \cap S_{\sqrt{2}}((-1, 0)), & \alpha = 0.25, & \beta = 1.5, & a_1 = 4, & a_2 = 1. \end{cases}$$

Сглаженная лунка U_μ ($\mu > 0$ — малый параметр) задаётся опорной функцией, см. [18],

$$c(U_\mu, \psi) = \left(\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)} - \sqrt{q_1^2} \right) \Big|_{q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2)^2} + \sqrt{\mu\|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}), q_2 = \psi_2}$$

Краевая задача принципа максимума сглаженной задачи управления, в безразмерном времени, состоит из пяти скалярных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = T(x_2 + c'_{\psi_1}(U_\mu, \psi)), & x_1(0) = a_1, & x_1(1) = 0, \\ \dot{x}_2 = T(-\beta x_1 - \alpha x_2 + c'_{\psi_2}(U_\mu, \psi)), & x_2(0) = a_2, & x_2(1) = 0, \\ \dot{\psi} = -TA^*\psi, & \psi_1(1)^2 + \psi_2(1)^2 = 1, \\ \dot{T} = 0, & 0 \leq t \leq 1, & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

²Для множеств U , представимых в виде алгебраической суммы, выпуклой оболочки объединения множеств с известной гладкой выпуклой аппроксимацией, задача сглаживания решается конструктивно (см. [13]). Труднее работать с множествами U , заданными в форме пересечения нескольких множеств или в виде геометрической разности (см. [18]). Пример сглаживания лунки приведен ниже.

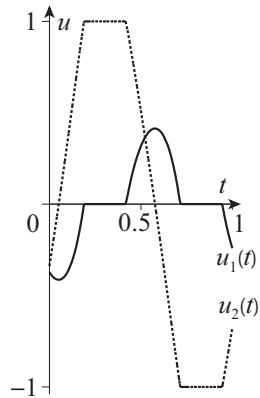


Рис. 5:

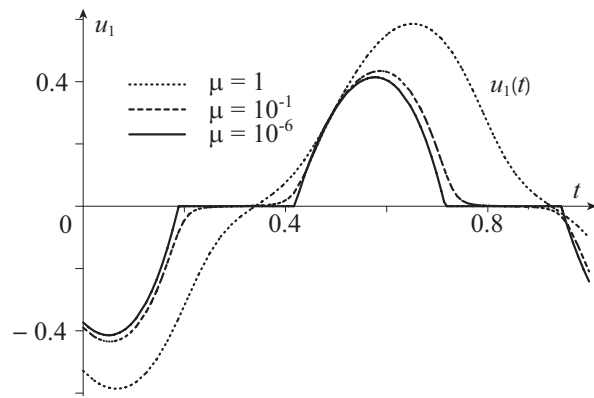


Рис. 6:

Решение краевой задачи при малых μ даёт приближения к оптимальному процессу. На рис. 5 показаны графики управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\mu = 10^{-6}$, на рис. 6 — графики $u_1(t)$ для трёх значений $\mu = 1, 10^{-1}, 10^{-6}$. Вычисления выполнены с помощью упомянутой выше программы *BVP*.

Пример 5. Задача быстрогодействия.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = u, & x \in \mathbb{R}^m, u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ x(0) = a_0, \dot{x}(0) = b_0, \quad x(T) = a_1, \dot{x}(T) = b_1, \quad T \rightarrow \min. \end{cases}$$

При $m = 2$ область управления U — лунка, при $m = 3$ — тело, полученное вращением лунки вокруг её вертикальной оси. Краевая задача принципа максимума содержит $4m + 1$ уравнение. Область управления конструктивно сглаживается до телесного выпуклого компакта в пространстве \mathbb{R}^{2m} . Внимание авторов к изучению двух последних примеров привлёк А.А.Чикрий.

Сделаем несколько важных замечаний. Если в краевой задаче (1.11) краевые условия содержат задание нескольких неизвестных функций $x_1(a) = x_{10}, \dots, x_k(a) = x_{k0}, 1 \leq k \leq n - 1$, то при выборе $t_* = a$ порядок внешней задачи можно понизить до $n - k$, полагая $p = (x_{k+1}(a), \dots, x_n(a))$, что является существенным при решении краевых задач принципа максимума, в которых фазовая переменная задана в начальный момент времени, а в роли искомого вектора p выступает неизвестное начальное значение сопряжённой переменной. Описанная схема применима и для многоточечных краевых задач. Другие примеры расчётов см. в [17].

2. Множества достижимости плоских линейных управляемых систем

Для линейных управляемых систем множества достижимости определяются опорными функциями, и на этой основе могут быть построены различные вычислительные алгоритмы. Здесь излагается простой алгоритм построения множеств достижимости плоских линейных управляемых систем, основой которого служат параметрические уравнения границы плоского строго выпуклого компакта M , заданного опорной функцией $s(p) = \max_{x \in M} (x, p)$, $p \in \mathbb{R}^2$.

Утверждение 1 (о параметрических уравнениях границы плоского выпуклого компакта). Граница ∂M выпуклого компакта M описывается векторным уравнением

$$x = s_0(\alpha)q(\alpha) + s'_0(\alpha)q'(\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad (2.1)$$

$$\text{где } s_0(\alpha) = s(p)|_{p=q(\alpha)}, \quad s'_0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}s_0(\alpha), \quad q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad q'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.1) в координатной форме принимает вид двух параметрических уравнений

$$x_1 = s_0(\alpha) \cos \alpha - s'_0(\alpha) \sin \alpha, \quad x_2 = s_0(\alpha) \sin \alpha + s'_0(\alpha) \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Функция $s_0(\cdot)$ является сужением опорной функции $s(\cdot)$ на единичную окружность.

Это утверждение является следствием теоремы о параметризации границы строго выпуклого компакта с помощью градиента его опорной функции. Действительно, векторное параметрическое уравнение границы ∂M имеет вид $x = s'(q(\alpha))$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Разлагая вектор $s'(q(\alpha))$ по базису $q(\alpha)$, $q'(\alpha)$, приходим к (2.2). Предлагаемый подход позволяет строить двумерные проекции множеств достижимости в многомерных линейных управляемых системах. Ниже приводятся примеры расчётов множеств достижимости на основе утверждения 1³.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^2; \quad u \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

где область управления U — выпуклый компакт, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — известная матрица, $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ — заданное начальное состояние. Множество достижимости $X(T)$ системы (2.3) в момент времени T является выпуклым компактом. Множество $X(T)$ описывается опорной функцией

$$c(X(T), p) = (x_0, e^{TA^*} p) + \int_0^T c(U, e^{tA^*} p) dt, \quad p \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Полагая $e^{tA^*} = \begin{pmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{pmatrix}$, имеем: $e^{tA^*} p = \begin{pmatrix} e_{11}(t) p_1 + e_{12}(t) p_2 \\ e_{21}(t) p_1 + e_{22}(t) p_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$,

$$(x_0, e^{TA^*} p) = x_{01}(e_{11}(T) p_1 + e_{12}(T) p_2) + x_{02}(e_{21}(T) p_1 + e_{22}(T) p_2).$$

Утверждение 2 (об экспоненциале квадратной матрицы второго порядка). *Имеет место следующая формула:*

$$e^{tA} = \begin{cases} 1/(\lambda_1 - \lambda_2) \left[(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) I + (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) A \right], & \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, \\ e^{\lambda t} \left[(1 - \lambda t) I + tA \right], & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, \\ e^{\rho t} / \nu \left[(\nu \cos(\nu t) - \rho \sin(\nu t)) I + \sin(\nu t) A \right], & \lambda_{1,2} = \rho \pm i\nu, \end{cases}$$

где $\lambda_{1,2}$ — собственные значения матрицы A , I — единичная матрица, i — мнимая единица.

Обсудим вопрос о практической реализации процесса построения множества достижимости $X(T)$ по его опорной функции (2.4). Интеграл в (2.4) представим приближённо суммой $\sigma(p, N) = \sum_{n=1}^N \frac{T}{N} c(U, e^{n \frac{T}{N} A^*} p)$, где N — число узлов⁴. Функцию (2.4) приближает функция $s(p, N) = (x_0, e^{TA^*} p) + \sigma(p, N)$. Полагаем

$$s_0(\alpha) = s(p, N) \Big|_{p=q(\alpha)}, \quad ds_0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} s_0(\alpha), \quad q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

³Построение кривой, определяемой параметрическими уравнениями (2.2), в среде Maple достигается командой `plot([x1(alpha), x2(alpha), alpha=0..2*Pi])`; Предполагается, что функция $s_0(\alpha)$ описана аналитически, производная $s'_0(\alpha)$ находится средствами компьютерной алгебры командой `ds0:=unapply(diff(s0(alpha), alpha), alpha)`;

⁴При построении функции (2.4) можно привлекать и другие квадратурные формулы.

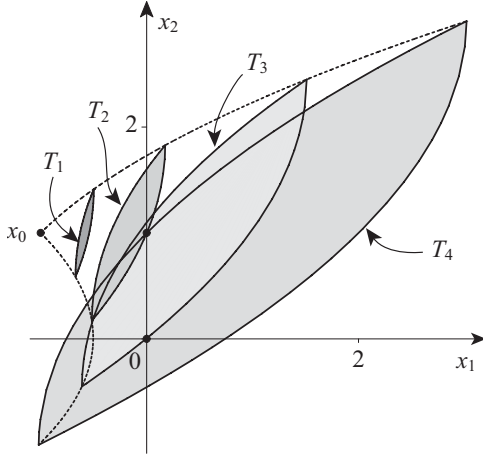


Рис. 7:

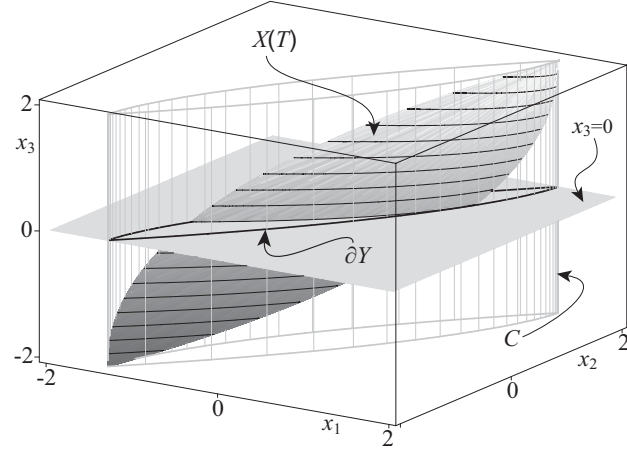


Рис. 8:

Функции (2.5) зависят не только от углового параметра α , но и от времени T , от числа узлов N . Граница $\partial X(T)$ описывается приближённо параметрическими уравнениями

$$x_1 = s_0(\alpha) \cos \alpha - ds_0(\alpha) \sin \alpha, \quad x_2 = s_0(\alpha) \sin \alpha + ds_0(\alpha) \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (2.6)$$

При необходимости опорная функция множества U может быть взята в сглаженной форме. Приведём примеры расчётов, выполненных в среде Maple на основе уравнений (2.6).

Пример 6. Для управляемого объекта (2.3) с $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_0 = (-1, 1)^*$, $U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$ (тележка), построить множества достижимости для моментов времени

$$T_1 = \sqrt{2} - 1, \quad T_2 = 2(\sqrt{2} - 1), \quad T_3 = \sqrt{6} - 1, \quad T_4 = 2.$$

Результаты расчётов показаны на Рис. 7. Число узлов $N = 100$.

Обсудим вопрос о построении двумерных проекций множеств достижимости *многомерных линейных управляемых систем*. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y = \pi X \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые компакты. Здесь π — $(2 \times n)$ -матрица, транспонированная матрица π^* составлена из столбцов $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|\pi_1\| = \|\pi_2\| = 1$, $\pi_1 \perp \pi_2$. Таким образом, Y есть двумерная проекция множества X . Опорная функция $s(q)$ множества Y и её сужение $s_0(\alpha)$ на единичную окружность имеют вид

$$s(q) = c(X, \pi^* q), \quad q \in \mathbb{R}^2, \\ s_0(\alpha) \equiv s(q(\alpha)) = c(X, \pi^* q(\alpha)) = c(X, \pi_1 \cos(\alpha) + \pi_2 \sin(\alpha)), \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (2.7)$$

Если $X = X(T)$ есть множество достижимости n -мерной ($n > 2$) линейной управляемой системы, то, учитывая вид опорной функции (2.4), $p \in \mathbb{R}^n$, формулу (2.7) и параметрические уравнения (2.2), мы можем построить кривую ∂Y .

Пример 7. Двумерная проекция на плоскость $x_3 = 0$ множества достижимости $X(T)$, $X(0) = \{0\}$, трёхкратного интегратора:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u; \quad |u| \leq 1; \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

Полагая $\pi_1 = (1, 0, 0)^*$, $\pi_2 = (0, 1, 0)^*$, имеем:

$$c(X(T), p) = \int_0^T \left| \frac{t^2}{2} p_1 + t p_2 + p_3 \right| dt, \quad s_0(\alpha) = c(X(T), \pi^* q(\alpha)) = \int_0^T \left| \frac{t^2}{2} \cos \alpha + t \sin \alpha \right| dt.$$

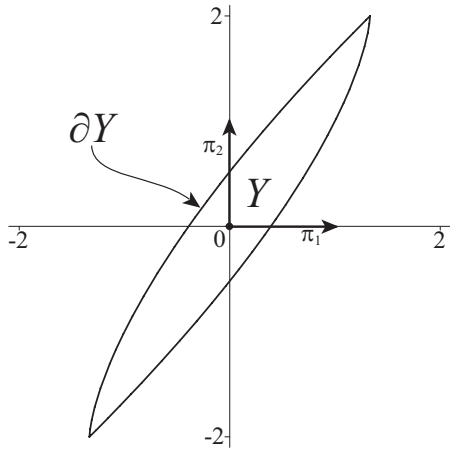


Рис. 9:

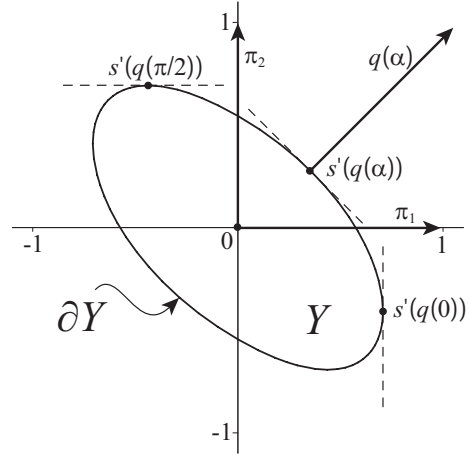


Рис. 10:

Результаты расчёта при $T = 2$ показаны на рис. 8, где жирной линией отмечена граница ∂Y проекции Y множества достижимости $X(2)$ на плоскость $x_3 = 0$. Эта линия является линией пересечения цилиндра (с образующими, параллельными оси x_3), описанного вокруг трёхмерного множества достижимости, и плоскости $x_3 = 0$. Множество достижимости отмечено темным цветом, цилиндр — серым цветом, плоскость $x_3 = 0$ — светлой заливкой. На рис. 9 показаны линия ∂Y и проекция Y множества $X(2)$. В расчётах опорная функция области управления записывалась в сглаженной форме с малым параметром сглаживания $\nu = 10^{-6}$. Результат проектирования множества $X(2)$ на плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ показан на рис. 10. При вычислениях положено $\pi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)^*$, $\pi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)^*$.

3. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина [15] содержит необходимые условия оптимальности. После построения экстремального решения вопрос об его оптимальности остаётся открытым и требует дополнительного исследования. Можно построить примеры задач управления, имеющие более одного решения, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума, среди этих решений могут встретиться неоптимальные, и это утверждение иллюстрируется примером [19] (модифицированный пример из [20]) двумерной нелинейной управляемой системы на фиксированном отрезке времени $[0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 x_2 - u_2 x_1, & \dot{x}_2 = -u_1 x_1 - u_2 x_2, & x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \\ 0 \leq t \leq T, & u_1^2 + u_2^2 \leq 1, & J = x_1(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases}$$

Краевая задача принципа максимума при этом допускает разрешение в аналитической форме (см. [19]), причём при малых значениях параметра T решение краевой задачи единственно, а при увеличении параметра T количество экстремальных решений неограниченно растёт, так что не любое экстремальное решение является оптимальным. В то же время для определённых классов нелинейных задач управления решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума, оказывается оптимальным. К такому классу задач относятся некоторые оптимизационные модели экономической динамики (модель диффузии инноваций [24], модель “Рост” [23], модель Рамсея и др.), для которых актуальна проблема обоснования оптимальности решений, получаемых из краевой задачи принципа максимума

при численном анализе. Здесь обсуждаются достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина, которые позволяют исследовать ряд задач оптимального управления, в том числе и задачи, допускающие особые режимы. Излагаемый материал развивает результаты статьи [21]. Основой предлагаемого подхода является *интегральное представление приращения функционала* для экстремального процесса в терминах функции Гамильтона — Понтрягина K и *интегральная оценка приращения функционала* для экстремального процесса в терминах функции Гамильтона M .

3.1. Достаточные условия оптимальности

Изучаются задачи максимизации и минимизации с интегральным функционалом на заданном отрезке времени при свободном правом конце траектории и фиксированных концах траектории для случая бесконечного горизонта и задач с особыми режимами.

3.1.1. Постановка задачи. Формулировка предположений

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0; & x \in \mathbb{R}^n, & u \in U \subset \mathbb{R}^r, & t \in [t_0, t_1], \\ J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь x — фазовая переменная, u — управление, подчинённое геометрическому ограничению $u \in U$, где множество $U \subset \mathbb{R}^r$ — область управления; x_0 — заданное начальное состояние объекта, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления. Запишем функцию Гамильтона — Понтрягина для задачи (3.1), полагая в ней $\psi_0 = 1$, $\psi \in \mathbb{R}^n$:

$$K(t, x, \psi, u) = f^0(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)). \quad (3.2)$$

Предположение П1. *Существует единственный максимизатор функции (3.2):*

$$u_*(t, x, \psi) = \arg \max_{u \in U} K(t, x, \psi, u) \quad \forall t, x, \psi. \quad (3.3)$$

С помощью максимизатора (3.3) строится функция Гамильтона (функция максимума):

$$M(t, x, \psi) = \max_{u \in U} K(t, x, \psi, u) = K(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t, x, \psi)}. \quad (3.4)$$

Запишем краевую задачу принципа максимума для задачи управления (3.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = K'_\psi(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t, x, \psi)} \equiv F(t, x, \psi), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -K'_x(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t, x, \psi)} \equiv G(t, x, \psi), & \psi(t_1) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Предположение П2. *Существует решение краевой задачи принципа максимума (3.5):*

$$(x(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (3.6)$$

О единственности решения (3.6) краевой задачи принципа максимума (3.5) никаких предположений не делается. Строится суперпозиция максимизатора (3.3) и решения (3.6) — допустимое управление $u(t) = u_*(t, x(t), \psi(t))|_{x=x(t), \psi=\psi(t)}$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Тройка и пара функций

$$(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.7)$$

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.8)$$

удовлетворяющие принципу максимума с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$, называются соответственно *экстремальной тройкой* и *экстремальным процессом*. Вопрос об оптимальности экстремального процесса (3.8) решает теорема 1 и её модификации.

Предположение П3. *Функции $M(t, x, \psi)$ и $M'_x(t, x, \psi)$ определены и непрерывны.*

Предположение П4. *Сопряжённое уравнение в (3.5) допускает запись*

$$\dot{\psi} = -M'_x(t, x, \psi). \quad (3.9)$$

З а м е ч а н и е. Последнее предположение можно заменить условием

$$\dot{\psi}(t) = -M'_x(t, x(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.10)$$

вдоль решения (3.6) задачи (3.5). Проверка условия (3.10) требует знания решения (3.6), тогда как проверка (3.9) не требует этого и может быть более удобной для применения.

Предположение П5. *Функция $m(t, x) \equiv M(t, x, \psi(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, где $\psi(t)$ — вторая компонента решения (3.6), является вогнутой функцией аргумента x при $t \in (t_0, t_1)$.*

3.1.2. Достаточные условия оптимальности

Теорема 1. *В предположениях П1–П5 процесс (3.8) оптимален в задаче (3.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, наряду с исследуемым экстремальным процессом (3.8), любой другой допустимый процесс $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, где $\hat{u}(t)$ — допустимое управление, $\hat{x}(t)$ — траектория, отвечающая этому управлению: $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$. Введем обозначения для приращений управления, траектории и функционала:

$$\Delta u(t) = \hat{u}(t) - u(t), \quad \Delta x(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad \Delta J[u] = J[\hat{u}] - J[u].$$

Для доказательства теоремы будет установлено неравенство $\Delta J[u] \leq 0$. Это неравенство может быть получено на основе приведенного ниже интегрального представления приращения ΔJ функционала. Исходным пунктом этого плана служит следующее представление нуля:

$$0 = (\psi(t), \Delta x(t)) \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}, \quad (3.11)$$

где $\psi(t)$ — сопряжённая переменная (вторая компонента решения (3.6) краевой задачи (3.5) и экстремальной тройки (3.7)), $\Delta x(t)$ — приращение траектории. Справедливость формулы (3.11) вытекает из условия трансверсальности $\psi(t_1) = 0$ и очевидного равенства $\Delta x(t_0) = 0$.

Исходя из формулы (3.11) и привлекая формулу Ньютона — Лейбница, соотношения (3.10),

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - f^0(t, x(t), u(t))] dt,$$

$$(\psi(t), f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))) = K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)),$$

$$(\psi(t), f(t, x(t), u(t))) = K(t, x(t), \psi(t), u(t)) - f^0(t, x(t), u(t)),$$

получаем

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\psi(t), \Delta x(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} [(\psi(t), \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)) + (\dot{\psi}(t), \Delta x(t))] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] dt - \Delta J.$$

Отсюда в силу равенства $K(t, x(t), \psi(t), u(t)) = M(t, x(t), \psi(t))$ находим

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] dt. \quad (3.12)$$

Из (3.12) и неравенства $K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) \leq M(t, \hat{x}(t), \psi(t))$ вытекает оценка

$$\Delta J \leq \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] dt. \quad (3.13)$$

В силу П5 интегрант в (3.13) неположителен, что влечёт за собой неравенство $\Delta J \leq 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 сохраняется для задачи управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1; & x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^r, & t \in [t_0, t_1], \\ J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)} \end{cases} \quad (3.14)$$

с двумя фиксированными концами траектории. Ключевое в доказательстве теоремы соотношение (3.11) имеет место, так как $\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0$. В краевой задаче (3.5) вместо условия трансверсальности $\psi(t_1) = 0$ присутствует условие на траекторию $x(t_1) = x_1$.

З а м е ч а н и е 2. Если в (3.1), (3.14) заменить \max на \min , то функция (3.2) записывается в виде $K = -f^0(t, x, u) + (\psi, f(t, x, \psi))$.

З а м е ч а н и е 3. Достаточные условия оптимальности применимы и для задач управления на бесконечном промежутке времени: $t_0 \leq t < +\infty$. Допустимыми управлениями считаются управления, гарантирующие продолжимость решений основного дифференциального уравнения управляемого движения на бесконечный промежуток времени $t_0 \leq t < +\infty$ и сходимостью несобственного интеграла $\int_{t_0}^{+\infty} f^0(t, x(t), u(t)) dt$. Достаточные условия формулируются в

прежней форме с дополнительным предположением $0 = (\psi(t), \Delta x(t)) \Big|_{t_0}^{+\infty}$. Последнее условие выполняется, например, если $\psi(+\infty) = 0$ и все допустимые траектории ограничены.

З а м е ч а н и е 4. Предположение П1 исключает из рассмотрения задачи с особыми режимами. Предложенная процедура вывода неравенства $\Delta J \leq 0$ позволяет охватить и задачи с особыми режимами. Для этого вместо П1, П2 формулируется следующее предположение.

Предположение П0. Пусть $(x(t), \psi(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $\psi(t_1) = 0$ — экстремальная тройка для задачи (3.1), т.е. пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, причём $\psi_0 = 1$.

Теорема 2. Если (1) выполняется предположение П0, (2) для функции (3.4) выполнено предположение П3, (3) вдоль экстремального решения выполняется соотношение (3.10), (4) имеет место условие вогнутости (предположение П5), то процесс $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, является оптимальным для задачи управления (3.1).

Предложенные достаточные условия применимы в линейно-квадратичной задаче (конечный и бесконечный горизонт) [22], в моделях диффузии инноваций [24], “Рост” [23], Рамсея и др., что заслуживает отдельного обсуждения.

Поступила 05.06.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Давиденко Д.Ф.** Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений// Докл. АН СССР, 1953. Т. 88, № 4. С. 601–602.
2. **Шалапилин В.И., Кузнецов Е.Б.** Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. **Bellman R.E., Kalaba R.E.** Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. New York. 1965.
4. **Шаманский В.Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наукова думка, 1966.
5. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, New York and London. 1970.
6. **Аввакумов С.Н.** Метод продолжения по параметру с обратной связью// “Понтрягинские чтения-VII” на ВМШ “Современные методы в теории краевых задач”. Тез. докл. Воронеж-1996. 1996. С. 6.
7. **Киселёв Ю.Н.** Линейная теория быстрогодействия с возмущениями. М.: Изд-во МГУ, 1986.
8. **Киселёв Ю.Н.** Быстросходящиеся алгоритмы решения линейной задачи быстрогодействия// Кибернетика, Киев. 1990. № 6. С. 47–57.
9. **Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.** Численные алгоритмы линейных быстрогодействий// Журн. вычисл. математики и матем. физ., 1991. № 12. С. 1763–1771.
10. **Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.** Метод потенциалов в линейной задаче быстрогодействия// Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 44–51.
11. **Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.** Нелинейная краевая задача принципа максимума в линейной задаче быстрогодействия// Дифференциальные уравнения. 1995. № 12. С. 1843–1850.
12. **Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.** Методы решения некоторых задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина// Тр. МИ РАН. 1995. Т. 211. С. 3–31.
13. **Аввакумов С.Н.** Гладкая аппроксимация выпуклых компактов// Тр. Ин-та Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 1996. Т. 4. С. 184–200.
14. **Stoker J.J.** Nonlinear vibrations. New York. 1950.
15. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
16. **Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.** Примеры решения краевых задач принципа максимума// Конференция “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках”. Тез. докл. Воронеж, 20–27 января 2000 г. 2000. С. 7.
17. **Avvakumov S., Kiselev Yu.** Boundary value problem for ODE with applications to optimal control// Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.
18. **Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.** Опорные функции некоторых специальных множеств// Проблемы динамического управления. / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжмского. М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 24–110.
19. **Киселёв Ю.Н.** Построение точных решений для нелинейной задачи быстрогодействия специального вида// Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3, № 3. С. 847–867.
20. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления М.: Наука, 1972.
21. **Киселёв Ю.Н.** Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина// Сб. “Математические модели в экономике и биологии”. Материалы научного семинара. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.
22. **Киселёв Ю.Н.** Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума// Проблемы динамического управления. / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжмского. М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 168–182.
23. **Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.** Численный метод поиска оптимального решения: модель “РОСТ”// Сб. “Математические модели в экономике и биологии”. Материалы научного семинара. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 1–15.

-
24. **Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N.** Qualitative study and algorithms in the mathematical model of innovation diffusion// J. Math. Sci. 2003. Vol. 116, nr. 6. P. 3657–3672.