Оглавление

Предисловие ко второму изданию 7
Предисловие к первому изданию 9

1. Векторные свойства евклидова пространства 14
1.1. Точки и векторы 14
1.2. Свободные и скользящие векторы 25
1.3. Системы скользящих векторов 29
1.4. Пара скользящих векторов 31
1.5. Упрощение системы скользящих векторов 37
1.6. Параллельные скользящие векторы 40
1.7. Центр масс множества точек 42
1.8. Геометрия масс 45
1.9. Главные оси инерции 49
1.10. Преобразование эллипсоида инерции 50
1.11. Тензорное умножение векторов 57
1.12. Критерий тензора инерции 59
1.13. Свойства моментов инерции 61
1.14. Примеры вычисления тензора инерции 64
Контрольные вопросы к главе 1 73

2. Кинематика 76
2.1. Скорость точки 76
2.2. Ускорение точки 78
2.3. Закон движения твердого тела 81
2.4. Движение вокруг неподвижной точки 84
2.5. Угловые координаты твердого тела 88
2.6. Параметры Эйлера 96
2.7. Параметры Кэли-Клейна 102
2.8. Кватернионы 110
2.9. Произвольное движение твердого тела 113
2.10. Дифференциал вращения 115
2.11. Сложное движение точки 118
2.12. Поле скоростей твердого тела 120
2.13. Система угловых скоростей 125
2.14. Поле скоростей плоскопараллельного движения 131
2.15. Поле скоростей тела с одной неподвижной точкой . . . 133
2.16. Ускорение точки в сложном движении 139

2.17. Поле ускорений в твердом теле 145
Контрольные вопросы к главе 2 150

3. Динамика поступательного движения 154
3.1. Пространственно-временная структура 154
3.2. Первый закон Ньютона. Принцип относительности . . 156
3.3. Принцип детерминированности 159
3.4. Работа силы на перемещении 162
3.5. Основные задачи динамики 169
3.6. Скалярные формы уравнений движения 176
3.7. Основные теоремы динамики материальной точки . . . 190
3.8. Влияние связей на движение материальной точки . . . 197
3.9. Одномерные осцилляторы 211
3.10. Резонансные явления 232
3.11. Движение под действием сил всемирного тяготения . . 254
3.12. Сферический маятник 269
3.13. Относительное движение 274
3.14. Силы инерции из-за вращения Земли 281
3.15. Элементы теории удара 289
Контрольные вопросы к главе 3 297

4. Аналитическая статика системы материальных точек 304
4.1. Равновесие системы 304
4.2. Классификация связей 305
4.3. Интегрирующие механизмы 307
4.4. Критерии голономности системы связей 311
4.5. Выявление голономных связей 324
4.6. Идеальные связи. Виртуальные перемещения 332
4.7. Принцип виртуальных перемещений 343
4.8. Уравнения равновесия абсолютно твердого тела. Геометрическая статика 352
4.9. Статически неопределимые системы 357
4.10. Равновесие систем с трением 360
4.11. Уравнение равновесия нити 364
Контрольные вопросы к главе 4 373

5. Динамика системы материальных точек 376
5.1. Общее уравнение динамики системы материальных точек. Основные теоремы 378
5.2. Теоремы Кёнига 397
5.3. Движение систем переменного состава 404
5.4. Принцип Гаусса наименьшего принуждения 417
5.5. Квазикоординаты 421

5.6. Уравнения Аппеля 426
5.7. Общее уравнение теории удара 432
Контрольные вопросы к главе 5 438

6. Динамика твердого тела 443
6.1. Динамические характеристики твердого тела 443
6.2. Уравнения движения твердого тела 448
6.3. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси . . . 453
6.4. Физический маятник 457
6.5. Задача о центре удара 462
6.6. Движение твердого тела около неподвижной точки . . 464
6.7. Случай Эйлера 466
6.8. Случай Лагранжа-Пуассона 478
6.9. Случай Ковалевской 489
6.10. Частные первые интегралы 491
6.11. Симметричный гироскоп 494
6.12. Волчок на гладкой горизонтальной плоскости 501
6.13. Относительное равновесие спутника 504
6.14. Качение диска по горизонтальной плоскости 508
6.15. Качение шара по горизонтальной плоскости 514
Контрольные вопросы к главе 6 520

7. Уравнения движения в лагранжевых координатах 523
7.1. Координатная форма принципа Даламбера-Лагранжа 523
7.2. Уравнения движения 526
7.3. Системы Чаплыгина 531
Контрольные вопросы к главе 7 537

8. Динамика голономных систем 539
8.1. Уравнения Лагранжа второго рода 539
8.2. Энергетические соотношения 544
8.3. Обобщенная силовая функция 549
8.4. Функция Лагранжа. Циклические координаты 555
8.5. Метод Рауса исключения циклических координат . . . 564
8.6. Устойчивость движения 567
8.7. Движение вблизи равновесия 569
8.8. Главные координаты 573
8.9. Экстремальные свойства собственных значений 583
8.10. Влияние дополнительных сил 590
8.11. Экстремумы функционалов 598
8.12. Интегральные вариационные принципы 612
Контрольные вопросы к главе 8 622

9. Метод Гамильтона-Якоби 626
9.1. Преобразование Лежандра 626
9.2. Канонические уравнения Гамильтона 630
9.3. Скобка Пуассона 636
9.4. Метод Гамильтона-Якоби 641
9.5. Интегральные инварианты 658
9.6. Множители Якоби 672
9.7. Канонические преобразования 680
9.8. Элементы теории возмущений 695
Контрольные вопросы к главе 9 700
Именной указатель 704
Предметный указатель 706
Литература 714

Глава 1

Векторные свойства евклидова пространства

§ 1.1. Точки и векторы

Предмет теоретической механики состоит в изучении и предсказании движений материальных систем. С этой целью формулируются законы механики, создаются и анализируются соответствующие математические модели. Понятие аффинного точечно-векторного пространства представляет собой математическую модель простейших геометрических объектов и их отношений, на которых базируется теория движения.

Аффинное точечно-векторное n-мерное пространство A^n есть множество, состоящее из элементов двух типов: точек и векторов пространства. При этом предполагаются выполненными следующие четыре аксиомы:

I. Множество всех векторов пространства A^n образует n-мерное линейное пространство R^n.

II. Каждые две точки A и B, взятые в определенном порядке, задают единственный вектор $\mathbf{r} = \mathbf{AB}$.

III. Если даны произвольный вектор $\mathbf{r}$ и произвольная точка A, то существует единственная точка B такая, что $\mathbf{r} = \mathbf{AB}$. Пара "точка A и вектор $\mathbf{r}$" называется "вектором $\mathbf{r}$, приложенным к точке A". При этом точка A называется начальной точкой приложенного к ней вектора $\mathbf{r}$, а точка B — концом вектора $\mathbf{r}$ (приложенного к точке A).

IV. Если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{AB}$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{BC}$, то $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{AC}$.

Вещественное n-мерное линейное пространство R^n есть множество элементов (векторов), обладающих следующими свойствами:

I. Для любых двух элементов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in R^n$ однозначно определен элемент $\mathbf{a} \in R^n$, называемый их суммой и обозначаемый $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, причем должно быть выполнено:

1. $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$ (коммутативность);
2. $\mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_3$ (ассоциативность);
3. Существует элемент $0 \in R^n$: $\mathbf{r} + 0 = \mathbf{r}$ для любого $\mathbf{r} \in R^n$;
4. Для любого $\mathbf{r} \in R^n$ существует элемент $-\mathbf{r} \in R^n : \mathbf{r} + (-\mathbf{r}) = 0$.

II. Для любого числа α и любого элемента $\mathbf{r} \in R^n$ определен элемент $\alpha\mathbf{r} \in R^n$ (произведение элемента $\mathbf{r}$ на число α), причем должно быть выполнено:

1. $\alpha(\beta\mathbf{r}) = (\alpha\beta)\mathbf{r}$;
2. $1\mathbf{r} = \mathbf{r}$;
3. $(\alpha + \beta)\mathbf{r} = \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{r}$;
4. $\alpha(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \alpha\mathbf{r}_1 + \alpha\mathbf{r}_2$.

Пусть каждой точке аффинного пространства по какому-нибудь правилу поставлен в соответствие единственный вектор из R^n. Такое множество пар точек и векторов называется *векторным полем*.

Суммой векторных полей называется векторное поле, каждой точке которого поставлен в соответствие вектор, равный сумме векторов, приложенных к этой точке от составляющих полей.

Евклидова структура в линейном пространстве R^n задается *скалярным произведением* двух векторов. Конкретно скалярное произведение можно задать с помощью какой-нибудь положительно определенной билинейной симметрической формы, устанавливающей соответствие между парой векторов и некоторым числом. Другими словами, скалярное произведение $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in R^n$ — это операция, имеющая свойства:

1. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \geq 0$ для любого $\mathbf{r} \in R^n$, причем $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0$, только если $\mathbf{r} = 0$;
2. $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1$;
3. $(\alpha\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 = \alpha(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)$;
4. $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$.

Скалярное произведение позволяет определить расстояние (*евклидову метрику*)

$$\rho(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |\mathbf{AB}| = \sqrt{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB}}$$

между точками A и B соответствующего аффинного пространства A^n.

Аффинное пространство с введенной в нем евклидовой метрикой называется *евклидовым пространством* E^n.

В силу сформулированных выше свойств операция скалярного умножения вполне определена, если указано, во что эта операция переводит пары базисных векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства R^n. Обозначим

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Пусть разложения $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{y} \in R^n$ по базисным векторам имеют вид

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, x_i y_j.$$

Естественно потребовать, чтобы скалярное произведение не менялось при переходе к другим базисным векторам. Тогда коэффициенты скалярного произведения должны подчиняться специальному закону преобразования. Укажем этот закон. Пусть базис $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ связан с базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ посредством формул

$$\mathbf{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, \mathbf{e}_i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

В базисе $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ коэффициенты скалярного произведения примут вид

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = g'_{ij} = \sum_{k,p=1}^{n} g_{kp}\, a_{ki} a_{pj}.$$

Совокупность G коэффициентов g_{ij} скалярного произведения, подчиняющаяся указанному закону при преобразованиях координат, образует тензор второго ранга, который называется *метрическим*.

Покажем, что если G — тензор, то скалярное произведение в самом деле инвариантно относительно линейных преобразований координат. Пусть в базисе $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выражаются формулами

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}'_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y'_j \mathbf{e}'_j.$$

При этом справедливы формулы преобразования координат

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ki}, \quad y_p = \sum_{j=1}^{n} y'_j a_{pj}.$$

Имеем

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^{n} g'_{ij} x'_i y'_j = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,p=1}^{n} g_{kp}\, a_{ki} a_{pj}\, x'_i y'_j = \sum_{k,p=1}^{n} g_{kp} x_k y_p. \square$$

Векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$, для которых $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, называются *ортогональными*, а векторы $\mathbf{x} \in R^n$, для которых $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$, называются *нормированными* (единичными).

В линейной алгебре доказывается, что всякую положительно определенную квадратичную форму можно привести к диагональному виду. Простейший способ задать скалярное произведение — это

указать, какие n векторов пространства R^n должны быть единичными и взаимно ортогональными.

Линейным оператором $\mathbf{A} : R^n \to R^n$ называется правило, ставящее в соответствие вектору $\mathbf{x} \in R^n$ вектор $\mathbf{Ax} \in R^n$ и удовлетворяющее условиям:

1. $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{Ax}, \quad \lambda \in R$;
2. $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}, \quad \mathbf{y} \in R^n$.

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базисные векторы и

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Используя свойства линейного оператора, найдем

$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{A}\mathbf{e}_i.$$

Следовательно, линейный оператор вполне определен указанием образов базисных векторов. Результаты действия оператора над базисными векторами разложим по самим этим векторам:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \mathbf{e}_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, называется *матрицей линейного оператора* в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Коэффициенты разложений векторов $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ и $\mathbf{x}$ по базису запишем в виде матриц-столбцов размерностью $(n \times 1)$. Тогда действие линейного оператора можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и интерпретировать как линейное преобразование координат. Если $\det A \neq 0$, то существует обратное преобразование

$$x_1 = x_1(\mathbf{y}), \ldots, x_n = x_n(\mathbf{y}),$$

вычисляемое по правилу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

которому отвечает обратный линейный оператор $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, так что $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}$.

Линейное преобразование координат называется *движением метрики*, если оно невырождено ($\det A \neq 0$) и преобразование метрического тензора выражается равенствами

$$g'_{ij}(y_1, \ldots, y_n) = g_{ij}(x_1(\mathbf{y}), \ldots, x_n(\mathbf{y})).$$

Другими словами, движение метрики точно сохраняет вид скалярного произведения.

При движении метрики компоненты метрического тензора удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, a_{ik} a_{jp} = g_{kp}.$$

Представим это в матричной форме

$$A^T G A = G,$$

A^T — матрица, транспонированная по отношению к A, $G = (g_{ij})$ — матрица метрического тензора. В частности, для евклидова пространства E^n существует базис, в котором G превращается в единичную матрицу E, и потому $A^T A = E$.

Матрица A называется *ортогональной*, если $A^T = A^{-1}$. Поскольку $\det A^T = \det A$, то для ортогональной матрицы A получим $\det A = \pm 1$.

Линейный оператор, обладающий ортогональной матрицей в каком-либо ортонормированном базисе пространства E^n, называется *ортогональным линейным оператором*.

Теорема 1.1.1. *Матрица ортогонального линейного оператора будет ортогональной в любом ортонормированном базисе пространства* E^n.

Доказательство. Пусть задан ортогональный линейный оператор $\mathbf{A}$. Это значит, что существует ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства E^n, для которого матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ортогональна: $A^TA = E$. Зададим базис $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ с помощью равенств

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\mathbf{e}_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Потребуем, чтобы этот базис был ортонормированным. Тогда матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ортогональна (почему?). Применяя оператор $\mathbf{A}$ к векторам $\mathbf{e}'_i$, найдем

$$\mathbf{A}\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\mathbf{A}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\sum_{p=1}^{n} a_{pk}\mathbf{e}_p = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\sum_{p=1}^{n} a_{pk}\sum_{j=1}^{n} c_{pj}\mathbf{e}'_j.$$

Следовательно, матрица $\tilde{A}$ оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ может быть найдена по формуле $\tilde{A} = C^TAC$. Проверим ее ортогональность:

$$\tilde{A}^T\tilde{A} = C^TA^TCC^TAC = C^TA^TAC = C^TC = E.$$

Это и требовалось доказать.□

Теорема 1.1.2. *Для ортогональности линейного оператора необходимо и достаточно, чтобы он переводил ортонормированный базис в ортонормированную совокупность векторов, число которых равно числу векторов базиса.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор. Тогда в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ его матрица A ортогональна: $A^TA = E$. Применяя оператор к базисным векторам, получим

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{e}_k \sum_{p=1}^{n} a_{pj}\mathbf{e}_p = \sum_{k,p=1}^{n} a_{ki}a_{pj}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_p = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Следовательно, в результате получаем n ортонормированных векторов.

Достаточность. Пусть базисные векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ переходят в попарно ортонормированные. Тогда, очевидно,

$$\delta_{ij} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

а значит, $A^TA = E$.□

Следствие 1.1.1. *Ортогональный линейный оператор сохраняет расстояния между соответствующими точками евклидова пространства.*

Доказательство. Поскольку указанный линейный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный, то длина вектора в полученном базисе будет такой же, как и длина соответствующего вектора в исходном:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{A}\mathbf{e}_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.\square$$

Пусть заданы два линейных оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. *Композицией* линейных операторов называется линейный оператор $\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, действие которого равно результату применения оператора $\mathbf{A}$ к вектору, полученному вследствие применения оператора $\mathbf{B}$. Другими словами, пусть $\mathbf{x} \in E^n$ — произвольный вектор. Тогда

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}).$$

Назначим базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Зададим матрицы операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{B}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\mathbf{e}_j.$$

Применим последовательно линейные операторы:

$$\mathbf{C}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{e}_i) = \mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji}\mathbf{e}_k.$$

Видим, что матрица C оператора $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ получается с помощью умножения матриц: $C = AB$. Произведение матриц некоммутативно. Некоммутативна и композиция линейных операторов.

Совокупность Γ некоторых элементов называется *группой*, если каждой паре a и b элементов из Γ ставится в соответствие их произведение $a \circ b \in \Gamma$, обладающее следующими свойствами:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ — ассоциативность;
2. Существует элемент $1 \in \Gamma$ такой, что $1 \circ a = a \circ 1 = a$;
3. Для любого $a \in \Gamma$ существует элемент $a^{-1} \in \Gamma$ такой, что $a \circ a^{-1} = 1$.

Пример 1.1.1. Множество квадратных невырожденных матриц образует группу относительно операции умножения. Роль единичного элемента здесь играет единичная матрица, роль обратного — обратная матрица. В соответствии с этим совокупность линейных операторов с невырожденными матрицами образует группу относительно их композиции.

Теорема 1.1.3. *Множество ортогональных операторов (ортогональных матриц) образует группу относительно композиции операторов (операции умножения матриц).*

Доказательство. Рассмотрим множество ортогональных матриц. Роль единичного элемента для него играет единичная матрица E, роль обратного — транспонированная матрица. Докажем, что произведение ортогональных матриц дает ортогональную матрицу. Пусть A и B ортогональны: $A^TA = E$, $B^TB = E$. Для их произведения $C = AB$ найдем

$$C^TC = (AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TB = E.$$

Таким образом, ортогональные матрицы образуют группу относительно их умножения, а ортогональные операторы — группу относительно их композиции.□

Группа ортогональных операторов над пространством E^n называется *группой* $O(n)$. Подгруппа с $\det A > 0$ называется $SO(n)$.

Рассмотрим реальное физическое пространство. Геометрически оно представляет собой трехмерное аффинное пространство A^3. Направленные отрезки прямых назначим ортогональными, если они перпендикулярны. Выберем произвольно некоторую опорную точку $O \in A^3$ и приложим к ней три взаимно перпендикулярных вектора, которые будем считать единичными. Тем самым определены соотношения

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

которые позволяют ввести скалярное произведение и превратить исследуемое пространство A^3 в евклидово пространство E^3. Названная система векторов образует базис линейного пространства E^3. Взятая вместе с точкой O, она называется *декартовым репером* пространства E^3. Коэффициенты разложения векторов с началом в точке O по указанному базису называются *декартовыми координатами* элементов пространства. Прямые, проходящие через точку O параллельно базисным векторам, называются *декартовыми осями координат* с началом в точке O. Базисные векторы будем обозначать $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Разложения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^3$ примут вид

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3.$$

Скалярное произведение определено формулой

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Модуль (длина) вектора есть

$$x = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

что служит выражением теоремы Пифагора.

Из курса аналитической геометрии известно, что:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = xy\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$.

Можно также сказать, что скалярное произведение есть произведение модуля одного из векторов и проекции другого вектора на направление первого. Если один из перемножаемых векторов, например второй, оказался единичным, то скалярное произведение даст проекцию первого вектора на направление второго: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_y$, если $|\mathbf{y}| = 1$.

2. Выражение для косинуса угла между векторами принимает вид

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{xy}.$$

3. В случае перпендикулярности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеем

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Рассмотрим теперь в евклидовом пространстве E^3 билинейную косимметричную операцию, ставящую в соответствие паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^3$ третий вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \in E^3$ и обладающую свойствами:

1. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$ (косимметричность);
2. $(\delta\mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \delta(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ (умножение на число δ);
3. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \times \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{y}$ (дистрибутивность).

В соответствии с принятыми свойствами будем иметь

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i \times \sum_{j=1}^{3} y_i\mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} x_iy_j\,\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j.$$

Следовательно, как и в случае скалярного произведения, для полного определения операции достаточно указать, во что она переводит пары базисных векторов.

Пусть базисные векторы ориентированы так, что из конца третьего вектора $\mathbf{e}_3$ кратчайший поворот от первого $\mathbf{e}_1$ ко второму $\mathbf{e}_2$ виден происходящим против хода часовой стрелки. Система координат с таким базисом называется *правоориентированной* (правой).

Потребуем, чтобы для правоориентированной ортонормированной системы координат были выполнены равенства[1]

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3.$$

Тогда, очевидно,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3$$

или символически с помощью определителя

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix}.$$

Построенная таким образом операция носит название *векторного произведения* (векторного умножения).

Для векторного произведения $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ справедливо следующее:

$$\mathbf{z} \times \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{z} \times \mathbf{y} = 0, \quad |\mathbf{z}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \sin(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}),$$

вектор $\mathbf{z}$ перпендикулярен плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем из конца вектора $\mathbf{z}$ поворот от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{y}$ в кратчайшую сторону виден происходящим против хода часовой стрелки.

Перейдем к произведениям трех векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E^3$. Их существует два типа. *Смешанное произведение* дается формулой

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}.$$

Для него справедлива циклическая перестановка

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

Если в смешанном произведении какие-либо два сомножителя коллинеарны, то произведение равно нулю.

Двойное векторное произведение представляется формулой

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Пусть в некотором репере $Oe_1e_2e_3$ вектор $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

[1] Для левоориентированного репера результаты должны иметь противоположные знаки, что связано с требованием инвариантности операции при преобразованиях координат

имеет координаты, представляющие собой функции скалярного аргумента t (например, времени):

$$a_1 = a_1(t), \quad a_2 = a_2(t), \quad a_3 = a_3(t).$$

В этом случае вектор $\mathbf{a}$ называется вектор-функцией аргумента t в репере $Oe_1e_2e_3$.

Выберем два значения аргумента: t и $t + \Delta t$. Значения вектор-функции для них обозначим $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$ соответственно. Вектор $\Delta\mathbf{a}$ назовем приращением вектор-функции вследствие приращения аргумента. Рассмотрим отношение $\Delta\mathbf{a}/\Delta t$. Предел этого отношения, если он существует при $\Delta t \to 0$, есть вектор

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}.$$

Он называется *производной вектора* $\mathbf{a}$ *по аргументу* t, *взятой относительно репера* $Oe_1e_2e_3$. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{da_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{da_3}{dt}\mathbf{e}_3.$$

Пусть компоненты метрического тензора (g_{ij}) не зависят от t (см. определение метрического тензора). Тогда справедливы формулы

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt},$$

где $\mathbf{b}$ — другая вектор-функция аргумента t. Продифференцируем равенство $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$:

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = a\frac{da}{dt}, \quad \text{или} \quad \mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = a\,da.$$

Другими словами, скалярное произведение вектора на его дифференциал равно произведению модуля вектора на дифференциал модуля. Если модуль вектора постоянен, то вектор и его дифференциал взаимно перпендикулярны: $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = 0$. В частности, если $|\mathbf{a}_e| = 1$, то $\mathbf{a}_e \cdot (d\mathbf{a}_e/dt) = 0$.

Вектор-функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ может изменяться и по модулю, и по направлению. Вектор $\mathbf{a}$ представим как произведение модуля на единичный вектор: $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_e$. Взяв производную от обеих частей равенства, найдем

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_e + a\frac{d\mathbf{a}_e}{dt}.$$

Первое слагаемое правой части, очевидно, коллинеарно вектору $\mathbf{a}$ и носит название *продольной составляющей*. Оно характеризует быстроту изменения модуля вектора. Второе слагаемое направлено перпендикулярно вектору $\mathbf{a}$ и называется *поперечной*, или *трансверсальной*, составляющей. Оно характеризует быстроту поворота вектора. Отметим, что, вообще говоря,

$$\left|\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right| \neq \frac{d}{dt}|\mathbf{a}|.$$

§ 1.2. Свободные и скользящие векторы

Согласно аксиомам аффинного пространства каждой точке из E^3 соответствует линейное пространство векторов, имеющих начало в этой точке. Вместе с тем часто возникает необходимость по той или иной причине считать одинаковыми некоторые векторы с различными начальными точками. Будем говорить, что множество эквивалентных (тождественных) в каком-нибудь смысле векторов образует конкретный *класс эквивалентности*. Векторные операции над представителями одного и того же класса эквивалентности будем считать лишенными смысла. Векторные операции над классами эквивалентности будем понимать как операции, одинаково выполненные над отдельными любыми представителями классов, участвующих в операции.

Сначала введем понятие свободного вектора. Напомним, что аффинное пространство A^3 объединяет множество точек и пространство векторов R^3. Выберем вектор $\mathbf{a} \in R^3$ и будем откладывать его от произвольной точки $A \in A^3$. Часто принимают, что все векторы, построенные таким образом, эквивалентны. Этот класс эквивалентности называется *свободным вектором* $\mathbf{a}$.

Особую роль в теоретической механике играет понятие скользящего вектора. В пространстве A^3 выберем опорную точку O, некоторую точку A и вектор $\mathbf{u}$ с началом в точке A. Зададим действительное число (параметр) λ и сопоставим ему точки A_λ, B_λ, определенные векторами (рис. 1.2.1)

$$\mathbf{OA}_\lambda = \mathbf{OA} + \lambda\mathbf{u}, \quad \mathbf{OB}_\lambda = \mathbf{OA} + (\lambda + 1)\mathbf{u}.$$

Когда λ принимает произвольные действительные значения, получим множество векторов $\mathbf{A}_\lambda\mathbf{B}_\lambda$, каждый из которых имеет начало в точке A_λ и конец в точке B_λ. Все векторы, принадлежащие этому множеству, отнесем к одному и тому же классу эквивалентности, который назовем *скользящим вектором* и обозначим $(\mathbf{OA}, \mathbf{u})$.

Прямая, определенная параметрически уравнением

$$\mathbf{OA}_\lambda = \mathbf{OA} + \lambda\mathbf{u},$$

называется *основанием* скользящего вектора.

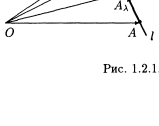
Из сказанного следует, что в пространстве E^3, снабженном декартовыми осями координат с началом в точке O, скользящий вектор можно однозначно задать шестью параметрами (числами): тремя координатами точки A и тремя проекциями вектора $\mathbf{u}$ на координатные оси. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{OA}$ есть радиус-вектор точки A. Два вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{u}$ называются *векторными координатами* скользящего вектора, который в связи с этим будем обозначать $(\mathbf{r}, \mathbf{u})$. Два скользящих вектора $(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ и $(\mathbf{r}, -\mathbf{u})$ называются *противоположными*.

Суммарное число координат векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{u}$ на единицу превышает число независимых параметров скользящего вектора, равное пяти. В самом деле, пусть в E^3 заданы две точки A_1 и A_2 и пусть точке A_1 соответствует радиус-вектор $\mathbf{r}_1$, а точке A_2 — радиус-вектор $\mathbf{r}_2$. Выражения $(\mathbf{r}_1, \mathbf{u})$ и $(\mathbf{r}_2, \mathbf{u})$ определяют один и тот же скользящий вектор тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ коллинеарен вектору $\mathbf{u}$. Другими словами, для задания скользящего вектора можно воспользоваться координатами любой точки его основания (параметр, задающий смещение $\mathbf{u}$ вдоль основания, несущественен).

Моментом $\mathbf{M}^o$ скользящего вектора $(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ относительно опорной точки или (что одно и то же) полюса O называется векторное произведение

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{r} \times \mathbf{u}.$$

Начало вектора $\mathbf{M}^o$ совпадает с точкой O. Модуль момента $\mathbf{M}^o$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{u}$. Можно также сказать, что модуль момента равен произведению $|\mathbf{u}|$ на плечо h. *Плечом* скользящего вектора относительно полюса называется длина h перпендикуляра, опущенного из полюса на основание скользящего вектора (рис. 1.2.1). Очевидно, что $\mathbf{M}^o$ не зависит



Геометрически понятие скользящего вектора означает следующее. Через заданную точку A проведена прямая l с направляющим вектором $\mathbf{u}$. Все векторы $\mathbf{u}$, отложенные от произвольных точек прямой l, считаются эквивалентными.

Рис. 1.2.1. Скользящий вектор

от того, какая точка на основании взята для задания скользящего вектора. Действительно, пусть точки A_1, A_2 принадлежат основанию и $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — соответственно радиусы-векторы этих точек. Тогда $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{u}$. Обозначим

$$\mathbf{M}_1^o = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{M}_2^o = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}.$$

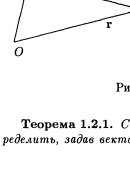
Вычитая из второго равенства первое, найдем

$$\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0.$$

Пусть нам известен момент $\mathbf{M}^o$ относительно полюса O, а мы хотим найти момент $\mathbf{M}^c$ того же скользящего вектора относительно точки C. Обозначим $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор точки A относительно полюса C, а $\mathbf{OC}$ — радиус-вектор точки C относительно O (рис. 1.2.2): $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c - \mathbf{OC}$. Имеем

$$\mathbf{M}^c = \mathbf{r}_c \times \mathbf{u} = (\mathbf{r} - \mathbf{OC}) \times \mathbf{u} = \mathbf{M}^o - \mathbf{OC} \times \mathbf{u}.$$

Тем самым найдена формула пересчета момента при переходе к новому полюсу.



При изменении полюса момент скользящего вектора изменяется. Добавляется момент, учитывающий положение нового полюса относительно исходного. Однако, проекция момента на основание скользящего вектора остается постоянной.

Рис. 1.2.2. Изменение полюса

Теорема 1.2.1. *Скользящий вектор* $(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ *можно однозначно определить, задав векторы* $\mathbf{M}^o$ *и* $\mathbf{u}$, *удовлетворяющие условию*

$$\mathbf{M}^o \cdot \mathbf{u} = 0,$$

что геометрически означает перпендикулярность вектора $\mathbf{u}$ *моменту* $\mathbf{M}^o$.

Доказательство. Пусть заданы векторы $\mathbf{M}^o$ и $\mathbf{u}$. Найдем радиус-вектор $\mathbf{r}$, начало которого совпадает с точкой O, а конец принадлежит искомому основанию скользящего вектора. Потребуем, чтобы вектор $\mathbf{r}$ был перпендикулярен вектору $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{M}^o = \mathbf{u} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = r\mathbf{u}^2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r} = (\mathbf{u} \times \mathbf{M}^o)\, u^{-2}.$$

Тем самым скользящий вектор однозначно определен.□

Координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{M}^o$ составляют шесть параметров, задающих единственный скользящий вектор. Они не являются независимыми, так как связаны условием перпендикулярности векторов $\mathbf{M}^o$ и $\mathbf{u}$, и называются *плюккеровыми координатами*. Удобство их в том, что они одинаковы для любой точки основания скользящего вектора.

Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор оси l, проходящей через полюс O. Рассмотрим скалярное произведение

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^o = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u}).$$

Представим (рис. 1.2.3) векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\pi + \mathbf{r}_e, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_\pi + \mathbf{u}_e$$

таким образом, чтобы векторы $\mathbf{r}_\pi$ и $\mathbf{u}_\pi$ были перпендикулярны вектору $\mathbf{e}$, а $\mathbf{r}_e$ и $\mathbf{u}_e$ — параллельны ему:

$$\mathbf{r}_\pi \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{u}_\pi \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{r}_e \| \mathbf{e}, \quad \mathbf{u}_e \| \mathbf{e}.$$

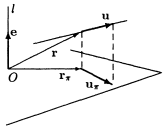
Тогда

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^o = \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{r}_\pi + \mathbf{r}_e) \times (\mathbf{u}_\pi + \mathbf{u}_e)] = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}_\pi \times \mathbf{u}_\pi + \mathbf{r}_e \times \mathbf{u}_\pi + \mathbf{r}_\pi \times \mathbf{u}_e + \mathbf{r}_e \times \mathbf{u}_e).$$

С учетом способа представления векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{u}$ будем иметь

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^o = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}_\pi \times \mathbf{u}_\pi).$$

Полученное равенство означает, что проекция момента $\mathbf{M}^o$ на ось l есть момент проекции скользящего вектора на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{e}$.



Момент скользящего вектора относительно оси вычисляется как момент его проекции на плоскость перпендикулярную оси, взятый относительно точки пересечения оси с плоскостью. Указанный момент не меняется при смещении плоскости вдоль оси.

Рис. 1.2.3. Момент скользящего вектора относительно оси

Одновременно доказано, что если на оси l взять другой полюс, например C, и рассмотреть момент $\mathbf{M}^c$, то $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^o = \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}^c$.

Сказанное дает возможность корректно ввести следующее определение. *Моментом скользящего вектора относительно некоторой оси* называется проекция на эту ось момента скользящего вектора, вычисленного относительно любой точки оси.

§ 1.3. Системы скользящих векторов

Множество скользящих векторов, для которого заданы операции преобразования к другому множеству, назовем *системой скользящих векторов*. Прежде чем указать набор таких операций, введем следующие понятия.

Множество скользящих векторов называется *сходящимся в точке*, если основания всех векторов множества пересекаются в этой точке.

Пусть имеется множество из n скользящих векторов, сходящееся в некоторой точке D с радиусом-вектором $\mathbf{r}_D$. Очевидно, что эти векторы можно задать в виде

$$(\mathbf{r}_D, \mathbf{u}_1), (\mathbf{r}_D, \mathbf{u}_2), \ldots, (\mathbf{r}_D, \mathbf{u}_n),$$

причем вектор $\mathbf{r}_D$ будет одинаковым для всех скользящих векторов множества. *Результирующим вектором* этого множества называется скользящий вектор

$$\left(\mathbf{r}_D, \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i\right).$$

Теорема 1.3.1. (Вариньон). *Пусть задано сходящееся в точке D множество скользящих векторов. Момент результирующего вектора относительно полюса O равен сумме моментов относительно того же полюса скользящих векторов, составляющих данное множество.*

Доказательство. Пусть основания всех n скользящих векторов множества пересекаются в точке D. Представим скользящие векторы в виде

$$(\mathbf{r}_D, \mathbf{u}_1), \ldots, (\mathbf{r}_D, \mathbf{u}_n),$$

где $\mathbf{r}_D$ — радиус-вектор точки D относительно полюса O. Момент $\mathbf{M}^o$ результирующего вектора выражается формулой

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{r}_D \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i.$$

С учетом свойств векторного произведения найдем

$$\mathbf{M}^o = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_D \times \mathbf{u}_i.$$

Но каждое слагаемое в правой части последнего равенства есть момент соответствующего скользящего вектора относительно полюса O.□

Перечислим теперь операции над элементами системы скользящих векторов, которые будем считать допустимыми.

1. Замена множества сходящихся скользящих векторов соответствующим результирующим скользящим вектором.

2. Присоединение или исключение множества из двух скользящих векторов с общим основанием и результирующим нулевым скользящим вектором.

Системы скользящих векторов, которые можно преобразовать друг в друга с помощью указанных элементарных операций, называются *эквивалентными*.

Теорема 1.3.2. *Пусть задана система двух скользящих векторов с параллельными основаниями:*

$$(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{e}), \quad (\mathbf{r}_2, u_2\mathbf{e}),$$

причем $u_1 + u_2 \neq 0$. Тогда эта система эквивалентна одному скользящему вектору $(\mathbf{r}_c, [u_1 + u_2]\mathbf{e})$, где

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{r}_1 u_1 + \mathbf{r}_2 u_2}{u_1 + u_2}.$$

Доказательство. Добавим к заданной в условии теоремы системе два эквивалентных нулю скользящих вектора

$$(\mathbf{r}_1, \lambda[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2]), \quad (\mathbf{r}_2, \lambda[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]).$$

Эти два вектора имеют общее основание и их результирующий вектор равен нулю. Вся полученная система эквивалентна двум скользящим векторам

$$(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{e} + \lambda[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2]), \quad (\mathbf{r}_2, u_2\mathbf{e} + \lambda[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]),$$

основания которых не параллельны. Они имеют общую точку, радиус-вектор которой обозначим $\mathbf{r}_D$. Согласно операции 1 заменим эту сходящуюся систему одним результирующим вектором

$$(\mathbf{r}_D, [u_1 + u_2]\mathbf{e}).$$

По теореме 1.3.1 найдем

$$\mathbf{r}_D \times \mathbf{e}(u_1 + u_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{e}u_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{e}u_2 = (\mathbf{r}_1 u_1 + \mathbf{r}_2 u_2) \times \mathbf{e},$$

или

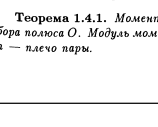
$$[\mathbf{r}_D(u_1 + u_2) - (\mathbf{r}_1 u_1 + \mathbf{r}_2 u_2)] \times \mathbf{e} = 0.$$

Но векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда либо хотя бы один из сомножителей равен нулю, либо векторы, участвующие в произведении, коллинеарны. Вектор $\mathbf{e} \neq 0$. Тогда либо $\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_c$, либо $\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_c = \alpha\,\mathbf{e}$, где α — скалярный множитель. В том и другом случаях конец вектора $\mathbf{r}_c$ принадлежит основанию результирующего вектора.□

§ 1.4. Пара скользящих векторов

Обозначим $\boldsymbol{\nu} \in R^3$ — направляющий единичный вектор, u — скаляр, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы, имеющие начало в некотором полюсе O.

Парой (рис.1.4.1) называется система двух параллельных скользящих векторов $(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu}), (\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu})$, основания которых не совпадают. Плоскость, определяемая основаниями пары, называется *плоскостью пары*. Расстояние h между основаниями называется *плечом пары*. Расстоянию h отвечает вектор $\mathbf{h}$.



Пара образована двумя параллельными скользящими векторами, равными по модулю и противоположно направленными. Основания этих скользящих векторов параллельны. Расстояние между основаниями есть плечо пары. Плечо пары отлично от нуля.

Рис. 1.4.1. Пара скользящих векторов

Момент пары есть сумма моментов векторов пары относительно произвольной точки O. Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен так, что из его конца "вращение" плеча, создаваемое парой, видно происходящим против хода часовой стрелки.

Теорема 1.4.1. *Момент пары $\mathbf{M} = -u(\mathbf{h} \times \boldsymbol{\nu})$ не зависит от выбора полюса O. Модуль момента равен произведению $|u|h$, в котором h — плечо пары.*

Доказательство. Рассмотрим пару скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu}), (\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu}).$$

Найдем вектор

$$\mathbf{h} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \boldsymbol{\nu}[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\nu}].$$

Очевидно, что $\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, и поскольку $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, то $h = |\mathbf{h}|$ есть плечо пары. Конец вектора $\mathbf{r}_1 + \mathbf{h}$ принадлежит основанию скользящего вектора $(\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu})$. Следовательно, момент пары равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times u\boldsymbol{\nu} + \mathbf{r}_2 \times (-u\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{r}_1 \times u\boldsymbol{\nu} + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{h}) \times (-u\boldsymbol{\nu}) = \\ = \mathbf{r}_1 \times u\boldsymbol{\nu} - \mathbf{r}_1 \times u\boldsymbol{\nu} - \mathbf{h} \times u\boldsymbol{\nu} = -u(\mathbf{h} \times \boldsymbol{\nu}).$$

Отсюда видно, что изменение положения точки O в пространстве E^3 не влияет на результат вычисления вектора $\mathbf{M}$. Меняется лишь начало этого вектора. Из-за перпендикулярности векторов $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеем $|\mathbf{h} \times \boldsymbol{\nu}| = h$. Поэтому $|\mathbf{M}| = |u|h$.□

Заметим, что если задан момент пары, то скользящие векторы, ее образующие, определяются неоднозначно. В самом деле, тогда для определения указанных скользящих векторов будем иметь уравнение

$$\mathbf{M} = u(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{h}), \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{h} = 0,$$

в котором неизвестными служат $u, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{h}$. В соответствии с определением векторного произведения заключаем, что $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{M}$ перпендикулярны: $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{M} = 0$. Зададим какой-нибудь вектор $\boldsymbol{\nu}$, перпендикулярный к $\mathbf{M}$, и найдем уравнение, связывающее вектор $\mathbf{h}$ и скаляр u:

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{M} = u\boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{h}) = u[\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}\nu^2].$$

Но $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{h} = 0$ и поэтому $u\mathbf{h} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\nu}$. Если теперь произвольным образом задать u, то вектор $\mathbf{h}$ может быть найден однозначно.

Теперь ясно, как получить конкретную пару с заданным моментом $\mathbf{M} \neq 0$. Выберем произвольно радиус-вектор $\mathbf{r}_1$ и скаляр $u \neq 0$, назначим $\boldsymbol{\nu}$, чтобы было $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, и определим

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{M} \times \boldsymbol{\nu}}{u}.$$

Пара скользящих векторов $(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu}), (\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu})$ будет обладать заданным моментом $\mathbf{M}$. Действительно, в соответствии с теоремой 1.4.1 получим

$$-u(\mathbf{h} \times \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{M} \times \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{M}.$$

Таким образом, все пары скользящих векторов с одинаковым моментом образуют пятипараметрическое семейство. Докажем, что все эти пары эквивалентны.

Теорема 1.4.2. *При помощи элементарных операций пару можно, не изменяя ее момента,*

а) повернуть в ее плоскости,

б) перенести параллельно самой себе в любую точку пространства, при желании изменив плечо.

Доказательство. Пусть задана исходная пара скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu}).$$

Добавим к ней эквивалентную нулю систему

$$(\mathbf{r}'_1, u'\boldsymbol{\nu}'), \quad (\mathbf{r}'_1, -u'\boldsymbol{\nu}').$$

$$(\mathbf{r}'_2, -u'\boldsymbol{\nu}'), \quad (\mathbf{r}'_2, u'\boldsymbol{\nu}').$$

Потребуем, чтобы $\boldsymbol{\nu}'$ был единичным вектором, $\operatorname{sign} u' = \operatorname{sign} u$ и

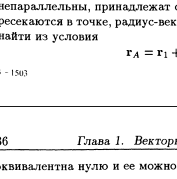
$$u'(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) \times \boldsymbol{\nu}' = u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu}.$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что разность $(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)$ и вектор $\boldsymbol{\nu}'$ параллельны плоскости исходной пары. Для доказательства пункта *а)* (рис. 1.4.2) выберем вектор $\mathbf{r}'_1$ так, чтобы его конец лежал в плоскости пары, зададим $\boldsymbol{\nu}' \neq \boldsymbol{\nu}$ и $u' = u$. Тогда конец вектора $\mathbf{r}'_2$ тоже принадлежит плоскости пары. Основания скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}'_1, -u'\boldsymbol{\nu}')$$

непараллельны, принадлежат одной плоскости и, следовательно, пересекаются в точке, радиус-вектор которой обозначим $\mathbf{r}_A$. Его можно найти из условия

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_1 + \lambda\boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}'_1 + \lambda'\boldsymbol{\nu}',$$



В плоскости исходной пары произвольно выбираются две параллельные прямые, составляющие некоторый угол с ее основаниями и отстоящие друг от друга на расстояние, равное плечу исходной пары. После элементарных преобразований эти прямые станут основаниями новой пары, эквивалентной исходной.

Рис. 1.4.2. Поворот пары в ее плоскости

где λ и λ' — скалярные параметры. Чтобы определить λ, умножим это равенство векторно на $\boldsymbol{\nu}'$. Тогда получим

$$\lambda(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}') = (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu}'.$$

Скользящие векторы $(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu})$, $(\mathbf{r}'_1, -u\boldsymbol{\nu}')$ заменим одним скользящим вектором

$$(\mathbf{r}_A, u[\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}']).$$

Аналогично система скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}'_2, u\boldsymbol{\nu}')$$

эквивалентна скользящему вектору

$$(\mathbf{r}_B, -u[\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}']),$$

в котором радиус-вектор $\mathbf{r}_B$ определяется из условия

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_2 + \mu\boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}'_2 + \mu'\boldsymbol{\nu}'.$$

После умножения этого равенства векторно на $\boldsymbol{\nu}'$ будем иметь

$$\mu(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}') = (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2) \times \boldsymbol{\nu}'.$$

Вычислим векторное произведение

$$(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}') = [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + (\mu - \lambda)\boldsymbol{\nu}] \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}') = \\ = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu} - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu}' + \lambda(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}') - \mu(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}') = \\ = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu} - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu}' + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \boldsymbol{\nu}' - (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) \times \boldsymbol{\nu}' = 0$$

в связи с выбором параметров дополнительной системы скользящих векторов.

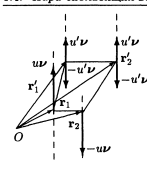
Вектор $\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}' \neq 0$. Следовательно, либо вектор $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = 0$, либо этот вектор параллелен $\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}'$. И в том, и в другом случаях система скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_A, u[\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}']) \quad (\mathbf{r}_B, -u[\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}'])$$

эквивалентна нулю и ее можно исключить. Осталась система

$$(\mathbf{r}'_1, u\boldsymbol{\nu}'), \quad (\mathbf{r}'_2, -u\boldsymbol{\nu}'),$$

представляющая собой пару скользящих векторов, смещенную и повернутую относительно исходной, но обладающую тем же моментом, что и исходная.



В плоскости, параллельной плоскости исходной пары, добавляются четыре одинаковых по величине скользящих вектора, попарно взаимно уничтожающихся и расположенных на двух основаниях, параллельных векторам исходной пары. После преобразований остается пара с тем же моментом, что исходная, но расположенная в выбранной плоскости.

Рис. 1.4.3. Смещение плоскости пары

Перейдем к доказательству пункта *б)* теоремы (рис.1.4.3). В дополнительной системе скользящих векторов положим $\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\nu}$, а вектор $\mathbf{r}'_1$ выберем произвольно. Рассмотрим скользящие векторы

$$(\mathbf{r}_1, u\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}'_2, u'\boldsymbol{\nu}).$$

Они эквивалентны одному скользящему вектору

$$(\mathbf{r}_A, [u + u']\boldsymbol{\nu}),$$

где

$$\mathbf{r}_A = \frac{\mathbf{r}_1 u + \mathbf{r}'_2 u'}{u + u'}.$$

Аналогично скользящие векторы

$$(\mathbf{r}_2, -u\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}'_1, -u'\boldsymbol{\nu})$$

можно заменить одним

$$(\mathbf{r}_B, -[u + u']\boldsymbol{\nu}),$$

где

$$\mathbf{r}_B = \frac{\mathbf{r}_2 u + \mathbf{r}'_1 u'}{u + u'}.$$

В соответствии с правилом выбора параметров дополнительной системы скользящих векторов найдем

$$(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \boldsymbol{\nu} = \frac{u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - u'(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)}{u + u'} \times \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Отсюда либо $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A$, либо $(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$ параллельно $\boldsymbol{\nu}$. В обоих случаях система

$$(\mathbf{r}_A, [u + u']\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}_B, -[u + u']\boldsymbol{\nu})$$

эквивалентна нулю и ее можно исключить. Осталась система

$$(\mathbf{r}'_1, u'\boldsymbol{\nu}), \quad (\mathbf{r}'_2, -u'\boldsymbol{\nu}),$$

представляющая собой пару с основаниями, параллельными основаниям исходной пары, с тем же моментом, но произвольно смещенную в пространстве. Плечо h' полученной пары выбирается в соответствии с равенством

$$u'h' = uh,$$

где h — плечо исходной пары.□

Следствие 1.4.1. *Любые две пары эквивалентны, если их моменты равны. Безразлично также, к какой точке пространства приложен момент пары.*

Теорема 1.4.3. (О сложении пар). *Система, состоящая из двух произвольно заданных пар скользящих векторов, эквивалентна одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов заданных пар.*

Доказательство. Пусть заданные пары имеют моменты $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$. Выберем в пространстве E^3 произвольную точку A с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ и точку B с радиусом-вектором $\mathbf{r}_2$ так, чтобы вектор $\mathbf{AB}$ был перпендикулярен как вектору $\mathbf{M}_1$, так и вектору $\mathbf{M}_2$. Согласно теореме 1.4.2 найдем такие единичные векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ и скаляры u_1 и u_2, чтобы было выполнено

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{AB} \times \mathbf{k}_1 u_1, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{AB} \times \mathbf{k}_2 u_2.$$

Эти векторы и скаляры порождают две пары скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{k}_1), \quad (\mathbf{r}_2, -u_1\mathbf{k}_1),$$

$$(\mathbf{r}_1, u_2\mathbf{k}_2), \quad (\mathbf{r}_2, -u_2\mathbf{k}_2).$$

Но скользящие векторы $(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{k}_1)$, $(\mathbf{r}_1, u_2\mathbf{k}_2)$ эквивалентны результирующему вектору

$$(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{k}_1 + u_2\mathbf{k}_2),$$

а скользящие векторы $(\mathbf{r}_2, -u_1\mathbf{k}_1)$, $(\mathbf{r}_2, -u_2\mathbf{k}_2)$ эквивалентны

$$(\mathbf{r}_2, -[u_1\mathbf{k}_1 + u_2\mathbf{k}_2]).$$

В итоге получаем пару скользящих векторов

$$(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{k}_1 + u_2\mathbf{k}_2), \quad (\mathbf{r}_2, -[u_1\mathbf{k}_1 + u_2\mathbf{k}_2])$$

с моментом

$$\mathbf{M} = \mathbf{AB} \times (\mathbf{u}_1\mathbf{k}_1 + u_2\mathbf{k}_2) = \mathbf{AB} \times \mathbf{k}_1 u_1 + \mathbf{AB} \times \mathbf{k}_2 u_2 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.\square$$

Доказанные выше свойства пары скользящих векторов кратко формулируются в виде утверждения: *момент пары есть свободный вектор* (см. стр. 25).

§ 1.5. Упрощение системы скользящих векторов

Пусть задана система скользящих векторов $(\mathbf{r}_i, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, причем все векторы $\mathbf{r}_i$ имеют начало в полюсе O. Назовем *суммарным (главным) вектором* величину

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i,$$

а *суммарным (главным) моментом* вектор

$$\mathbf{M}^o = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i.$$

Ответ на вопрос о том, к какому наиболее простому виду, используя элементарные операции, можно привести произвольную систему скользящих векторов, дают следующие теоремы.

Теорема 1.5.1. *Всякая система скользящих векторов эквивалентна системе, состоящей из одного скользящего суммарного вектора и одного суммарного момента (суммарной пары).*

Доказательство. Назначим полюс O. Рассмотрим произвольную систему скользящих векторов $(\mathbf{r}_i, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Зафиксируем некоторый номер i. В точке O приложим эквивалентную нулю систему скользящих векторов (рис. 1.5.1)

$$(0, \mathbf{u}_i), \quad (0, -\mathbf{u}_i).$$

Система $(0, -\mathbf{u}_i), (\mathbf{r}_i, \mathbf{u}_i)$ образует пару с моментом $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i$. Выполнив такие же преобразования для каждого скользящего вектора системы, получим эквивалентную исходной систему сходящихся в точке O скользящих векторов $(0, \mathbf{u}_1), \ldots, (0, \mathbf{u}_n)$ и пар с моментами $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$. Систему сходящихся скользящих векторов заменим одним результирующим скользящим вектором $(0, \mathbf{R})$, а систему пар — одной парой с моментом $\mathbf{M}$, причем

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i.\square$$

Таким образом, две системы скользящих векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их суммарные скользящие векторы и суммарные моменты.

Найдем *инварианты системы скользящих векторов* по отношению к выбору полюса O.

Лемма 1.5.1. *При изменении полюса суммарный вектор не изменяется. Остается также постоянной проекция суммарного момента на направление суммарного вектора.*

Доказательство. Пусть система скользящих векторов приведена к одному скользящему вектору $(0, \mathbf{R})$ с основанием, проходящим через точку O, и одному моменту $\mathbf{M}$. Возьмем точку O_1 и добавим к системе два скользящих вектора $(\mathbf{OO}_1, -\mathbf{R}), (\mathbf{OO}_1, \mathbf{R})$. Скользящие векторы $(\mathbf{OO}_1, -\mathbf{R}), (0, \mathbf{R})$ образуют пару с моментом $\mathbf{M}_R = -\mathbf{OO}_1 \times \mathbf{R}$. Новая система скользящих векторов эквивалентна исходной и состоит из скользящего вектора $(\mathbf{OO}_1, \mathbf{R})$ с основанием, проходящим через точку O_1, и суммарным моментом

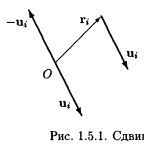
$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \mathbf{M}_R = \mathbf{M} - \mathbf{OO}_1 \times \mathbf{R}.$$

Видим, что при изменении полюса суммарный вектор не меняется. Для расчета проекции суммарного момента на направление вектора $\mathbf{R}$ вычислим скалярное произведение

$$\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{M} - \mathbf{OO}_1 \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}.\square$$

Лемму 1.5.1 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 1.5.1. *Суммарный вектор, а также проекция суммарного момента на направление суммарного вектора инвариантны по отношению к изменению положения полюса.*



Основание скользящего вектора можно сместить так, чтобы оно проходило через произвольно выбранную точку O. Такое преобразование будет эквивалентным, если добавить пару с моментом, равным моменту исходного скользящего вектора относительно точки O.

Рис. 1.5.1. Сдвиг основания скользящего вектора

Винтом называется такая система скользящих векторов, для которой суммарный вектор и суммарный момент коллинеарны. Соответствующее основание с направлением суммарного вектора называется *осью винта*.

Теорема 1.5.2. *Всякая система скользящих векторов с отличным от нуля суммарным вектором эквивалентна винту.*

Доказательство. Найдем полюс O_1, для которого $\mathbf{M}_1 \| \mathbf{R}$. Радиус-вектор $\mathbf{OO}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_1 = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{R} \times \mathbf{M} - \mathbf{R} \times (\mathbf{OO}_1 \times \mathbf{R}) = 0.$$

Потребуем, чтобы вектор $\mathbf{OO}_1$ был перпендикулярен к $\mathbf{R}$. Тогда

$$\mathbf{OO}_1 = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}}{R^2}.$$

Найденная точка O_1 и определяет искомое основание винта.$\square$

Уравнение оси винта можно записать в параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}}{R^2} + \lambda \mathbf{R}.$$

На оси винта главный вектор перпендикулярен плоскости пары. Исключив λ, найдем векторное уравнение оси винта

$$\mathbf{R} \times \mathbf{r} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}}{R^2} \mathbf{R} - \mathbf{M},$$

эквивалентное двум линейно независимым скалярным уравнениям пересекающихся плоскостей.

При упрощении системы скользящих векторов могут представиться следующие случаи.

I. $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$. Для точек винтовой оси суммарный момент будет равен нулю. Система приведется к одному скользящему вектору. Его называют *результирующим вектором системы*.

II. $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} \neq 0$. Система приводится к паре скользящих векторов, которая называется *результирующей парой*.

III. $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \neq 0$. Система приводится к винту. При приведении к винтовой оси модуль суммарного момента принимает наименьшее значение.

IV. $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$. Система эквивалентна нулю.

Теорема 1.5.3. *Система скользящих векторов, принадлежащих одной плоскости, приводится либо к случаю I, либо к случаю II, либо к случаю IV.*

Доказательство. Пусть Π — плоскость, содержащая все скользящие векторы системы, и точка O — полюс. В плоскости Π выберем произвольную точку A с радиусом-вектором $\mathbf{r}_A$. Радиусы-векторы $\mathbf{r}_i$ можно представить в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}'_i$, где $\mathbf{r}'_i$ принадлежат плоскости Π. Пусть $\mathbf{R}$ — суммарный вектор системы. Вычислим момент

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{u}_i = \mathbf{r}_A \times \mathbf{R} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{u}_i.$$

Вектор $\mathbf{R}$ параллелен плоскости Π. Поэтому $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$. Следовательно, случай III представиться не может.$\square$

Таким образом, всякая плоская система скользящих векторов, для которой $\mathbf{R} \neq 0$, эквивалентна одному результирующему вектору.

§ 1.6. Параллельные скользящие векторы

Система скользящих векторов, все основания которых взаимно параллельны, называется *системой параллельных скользящих векторов*. Обозначим эту систему S. Пусть число скользящих векторов системы равно n, а $\mathbf{e}$ — направляющий единичный вектор оснований. Тогда

$$S = \{(\mathbf{r}_i, e\mathbf{u}_i), \quad i = 1, \ldots, n\},$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиусы-векторы с началом в полюсе O. Обозначим

$$R = \sum_{i=1}^{n} u_i, \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i u_i,$$

считая $R \neq 0$. Вектор $\mathbf{r}_c$ определяет в пространстве E^3 точку, называемую *центром системы* S.

Теорема 1.6.1. *Система S параллельных скользящих векторов, для которой $R \neq 0$, эквивалентна скользящему вектору $(\mathbf{r}_c, R\mathbf{e})$.*

Доказательство. Для рассматриваемой системы

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e} \neq 0, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i u_i \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 0.$$

Следовательно, эта система эквивалентна результирующему вектору $(\mathbf{OO}_1, R\mathbf{e})$, где

$$\mathbf{OO}_1 = \frac{R\mathbf{e} \times \mathbf{M}}{R^2} = \frac{\mathbf{e}}{R} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i u_i \times \mathbf{e} \right) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i u_i - \frac{\mathbf{e}}{R} \left(\mathbf{e} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i u_i \right).$$

Второе слагаемое последнего выражения направлено вдоль основания результирующего вектора. Значит, конец вектора $\mathbf{r}_c$ принадлежит этому основанию.$\square$

Следует отметить, что если менять направление вектора $\mathbf{e}$, оставляя неизменными концы векторов $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \ldots, n$, то вектор $\mathbf{r}_c$ не изменится. Другими словами, центр системы параллельных скользящих векторов инвариантен относительно ориентации их оснований. Рассмотрим примеры.

Пример 1.6.1. Даны два скользящих вектора $(\mathbf{r}_1, u_1\mathbf{e})$, $(\mathbf{r}_2, u_2\mathbf{e})$, и $u_1 \cdot u_2 > 0$. Концы векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ обозначим C_1 и C_2 соответственно. Определить, в каком отношении отрезок C_1C_2 будет разделен центром такой системы.

Решение. По определению центра системы найдем

$$\mathbf{r}_c = \frac{u_1\mathbf{r}_1 + u_2\mathbf{r}_2}{u_1 + u_2}.$$

Следовательно, конец C вектора $\mathbf{r}_c$, как линейной комбинации двух векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, принадлежит отрезку C_1C_2. Далее

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = \frac{u_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{u_1 + u_2}, \quad \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_2 = \frac{u_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{u_1 + u_2}.$$

Отсюда получаем *правило рычага первого рода*:

$$\frac{C_1C}{C_2C} = \frac{u_2}{u_1}.$$

Другими словами, центр C системы двух скользящих одинаково направленных векторов (точка приложения результирующего вектора системы) делит отрезок, соединяющий точки C_1 и C_2 приложения этих векторов, на части, обратно пропорциональные модулям $|u_1|$ и $|u_2|$ составляющих векторов.$\diamond$

Пример 1.6.2. Решить задачу примера 1.6.1 при условии, что $u_1 \cdot u_2 < 0$, $u_1 + u_2 \neq 0$.

Решение. Пусть, например, $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, $u_1 + u_2 > 0$. Формулы, примененные для решения примера 1.6.1, остаются справедливыми, но теперь

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c = \frac{|u_1|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{u_1 + u_2}.$$

Следовательно, точка C принадлежит продолжению отрезка C_1C_2 со стороны наибольшего по модулю вектора. Имеем *правило рычага второго рода*.$\diamond$

Для подъема различных грузов часто используются приспособления, называемые рычагами. Они имеют вид стержня, одна точка

которого служит опорной, а к другой приложен поднимаемый груз. Примеры 1.6.1 и 1.6.2 показывают (см. § 4.8), как выполнить соответствующие расчеты.

§ 1.7. Центр масс множества точек

Центр масс — одно из важнейших понятий, которое часто будет встречаться в дальнейшем. Применение этого понятия оказывается эффективным не только в механике, но и в других разделах физики, а также для решения многих геометрических задач и получения алгебраических неравенств.

Пусть в E^3 задано множество $\mathcal{Q}$, состоящее из n точек. Положение точек в пространстве зададим радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$ и каждой точке сопоставим массу $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Такие точки в дальнейшем будем называть *точечными массами*. Физическая целесообразность понятия массы будет обсуждена в § 3.3. Здесь используется лишь свойство массы быть строго положительной скалярной величиной. Обозначим

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

суммарную массу всех точек множества.

Определение 1.7.1. Точка с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

называется *центром масс* множества $\mathcal{Q}$.

Пример 1.7.1. Предположим, что к точкам приложены параллельные скользящие векторы силы тяжести $\mathbf{u}_i = m_i g\mathbf{k}$, где g — ускорение свободного падения, $\mathbf{k}$ — единичный вектор вертикали. Тогда центр масс дает точку приложения результирующего вектора таких сил. Вследствие того, что центр масс не зависит от ориентации вектора $\mathbf{k}$, существует простой способ экспериментального определения расположения центра масс в твердом теле, рассматриваемом как множество точечных масс. Подвесим такое тело на нити, закрепив ее в какой-либо точке тела. После того как тело перестанет качаться, отметим в нем прямую, служащую продолжением нити. Центр сил тяжести (см. § 1.6) совпадает с центром масс, и поэтому центр масс обязан принадлежать полученной прямой. Закрепим теперь нить в другой точке тела и повторим операцию. Тогда центр масс будет точкой пересечения этих прямых.$\diamond$

Теорема 1.7.1. *Центр масс принадлежит минимальной выпуклой области, содержащей ограниченное в пространстве множество точечных масс.*

Доказательство. В самом деле, пусть число точечных масс конечно. Выберем плоскость Π, разделяющую пространство E^3 на два полупространства так, чтобы одно из полупространств, обозначим его Ω, содержало все рассматриваемое множество точек. Для конечного множества это всегда можно сделать. Выберем полюс O в плоскости Π. Тогда все векторы $\mathbf{r}_i$, а вместе с ними и вектор

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

будут ориентированы в сторону полупространства Ω. Ориентацию плоскости Π можно выбирать произвольно, а саму плоскость располагать сколь угодно близко к множеству точек. Аналогичное построение можно применить и к бесконечному ограниченному в пространстве множеству точечных масс.$\square$

Лемма 1.7.1. *Пусть система $S = \{(\mathbf{r}_i, u_i\mathbf{e}), \quad i = 1, \ldots, n\}$ параллельных скользящих векторов разделена на две непересекающиеся подсистемы*

$$S_1 = \{(\mathbf{r}_j, u_j\mathbf{e}), \quad j = i_1, \ldots, i_q\},$$
$$S_2 = \{(\mathbf{r}_p, u_p\mathbf{e}), \quad p = l_1, \ldots, l_h\},$$

причем

$$q + h = n, \quad \sum_j u_j = R_1 \neq 0, \quad \sum_p u_p = R_2 \neq 0.$$

Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра системы S можно вычислить по правилу

$$\mathbf{r}_c = \frac{R_1\mathbf{r}_{c1} + R_2\mathbf{r}_{c2}}{R_1 + R_2},$$

где $\mathbf{r}_{c1}$ и $\mathbf{r}_{c2}$ — радиусы-векторы центров систем S_1 и S_2 соответственно.

Доказательство. Радиусы-векторы $\mathbf{r}_{c1}$ и $\mathbf{r}_{c2}$ имеют вид

$$\mathbf{r}_{c1} = \frac{1}{R_1} \sum_j \mathbf{r}_j u_j, \quad \mathbf{r}_{c2} = \frac{1}{R_2} \sum_p \mathbf{r}_p u_p.$$

Теперь достаточно подставить указанные выражения в доказываемую формулу.$\square$

Следствие 1.7.1. *Центр масс некоторого множества точечных масс можно определить путем замены отдельных непересекающихся его подмножеств точками с массами, равными суммарным массам подмножеств, расположенными в центрах масс этих подмножеств.*

Поиск центра масс облегчается, если множество $\mathcal{Q}$ точечных масс обладает симметрией. Пусть $\mathcal{Q}$, например, симметрично относительно плоскости Π так, что симметричным точкам соответствуют одинаковые массы. Разбив $\mathcal{Q}$ на два подмножества, симметричных относительно плоскости Π, найдем их центры масс. Центры масс подмножеств расположатся симметрично относительно плоскости Π. Значит, центр масс всей системы принадлежит плоскости Π. В том случае, когда множество $\mathcal{Q}$ обладает осевой симметрией, можно, группируя попарно симметричные точки, убедиться в том, что центр масс должен принадлежать оси симметрии. Подчеркнем, что сказанное справедливо лишь тогда, когда симметрично не только геометрическое расположение точек, но и распределение масс.

Рассмотрим примеры решения задач с помощью доказанных выше свойств центра масс.

Пример 1.7.2. Доказать, что средние линии любого выпуклого четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, проходят через общую точку и делятся ею пополам.

Решение. Поместим в вершинах четырехугольника одинаковые массы. Центр масс такой системы должен быть в пересечении средних линий четырехугольника. Этот же центр масс должен делить пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей.$\diamond$

Пример 1.7.3. Рассмотрим фигуру Γ, ограниченную графиком функции $y = \ln x$, $x > 0$ и лучом оси абсцисс $x \geq 1$. Эта фигура выпуклая. Выберем на оси абсцисс точки

$$1 < x_1 < \ldots < x_n$$

и найдем соответствующие им точки на графике функции $y = \ln x$:

$$(x_1, \ln x_1), \ldots, (x_1, \ln x_n).$$

Поместим в эти точки положительные массы $m_1, \ldots, m_n$ соответственно. Вычислим координаты центра масс полученной системы точек, обозначив $M = m_1 + \cdots + m_n$:

$$x_c = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n), \quad y_c = \frac{1}{M}(m_1 \ln x_1 + \cdots + m_n \ln x_n).$$

В связи с тем, что фигура Γ — выпуклая, центр масс должен быть расположен строго внутри фигуры и, в частности,

$$\frac{(m_1 \ln x_1 + \cdots + m_n \ln x_n)}{M} < \ln \left(\frac{m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n}{M} \right).$$

Отсюда, когда $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$, получаем, например, *неравенство Коши*:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} < \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.\diamond$$

§ 1.8. Геометрия масс

В предшествующем параграфе было изучено понятие центра масс, дающее представление "в целом" о заданном множестве точечных масс. Здесь рассмотрим другие подобные характеристики. Пусть точки, принадлежащие некоторому множеству $\mathcal{Q} \subset E^3$, заданы радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \ldots, n$, с началом в полюсе O. Каждой точке припишем массу $m_i > 0$. В пространстве R^3, соответствующем полюсу O, образуем положительно определенную билинейную симметрическую форму, которая любой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$ ставит в соответствие скаляр

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{y}).$$

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не обязательно должны быть разными. В частности, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, то получим скалярную величину

$$J_e = \mathcal{T}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e})^2,$$

которая называется *моментом инерции относительно оси* (осевым моментом инерции), коллинеарной вектору $\mathbf{e}$ и проходящей через точку O. Момент инерции J_e равен сумме произведений масс на квадраты их расстояний до указанной оси. Выберем в точке O ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Чтобы определить результат действия формы $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в R^3, достаточно указать значение формы на парах базисных векторов. Обозначим

$$J_{pq} = \mathcal{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q), \quad p, q = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{p,q=1}^{3} J_{pq} x_p y_q.$$

Из определения формы $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ следует, что ее значение не меняется при преобразованиях базисных векторов. В этом смысле набор $\mathbf{J}$ ее коэффициентов J_{pq}, $p, q = 1, 2, 3$, представляет собой тензор второго ранга. Он называется связанным с точкой O *тензором инерции* множества $\mathcal{Q}$ точечных масс. Найдем компоненты тензора $\mathbf{J}$:

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_p) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_q) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{e}_q \cdot [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{e}_p \times \mathbf{r}_i)]$$

или

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{e}_q [\mathbf{e}_p r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_p)].$$

Пусть $p = q$. Тогда

$$J_{pp} = \mathcal{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_p) = \sum_{i=1}^{n} m_i [r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_p)^2], \quad p = 1, 2, 3.$$

Величина J_{pp} представляет собой момент инерции относительно оси, направляющий орт которой имеет номер p. Как уже отмечалось выше, осевой момент инерции J_{pp} равен сумме произведений масс точек на квадраты их расстояний до соответствующей оси.

Предположим, что $p \neq q$. Величина

$$J_{pq} = \mathcal{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = -\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{r}_i)(\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{r}_i)]$$

называется *центробежным моментом инерции* относительно плоскости Oe_p, e_q. Вернемся к определению формы $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и преобразуем смешанное произведение:

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_i)].$$

Изменяя порядок суммирования в выражении той же формы через тензор инерции, можно получить

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{q=1}^{3} y_q \sum_{p=1}^{3} J_{pq} x_p.$$

Определим вектор $\mathbf{z} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3$ с помощью соотношения

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} m_i [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_i)].$$

Сопоставив два выражения для $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, получим

$$z_q = \sum_{p=1}^{3} J_{pq} x_p = \sum_{p=1}^{3} J_{qp} x_p, \quad q = 1, 2, 3.$$

Таким образом, тензор инерции порождает в пространстве R^3 линейный оператор инерции $\mathbf{J}$, переводящий вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{z}$. Форма $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}\mathbf{x}.$$

Пусть теперь $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор. Напишем момент инерции J_e, соответствующий направлению $\mathbf{e}$:

$$J_e = \mathcal{T}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{n} m_i [r_i^2 - (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e})^2].$$

Выберем вектор $\mathbf{x} = \mathbf{e}/\sqrt{J_e}$. Для него

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1.$$

Другими словами, конец вектора $\mathbf{x}$ принадлежит поверхности второго порядка. Если для любого направления $\mathbf{e}$ справедливо $J_e \neq 0$, то эта поверхность ограничена в пространстве. В этом случае она представляет собой эллипсоид, который называется *эллипсоидом инерции*.

Теорема 1.8.1. *$J_e = 0$ тогда и только тогда, когда все точечные массы рассматриваемого множества принадлежат оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$.*

Доказательство. Если все точки принадлежат оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$, то их расстояния до этой оси равны нулю. Значит, $J_e = 0$. Обратно, пусть $J_e = 0$. Но J_e по определению есть сумма произведений положительных масс точек на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси. Равенство нулю такой суммы может быть только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю.□

Теорема 1.8.2. *Если все точечные массы принадлежат оси с единичным направляющим вектором $\mathbf{k}$: $\mathbf{r}_i = r_i\mathbf{k}$ и не все $\mathbf{r}_i$ равны нулю, то поверхность, определенная уравнением*

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1,$$

представляет собой круговой цилиндр с осью $\mathbf{k}$.

Доказательство. С учетом равенства $\mathbf{r}_i = r_i\mathbf{k}$ получим

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i \mathbf{k} \times \mathbf{x})^2 = (\mathbf{k} \times \mathbf{x})^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = 1.$$

По условию теоремы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{k} \times \mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но $|\mathbf{k} \times \mathbf{x}|$ есть расстояние от конца вектора $\mathbf{x}$ до оси с направляющим вектором $\mathbf{k}$. Следовательно, это расстояние постоянно для любого вектора $\mathbf{x}$, принадлежащего поверхности $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$.□

В дальнейшем будем предполагать, что заданные точечные массы не принадлежат одной прямой, так что уравнение $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ определяет в пространстве E^3 эллипсоид инерции.

Теорема 1.8.3. *Если не все точечные массы принадлежат одной прямой, то матрица*

$$J = (J_{pq}), \quad p, q = 1, 2, 3,$$

соответствующая тензору инерции, невырождена.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$z_p = \sum_{q=1}^{3} J_{pq} x_q = 0, \quad p = 1, 2, 3.$$

Пусть матрица J вырождена. Тогда существует ненулевое решение $\mathbf{x}$ этой системы и для него

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = x^2 J_x = 0,$$

где J_x — момент инерции множества точечных масс относительно оси, параллельной $\mathbf{x}$. Но $x^2 \neq 0$. Значит, $J_x = 0$. Следовательно, все точечные массы принадлежат оси $\mathbf{x}$, что противоречит условию.□

Теорема 1.8.4. *Пусть множеству точечных масс соответствует эллипсоид инерции и пусть $\mathbf{x}$ определяет фиксированную точку эллипсоида. Тогда вектор $\mathbf{z} = \mathbf{J}\mathbf{x}$ есть нормаль к плоскости, касающейся эллипсоида в точке $\mathbf{x}$.*

Доказательство. Уравнение эллипсоида инерции представим в виде $\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}\mathbf{x} = 1$. Зададим плоскость Π уравнением $\mathbf{y} \cdot \mathbf{J}\mathbf{x} = 1$, где $\mathbf{x}$ — постоянный вектор, а конец вектора $\mathbf{y}$ выделяет точку плоскости. Допустим, что плоскость Π сечет эллипсоид. Тогда существует вектор $\mathbf{y}$, конец которого одновременно принадлежит плоскости Π и эллипсоиду, причем $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Для такого вектора $\mathbf{y}$ должны быть выполнены равенства

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{J}\mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}\mathbf{y} = 1, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{J}\mathbf{x} = 1.$$

Поэтому

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\mathbf{x} = 0, \quad (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\mathbf{y} = 0$$

или $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$. Отсюда получаем, что все точечные массы принадлежат оси, параллельной ненулевому вектору $(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Тогда уравнение $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ определяет цилиндр, что противоречит

условию. Таким образом, плоскость Π, кроме точки, определяемой вектором $\mathbf{x}$, не имеет общих точек с эллипсоидом и, значит, касается эллипсоида в точке $\mathbf{x}$. Вектор $(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ принадлежит плоскости Π. Равенство

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\mathbf{x} = 0$$

свидетельствует, что вектор $\mathbf{J}\mathbf{x}$ перпендикулярен плоскости Π. □

§ 1.9. Главные оси инерции

Пусть для полюса O построен эллипсоид инерции. *Главной осью инерции* для него называется ось, которая проходит через точку O и коллинеарна нормали к эллипсоиду, взятой в точке пересечения оси с ним.

Обозначим $\mathbf{x}$ радиус-вектор точки пересечения главной оси с эллипсоидом инерции. Тогда, согласно определению главной оси и в соответствии с теоремой 1.8.4, будем иметь

$$\mathbf{z} = \mathbf{J}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

или

$$(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = 0,$$

где $\mathbf{J}$ — оператор инерции, $\mathbf{E}$ — тождественный оператор. Полученная однородная линейная система должна иметь ненулевое решение. Поэтому ее определитель обязан обращаться в нуль:

$$|\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* эллипсоида инерции. Левой частью этого уравнения служит *характеристический многочлен* третьей степени.

Из теории поверхностей второго порядка известны следующие свойства решений характеристического уравнения и главных осей.

1. Все решения характеристического уравнения действительны.

2. Простому корню характеристического уравнения соответствует единственная главная ось.

3. Главные оси, соответствующие двум различным корням характеристического уравнения, взаимно перпендикулярны.

4. Если все три корня характеристического уравнения различны между собой, то имеется три и только три главные оси и они взаимно перпендикулярны.

5. Если из трех корней λ_1, λ_2, λ_3 два равны между собой и отличны от третьего, например

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3,$$

то все оси, перпендикулярные к единственной оси, соответствующей корню λ_3, суть главные оси, отвечающие кратному корню $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, имеется бесконечно много троек взаимно перпендикулярных главных осей. Каждая из них содержит единственную главную ось с единичным вектором $\mathbf{e}_3$, соответствующую простому корню λ_3, тогда как две другие определены произвольными единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, перпендикулярными между собой и вектору $\mathbf{e}_3$.

6. Если все три корня характеристического уравнения равны между собой, то каждая ось — главная.

Таким образом, три взаимно перпендикулярные главные оси существуют всегда. Выберем единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, им соответствующие, в качестве базисных. Ясно, что тогда

$$J_{12} = J_{21} = J_{13} = J_{31} = J_{23} = J_{32} = 0,$$

и уравнение эллипсоида инерции принимает *канонический вид*

$$J_{11}x_1^2 + J_{22}x_2^2 + J_{33}x_3^2 = 1.$$

Матрица J оператора инерции оказывается диагональной. Компоненты J_{11}, J_{22}, J_{33}, отнесенные к главным осям, называются *главными моментами инерции*.

Отметим, что равенства $J_{12} = J_{13} = 0$ служат необходимыми и достаточными условиями того, чтобы ось с направлением $\mathbf{e}_1$ была главной. Аналогичное утверждение справедливо и для других осей.

§ 1.10. Преобразование эллипсоида инерции

Пусть в E^3 задано множество точечных масс $\mathcal{Q}$. Значение введенной в § 1.8 билинейной формы $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, взятое для одной и той же пары векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, зависит от того, какая точка пространства принята за начало векторов $\mathbf{r}_i$. Выясним эту зависимость. Центр масс множества $\mathcal{Q}$ обозначим C. Радиусы-векторы точек из $\mathcal{Q}$, имеющие начало в C, обозначим $\mathbf{r}_i'$, $i = 1, \ldots, n$, так что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' = 0.$$

С помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$, имеющего начало в точке C, зададим произвольную точку O. Радиусы-векторы точек из $\mathcal{Q}$, имеющие начало в точке O, обозначим $\mathbf{r}_i$. Тогда будем иметь $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' - \mathbf{r}$.

Для точки C значение билинейной формы дается выражением

$$\mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{y}),$$

а для точки O по-прежнему будем иметь

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{y}).$$

Зададим

$$\mathcal{T}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M(\mathbf{r} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{y})$$

билинейную форму в точке O, возникающую, если в центре масс рассматриваемого множества $\mathcal{Q}$ поместить его суммарную массу

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Лемма 1.10.1. *Действие формы $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выражается суммой*

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{T}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Доказательство. Подставив в правую часть формулы, определяющей $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, выражение $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' - \mathbf{r}$, получим

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i [(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}) \times \mathbf{x}] \cdot [(\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}) \times \mathbf{y}] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{y}) - (\mathbf{r} \times \mathbf{x}) \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \right) \times \mathbf{y} \right] -$$
$$- \left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \right) \times \mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{y}) + M(\mathbf{r} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{y}).$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' = 0,$$

убеждаемся в справедливости леммы.□

Форма $\mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ порождает в точке C тензор инерции $\mathbf{J}^c$, называемый *центральным тензором инерции*, а форма $\mathcal{T}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — в точке O тензор инерции $\mathbf{J}^M$. Лемму 1.10.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.10.1. *Тензор инерции $\mathbf{J}$ множества $\mathcal{Q}$, взятый в точке O, равен покомпонентной сумме центрального тензора инерции $\mathbf{J}^c$ того же множества $\mathcal{Q}$ и тензора $\mathbf{J}^M$ точки C, когда в ней помещена суммарная масса M. Подробнее, если заданы ортонормированные базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то*

$$J_{pq} = J_{pq}^c + J_{pq}^M, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

Доказательство. По определению тензора инерции найдем

$$J_{pq} = \mathcal{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \mathcal{T}_c(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) + \mathcal{T}_M(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = J_{pq}^c + J_{pq}^M.□$$

Форма $\mathcal{T}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и, следовательно, тензор $\mathbf{J}^M$ не зависят от расположения точек множества $\mathcal{Q}$ относительно центра масс. Они характеризуют расположение множества $\mathcal{Q}$ "в целом" относительно точки O. Формулы для расчета $\mathbf{J}^M$ достаточно просты:

$$J_{pp}^M = M(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_p)^2 = M[\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_p)^2], \quad p = 1, 2, 3,$$

$$J_{pq}^M = M(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_p) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_p), \quad p \neq q, \quad p, q = 1, 2, 3.$$

В частности, J_{pp}^M есть произведение суммарной массы на квадрат расстояния от центра масс до оси с направлением $\mathbf{e}_p$, проходящей через точку O. Особенности "внутренней" структуры множества $\mathcal{Q}$ отражаются формой $\mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и связанным с ней тензором $\mathbf{J}^c$. Теорема 1.10.1 дает возможность, определив однажды этот тензор, эффективно пересчитать его для любой интересующей нас точки пространства.

Перейдем к характеристикам эллипсоида инерции. Взятый относительно центра масс множества $\mathcal{Q}$ он называется *центральным эллипсоидом инерции*, его главные оси — *главными центральными осями инерции*, а моменты инерции относительно этих осей — *главными центральными моментами инерции*.

Согласно определению, эллипсоид инерции с центром в точке O есть геометрическое место таких точек P, расстояние от которых до точки O обратно пропорционально квадратному корню из момента инерции относительно оси, проходящей через точки O и P. Рассмотрим, как преобразуются осевые моменты инерции при переходе от полюса к полюсу.

Теорема 1.10.2. (Гю́йгенса-Шти́йнера). *Момент инерции J_e относительно оси с произвольным направлением $\mathbf{e}$, проходящей через точку O, равен сумме момента инерции J_e^c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения суммарной массы на квадрат расстояния d между осями:*

$$J_e = J_e^c + Md^2 = J_e^c + M(\mathbf{r} \times \mathbf{e})^2 = J_e^c + M[\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2].$$

Доказательство. Пусть направление оси задано единичным вектором $\mathbf{e}$. Применяя лемму 1.10.1, найдем

$$J_e = \mathcal{T}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = J_e^c + M(\mathbf{r} \times \mathbf{e})^2.$$

Но $|\mathbf{r} \times \mathbf{e}|$ есть произведение модуля r радиуса-вектора на синус угла между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{e}$, что представляет собой расстояние d между осями.□

Как следствие отметим, что момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, меньше момента инерции относительно любой другой параллельной оси.

Пример 1.10.1. Из теоремы Гюйгенса-Штейнера следует неравенство

$$J_e \geq Md^2.$$

Выберем произвольно на числовой оси n точек с координатами x_1, $x_2, \ldots, x_n$ и сопоставим им массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Взяв момент инерции относительно перпендикуляра к числовой оси, проходящего через нулевую точку, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n$. Выберем какие-нибудь не равные нулю числа b_1, $b_2, \ldots, b_n$ и положим

$$m_i = b_i^2, \quad x_i = \frac{a_i}{b_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Подставив эти выражения в полученное неравенство, найдем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \right).$$

Это неравенство называется *неравенством Коши-Буняковского*. Легко показать, что оно справедливо также, когда некоторые из чисел $b_1, \ldots, b_n$ обращаются в нуль.◇

Пример 1.10.2. Найти геометрическое место точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний от n заданных точек той же плоскости постоянна и равна a^2.

Решение. Поместим в каждую из заданных точек массу, равную единице. Обозначим C центр масс образовавшегося множества точечных

масс. Пусть O — произвольная точка плоскости. По теореме Гюйгенса-Штейнера имеем

$$J_e = J_e^c + nOC^2,$$

где J_e — момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку O, J_e^c — момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс. По условию $J_e = a^2$. Следовательно,

$$OC^2 = \frac{1}{n}(a^2 - J_e^c),$$

и длина отрезка OC, равная расстоянию от центра масс C до точки O, принадлежащей искомому геометрическому месту, должна принимать постоянное значение. Если $a > J_e^c$, то получаем окружность с центром в C и радиусом

$$OC = \sqrt{\frac{1}{n}(a^2 - J_e^c)}.$$

Если $a^2 = J_e^c$, то искомое геометрическое место есть центр масс C. Если $a^2 < J_e^c$, то решение отсутствует.◇

Исследуем теперь деформацию эллипсоида инерции в точке O по сравнению с центральным эллипсоидом при удалении точки O от центра масс C. Зафиксируем единичное направление $\mathbf{e}_r$ смещения точки O, так что $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, и будем изменять только модуль r. Пусть $\mathbf{z}^c(\mathbf{x})$ — оператор нормали к центральному эллипсоиду, а $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ — оператор нормали к эллипсоиду в точке O (см. теорему 1.8.4).

Теорема 1.10.3. *Нормаль $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ к эллипсоиду инерции с центром в точке O может быть найдена по формуле*

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + M[\mathbf{r} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r})] = \mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + Mr^2[\mathbf{x} - \mathbf{e}_r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_r)].$$

Доказательство. В соответствии с определением нормали $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ имеем

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}).$$

С другой стороны, согласно лемме 1.10.1

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{T}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

причем

$$\mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}^c(\mathbf{x}), \quad \mathcal{T}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot M[\mathbf{r} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r})].$$

Следовательно,

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \cdot [\mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + M[\mathbf{r} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r})].$$

Доказываемое тождество справедливо, так как вектор $\mathbf{y}$ может быть выбран произвольно.□

Теорема 1.10.4. *Если направление $\mathbf{e}_r$ — главное для центрального эллипсоида инерции, то оно будет главным и для любой точки O, определенной радиусом-вектором $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ при произвольном значении r. И наоборот, если направление $\mathbf{e}_r$ не было главным для центрального эллипсоида инерции, то оно не может стать главным ни при каком значении r.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$. Тогда

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + Mr^2\mathbf{x}[\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r)] = \mathbf{z}^c(\mathbf{x}).\square$$

Теорема 1.10.5. *Пусть направление $\mathbf{e}_r$ произвольно. Тогда при увеличении r диаметр эллипсоида инерции в точке O, соответствующий направлению $\mathbf{e}_r$, не изменяется. Остальные диаметры уменьшаются, так что весь эллипсоид сжимается к отрезку, направленному вдоль оси, проходящей через точки O и C. Две из трех главных осей инерции стремятся к плоскости, перпендикулярной $\mathbf{e}_r$, третья ось стремится стать коллинеарной вектору $\mathbf{e}_r$.*

Доказательство. По определению, диаметры эллипсоида инерции обратно пропорциональны квадратным корням из соответствующих осевых моментов инерции. Согласно теореме 1.10.2 момент инерции относительно оси, проходящей через точку O параллельно вектору $\mathbf{e}_r$, остается равным соответствующему центральному моменту инерции при любом значении r. Следовательно, диаметр, параллельный $\mathbf{e}_r$ при любом r, будет таким же, каким он был в центральном эллипсоиде. Моменты инерции относительно осей, не коллинеарных $\mathbf{e}_r$, растут, а соответствующие диаметры уменьшаются, стремясь к нулю при увеличении r. Весь эллипсоид стремится к отрезку, равному диаметру центрального эллипсоида инерции в направлении $\mathbf{e}_r$. Середина отрезка совпадает с точкой O, а сам отрезок расположен на оси, проходящей через точки O и C. Если $\mathbf{x}$ перпендикулярен $\mathbf{e}_r$, то вектор нормали к эллипсоиду в точке O можно представить (см. теорему 1.10.3) в виде

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = Mr^2\left[\frac{1}{Mr^2}\mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\right],$$

где вектор $\mathbf{x}$ принадлежит поверхности эллипсоида. Первое слагаемое в квадратной скобке стремится к нулю быстрее, чем $\mathbf{x}$, и направление вектора $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ приближается к направлению вектора $\mathbf{x}$. Отсюда в силу непрерывности функции $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ следует, что любое направление в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}_r$, тем меньше отличается от главного, чем больше r. Тем самым одна из плоскостей, определенная некоторыми двумя главными осями, приближается к плоскости, перпендикулярной $\mathbf{e}_r$. Третья главная ось стремится стать параллельной вектору $\mathbf{e}_r$.$\square$

Теорема 1.10.6. *Если некоторая ось оказалась главной для двух своих точек, то она проходит через центр масс и будет главной для любой своей точки.*

Доказательство. Пусть рассматриваемая ось проходит через точки O_1 и O_2, заданные соответственно радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, имеющими начало в центре масс C. Эллипсоид инерции для точки O_1 обозначим $\mathcal{Э}_1$. Эллипсоид инерции для точки O_2 обозначим $\mathcal{Э}_2$. Сравним векторы $\mathbf{z}_1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{z}_2(\mathbf{x})$ для эллипсоидов $\mathcal{Э}_1$ и $\mathcal{Э}_2$. По теореме 1.10.3 будем иметь

$$\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + M[\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_1)],$$

$$\mathbf{z}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^c(\mathbf{x}) + M[\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_2)].$$

По условию теоремы разность векторов $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \rho\mathbf{e}$ определяет направление главной оси как для $\mathcal{Э}_1$, так и для $\mathcal{Э}_2$. Это значит, что $\mathbf{z}_1(\mathbf{e}) = \lambda_1\mathbf{e}$ и $\mathbf{z}_2(\mathbf{e}) = \lambda_2\mathbf{e}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_2(\mathbf{e}) &= \mathbf{z}^c(\mathbf{e}) + M\{(\mathbf{r}_1 + \rho\mathbf{e}) \times [\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_1 + \rho\mathbf{e})]\} = \\ &= \mathbf{z}^c(\mathbf{e}) + M\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_1) + M\rho\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_1) = \\ &= \mathbf{z}_1(\mathbf{e}) + M\rho\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_1).\end{aligned}$$

Учитывая результат действия операторов $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ и раскрывая двойное векторное произведение, найдем

$$M\rho\mathbf{r}_1 = [M\rho(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_1) + \lambda_1 - \lambda_2]\mathbf{e}.$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{e}$ коллинеарны, а значит, ось O_1O_2 проходит через центр масс C. Следовательно, $\mathbf{z}_1(\mathbf{e}) = \mathbf{z}^c(\mathbf{e})$ и ось O_1O_2, будучи главной для эллипсоида $\mathcal{Э}_1$, будет главной и для центрального эллипсоида инерции, а по теореме 1.10.4 она будет главной для любой своей точки.$\square$

Нахождение главных центральных осей инерции упрощается, если множество точечных масс обладает той или иной симметрией. Например, если точки с одинаковой массой расположены симметрично относительно некоторой плоскости, то центр масс должен принадлежать этой плоскости. Ей же принадлежат две главные оси инерции, а третья перпендикулярна плоскости симметрии. Если множество точечных масс обладает осью симметрии, то центр масс принадлежит этой оси. С ней же совпадает одна из главных осей инерции, а две другие перпендикулярны к ней. Если симметрия круговая, то любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии, будет главным. Если ось симметрии получается как пересечение двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, то две другие главные оси должны соответственно принадлежать этим плоскостям.

§ 1.11. Тензорное умножение векторов

Рассмотрим билинейную форму относительно векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, значение которой инвариантно при преобразованиях координат

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{a})],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — фиксированные векторы, порождающие форму. Коэффициенты формы образуют тензор второго ранга и получаются (см. § 1.8) как значения формы на всевозможных парах базисных векторов выбранного ортонормированного репера. Возьмем пару $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_q$ базисных векторов. Положим $\mathbf{x} = \mathbf{e}_p$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_q$. Тогда коэффициенты формы примут вид

$$\mathcal{S}_{pq} = \mathcal{S}(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \frac{1}{2}[(\mathbf{e}_p \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{e}_q \times \mathbf{b}) + (\mathbf{e}_p \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{e}_q \times \mathbf{a})] =$$

$$= \frac{\mathbf{e}_q}{2} \cdot [2\mathbf{e}_p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_p) - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_p)].$$

Если $p = q$, то получим диагональные компоненты тензора:

$$\mathcal{S}_{pp} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_p)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_p).$$

При $p \neq q$ найдем его внедиагональные компоненты:

$$\mathcal{S}_{pq} = -\frac{1}{2}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_p)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_q) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_q)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_p)], \quad p \neq q.$$

Определение 1.11.1. Для произвольной пары векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ определим бинарную операцию *тензорного умножения векторов* "$\otimes$" по правилу

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{S} = (\mathcal{S}_{pq}).$$

Эта операция билинейна, коммутативна, дистрибутивна и ассоциативна. В результате ее применения каждой паре векторов ставится в соответствие тензор $\mathbf{S}$. Перечисленные свойства операции непосредственно следуют из вида коэффициентов $\mathcal{S}_{pq}$.

В декартовом реперe $Oe_1e_2e_3$ тензор $\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ принимает вид

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_2 + a_3b_3 & -(a_1b_2 + a_2b_1)/2 & -(a_1b_3 + a_3b_1)/2 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1)/2 & a_1b_1 + a_3b_3 & -(a_2b_3 + a_3b_2)/2 \\ -(a_1b_3 + a_3b_1)/2 & -(a_2b_3 + a_3b_2)/2 & a_1b_1 + a_2b_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.11.1. *Тензорное умножение векторов равно нулевому тензору тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю.*

Доказательство. Необходимость. Непосредственно из выражений для компонент тензора $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ следует, что если хотя бы один из векторов равен нулю, то и все компоненты тензора окажутся равными нулю.

Достаточность. Пусть все компоненты тензора $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ оказались равными нулю. Его диагональные компоненты дают следующие соотношения

$$a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \quad a_1b_1 + a_3b_3 = 0, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Поэтому

$$a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = 0.$$

Пусть, например, $b_1 \neq 0$. Тогда $a_1 = 0$. Далее имеем $S_{21} = -(a_1b_2 + a_2b_1)/2 = S_{31} = -(a_1b_3 + a_3b_1)/2 = 0$. Отсюда $a_2 = a_3 = 0$. Аналогично разбираются остальные случаи.$\square$

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что если заданы тензор $\mathbf{S}$ и вектор $\mathbf{b}$ и существует такой вектор $\mathbf{a}$, что $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{S}$, то вектор $\mathbf{a}$ единственный.

Замечание 1.11.1. Тензор инерции множества точечных масс относительно полюса O можно выразить формулой:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i.$$

Таким образом операция "$\otimes$" удобна при вычислении тензоров инерции множества точечных масс, если радиусы-векторы точек выражаются как линейные комбинации других каких-нибудь векторов.

Пример 1.11.1. Пусть радиусы-векторы точечных масс представлены в виде $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_i$, где $\mathbf{r}_c$ — центр масс системы, так что $\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{\rho}_i = 0$. Тогда найдем

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_i) \otimes (\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_c \otimes \mathbf{r}_c + 2\mathbf{r}_c \otimes \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{\rho}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i = M\mathbf{r}_c \otimes \mathbf{r}_c + \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{\rho}_i \otimes \boldsymbol{\rho}_i.$$

Элементарными алгебраическими преобразованиями мы еще раз получили теорему 1.10.1. $\diamond$

§ 1.12. Критерий тензора инерции

Как мы видели выше, всякому множеству точечных масс можно сопоставить тензор инерции $\mathbf{J}$. Компоненты этого тензора в каждом конкретном ортонормированном базисе образуют неотрицательно определенную симметричную матрицу. Однако если взять произвольную такую матрицу, то ее не всегда можно считать матрицей тензора инерции в каком-либо базисе, т.е. не для всякой симметричной неотрицательно определенной матрицы существует множество точечных масс, порождающее тензор инерции с соответствующими компонентами. Укажем критерий того, что заданная неотрицательно определенная симметричная матрица может считаться составленной из компонент тензора инерции.

Лемма 1.12.1. *Для любого симметричного неотрицательно определенного тензора $\mathbf{I}$ второго ранга существует множество точечных масс, для которого выполнено равенство*

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{r}_i,$$

где $\mathbf{I}\mathbf{x}$ — линейный оператор, соответствующий тензору $\mathbf{I}$.

Доказательство. Коль скоро тензор симметричный и неотрицательно определенный, он имеет три ортонормированных собственных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с неотрицательными собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3. Произвольно зададим три массы:

$$m_1 > 0, \quad m_2 > 0, \quad m_3 > 0$$

и разместим их соответственно в точках с радиусами-векторами

$$\mathbf{r}_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m_i}}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

что, очевидно, всегда можно сделать из-за неотрицательности значений λ_1, λ_2, λ_3.

Рассмотрим линейный оператор

$$\sum_{i=1}^{3} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}_i.$$

Этот оператор имеет те же собственные векторы и собственные значения, что и оператор $\mathbf{I}\mathbf{x}$. Следовательно,

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{r}_i.\square$$

Теорема 1.12.1. (Критерий тензора инерции.) *Симметричная матрица*

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad J_{ij} = J_{ji},$$

может быть матрицей тензора инерции в каком-нибудь ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда матрица

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(J_{22} + J_{33} - J_{11}) & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & \frac{1}{2}(J_{33} + J_{11} - J_{22}) & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22} - J_{33}) \end{pmatrix}$$

определена неотрицательно.

Доказательство. Необходимость. Пусть задано некоторое множество точечных масс. Соответствующую ему билинейную форму $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ преобразуем с использованием свойств векторного умножения:

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \times (\mathbf{x} \times \mathbf{r}_i)) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{y})$$

или

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22} + J_{33})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{y})$$

инвариантная при преобразованиях координат симметричная билинейная форма, причем $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$. Форме $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ соответствует линейный оператор

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{r}_i = -\mathbf{J}\mathbf{x} + \frac{1}{2}(J_{11} + J_{22} + J_{33})\mathbf{x}.$$

Поскольку $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, матрица I оператора $\mathbf{I}\mathbf{x}$ неотрицательно определена и, как нетрудно видеть, совпадает с матрицей, указанной в утверждении теоремы.

Достаточность. Пусть матрица I неотрицательно определена. Тогда с ее помощью можно образовать линейный оператор $\mathbf{I}\mathbf{x}$. Согласно лемме 1.12.1 для оператора $\mathbf{I}$ существует множество точечных масс такое, что

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x})\mathbf{r}_i.$$

Но операторы $\mathbf{J}\mathbf{x}$ и $\mathbf{I}\mathbf{x}$ связаны простым соотношением

$$\mathbf{J}\mathbf{x} = -\mathbf{I}\mathbf{x} + \mathbf{x}\,\mathrm{Sp}\,I,$$

где $\mathrm{Sp}\,I$ — след матрицы I, инвариантный относительно ортогональных преобразований координат. Значит, когда множество точечных масс реализует оператор $\mathbf{I}\mathbf{x}$, то это же множество реализует и оператор $\mathbf{J}\mathbf{x}$ с матрицей J, заданной в условии теоремы.$\square$

Следствие 1.12.1. *В главных осях критерий тензора инерции состоит в выполнении неравенств треугольника для главных моментов инерции.*

§ 1.13. Свойства моментов инерции

Дополнительно к понятиям осевых и центробежных моментов инерции (см. § 1.8) введем понятия моментов инерции относительно плоскости и полюса.

Пусть плоскость $\mathcal{P}_e$ имеет нормаль $\mathbf{e}$ и проходит через полюс O. *Моментом инерции относительно плоскости* $\mathcal{P}_e$ множества точечных масс m_i с радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$ называется величина

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e})^2 = \mathcal{F}(\mathbf{e}, \mathbf{e}),$$

представляющая собой сумму произведений масс точек на квадраты их расстояний до плоскости $\mathcal{P}_e$. $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — форма, введенная при доказательстве теоремы 1.12.1.

Выберем в точке O ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Для моментов инерции относительно координатных плоскостей будем иметь

$$\Pi_1 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_1)^2, \quad \Pi_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_2)^2, \quad \Pi_3 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e}_3)^2.$$

Моментом инерции относительно полюса называется величина

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

В соответствии с определением, осевые моменты инерции и момент инерции относительно полюса выражаются формулами (§ 1.8)

$$J_{11} = \mu - \Pi_1 = \Pi_2 + \Pi_3,$$

$$J_{22} = \mu - \Pi_2 = \Pi_3 + \Pi_1,$$

$$J_{33} = \mu - \Pi_3 = \Pi_1 + \Pi_2,$$

$$\mu = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Теорема 1.13.1. *Осевые моменты инерции удовлетворяют неравенствам треугольника:*

$$J_{11} + J_{22} \geq J_{33}, \quad J_{22} + J_{33} \geq J_{11}, \quad J_{33} + J_{11} \geq J_{22}.$$

Доказательство. Учитывая выражение осевых моментов инерции через моменты инерции относительно плоскости, найдем

$$J_{11} + J_{22} = \Pi_1 + \Pi_2 + 2\Pi_3 = J_{33} + 2\Pi_3,$$

$$J_{22} + J_{33} = \Pi_2 + \Pi_3 + 2\Pi_1 = J_{11} + 2\Pi_1,$$

$$J_{33} + J_{11} = \Pi_3 + \Pi_1 + 2\Pi_2 = J_{22} + 2\Pi_2.$$

Так как Π_1, Π_2, Π_3 положительны, очевидна справедливость утверждения теоремы.$\square$

Из доказательства теоремы следует, что сразу во всех соотношениях треугольника знак равенства достигается только тогда, когда $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = 0$, т.е. когда все точечные массы помещены в одну и ту же геометрическую точку O.

Далее, пусть $\Pi_p = \Pi_q = 0$, $\Pi_k \neq 0$, $p \neq q$. Тогда все точечные массы расположены на координатной оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_k$. Следовательно,

$$\mu = \Pi_k, \quad J_{pp} = J_{qq}, \quad J_{kk} = 0.$$

Наконец, пусть $\Pi_p = 0$, $\Pi_q \neq 0$, $\Pi_k \neq 0$, $p \neq q$, $q \neq k$, $k \neq p$. Тогда множество точечных масс принадлежит плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_k$. Поэтому

$$\mu = \Pi_q + \Pi_k, \quad J_{qq} = \Pi_k, \quad J_{kk} = \Pi_q, \quad J_{pp} = J_{qq} + J_{kk}.$$

Если, кроме того, окажется, что $\Pi_q = \Pi_k$, для чего достаточно, например, чтобы точки с равными массами располагались симметрично относительно биссектрис соответствующих координатных углов, то будем иметь

$$J_{qq} = J_{kk} = \frac{1}{2}J_{pp}.$$

Теорема 1.13.2. *Момент инерции относительно плоскости не зависит от расположения полюса O в плоскости.*

Доказательство. Пусть точка O принадлежит некоторой плоскости $\mathcal{P}_e$ и $\mathbf{e}$ — нормаль к этой плоскости. Выберем точку O за полюс. Тогда

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{e})^2.$$

Возьмем на плоскости $\mathcal{P}_e$ другую точку O_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ относительно первой: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = 0$. Сделаем замену $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_i$. Тогда получим

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^{n} m_i[(\mathbf{r} + \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{e}]^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{e})^2.$$

Но последнее выражение есть момент инерции относительно плоскости $\mathcal{P}_e$, взятый в предположении, что полюс совпадает с O_1.$\square$

Теорема 1.13.3. *Момент инерции относительно плоскости $\mathcal{P}_e$ с нормалью $\mathbf{e}$ равен моменту инерции относительно плоскости с той же нормалью, проходящей через центр масс рассматриваемого множества точечных масс, сложенному с произведением суммарной массы на квадрат расстояния между плоскостями:*

$$\Pi_e = \Pi'_e + M(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e})^2,$$

где Π'_e — момент инерции относительно плоскости, проходящей через центр масс, $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс с началом в точке на плоскости $\mathcal{P}_e$.

Доказательство. Сделаем замену переменных: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$. По смыслу замены

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i = 0.$$

Выражение для Π_e принимает вид

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^{n} m_i[(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{e}]^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e})^2 +$$

$$+2(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{e})^2.$$

Напомним, что

$$\Pi'_e = \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{e})^2.\square$$

Теорема 1.13.4. *Момент инерции относительно произвольной точки O равен моменту инерции относительно центра масс, сложенному с произведением суммарной массы на квадрат расстояния от центра масс до точки O.*

Доказательство.

$$\mu = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3, \quad \Pi_p = \Pi'_p + M(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e}_p)^2, \quad p = 1, 2, 3.$$

Поэтому

$$\mu = \Pi'_1 + \Pi'_2 + \Pi'_3 + Mr_c^2. \square$$

§ 1.14. Примеры вычисления тензора инерции

Найдем главные оси и вычислим главные центральные моменты инерции для некоторых типичных множеств точечных масс.

Пример 1.14.1. Определить центральный тензор инерции для множества из n точек одинаковой массы m, расположенных на одной прямой так, что каждая точка отстоит от соседних на одинаковое расстояние Δ.

Решение. Обозначим $\mathbf{e}_1$ — направляющий единичный вектор прямой. Выберем на прямой полюс O так, чтобы радиусы-векторы точечных масс можно было задать в виде

$$\mathbf{r}_i = i\mathbf{e}_1\Delta, \quad i = 1, \ldots, n.$$

По причине симметрии одна из главных осей инерции проходит через точку O в направлении $\mathbf{e}_1$, а две другие ей перпендикулярны, причем

$$J_{11} = J_{12} = J_{21} = J_{13} = J_{31} = J_{23} = J_{32} = 0,$$

$$J_{22} = J_{33} = m\Delta^2 \sum_{i=1}^{n} i^2 = m\Delta^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Центр масс рассматриваемого множества точек дается формулой

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{n} m\Delta i\mathbf{e}_1 = \Delta \frac{n+1}{2}\mathbf{e}_1.$$

Переходя к определению главных центральных моментов инерции, заметим, что

$$J^c_{11} = J^c_{12} = J^c_{21} = J^c_{13} = J^c_{31} = J^c_{23} = J^c_{32} = 0.$$

Для расчета J^c_{22} и J^c_{33} воспользуемся теоремой Гюйгенса-Штейнера:

$$J^c_{22} = J^c_{33} = J_{22} - nmr_c^2 = m\Delta^2 \frac{n(n+1)(n-1)}{12}. \diamond$$

Пример 1.14.2. Определить центральный тензор инерции для прямолинейного однородного отрезка длины l и массы M.

Решение. Обозначим $\mathbf{e}_1$ — направляющий единичный вектор отрезка. Полюс O назначим так, чтобы начало вектора $\mathbf{e}_1$ совпало с одним из концов отрезка, тогда как другой конец отрезка имел радиус-вектор

$$\mathbf{r} = l\mathbf{e}_1.$$

Разделим отрезок на n равных частей длины $\Delta = l/n$ и каждой части сопоставим массу $m = M/n$, сосредоточенную в узловой точке с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_i = i\mathbf{e}_1\Delta, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{r}.$$

Теперь для расчета главных центральных моментов инерции можем воспользоваться результатом примера 1.14.1, который перепишем в виде

$$J^c_{11} = 0, \quad J^c_{22} = J^c_{33} = \frac{Ml^2}{12}\left[1 + \frac{1}{n}\right]\left[1 - \frac{1}{n}\right].$$

Положение центра масс дискретного множества задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{n}\right]\mathbf{e}_1.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем решение примера 1.14.2:

$$J^c_{11} = 0, \quad J^c_{22} = J^c_{33} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Моменты инерции рассчитаны относительно главных центральных осей с началом в центре масс $\mathbf{r}_c = l\mathbf{e}_1/2$. Первая из этих осей направлена вдоль отрезка, а две другие взаимно ортогональны и лежат в плоскости, перпендикулярной первой оси.

Заметим, что главные центральные моменты инерции отрезка можно найти и более экономным способом с помощью интегрирования. Положение центра масс, совпадающее с серединой отрезка, и указанные выше направления главных центральных осей инерции легко установить с помощью соображений симметрии. Обозначим $dM = \gamma dx$ — элемент массы, где γ — плотность, dx — элемент длины. Тогда, составляя в соответствии с определением момента инерции интегральную сумму, обозначая $a = l/2$ и переходя к пределу, найдем

$$J^c_{22} = J^c_{33} = \int_{-a}^{a} x^2\, dM = \gamma \int_{-a}^{a} x^2\, dx = \gamma\frac{2l^3}{8 \cdot 3} = \frac{Ml^2}{12}. \diamond$$

Пример 1.14.3. Определить центральный тензор инерции для массы M, равномерно распределенной по периметру прямоугольника со сторонами a и b.

Решение. Центр масс прямоугольника совпадает с точкой пересечения его диагоналей. Две взаимно перпендикулярные оси симметрии проходят через центр масс параллельно сторонам. Две главные центральные оси инерции с ортонормированными направляющими векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно совпадают с указанными осями симметрии. Третья ось с единичным направляющим вектором $\mathbf{e}_3$ проходит через центр масс перпендикулярно плоскости прямоугольника. Оси пронумеруем так, чтобы сторона длины a была параллельной вектору $\mathbf{e}_1$, а сторона длины b — параллельной вектору $\mathbf{e}_2$. Обозначим M_a — массу каждого отрезка длины a, а M_b — массу каждого отрезка длины b. В соответствии с условием имеем

$$M_a = \frac{Ma}{2(a+b)}, \quad M_b = \frac{Mb}{2(a+b)}.$$

Найдем момент инерции фигуры относительно оси, коллинеарной $\mathbf{e}_1$. Он состоит из суммы моментов инерции двух отрезков длины a, параллельных $\mathbf{e}_1$ и удаленных от рассматриваемой оси на расстояние $b/2$, и моментов инерции двух отрезков длины b, перпендикулярных оси. Используем решение примера 1.14.2:

$$J^c_{11} = 2M_a\frac{b^2}{4} + 2M_b\frac{b^2}{12} = \frac{Mb^2}{4(a+b)}\left[a + \frac{b}{3}\right].$$

Аналогично

$$J^c_{22} = 2M_b\frac{a^2}{4} + 2M_a\frac{a^2}{12} = \frac{Ma^2}{4(a+b)}\left[\frac{a}{3} + b\right].$$

Поскольку прямоугольник — фигура плоская, получим

$$J^c_{33} = J^c_{11} + J^c_{22} = \frac{M(a+b)^2}{12}. \diamond$$

Пример 1.14.4. Определить центральный тензор инерции для однородного плоского прямоугольника с массой M и сторонами a и b.

Решение. Из симметрии прямоугольника ясно, что главные центральные оси инерции для него будут такими же, как в примере 1.14.3. С целью вычисления, например, момента инерции J^c_{11} разобьем прямоугольник на n равных полос, параллельных первой оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_1$. Момент инерции каждой полосы будет такой же, какой имеет отрезок, полученный проектированием полосы на вторую главную ось, и имеющий массу, равную массе полосы. Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что момент инерции J^c_{11} равен главному центральному моменту инерции отрезка массы M и длины b, ориентированного вдоль главной оси. Проводя подобные построения для вычисления

момента инерции J^c_{22}, убеждаемся, что он равен моменту инерции относительно второй оси отрезка массой M и длиной a, ориентированного вдоль первой главной оси. Используя решение задачи 1.14.2, найдем

$$J^c_{11} = M\frac{b^2}{12}, \quad J^c_{22} = M\frac{a^2}{12}.$$

Кроме того,

$$J^c_{33} = J^c_{11} + J^c_{22} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2). \diamond$$

Пример 1.14.5. Определить центральный тензор инерции однородного прямоугольного параллелепипеда с массой M и размерами a, b, c.

Решение. Прямоугольный параллелепипед имеет три плоскости симметрии, взаимно перпендикулярные и проходящие через середины ребер. Центр масс C совпадает с точкой пересечения этих плоскостей. Главные центральные оси инерции начинаются в точке C и направлены параллельно соответствующим ребрам параллелепипеда. Пронумеруем оси так, чтобы направляющие векторы $\mathbf{e}_1$ — первой оси, $\mathbf{e}_2$ — второй оси, $\mathbf{e}_3$ — третьей оси были параллельны ребрам с длинами a, b, c соответственно. Найдем моменты инерции Π_1, Π_2, Π_3 относительно координатных плоскостей, перпендикулярных векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Для того чтобы найти Π_1, рассечем параллелепипед на n одинаковых слоев плоскостями, перпендикулярными вектору $\mathbf{e}_1$. Момент инерции каждого такого слоя будет совпадать с моментом инерции пересечения этого слоя с первой главной осью, когда этому пересечению сопоставлена масса всего слоя. Переходя к пределу при $n \to \infty$, видим, что момент Π_1 будет совпадать с моментом инерции относительно C отрезка, равного пересечению параллелепипеда с первой главной осью, имеющего длину a и массу, равную массе всего параллелепипеда. Аналогичные рассуждения можно провести с целью расчета моментов Π_2 и Π_3. Воспользовавшись затем решением задачи 1.14.2, получим

$$\Pi_1 = \frac{Ma^2}{12}, \quad \Pi_2 = \frac{Mb^2}{12}, \quad \Pi_3 = \frac{Mc^2}{12}.$$

Главные центральные моменты инерции после этого вычисляются по формулам

$$J^c_{11} = \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{M(b^2+c^2)}{12}, \quad J^c_{22} = \frac{M(a^2+c^2)}{12}, \quad J^c_{33} = \frac{M(a^2+b^2)}{12}. \diamond$$

Пример 1.14.6. Определить центральный тензор инерции для массы M, равномерно распределенной по окружности радиуса R.

Решение. Центр масс совпадает с центром окружности. Любые две взаимно перпендикулярные оси с началом в центре окружности и направляющими векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ будут главными центральными. Третья главная ось проходит через центр и перпендикулярна плоскости окружности. Легко видеть, что $J^c_{33} = MR^2$. Окружность — фигура плоская и симметричная. Поэтому имеем

$$J^c_{11} = J^c_{22} = \frac{MR^2}{2}. \diamond$$

Пример 1.14.7. Определить центральный тензор инерции для однородного круга массы M и радиуса R.

Решение. Главные центральные оси инерции здесь будут такими же, как в примере 1.14.6. Найдем момент инерции J^c_{33}. С этой целью разделим радиус окружности на n равных частей и найдем момент инерции J'_{33} для множества концентрических окружностей с радиусами $\rho_i = iR/n$ и массами

$$M_i = \frac{M}{\pi R^2}(\pi\rho_i^2 - \pi\rho_{i-1}^2) = \frac{M}{n^2}(2i-1), \quad i = 1, \ldots, n,$$

равными массам слоев, заключенных между концентрическими окружностями с номерами i и $i-1$. Используя решение примера 1.14.6, получим

$$J'_{33} = \sum_{i=1}^{n} M_i\rho_i^2 = \frac{MR^2}{n^4}\left(2\sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right) =$$
$$= \frac{MR^2}{n^4}\left[2\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

Отсюда

$$J^c_{33} = \lim_{n\to\infty} J'_{33} = \frac{MR^2}{2}.$$

Из симметрии круга относительно любого диаметра заключаем, что

$$J^c_{11} = J^c_{22} = \frac{1}{2}J^c_{33} = \frac{MR^2}{4}.$$

Момент инерции J^c_{33} можно найти также и более экономным способом с помощью интегрирования. В самом деле, используя указанное выше разбиение круга, будем иметь

$$J^c_{33} = \int_0^R \rho^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi\rho\, d\rho = \frac{MR^2}{2},$$

где ρ и $\rho + d\rho$ — радиусы двух соседних концентрических окружностей, а выражение $M(2\pi\rho\, d\rho)/(\pi R^2)$ есть с точностью до членов второго порядка малости масса слоя, заключенного между ними.

Формула, найденная для J'_{33}, может иметь и самостоятельное значение, например когда задано множество равноудаленных друг от друга точек отрезка, массы которых составляют арифметическую прогрессию. $\diamond$

Пример 1.14.8. Определить центральный тензор инерции для однородного сплошного эллипса массы M, с границей, заданной в декартовых осях (x_1, x_2) посредством уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Уравнение эллипса задано в каноническом виде. Следовательно, оси координат служат осями симметрии эллипса. Центр масс C совпадает с началом координат. Поэтому оси координат будут главными центральными осями инерции. Третья главная центральная ось перпендикулярна плоскости эллипса. Сделаем замену переменных

$$x_1 = ay_1, \quad x_2 = by_2.$$

В результате эллипс превратится в круг единичного радиуса. Разобьем эллипс на элементы малой площади. Пусть каждый элемент имеет массу δM_i и координаты (x_1^i, x_2^i). Тогда

$$J^c_{11} \approx \sum_i (x_2^i)^2\delta M_i = b^2\sum_i (y_2^i)^2\delta M_i,$$

$$J^c_{22} \approx \sum_i (x_1^i)^2\delta M_i = a^2\sum_i (y_1^i)^2\delta M_i.$$

Примем, что масса элемента при преобразованиях координат не изменяется. Уменьшая максимальную площадь элементов, в пределе получаем точные соотношения

$$J^c_{11} = b^2 J'_{11} = \frac{Mb^2}{4}, \quad J^c_{22} = a^2 J'_{11} = \frac{Ma^2}{4},$$

где J'_{11} — момент инерции единичного круга массы M относительно его диаметра (см. пример 1.14.7). Третий главный момент инерции эллипса дается формулой

$$J^c_{33} = J^c_{11} + J^c_{22} = \frac{M}{4}(a^2 + b^2). \diamond$$

Пример 1.14.9. Определить центральный тензор инерции однородной сферы массы M и радиуса R.

Решение. Центр масс совпадает с центром C сферы. Любая ось, проходящая через точку C, есть главная центральная. Назначим произвольно три взаимно перпендикулярные координатные оси с направляющими единичными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, проходящие через точку C. Момент инерции сферы относительно точки C, очевидно, будет $\mu_c = MR^2$. В силу симметрии сферы моменты инерции Π_1, Π_2, Π_3 относительно координатных плоскостей будут одинаковыми. Но так как $\mu_c = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, то

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \frac{MR^2}{3}.$$

Следовательно,

$$J^c_{11} = J^c_{22} = J^c_{33} = \frac{2MR^2}{3}. \diamond$$

Пример 1.14.10. Определить центральный тензор инерции однородного шара массы M и радиуса R.

Решение. Центр масс шара совпадает с его центром C. Как и в примере 1.14.9, назначим произвольно три взаимно перпендикулярные координатные оси с началом в точке C и направляющими единичными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Найдем момент инерции шара относительно точки C. С этой целью разобьем радиус шара на n одинаковых частей и рассмотрим совокупность концентрических сфер с радиусами $\rho_i = iR/n$. Вычислим массу шарового слоя между соседними сферами с радиусами ρ_i и ρ_{i-1}:

$$M_i = \frac{3M}{4\pi R^3}\left(\frac{4}{3}\pi\rho_i^3 - \frac{4}{3}\pi\rho_{i-1}^3\right) = \frac{M}{n^3}(3i^2 - 3i + 1).$$

Если по каждой сфере радиуса ρ_i равномерно распределить массу M_i, найти ее момент инерции относительно центра и просуммировать значения, полученные для всех сфер, то

$$\mu'_c = \sum_{i=1}^{n} M_i\rho_i^2 = \frac{MR^2}{n^5}\left[3\sum_{i=1}^{n} i^4 - 3\sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} i^2\right] =$$
$$= \frac{MR^2}{n^5}\left[3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{3n^2+3n-1}{5} - 3\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

Момент инерции μ_c шара относительно центра выражается формулой

$$\mu_c = \lim_{n\to\infty} \mu'_c = \frac{3MR^2}{5}.$$

Моменты инерции шара относительно координатных плоскостей будут одинаковыми. Учитывая, что $\mu_c = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, получим

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \frac{MR^2}{5}.$$

Поэтому

$$J^c_{11} = J^c_{22} = J^c_{33} = \frac{2MR^2}{5}.$$

Значение μ_c можно получить с помощью интегрирования. Сложим все массы, лежащие в тонком сферическом слое, радиус которого равен ρ, а толщина $d\rho$. Получим

$$dM = \frac{3M}{4\pi R^3} 4\pi\rho^2\, d\rho.$$

Следовательно,

$$\mu_c = \int_0^R \rho^2\, dM = \frac{3M}{R^3}\int_0^R \rho^4\, d\rho = \frac{3MR^2}{5}. \diamond$$

Пример 1.14.11. Определить центральный тензор инерции однородного сплошного эллипсоида массы M, граница которого задана в декартовых осях (x_1, x_2, x_3) посредством уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Уравнение эллипсоида задано в каноническом виде. Следовательно, оси координат служат осями симметрии эллипсоида. Центр масс совпадает с началом координат. Поэтому оси координат будут главными центральными осями инерции. Сделаем замену

$$x_1 = ay_1, \quad x_2 = by_2, \quad x_3 = cy_3,$$

оставив неизменным направление осей координат. В результате эллипсоид превращается в шар единичного радиуса. Разобьем эллипсоид на элементы малого объема. Пусть каждый элемент имеет массу δM_i и координаты (x_1^i, x_2^i, x_3^i). Тогда

$$\Pi_1 \approx \sum_i (x_1^i)^2\delta M_i = a^2\sum_i (y_1^i)^2\delta M_i,$$

$$\Pi_2 \approx \sum_i (x_2^i)^2\delta M_i = b^2\sum_i (y_2^i)^2\delta M_i,$$

$$\Pi_3 \approx \sum_i (x_3^i)^2\delta M_i = c^2\sum_i (y_3^i)^2\delta M_i.$$

Потребуем, чтобы масса каждого элемента при преобразованиях координат не менялась. Уменьшая максимальный объем элементов, в пределе получим точные соотношения

$$\Pi_1 = a^2\Pi'_1, \quad \Pi_2 = b^2\Pi'_1, \quad \Pi_3 = c^2\Pi'_1,$$

где Π'_1 — момент инерции единичного шара массы M относительно плоскости большого круга. Воспользовавшись результатом примера 1.14.10, найдем

$$\Pi_1 = \frac{Ma^2}{5}, \quad \Pi_2 = \frac{Mb^2}{5}, \quad \Pi_3 = \frac{Mc^2}{5}.$$

Главные центральные моменты инерции выражаются формулами

$$J^c_{11} = \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{M(b^2+c^2)}{5}, \quad J^c_{22} = \frac{M(a^2+c^2)}{5}, \quad J^c_{33} = \frac{M(a^2+b^2)}{5}.$$

Центральный эллипсоид инерции задается уравнением

$$\frac{M}{5}[(b^2+c^2)x_1^2 + (a^2+c^2)x_2^2 + (a^2+b^2)x_3^2] = 1.$$

Полуоси его равны

$$\sqrt{\frac{5}{M(b^2+c^2)}}, \quad \sqrt{\frac{5}{M(a^2+c^2)}}, \quad \sqrt{\frac{5}{M(a^2+b^2)}}.$$

Примем, что для осей заданного в условии эллипсоида выполнено соотношение

$$a > b > c.$$

Тогда

$$b^2 + c^2 < a^2 + c^2 < a^2 + b^2.$$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{5}{M(b^2+c^2)}} > \sqrt{\frac{5}{M(a^2+c^2)}} > \sqrt{\frac{5}{M(a^2+b^2)}}.$$

Следовательно, центральный эллипсоид инерции "отслеживает" форму эллипсоида, заданного в условии. Большой полуоси заданного эллипсоида соответствует большая полуось эллипсоида инерции, средней — средняя, меньшей — меньшая.

Контрольные вопросы к главе 1

1.1. Можно ли утверждать, что любой направленный отрезок есть вектор? Если нет, то приведите пример, подтверждающий Ваше мнение.

1.2. Доказать, что расстояние, введенное с помощью скалярного произведения векторов, удовлетворяет неравенству треугольника.

1.3. Посредством какой из перечисленных форм можно определить скалярное произведение векторов?

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2;\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2;\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2);$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2).$$

1.4. Пусть задан базис $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, в нем вектор $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$ и метрический тензор $G=(g_{ij})$. Показать, что существуют ровно $n-1$ линейно независимых векторов $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\mathbf{e}_i$, ортогональных вектору $\mathbf{x}$.

1.5. Показать, что с помощью выбора подходящего базиса всякий метрический тензор можно привести к диагональному виду. Единственным ли способом это можно сделать?

1.6. Пусть $G=(g_{ij})$ — метрический тензор. Показать, что $\det G\neq 0$.

1.7. Показать, что если ортонормированный базис в результате линейного преобразования перешел в новый ортонормированный базис, то матрица преобразования является ортогональной.

1.8. На плоскости с декартовой прямоугольной системой координат заданы векторы, образующие между собой угол $\pi/4$. Найти метрический тензор, для которого они ортонормированы.

1.9. Указать геометрический смысл модуля результата векторного умножения двух векторов.

1.10. Указать геометрический смысл смешанного произведения трех векторов.

1.11. Каким условием связаны Плюккеровы координаты скользящего вектора?

1.12. Почему момент пары скользящих векторов есть свободный вектор?

1.13. Как меняется при изменении полюса проекция суммарного момента на направление, перпендикулярное суммарному вектору?

1.14. Пусть $\mathbf{R}\times\mathbf{M}=0$, $\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}=0$. К какому простейшему виду можно привести такую систему скользящих векторов?

1.15. Как зависит центр системы параллельных скользящих векторов от направления этих векторов?

1.16. Обобщить понятие центра масс для бесконечного ограниченного множества точечных масс. Доказать теорему 1.7.1 для такого множества.

1.17. Используя свойства функции $y=\sqrt{x}$ и свойства центра масс, доказать неравенство

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2,\quad t_i>0.$$

1.18. Показать, что матрица тензора инерции симметрична в любой системе координат.

1.19. При каком условии существуют две неколлинеарные оси, относительно которых моменты инерции множества точечных масс равны нулю?

1.20. Показать, что если множеству точечных масс соответствует эллипсоид инерции, то матрица тензора инерции невырождена в любой системе координат.

1.21. Пусть поверхность $\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{x})=1$ (см. § 1.8) есть цилиндр с осью $\mathbf{k}$. Найти нормаль к этой поверхности. Показать, что этот цилиндр прямой круговой.

1.22. Доказать, что $J_{12}=J_{13}=0$, где J_{12}, J_{13} — центробежные моменты инерции, есть необходимое и достаточное условие того, чтобы ось $\mathbf{e}_1$ была главной осью инерции.

1.23. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, имеющий начало в точке O и конец в центре масс множества $\mathcal{Q}$ точечных масс, A, B, C — главные центральные моменты инерции множества $\mathcal{Q}$. Найти момент инерции множества $\mathcal{Q}$ относительно оси c направляющим вектором $\mathbf{e}$, проходящей через точку O.

1.24. Доказать, что если точечные массы множества $\mathcal{Q}$ расположены симметрично относительно плоскости $\mathcal{P}$, причем симметричным точкам отвечают одинаковые массы, то

a) центр масс системы принадлежит плоскости $\mathcal{P}$;

b) одна из главных осей инерции множества $\mathcal{Q}$ перпендикулярна плоскости $\mathcal{P}$.

1.25. Доказать, что если точечные массы множества $\mathcal{Q}$ симметричны относительно оси, причем симметричным точкам отвечают равные массы, то

a) центр масс множества $\mathcal{Q}$ принадлежит этой оси;

b) одна из главных осей инерции множества $\mathcal{Q}$ совпадает с этой осью.

1.26. Доказать теорему Гюйгенса-Штейнера без привлечения леммы 1.10.1, воспользовавшись непосредственно определением осевого момента инерции.

1.27. Применив теорему Гюйгенса-Штейнера, доказать, что осевой момент инерции не зависит от расположения точки O на соответствующей оси.

1.28. Методом геометрии масс доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой точки, взятой на описанной около него или вписанной в него окружности, есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

1.29. Пусть точечные массы m_1, m_2, m_3 расположены на концах координатных ортов. Найти тензор инерции. Показать, что этот тензор удовлетворяет теореме 1.12.1.

1.30. Каков критерий тензора инерции в главных осях инерции?

1.31. В примерах 1.14.1 и 1.14.2 указать вид поверхности $\mathcal{F}(\mathbf{x},\mathbf{x})=1$ (см. § 1.8).

1.32. Определить центральный тензор инерции для гантели, состоящей из однородного стержня массы m и длины l и прикрепленных к концам стержня одинаковых однородных шаров массы M и радиуса r каждый.

Глава 2

Кинематика

Кинематика — это раздел механики, в котором с геометрической точки зрения изучаются пространственно-временные свойства движения различных объектов. С целью практических приложений значительное внимание уделяется рациональным методам расчета скоростей и ускорений отдельных точек, как изолированных, так и входящих в состав абсолютно твердых тел. Владение такими методами полезно при разработке реальных механических систем, выявлении структуры их виртуальных перемещений, составлении уравнений динамики.

Движение происходит во времени $t\in I\subset R$, где I — заданный интервал множества R действительных чисел. Выберем множество $X\subset E^3$. Задать движение X — значит указать, какое положение в пространстве E^3 займет любая точка из X в произвольный момент времени $t\in I$. Множество одновременных положений точек из X для фиксированного времени t обозначим $X(t)$. Движение будем рассматривать как взаимно однозначное преобразование

$$X\longrightarrow X(t),\quad t\in I.$$

В зависимости от особенностей движения к этому преобразованию предъявляются специальные требования. В частности, примем, что оно по крайней мере дважды дифференцируемо по времени и что существует значение $t_0\in I$, для которого $X=X(t_0)$.

§ 2.1. Скорость точки

Пусть множество X содержит лишь одну точку. Положение точки X в пространстве E^3 будем задавать ее радиусом-вектором $\mathbf{r}$ с началом в фиксированном полюсе O. При движении точки ее радиус-вектор меняется в зависимости от времени:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t).$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ задает *закон движения* точки. Кривая в E^3, состоящая из последовательных положений точки $X(t)$ при ее движении, называется *траекторией* точки.

Рассмотрим два положения точки $X(t)$ и $X(t+\sigma)$, соответствующие моментам времени t и $t+\sigma$. Точке $X(t)$ отвечает радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$, точке $X(t+\sigma)$ — радиус-вектор $\mathbf{r}(t)+\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\sigma)$. Величина $\Delta\mathbf{r}$ есть *вектор перемещения* точки за время σ. Отношение вектора $\Delta\mathbf{r}$ ко времени перемещения называется *средней скоростью* за время σ:

$$\mathbf{v}_{cp}=\Delta\mathbf{r}/\sigma.$$

Предел этого отношения при $\sigma\to 0$ называется *скоростью* точки:

$$\mathbf{v}=\lim_{\sigma\to 0}\mathbf{v}_{cp}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\sigma}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{\mathbf{r}}.$$

Выражение $\mathbf{r}$ есть общеупотребительное обозначение производной от вектора $\mathbf{r}$ по времени.

По отношению к траектории точки вектор $\Delta\mathbf{r}$ задает секущую. При $\sigma\to 0$ вектор $\mathbf{v}_{cp}$ займет предельное положение, совпадающее с положением *касательной к траектории* в точке $X(t)$.

В пространстве E^3 введем декартову систему координат с началом в точке O и условно неподвижным ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Тогда

$$\mathbf{r}=r_1\mathbf{e}_1+r_2\mathbf{e}_2+r_3\mathbf{e}_3,$$

где числа r_1, r_2, r_3 суть координаты вектора $\mathbf{r}$ в указанном базисе. При движении точки $X(t)$ координаты вектора $\mathbf{r}$ представляют собой функции времени и потому в репере $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3=\frac{dr_1}{dt}\mathbf{e}_1+\frac{dr_2}{dt}\mathbf{e}_2+\frac{dr_3}{dt}\mathbf{e}_3,$$

так что компоненты вектора $\mathbf{v}$ получаются дифференцированием по времени координат движущейся точки.

Модуль скорости точки можно выразить следующим образом:

$$v=|\mathbf{v}|=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}=\sqrt{\frac{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}{dt^2}}=\frac{ds}{dt},$$

где ds — дифференциал длины дуги траектории точки. Направление отсчета дуги совпадает с направлением движения точки вдоль траектории: $ds/dt>0$. Сместим вектор $\mathbf{v}(t)$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с полюсом O. Получим вектор $\mathbf{V}(t)$. При изменении t конец вектора $\mathbf{V}(t)$ опишет в пространстве кривую, называемую *годографом скорости*. В дальнейшем векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$ будем отождествлять.

Пусть скорость точки известна в каждый момент времени. Тогда с точностью до векторной константы закон движения может быть

восстановлен посредством квадратур. В самом деле,

$$\mathbf{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{v}(t)\,dt+\mathbf{c}=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\left[\int_{t_0}^{t}v_i(t)\,dt+c_i\right].$$

Постоянная $\mathbf{c}=c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3$ определяется по положению точки в некоторый начальный момент времени t_0. Вектор $\mathbf{c}$ можно сделать равным нулю, специально выбрав полюс O.

Простейшим можно считать движение, при котором $\mathbf{v}$ — постоянный вектор. Такое движение называется *равномерным*. Его закон имеет вид

$$\mathbf{r}(t)=(t-t_0)\mathbf{v}+\mathbf{c}.$$

Траектория любого равномерного движения есть прямая линия.

Пример 2.1.1. Пусть x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты точки $X(t)$, и закон движения имеет вид

$$x_1=a+R\cos\omega t,\quad x_2=b+R\sin\omega t,\quad x_3=c,$$

где a, b, c, ω, R — постоянные. Траектория получается после исключения t:

$$(x_1-a)^2+(x_2-b)^2=R^2,\quad x_3=c$$

и представляет собой окружность с центром в точке (a,b,c), расположенную в плоскости, перпендикулярной к третьей оси. Компоненты скорости найдем, дифференцируя закон движения:

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=-R\omega\sin\omega t,\quad v_2=\frac{dx_2}{dt}=R\omega\cos\omega t,\quad v_3=0.$$

Следовательно, годограф скорости — это окружность радиуса $R\omega$ с центром в начале координат, лежащая в плоскости первой и второй координатных осей.◇

§ 2.2. Ускорение точки

Вектор ускорения определяется как скорость движения конца вектора $\mathbf{v}(t)$ по годографу. Другими словами, *ускорение*

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}$$

есть вторая производная от радиуса-вектора по времени. Символ $\ddot{\mathbf{r}}$ часто используется для обозначения ускорения.

Если ускорение точки задано как функция времени, то скорость точки может быть восстановлена с точностью до векторной постоянной:

$$\mathbf{v}=\int_{t_0}^{t}\mathbf{w}(t)\,dt+\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\left[\int_{t_0}^{t}w_i\,dt+b_i\right].$$

Вектор $\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3$ есть скорость точки в момент t_0. Поэтому закон движения по заданному ускорению восстанавливается с точностью до равномерного движения.

Простейшим ускоренным движением можно считать движение с постоянным вектором ускорения $\mathbf{w}$. Оно называется *равноускоренным движением*. Его закон имеет вид

$$\mathbf{r}(t)=\frac{(t-t_0)^2}{2}\mathbf{w}+(t-t_0)\mathbf{v}_0+\mathbf{r}_0.$$

Тем самым равноускоренное движение происходит в плоскости векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}_0$, проходящей через точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$. Если $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}_0$ коллинеарны (одинаково или противоположно направлены), то движение происходит по прямой линии. В общем случае равноускоренного движения траектория представляет собой параболу.

Запишем скорость точки $X(t)$ в виде $\mathbf{v}=v\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к траектории. Пусть s — длина дуги траектории. Тогда ускорение $\mathbf{w}$ выражается равенством

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds},$$

так как $v=ds/dt$. Коль скоро $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, $\boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{\tau}/ds=0$ и, следовательно, вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds$ принадлежит плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\tau}$. Положим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, называемый *главной нормалью* к траектории. Скалярная величина ρ называется *радиусом кривизны* в рассматриваемой точке $X(t)$ траектории. Плоскость векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$, проходящая через точку $X(t)$, называется *соприкасающейся плоскостью*. В соприкасающейся плоскости возьмем окружность радиуса ρ. Центр ее поместим на главной нормали на расстоянии ρ от точки $X(t)$ в направлении вектора $\boldsymbol{\nu}$. Получим *соприкасающуюся окружность* к траектории в точке $X(t)$. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ служит общей касательной к этим двум кривым в точке $X(t)$. Значения $d\boldsymbol{\tau}/ds$, вычисленные

в точке $X(t)$ для соприкасающейся окружности и для траектории, совпадают.

Определим единичный вектор $\boldsymbol{\beta}$ *бинормали к траектории* по формуле

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}.$$

Оси координат с началом в точке $X(t)$ и направляющими единичными взаимно перпендикулярными базисными векторами $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ называются *естественными осями*.

Представим ускорение в виде суммы

$$\mathbf{w}=w_\tau\boldsymbol{\tau}+w_\nu\boldsymbol{\nu}+w_\beta\boldsymbol{\beta}.$$

Теорема 2.2.1. *Проекции ускорения на естественные оси даются формулами*

$$w_\tau=\dot{v}=\frac{dv}{dt},\quad w_\nu=\frac{v^2}{\rho},\quad w_\beta=0.$$

Доказательство. Учитывая результат дифференцирования вектора $\mathbf{v}=v\boldsymbol{\tau}$ и используя понятие радиуса кривизны, найдем

$$\mathbf{w}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}.\square$$

Следствие 2.2.1. *Ускорение точки принадлежит соприкасающейся плоскости. Можно также сказать, что соприкасающаяся плоскость натянута на векторы скорости и ускорения.*

Модуль ускорения определяется равенством

$$w=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

Если векторы скорости и ускорения коллинеарны, то соприкасающаяся плоскость не определена, а $\rho=\infty$. Так, например, будет, когда траектория движения точки представляет собой прямую. То же будет и в точках перегиба траектории.

Отметим, что в общем случае проекция w_ν ускорения аналогична центростремительному ускорению при движении точки по окружности.

Пример 2.2.1. Пусть точка движется в соответствии с законом

$$r_1=R\cos\omega t,\quad r_2=R\sin\omega t,\quad r_3=at.$$

Определить траекторию и найти ее радиус кривизны.

Решение. Траектория представляет собой винтовую линию на поверхности кругового цилиндра радиуса R. Образующая цилиндра параллельна третьей оси. Найдем векторы скорости и ускорения:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=(-R\omega\sin\omega t,\quad R\omega\cos\omega t,\quad a),$$

$$\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}=(-R\omega^2\cos\omega t,\quad -R\omega^2\sin\omega t,\quad 0).$$

Видим, что $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$. Поэтому $w_\nu=w$. Отсюда

$$w_\nu=\frac{v^2}{\rho}=R\omega^2,\quad \rho=\frac{R^2\omega^2+a^2}{R\omega^2}.$$

В данной задаче, если $a\neq 0$, радиус кривизны ρ оказывается больше радиуса R цилиндра, поверхности которого принадлежит траектория.◇

§ 2.3. Закон движения твердого тела

Твердым телом называется множество точек, попарные расстояния между которыми постоянны. *Закон движения твердого тела* относительно некоторого репера есть правило, позволяющее однозначно установить в этом репере закон движения любой, произвольно взятой точки тела.

Лемма 2.3.1. *Для определения закона движения твердого тела достаточно задать законы движения трех его точек, не лежащих на одной прямой.*

Доказательство. Пусть относительно некоторого репера с началом в точке O заданы законы движения трех точек твердого тела

$$\mathbf{r}_1(t),\quad \mathbf{r}_2(t),\quad \mathbf{r}_3(t),$$

не лежащих на одной прямой. Обозначим

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\quad \mathbf{R}_2=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1.$$

По условию леммы

$$\frac{d|\mathbf{R}_1|}{dt}=\frac{d|\mathbf{R}_2|}{dt}=\frac{d|\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1|}{dt}=0.$$

Единичный вектор $\mathbf{e}_3'$ определим равенством

$$\mathbf{e}_3'=\frac{\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2|}.$$

Этот вектор существует, так как заданные точки не принадлежат одной прямой.

Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки тела. Тогда справедливо равенство

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}(t) = \lambda_1\mathbf{R}_1 + \lambda_2\mathbf{R}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3',$$

где λ_1, λ_2, λ_3 не зависят от времени. В самом деле, умножив это равенство скалярно сначала на $\mathbf{R}_1$, а затем на $\mathbf{R}_2$, получим относительно λ_1, λ_2 систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_1 = \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2,$$

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_2 = \lambda_1\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{R}_2 + \lambda_2 R_2^2.$$

Определитель этой системы

$$\Delta = R_1^2R_2^2[1-\cos^2(\widehat{\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2})] = |\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2|^2$$

отличен от нуля. Следовательно, λ_1 и λ_2 всегда существуют и постоянны. Постоянным будет и скаляр λ_3, задающий расстояние от точки до плоскости векторов $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, неизменно связанных с телом. Таким образом, имеем взаимно однозначное соответствие между точками тела и тройками постоянных коэффициентов λ_1, λ_2, λ_3. Закон движения произвольной точки тела дается выражением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}_1(t).\square$$

Теорема 2.3.1. *Закон произвольного движения твердого тела есть аффинное линейное преобразование вида*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}'(t),$$

где $\mathbf{x}$ — постоянный вектор, $\mathbf{A}(t)$ — ортогональный линейный оператор, зависящий от времени, $\mathbf{r}'(t)$ — радиус-вектор полюса, фиксированного в теле.

Доказательство. В соответствии с леммой 2.3.1 закон движения произвольной точки твердого тела можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \lambda_1\mathbf{R}_1 + \lambda_2\mathbf{R}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3' + \mathbf{r}_1,$$

где

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{e}_3' = \frac{\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2|},$$

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ — радиусы-векторы трех точек тела, не лежащих на одной прямой. В точке $\mathbf{r}_1$ возьмем три взаимно перпендикулярных единичных вектора

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{R}_1/R_1, \quad \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3'\times\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_3'.$$

В этом репере

$$\mathbf{R}_1 = R_1\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{R}_2 = R_2[\mathbf{e}_1'\cos(\widehat{\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2}) + \mathbf{e}_2'\sin(\widehat{\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2})].$$

Видим, что коэффициенты разложений векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ оказываются постоянными. Закон движения $\mathbf{r}(t)$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{r}(t) = x_1\mathbf{e}_1' + x_2\mathbf{e}_2' + x_3\mathbf{e}_3' + \mathbf{r}_1,$$

где координаты

$$x_1 = \lambda_1R_1 + \lambda_2R_2\cos(\widehat{\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2}), \quad x_2 = \lambda_2R_2\sin(\widehat{\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2}), \quad x_3 = \lambda_3$$

не зависят от времени.

Пусть движение тела рассматривается в ортонормированном репере $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с началом в точке O. Линейное преобразование $\mathbf{Ax}$ определим его действием над базисными векторами по формулам

$$\mathbf{Ae}_1 = \mathbf{e}_1', \quad \mathbf{Ae}_2 = \mathbf{e}_2', \quad \mathbf{Ae}_3 = \mathbf{e}_3'.$$

Тогда

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = x_1\mathbf{Ae}_1 + x_2\mathbf{Ae}_2 + x_3\mathbf{Ae}_3 = \mathbf{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = \mathbf{Ax},$$

где вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1(t)$ есть радиус-вектор точки тела с известным законом движения. Поскольку оператором $\mathbf{A}$ ортонормированный базис переводится в ортонормированный, то $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор (см.теорему 1.1.2).$\square$

Линейный оператор $\mathbf{A}$ зависит от времени. Линейное преобразование

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}'(t)$$

переводит множество X постоянных векторов $\mathbf{x}$ в множество векторов, определяющих последовательные положения точек твердого тела в пространстве. Как следует из доказательства теоремы 2.3.1, множество X, оператор $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{r}'$ будут разными в зависимости от выбора полюса в теле и базиса $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, жестко связанного с телом. Этот произвол можно использовать для получения наиболее удобного вида преобразования. Например, если известно, что одна точка твердого тела неподвижно закреплена, то полезно за полюс в

6*

теле принять именно ее. Тогда вектор $\mathbf{r}'$ будет постоянным. Его можно сделать равным нулю, если неподвижный полюс O совместить с этой точкой.

Если какая-либо ось тела сохраняет постоянную ориентацию относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то матрицу оператора $\mathbf{A}$ можно упростить. С этой целью полюс надо взять на указанной оси, а ее единичный вектор принять в качестве одного из базисных направлений, связанных с телом.

Смысл коэффициентов матрицы оператора $\mathbf{A}$ виден из следующей таблицы.

	$\mathbf{e}_1'$	$\mathbf{e}_2'$	$\mathbf{e}_3'$
$\mathbf{e}_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\mathbf{e}_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\mathbf{e}_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

По столбцам матрицы A стоят координаты связанных с телом векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, взятые в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а по строкам — координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, взятые в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$.

Пусть, например, вектор $\mathbf{e}_k'$ сохраняет постоянную ориентацию в пространстве. Тогда k-й столбец матрицы будет состоять из постоянных элементов. Если дополнительно потребовать, чтобы $\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_k'$, то на пересечении k-го столбца и p-й строки должна стоять единица, а остальные элементы k-го столбца и p-й строки будут нулями. В результате матрица A будет содержать только четыре зависящих от времени элемента.

§ 2.4. Движение вокруг неподвижной точки

Выше было показано, что закон движения конкретной точки твердого тела можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}'(t),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, имеющий начало в полюсе O, $\mathbf{r}'(t)$ — вектор с началом в том же полюсе, один и тот же для всех точек тела, $\mathbf{A}(t)$ — зависящий от времени ортогональный линейный оператор, $\mathbf{x}$ — постоянный вектор с началом в полюсе O, конкретизирующий точку тела. Конец вектора $\mathbf{x}$ принадлежит постоянному множеству X, с которым изучаемое твердое тело можно совместить, не изменяя расстояний между его точками.

В практических задачах множество X — так или иначе геометрически организованное ограничение в пространстве E^3 множество точек. Вместе с тем преобразование, определенное оператором $\mathbf{A}(t)$ и

вектором $\mathbf{r}'$, формально можно применить к любой точке пространства E^3. В этом смысле условимся считать, что твердое тело совпадает со всем пространством E^3, и будем говорить о *движении трехмерного пространства*. Таким образом, каждому движению твердого тела можно сопоставить движение связанного с ним трехмерного пространства и, наоборот, каждому произвольному движению пространства можно сопоставить движение включенного в него твердого тела.

Движение пространства E^3 есть композиция двух преобразований. Первое из них обусловлено оператором $\mathbf{A}$. Второе задает одинаковое смещение всех точек пространства на вектор $\mathbf{r}'$. Рассмотрим свойства первого преобразования:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Оно состоит в применении ортогонального оператора $\mathbf{A}$ к векторному пространству R^3. Множество таких операторов образует относительно их композиции группу, называемую *группой* $O(3)$.

Теорема 2.4.1. *Существует инвариантная прямая, точки которой при действии оператора $\mathbf{A}$ либо остаются на месте, либо зеркально отражаются.*

Доказательство. Если $\mathbf{e}$ — направляющий вектор такой прямой, то мы должны иметь

$$\mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e},$$

где λ — действительное число. Другими словами, $\mathbf{e}$ — собственный вектор оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ. Для определения λ служит характеристическое (вековое) уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где A — матрица оператора $\mathbf{A}$, E — единичная матрица. Относительно λ это уравнение — кубическое с вещественными коэффициентами. Оно имеет по крайней мере один вещественный корень λ_0. Корню λ_0 отвечает хотя бы один собственный вектор $\mathbf{e}_0$. Для этого вектора, учитывая ортогональность оператора $\mathbf{A}$, получим

$$\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_0 = \mathbf{Ae}_0\cdot\mathbf{Ae}_0 = \lambda_0^2\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_0.$$

Значит, $\lambda_0 = \pm1.\square$

Следствие 2.4.1. *Плоскость, проходящая через начало координат O перпендикулярно вектору $\mathbf{e}_0$, инвариантна относительно действия оператора $\mathbf{A}$.*

Выберем в пространстве R^3 ортонормированный правоориентированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ так, чтобы $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_0$. В этом базисе матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix},$$

так как $\mathbf{Ae}_3 = \lambda_0\mathbf{e}_3$, $\mathbf{Ae}_1 \perp \mathbf{e}_3$, $\mathbf{Ae}_2 \perp \mathbf{e}_3$. Очевидно, что матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональна. Условие ортогональности этой матрицы приводит к системе трех уравнений

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1.$$

Поскольку $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, то существует такой угол ϕ, что

$$a_{11} = \cos\phi, \quad a_{21} = \sin\phi.$$

Тогда

$$a_{12} = -\sin\phi, \quad a_{22} = \cos\phi \quad \text{или} \quad a_{12} = \sin\phi, \quad a_{22} = -\cos\phi.$$

Следовательно,

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Проанализируем действие оператора $\mathbf{A}$ для всех возможных сочетаний знаков величин $\det A$ и λ_0.

Вариант 1. $\det A = 1$, $\lambda_0 = 1$. Матрица A однозначно принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $\phi > 0$ соответствующий ей оператор выполняет поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_3$ на угол ϕ против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{e}_3$.

Вариант 2. $\det A = 1$, $\lambda_0 = -1$. Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Напишем характеристическое уравнение

$$(1+\lambda)[-(\cos^2\phi - \lambda^2) - \sin^2\phi] = 0.$$

Очевидны его решения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_0 = -1$. Матрица A симметрична. Значит, ее собственные векторы взаимно перпендикулярны. В базисе собственных векторов матрица A оператора $\mathbf{A}$ примет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым оператор $\mathbf{A}$ задает вращение на угол π вокруг первого собственного вектора.

Вариант 3. $\det A = -1$, $\lambda_0 = 1$. Для матрицы A получаем выражение

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица получается вследствие композиции зеркального отражения относительно плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$, и последующего поворота на угол ϕ вокруг вектора $\mathbf{e}_3$ (исходная правая система координат меняется на левую).

Вариант 4. $\det A = -1$, $\lambda_0 = -1$. В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица означает композицию поворота вокруг вектора $\mathbf{e}_3$ и зеркального отражения относительно плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}_3$. Так же, как и в варианте 3, правая система координат меняется на левую.

Теорема 2.4.2. *Ортогональные операторы, имеющие определитель, равный единице, образуют в $O(3)$ подгруппу.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ — ортогональные операторы, причем $\det A_1 = \det A_2 = 1$. Матрица композиции операторов получается как произведение матриц составляющих операторов. Имеем

$$\det A_1^T = \det A_2^T = 1 \quad \text{и} \quad \det(A_1A_2) = \det A_1 \det A_2 = 1.\square$$

Подгруппа ортогональных операторов в $O(3)$ с определителем, равным единице, называется *группой* $SO(3)$.

Следствие 2.4.2. (Эйлер). *Всякий оператор из $SO(3)$ имеет хотя бы одно собственное значение $\lambda = 1$. В связи с этим группа $SO(3)$ состоит из вращений вокруг всевозможных прямых, проходящих через полюс O. Эти вращения сохраняют ориентированность троек базисных векторов.*

Следствие 2.4.3. *Если действие ортогонального оператора в E^3 сохраняет ориентированность троек базисных векторов (отсутствуют зеркальные отражения), то этот оператор принадлежит группе $SO(3)$.*

Доказательство. Действие операторов с определителем, равным -1, проанализировано в вариантах 3 и 4. Оказалось, что такие операторы всегда содержат зеркальные отражения.$\square$

Определитель ортогонального оператора $\mathbf{A}$ непрерывно зависит от времени и, следовательно, при движении остается постоянным. Это означает, что репер, связанный с твердым телом, сохраняет свою ориентированность. В начальный момент его всегда можно выбрать той же ориентированности, что и неподвижный репер. При этих условиях определитель оператора $\mathbf{A}$ всегда будет равен $+1$. В дальнейшем ограничимся изучением действия операторов из группы $SO(3)$.

§ 2.5. Угловые координаты твердого тела

Пусть в пространстве E^3 выбран ортонормированный правоориентированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Рассмотрим движение твердого тела, определенное действием оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$:

$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{Ae}_i = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{e}_i^{(k)}, \quad \mathbf{e}_i^{(k)} = \mathbf{Ae}_i.$$

Видим, что оператор $\mathbf{A}$ преобразует вектор $\mathbf{x}$ таким образом, что этот вектор в ортонормированном правоориентированном базисе $\mathbf{e}_1^{(k)}$, $\mathbf{e}_2^{(k)}$, $\mathbf{e}_3^{(k)}$ имеет те же координаты, что и в исходном. Тем самым оператор $\mathbf{A}$ осуществляет *преобразование от базиса пространства к базису, связанному с твердым телом.*

Предположим, что $\mathbf{A}$ представляет собой композицию операторов $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)}\circ\mathbf{A}^{(2)}$, причем

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji}^{(1)}\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji}^{(2)}\mathbf{e}_j, \quad i = 1,2,3.$$

Обозначим

$$\mathbf{e}_i^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3.$$

Теорема 2.5.1. *Оператор $\mathbf{A}_2$ в композиции $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)}\circ\mathbf{A}^{(2)}$ преобразует векторы $\mathbf{e}_i^{(1)}$ в точности по тем же формулам, по каким он преобразует векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ пространства E^3.*

Доказательство. Применяя оператор $\mathbf{A}$, найдем

$$\mathbf{Ae}_i = \mathbf{A}^{(1)}\circ\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}^{(1)}\sum_{j=1}^3 a_{ji}^{(2)}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 a_{ji}^{(2)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 a_{ji}^{(2)}\mathbf{e}_j^{(1)}.\square$$

Следствие 2.5.1. *Столбцы матрицы оператора $\mathbf{A}^{(2)}$ суть компоненты векторов $\mathbf{e}_i^{(k)}$ конечного базиса, взятые относительно промежуточного базиса $\mathbf{e}_1^{(1)}$, $\mathbf{e}_2^{(1)}$, $\mathbf{e}_3^{(1)}$, полученного в результате действия оператора $\mathbf{A}^{(1)}$.*

Пусть

$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

исходный базис,

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)}, \mathbf{e}_3^{(1)})$$

промежуточный базис и

$$\mathbf{B}_k = (\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \mathbf{e}_3^{(k)})$$

конечный базис. Действие композиции $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)}\circ\mathbf{A}^{(2)}$ можно представить как следующую последовательность преобразований базисов:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{B}_1.$$

Другими словами, сначала с помощью оператора $\mathbf{A}^{(1)}$ осуществляется переход от базиса $\mathbf{B}_0$ к промежуточному базису $\mathbf{B}_1$, а затем с помощью оператора $\mathbf{A}^{(2)}$ выполняется переход от промежуточного базиса $\mathbf{B}_1$ к конечному базису $\mathbf{B}_k$. Напомним, что матрица композиции линейных операторов равна произведению их матриц, взятых в том же порядке, в котором операторы участвуют в композиции.

Пусть теперь указана последовательность ортонормированных базисов

$$\mathbf{B}_i = (\mathbf{e}_1^{(i)}, \mathbf{e}_2^{(i)}, \mathbf{e}_3^{(i)}), \quad i = 0,1,2,\ldots,k,$$

и линейные операторы $\mathbf{A}^{(i)}$ перехода от одного базиса к другому:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{A}^{(i)}\mathbf{B}_{i-1}, \quad i = 1,\ldots,k.$$

Тогда оператор $\mathbf{A}$, переводящий исходный базис $\mathbf{B}_0$ в конечный базис $\mathbf{B}_k$, можно найти как композицию

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)}\circ\mathbf{A}^{(2)}\circ\ldots\circ\mathbf{A}^{(k)},$$

а матрицу оператора $\mathbf{A}$ — как произведение матриц составляющих операторов.

Выясним теперь, какое минимальное число параметров требуется, чтобы однозначно определить положение твердого тела в пространстве. Всякому оператору $\mathbf{A} \in SO(3)$, взятому в конкретном ортонормированном базисе, отвечает ортогональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Условие ортогональности $A^TA = E$ приводит к шести уравнениям на коэффициенты a_{ij}:

$$\sum_{p=1}^3 a_{pi}a_{pj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad i,j = 1,2,3.$$

Всего коэффициентов девять. Следовательно, имеется три свободных параметра, полностью определяющих действие ортогонального оператора в E^3. Так как $\mathbf{A} \in SO(3)$, то дополнительно должно быть выполнено условие $\det A = 1$. Поскольку определитель ортогонального оператора равен 1 или -1, последнее условие, не уменьшая числа свободных параметров, сужает множество, которому они могут принадлежать.

Три параметра, однозначно определяющие оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$, могут быть выбраны различными способами. Укажем один из наиболее распространенных. Пусть требуется найти параметры оператора $\mathbf{A}$, действие которого состоит в том, что

$$\mathbf{e}_1^{(k)} = \mathbf{Ae}_1, \quad \mathbf{e}_2^{(k)} = \mathbf{Ae}_2, \quad \mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{Ae}_3,$$

где $\mathbf{e}_1^{(k)}$, $\mathbf{e}_2^{(k)}$, $\mathbf{e}_3^{(k)}$ — заданный произвольный ортонормированный правоориентированный базис. Пусть сначала $\mathbf{e}_3^{(k)} \neq \mathbf{e}_3$. Построим промежуточные базисы

$$\mathbf{e}_1^{(2)} = \frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3^{(k)}}{|\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3^{(k)}|}, \quad \mathbf{e}_2^{(2)} = \mathbf{e}_3^{(k)}\times\mathbf{e}_1^{(2)}, \quad \mathbf{e}_3^{(2)} = \mathbf{e}_3^{(k)}.$$

$$\mathbf{e}_1^{(1)} = \mathbf{e}_1^{(2)}, \quad \mathbf{e}_2^{(1)} = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1^{(1)}, \quad \mathbf{e}_3^{(1)} = \mathbf{e}_3.$$

Оба базиса, как нетрудно видеть, — правоориентированные. Переход от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_1^{(k)}$, $\mathbf{e}_2^{(k)}$, $\mathbf{e}_3^{(k)}$ можно представить в виде последовательности

$$\mathbf{B}_0 \xrightarrow{\mathbf{A}^{(1)}} \mathbf{B}_1 \xrightarrow{\mathbf{A}^{(2)}} \mathbf{B}_2 \xrightarrow{\mathbf{A}^{(3)}} \mathbf{B}_k.$$

Преобразование от базиса $\mathbf{B}_2$ к базису $\mathbf{B}_k$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Матрица $A^{(3)}$ описывает поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Угол этого поворота обозначим φ и назовем *углом собственного вращения*. Матрица оператора $\mathbf{A}^{(3)}$ имеет вид

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переход от базиса $\mathbf{B}_1$ к базису $\mathbf{B}_2$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_1^{(1)}$. Матрица $A^{(2)}$ описывает поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_1^{(1)}$. Угол этого поворота обозначим ϑ и назовем *углом нутации*. Матрица оператора $\mathbf{A}^{(2)}$ имеет вид

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Переход от базиса $\mathbf{B}_0$ к базису $\mathbf{B}_1$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_3$. Матрица $A^{(1)}$ описывает поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_3$. Угол этого поворота обозначим ψ и назовем *углом прецессии*. Матрица оператора $\mathbf{A}^{(1)}$ имеет вид

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{A}$ есть композиция операторов: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \circ \mathbf{A}^{(2)} \circ \mathbf{A}^{(3)}$, а его матрица вычисляется как произведение матриц:

$$A = A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}.$$

Углы ψ, ϑ, φ носят название *углов Эйлера*.

Теорема 2.5.2. *Существуют углы Эйлера, задающие произвольное положение твердого тела относительно базиса* $\mathbf{B}_0$.

Доказательство. Если $\mathbf{e}_3^{(k)} \neq \mathbf{e}_3$, то справедливость теоремы следует из определения углов Эйлера. Если $\mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{e}_3$, то базис $\mathbf{B}_2$ не определен. Его можно тогда принять совпадающим с базисом $\mathbf{B}_1$. Будем иметь $\vartheta = 0$. Получим композицию $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} \circ \mathbf{A}^{(3)}$, которую можно заменить одним поворотом на угол $\varphi + \psi$ вокруг вектора $\mathbf{e}_3$.□

Рис. 2.5.1 иллюстрирует последовательность поворотов при использовании углов Эйлера. Сначала происходит поворот на угол прецессии ψ вокруг вектора $\mathbf{e}_3$, и базис $\mathbf{B}_0$ переходит в базис

$$(\mathbf{e}_1^{(1)},\ \mathbf{e}_2^{(1)},\ \mathbf{e}_3).$$

Затем выполняется поворот на угол нутации ϑ вокруг вектора $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и базис

$$(\mathbf{e}_1^{(1)},\ \mathbf{e}_2^{(1)},\ \mathbf{e}_3)$$

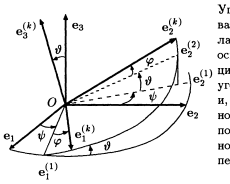
переходит в

$$(\mathbf{e}_1^{(1)},\ \mathbf{e}_2^{(2)},\ \mathbf{e}_3^{(k)}).$$

Наконец, поворот на угол собственного вращения φ переводит базис

$$(\mathbf{e}_1^{(1)},\ \mathbf{e}_2^{(2)},\ \mathbf{e}_3^{(k)})$$

в базис $\mathbf{B}_k$, жестко связанный с телом. Прямая с направляющим вектором $\mathbf{e}_1^{(1)}$, проходящая через точку O, называется *линией узлов*.

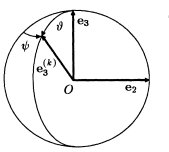


Углы Эйлера задают последовательность вращений: сначала на угол прецессии ψ вокруг оси $\mathbf{e}_3$, затем на угол нутации ϑ вокруг повернутого на угол ψ положения первой оси и, наконец, на угол собственного вращения φ вокруг нового положения третьей координатной оси, получившегося после первых двух поворотов.

Рис. 2.5.1. Углы Эйлера

Представляет интерес аналогия углов Эйлера ψ и ϑ полярным координатам точки на плоскости. Концы единичных векторов принадлежат сфере единичного радиуса с центром в точке O . На рис. 2.5.2 условно изображена такая единичная сфера. Положение конца вектора $\mathbf{e}_3^{(k)}$ на ней фиксируется следующим образом. Углом ψ задается положение дуги большого круга, плоскость которого проходит через вектор $\mathbf{e}_3$ и содержит вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Положение вектора $\mathbf{e}_3^{(k)}$ в этой плоскости задается углом нутации ϑ. Угол ψ аналогичен полярному углу, а угол ϑ — полярному радиусу.

Углы Эйлера доставляют минимальный набор координат, определяющих положение твердого тела. Когда они заданы, матрица оператора $\mathbf{A}$ вычисляется однозначно. Обратное неверно. Одному и тому же оператору $\mathbf{A}$ отвечает множество наборов углов Эйлера, так как каждый из углов может быть найден с точностью до слагаемого, кратного 2π. Чтобы избавиться от этого неудобства, следует учесть,



Дуга большого круга между точками пересечения осей $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_3^{(k)}$ со сферой отвечает углу нутации и аналогична полярному радиусу. Угол прецессии задает вращение этой дуги вокруг вектора $\mathbf{e}_3$ и аналогичен полярному углу. Угол собственного вращения осуществляется вокруг оси $\mathbf{e}_3^{(k)}$, и к отмеченной аналогии отношения не имеет.

Рис. 2.5.2. Аналогия углов Эйлера полярным координатам

по возможности, дополнительную информацию о том, как тело попало в заданное положение. В частности, если известно, например, что углы ψ, ϑ, φ не превосходят 2π и $\vartheta \neq 0$, то соответствие между оператором $\mathbf{A}$ и углами Эйлера будет взаимно однозначным. Вместе с тем если $\vartheta = 0$, то по матрице A можно восстановить только сумму $\psi + \varphi$ и мы имеем случай существенного вырождения.

Приведем еще один способ введения угловых координат, иногда более удобный, чем способ Эйлера, поскольку он позволяет исключить вырождение при $\mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{e}_3$. Пусть, как и прежде, действие оператора $\mathbf{A}$ состоит в том, что

$$\mathbf{Ae}_1 = \mathbf{e}_1^{(k)},\quad \mathbf{Ae}_2 = \mathbf{e}_2^{(k)},\quad \mathbf{Ae}_3 = \mathbf{e}_3^{(k)}.$$

Выберем следующую последовательность промежуточных базисов:

$$\mathbf{e}_1^{(2)} = \frac{(\mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_1) \times \mathbf{e}_3^{(k)}}{|\mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_1|},\quad \mathbf{e}_2^{(2)} = \frac{\mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_3^{(k)} \times \mathbf{e}_1|},\quad \mathbf{e}_3^{(2)} = \mathbf{e}_3^{(k)}.$$

$$\mathbf{e}_1^{(1)} = \mathbf{e}_1,\quad \mathbf{e}_2^{(1)} = \mathbf{e}_2^{(2)},\quad \mathbf{e}_3^{(1)} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2^{(2)}.$$

Переход от базиса $\mathbf{B}_2$ к базису $\mathbf{B}_k$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Соответствующий оператор $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ задает поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Угол этого поворота обозначим γ. Матрица оператора $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ имеет вид

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переход от базиса $\mathbf{B}_1$ к базису $\mathbf{B}_2$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_2^{(2)}$. Оператор $\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}$ задает поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_2^{(2)}$. Угол этого

поворота обозначим β. Матрица оператора $\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}$ имеет вид

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Переход от базиса $\mathbf{B}_0$ к базису $\mathbf{B}_1$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_1$. Оператор $\tilde{\mathbf{A}}^{(1)}$ задает поворот вокруг вектора $\mathbf{e}_1$. Угол этого поворота обозначим α. Матрица оператора $\tilde{\mathbf{A}}^{(1)}$ имеет вид

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ можно выразить с помощью композиции

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$$

операторов, отличных от операторов, получающихся при использовании углов Эйлера. Углы α, β, γ называются *карда́новыми углами* (иногда углами Брайнта). Они задают последовательность промежуточных базисов путем поворотов вокруг каждой из трех координатных осей в указанном порядке. Для карданových углов возможны различные варианты. Примером могут служить *углы Крылова*, когда последовательность промежуточных базисов получается посредством поворотов сначала вокруг второй неподвижной оси (тангаж, килевая качка), затем вокруг получившегося положения первой оси (крен, боковая качка) и, наконец, вокруг получившегося после первых двух поворотов положения третьей оси (рыскание). Углы Крылова (их еще иначе называют *корабельными углами*) или им подобные (например, *самолетные углы*) часто используются при исследовании движения кораблей, самолетов и других управляемых движущихся объектов. При этом вектор $\mathbf{e}_1^{(k)}$ выбирается по направлению продольной оси объекта, а ось $\mathbf{e}_1$ близка к среднему направлению движения вдоль продольной оси.

Теорема 2.5.3. *Существуют кардановы углы, задающие произвольное положение твердого тела относительно базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Доказательство. Если $\mathbf{e}_3^{(k)} \neq \mathbf{e}_1$, то справедливость утверждения теоремы следует из определения карданových углов. Если $\mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{e}_1$, то базис $\mathbf{B}_2$ не определен. Вектор $\mathbf{e}_2^{(2)}$ можно тогда принять произвольным в плоскости $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. В частности, его можно взять совпадающим с $\mathbf{e}_2$. Тогда будем иметь $\alpha = 0$. Оператор $\mathbf{A}$ окажется композицией $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$, которая означает сначала поворот на

угол $\beta = \pi/2$ вокруг неподвижной оси $\mathbf{e}_2$ и поворот на угол γ вокруг оси $\mathbf{e}_3^{(k)}$, совпадающей с осью $\mathbf{e}_1$.□

Рис. 2.5.3 иллюстрирует последовательность поворотов при использовании карданových углов. Сначала происходит поворот вокруг оси $\mathbf{e}_1$ на угол α, и базис $\mathbf{B}_0$ переходит в базис

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(1)}).$$

Затем поворот на угол β вокруг вектора $\mathbf{e}_2^{(2)}$ переводит базис

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(1)})$$

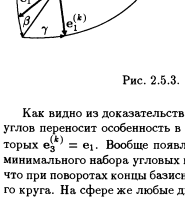
в базис

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(k)}).$$

Наконец, поворот на угол γ переводит базис

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)}, \mathbf{e}_3^{(k)})$$

в базис $\mathbf{B}_k$.



В отличие от углов Эйлера кардановы углы определяют угловое положение репера, жестко связанного с твердым телом, последовательными поворотами сначала вокруг первой неподвижной координатной оси, затем вокруг образа второй координатной оси, получившегося после первого поворота, и затем вокруг образа третьей координатной оси, получившегося после первых двух поворотов.

Рис. 2.5.3. Кардановы углы

Как видно из доказательства теоремы 2.5.3, введение карданových углов переносит особенность в те положения твердого тела, для которых $\mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{e}_1$. Вообще появление особенности при использовании минимального набора угловых координат неизбежно и связано с тем, что при поворотах концы базисных векторов описывают дуги большого круга. На сфере же любые две окружности большого круга имеют пересечение.

Использование углов Эйлера или карданových углов не встречает принципиальных затруднений, когда углы элементарных поворотов задаются в зависимости от времени и требуется указать, в какое положение переходит твердое тело. Однако необходимость вычисления тригонометрических функций этих углов делает расчеты по определению матрицы оператора поворота не всегда эффективными. В ряде задач предпочтительным оказывается описание углового движения твердого тела с помощью параметров Эйлера, параметров Кэли-Клейна или кватернионов.

§ 2.6. Параметры Эйлера

Рассмотрим переход твердого тела из одного фиксированного положения в другое произвольное фиксированное положение, сохраняющий неподвижной некоторую точку O тела. Такое движение согласно следствию 2.4.2 может быть представлено как конечный поворот тела на некоторый угол α вокруг оси с единичным вектором $\mathbf{e}$ собственного направления соответствующего оператора $\mathbf{A}$. Пусть из конца вектора $\mathbf{e}$ угол α виден происходящим против хода часовой стрелки. Как и прежде обозначим $\mathbf{x}$ радиус-вектор точки твердого тела в его исходном положении, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор той же точки тела, получившийся в результате указанного перехода. Радиусы-векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{r}$ имеют начало в неподвижной точке O. Построим преобразование $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{r}$.

Теорема 2.6.1. *Преобразование вращения абсолютно твердого тела вокруг оси с направляющим вектором* $\mathbf{e}$ *на угол* α *выражается формулой*

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + 2q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}) + 2(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x})),$$

где скаляр $q_0 = \cos(\alpha/2)$ *и вектор* $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}\sin(\alpha/2)$.

Доказательство. Пусть сначала вектор $\mathbf{x}$ и вектор $\mathbf{e}$ неколлинеарны. Составим правоориентированный репер $O\mathbf{e}_1^{(1)}\mathbf{e}_2^{(1)}\mathbf{e}_3^{(1)}$ следующим образом:

$$\mathbf{e}_1^{(1)} = \frac{\mathbf{e} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{e})}{|\mathbf{e} \times \mathbf{x}|},\quad \mathbf{e}_2^{(1)} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{e} \times \mathbf{x}|},\quad \mathbf{e}_3^{(1)} = \mathbf{e}.$$

в этом репере рассматриваемое преобразование имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) + |\mathbf{e} \times \mathbf{x}|(\mathbf{e}_1^{(1)} \cos\alpha + \mathbf{e}_2^{(1)} \sin\alpha),$$

где первый член есть составляющая вектора $\mathbf{x}$, направленная вдоль вектора $\mathbf{e}$ и не меняющаяся при вращении вокруг этого вектора. Второй член задает преобразование вращения на угол α в плоскости,

перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$. Учтем выражения для векторов $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_2^{(1)}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{e} \times \mathbf{x})\sin\alpha + \mathbf{e} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{e})\cos\alpha.$$

Преобразуем двойное векторное произведение

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{x}$$

или

$$\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}).$$

Теперь получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + 2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x})(1 - \cos\alpha).$$

Отсюда и следует доказываемая формула. Заметим, что она справедлива и в том случае, когда векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$ коллинеарны.□

Разложим вектор $\boldsymbol{\alpha}$ теоремы 2.6.1 по базисным векторам неподвижного репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\alpha} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3.$$

Определение 2.6.1. Скалярные величины q_0, q_1, q_2, q_3, определяющие преобразование вращения в соответствии с теоремой 2.6.1, называются *параметрами Эйлера*.

Очевидно, что параметры Эйлера удовлетворяют условию

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Согласно следствию 2.4.2 параметры Эйлера существуют для любого оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$.

Теорема 2.6.2. *Зависимость компонент* a_{ij} *матрицы оператора* $\mathbf{A} \in SO(3)$ *от параметров Эйлера дается формулами*

$$a_{11} = 2(q_0^2 + q_1^2) - 1,\quad a_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3),\quad a_{13} = 2(q_1q_3 + q_0q_2),$$

$$a_{21} = 2(q_1q_2 + q_0q_3),\quad a_{22} = 2(q_0^2 + q_2^2) - 1,\quad a_{23} = 2(q_2q_3 - q_0q_1),$$

$$a_{31} = 2(q_1q_3 - q_0q_2),\quad a_{32} = 2(q_2q_3 + q_0q_1),\quad a_{33} = 2(q_0^2 + q_3^2) - 1.$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно проверить, во что переходят базисные векторы $\mathbf{e}_j$ при рассматриваемом преобразовании. Применяя теорему 2.6.1, найдем

$$\mathbf{e}_j' = \mathbf{e}_j + 2q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_j) + 2(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_j)).$$

Учтем, что

$$(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_j)) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_j\alpha^2,$$

и рассмотрим скалярные произведения

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j' = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j(1 - 2\alpha^2) + 2q_0\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i) + 2q_iq_j.$$

Но $\alpha^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 - q_0^2$. Пусть теперь $i = j$. Очевидно, что тогда $a_{ii} = 2(q_i^2 + q_0^2) - 1$, и мы получаем все диагональные члены матрицы A. В том случае, когда $i \neq j$, будем иметь

$$a_{ij} = 2(q_iq_j + q_0\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i)).$$

Перебирая последовательно индексы, найдем остальные члены искомой матрицы. В частности, пусть $i = 1$, $j = 2$. Имеем $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$, и, следовательно, $a_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3)$.□

Следствие 2.6.1. *На основании теоремы 2.6.2 заключаем, что матрица всякого оператора* $\mathbf{A} \in SO(3)$ *может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2(q_0^2+q_1^2)-1 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 & 2(q_0^2+q_2^2)-1 & 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 & 2q_2q_3 & 2(q_0^2+q_3^2)-1 \end{pmatrix} + 2q_0 \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 — *параметры Эйлера.*

Сформулируем правило вычисления параметров Эйлера q_0, q_1, q_2, q_3 по заданным компонентам a_{pk} матрицы A.

Теорема 2.6.3. *Пусть* $A = (a_{pk})$ — *матрица оператора* $\mathbf{A}$ *из* $SO(3)$. *Тогда параметры Эйлера* q_0, q_1, q_2, q_3 *можно найти с помощью одной из следующих систем уравнений*

I	*II*	*III*	*IV*
$4q_0^2 = 1 + \mathrm{Sp}\,A \neq 0$	$q_0 = 0$	$q_0 = 0$	$q_0 = 0$
$4q_0q_1 = a_{32} - a_{23}$	$2q_1^2 = 1 + a_{11} \neq 0$	$q_1 = 0$	$q_1 = 0$
$4q_0q_2 = a_{13} - a_{31}$	$2q_1q_2 = a_{12} = a_{21}$	$2q_2^2 = 1 + a_{22} \neq 0$	$q_2 = 0$
$4q_0q_3 = a_{21} - a_{12}$	$2q_1q_3 = a_{13} = a_{31}$	$2q_2q_3 = a_{23} = a_{32}$	$q_3^2 = 1$

Номер применяемой системы совпадает с номером первого отличного от нуля коэффициента в упорядоченном наборе (q_0, q_1, q_2, q_3).

Доказательство. Вычислим след матрицы A, используя теорему 2.6.2:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3}[2(q_0^2 + q_i^2) - 1] = 6q_0^2 - 3 + 2\sum_{i=1}^{3} q_i^2 = 4q_0^2 - 1,$$

так как $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ по определению параметров Эйлера. Отсюда

$$4q_0^2 = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Если окажется, что $q_0 \neq 0$, то, учитывая данные теоремой 2.6.2 выражения для a_{pk}, $p \neq k$, через параметры q_0, q_1, q_2, q_3, получаем систему уравнений I.

Пусть $q_0 = 0$. Тогда, применив следствие 2.6.1, заключаем, что матрица A симметричная. Коэффициент a_{11} выражается формулой

$$a_{11} = 2q_1^2 - 1.$$

Отсюда можно найти q_1. Если $q_1 \neq 0$, то получаем систему II. Если $q_1 = 0$, то применим уравнение

$$a_{22} = 2q_2^2 - 1,$$

позволяющее в этом случае найти q_2. При $q_2 \neq 0$ имеем систему III. При $q_2 = 0$ получим систему IV.□

Заметим, что каждая система уравнений теоремы 2.6.3 имеет ровно два решения, противоположных по знаку. Оба решения отвечают, как и следовало ожидать, вращению твердого тела на углы $\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Все эти углы дают одно и то же положение твердого тела в пространстве.

Пример 2.6.1. Пусть матрица оператора A задается углами Эйлера ψ, ϑ, φ, так что $A = A_\psi A_\vartheta A_\varphi$. Коэффициенты a_{pk} матрицы A выражаются формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi, \\ a_{12} &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi, \\ a_{13} &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ a_{21} &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi, \\ a_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi, \\ a_{23} &= -\cos\psi\sin\vartheta, \\ a_{31} &= \sin\vartheta\sin\varphi, \\ a_{32} &= \sin\vartheta\cos\varphi, \\ a_{33} &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Для расчета параметров q_0, q_1, q_2, q_3 воспользуемся теоремой 2.6.3. Вычислим $4q_0^2 = 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Подставим значения коэффициентов:

$$q_0^2 = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Пусть $q_0 \neq 0$. Применяя формулы случая I теоремы 2.6.3, найдем

$$q_0q_1 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2},$$

$$q_0q_2 = -\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$q_0q_3 = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

В результате имеем два решения.

1) $q_0 = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$, $q_1 = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$,

$q_2 = -\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$, $q_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}$,

2) $q_0 = -\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$, $q_1 = -\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$,

$q_2 = \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$, $q_3 = -\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}$.

Параметр q_0 принимает нулевое значение, когда либо $\cos(\vartheta/2) = 0$, либо $\cos([\varphi+\psi]/2) = 0$, либо оба эти сомножителя вместе равны нулю.

Вариант 1: $\cos(\vartheta/2) = 0$, $\cos([\varphi+\psi]/2) \neq 0$. Тогда $q_0 = 0$ и матрица A примет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\psi-\varphi) & \sin(\psi-\varphi) & 0 \\ \sin(\psi-\varphi) & -\cos(\psi-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $2q_1^2 = 1 + a_{11} = 1 + \cos(\psi-\varphi)$. Предположим, что $q_1 \neq 0$. Имеет место случай II теоремы 2.6.3, для которого

$$q_0 = 0, \quad q_1^2 = \cos^2\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad q_1q_2 = \sin\frac{\psi-\varphi}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad q_1q_3 = 0.$$

Отсюда получаем решения:

1) $q_0 = 0$, $q_1 = -\cos\frac{\psi-\varphi}{2}$, $q_2 = -\sin\frac{\psi-\varphi}{2}$, $q_3 = 0$,

2) $q_0 = 0$, $q_1 = \cos\frac{\psi-\varphi}{2}$, $q_2 = \sin\frac{\psi-\varphi}{2}$, $q_3 = 0$.

Когда $q_1 = 0$, то формулы случая III теоремы 2.6.3 дают

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 0, \quad q_2^2 = 1, \quad q_3 = 0.$$

Вариант 2: $\cos(\vartheta/2) \neq 0$, $\cos([\varphi+\psi]/2) = 0$. Имеем $q_0 = 0$, а коэффициенты a_{pk} матрицы A примут вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\cos^2\psi - \sin^2\psi\cos\vartheta, \\ a_{12} &= \sin\psi\cos\psi(\cos\vartheta - 1), \\ a_{13} &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ a_{21} &= \sin\psi\cos\psi(\cos\vartheta - 1), \\ a_{22} &= -\sin^2\psi - \cos^2\psi\cos\vartheta, \\ a_{23} &= -\cos\psi\sin\vartheta, \\ a_{31} &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ a_{32} &= -\cos\psi\sin\vartheta, \\ a_{33} &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\cos\varphi = -\cos\psi$ и $\sin\varphi = \sin\psi$. Матрица A оказывается симметричной (см. следствие 2.6.1). Имеем

$$2q_1^2 = 1 + a_{11} = 1 - \cos^2\psi - \sin^2\psi\cos\vartheta = \sin^2\psi(1-\cos\vartheta).$$

Пусть $q_1 \neq 0$. Тогда в соответствии со случаем II теоремы 2.6.3 найдем

$$q_0 = 0, \quad q_1^2 = \sin^2\psi\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \quad q_1q_2 = -\sin\psi\cos\psi\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \quad q_1q_3 = \sin\psi\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Это дает решения:

1) $q_0 = 0$, $q_1 = -\sin\psi\sin\frac{\vartheta}{2}$, $q_2 = \cos\psi\sin\frac{\vartheta}{2}$, $q_3 = -\cos\frac{\vartheta}{2}$,

2) $q_0 = 0$, $q_1 = \sin\psi\sin\frac{\vartheta}{2}$, $q_2 = -\cos\psi\sin\frac{\vartheta}{2}$, $q_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}$.

Предположим, что $q_0 = 0$ и $q_1 = 0$. Тогда либо $\sin\psi = 0$, либо $1 - \cos\vartheta = 0$, либо одновременно $\sin\psi = 0$ и $1 - \cos\vartheta = 0$. Пусть сначала $\sin\psi = 0$, а $1 - \cos\vartheta \neq 0$. Матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

и получаются решения (случай III теоремы 2.6.3):

1) $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = \sin\frac{\vartheta}{2}$, $q_3 = -\cos\frac{\vartheta}{2}$,

2) $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = -\sin\frac{\vartheta}{2}$, $q_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}$.

Если $1 - \cos\vartheta = 0$, то при любом значении ψ матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что соответствует случаю IV теоремы 2.6.3.

Вариант 3: $\cos\vartheta/2 = 0$, $\cos([\varphi+\psi]/2) = 0$. В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} -\cos 2\psi & -\sin 2\psi & 0 \\ -\sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.6.3 дает следующие решения:

1) $q_0 = 0$, $q_1 = -\sin\psi$, $q_2 = \cos\psi$, $q_3 = 0$,

2) $q_0 = 0$, $q_1 = \sin\psi$, $q_2 = -\cos\psi$, $q_3 = 0$.

Тем самым пример 2.6.1 полностью разобран.◇

Теорема 2.6.3 решает задачу о вычислении параметров Эйлера по заданным элементам матрицы A в общем случае. При изменении расчетных формул, связанном с переходом от варианта к варианту, всегда может быть обеспечен непрерывный переход от одного типа решения к другому (см. пример 2.6.1).

§ 2.7. Параметры Кэ́ли-Кле́йна

Рассмотрим движение твердого тела, имеющего в репере $Oe_1e_2e_3$ одну неподвижную точку, совпадающую с точкой O:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \in SO(3), \quad \mathbf{r} = \sum_{j=1}^{3} r_j\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} x_j\mathbf{e}_j.$$

Векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{x}$ поставим в соответствие комплексные матрицы

$$P_r = \begin{pmatrix} ir_1 & r_2 + ir_3 \\ -r_2 + ir_3 & -ir_1 \end{pmatrix}, \quad P_x = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}.$$

Такое соответствие взаимно однозначно.

Определение 2.7.1. Пусть D — матрица с комплексными компонентами. Сопряженной к ней называется матрица

$$D^* = \bar{D}^T,$$

где черта сверху означает переход к комплексно сопряженным компонентам. Матрица D называется *эрмитовой* (*самосопряженной*), если $D^* = D$, и *косоэрмитовой*, если $D^* = -D$.

Очевидно, что $P_r^* = -P_r$ и $P_x^* = -P_x$, т.е. матрицы P_r и P_x оказываются косоэрмитовыми. Кроме того, след этих матриц (сумма их диагональных элементов) равен нулю. Всякую косоэрмитову матрицу P с равным нулю следом можно представить в виде суммы

$$P = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3,$$

где p_1, p_2, p_3 — действительные числа,

$$\sigma_1 = i\rho_3, \quad \sigma_2 = i\rho_2, \quad \sigma_3 = i\rho_1,$$

а ρ_1, ρ_2, ρ_3 — *спиновые матрицы Паули*:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы σ_1, σ_2, σ_3 вместе с единичной матрицей

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Используя правило умножения матриц, можно убедиться, что

$$\sigma_1\sigma_1 = \sigma_2\sigma_2 = \sigma_3\sigma_3 = -E, \quad \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = \sigma_3,$$

$$\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = \sigma_1.$$

Определение 2.7.2. Матрица с комплексными компонентами

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

называется *унитарной*, если $Q^*Q = E$.

Свойство унитарности аналогично свойству ортогональности действительных матриц. Если матрица Q унитарна, то

$$\overline{\det Q} \cdot \det Q = 1.$$

Тем самым модуль определителя унитарной матрицы равен 1. При этом на аргумент определителя не накладывается никакого ограничения.

Рассмотрим свойства коэффициентов унитарных матриц Q, для которых

$$\det Q = \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

По отношению к унитарным матрицам это — дополнительное требование.

Матрица Q содержит восемь действительных параметров, так как каждый из ее четырех элементов есть комплексное число. Раскроем условие унитарности:

$$\begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц, найдем уравнения

$$\overline{\alpha}\alpha + \overline{\gamma}\gamma = 1, \quad \overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta = 0, \quad \alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\delta} = 0, \quad \beta\overline{\beta} + \delta\overline{\delta} = 1.$$

Видим, что третье уравнение есть следствие второго. Первое и четвертое уравнения — действительные. Второе уравнение — комплексное. Из него следует: $\beta/\delta = -\overline{\gamma}/\overline{\alpha}$. С помощью этого соотношения преобразуем выражение для детерминанта:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha - \beta\gamma/\delta)\delta = (\alpha + \overline{\gamma}\gamma/\overline{\alpha})\delta = (\overline{\alpha}\alpha + \overline{\gamma}\gamma)\delta/\overline{\alpha} = 1.$$

Согласно первому уравнению величина, стоящая в скобках, равна единице. Следовательно, $\delta = \overline{\alpha}$ и $\beta = -\overline{\gamma}$. Унитарная матрица Q принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Компоненты α и β подчиняются условию

$$\det Q = \overline{\alpha}\alpha + \overline{\beta}\beta = 1.$$

Из-за этого условия матрица Q содержит только три независимые величины. Как раз ровно столько, сколько нужно для определения ориентации твердого тела в трехмерном пространстве.

Теорема 2.7.1. *Унитарные матрицы Q такие, что $\det Q = 1$, образуют группу относительно операции умножения.*

Доказательство. Роль единицы играет матрица E, так как она унитарна. Пусть матрицы Q_1 и Q_2 удовлетворяют условиям

$$Q_1^*Q_1 = E, \quad Q_2^*Q_2 = E, \quad \det Q_1 = 1, \quad \det Q_2 = 1.$$

Покажем, что матрица $Q = Q_1Q_2$ удовлетворяет тем же условиям. В самом деле, $Q^* = Q_2^*Q_1^*$. Следовательно,

$$Q^*Q = Q_2^*Q_1^*Q_1Q_2 = Q_2^*Q_2 = E,$$

$$\det(Q_1Q_2) = \det Q_1 \det Q_2 = 1.\square$$

Определение 2.7.3. Группа унитарных матриц (2×2) с определителем, равным единице, называется *группой* $SU(2)$.

Рассмотрим преобразование $P_x \longrightarrow P$, обусловленное матрицей $Q \in SU(2)$:

$$P = QP_xQ^*.$$

При таком преобразовании матрица P, как и P_x, будет косоэрмитовой:

$$P^* = (Q^*)^*P_x^*Q^* = Q(-P_x)Q^* = -P.$$

Кроме того, $Q^* = Q^{-1}$. Поэтому рассматриваемое преобразование сохраняет все собственные значения, а следовательно, сохраняет и след. Значит, P имеет след, равный нулю. Отсюда

$$P = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3.$$

Далее, рассматриваемое преобразование сохраняет детерминант:

$$\det P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \det P_x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Тем самым длина вектора в R^3, соответствующего матрице P_x, совпадает с длиной вектора в R^3, соответствующего матрице P. Другими словами, каждой матрице $Q \in SU(2)$ можно поставить в соответствие некоторый ортогональный оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$, действующий в пространстве E^3.

Установим закон этого соответствия. Пусть

$$P_x = \sum_{j=1}^{3} x_j\sigma_j,$$

где σ_j — базисные косоэрмитовы матрицы. Тогда

$$QP_xQ^* = \sum_{j=1}^{3} x_jQ\sigma_jQ^*.$$

Матрицы σ_j — косоэрмитовы со следом, равным нулю. Значит, такими же будут и матрицы $Q\sigma_jQ^*$, $j = 1, 2, 3$. Они, как и матрица P, представляются в виде разложения по матрицам σ_j с действительными коэффициентами:

$$Q\sigma_jQ^* = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\sigma_k.$$

Коэффициенты a_{kj} можно вычислить, зная компоненты α, β, γ, δ матрицы Q. Отождествим P и P_r. Сравнивая коэффициенты в выражении

$$P_r = QP_xQ^*$$

при базисных косоэрмитовых матрицах, найдем

$$r_k = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}x_j.$$

Тем самым коэффициенты a_{kj} суть компоненты искомой ортогональной матрицы оператора $\mathbf{A}$.

Видим, что матрицы σ_j, будучи базисными для матриц P, преобразуются так же, как векторы репера, жестко связанного с твердым телом.

Определение 2.7.4. Компоненты α, β, γ, δ матрицы $Q \in SU(2)$: $\gamma = -\overline{\beta}$, $\delta = \overline{\alpha}$, $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$, называются *параметрами Кэли-Клейна*.

Параметры Кэли-Клейна могут служить для определения ориентации твердого тела.

Теорема 2.7.2. *Пусть оператору $\mathbf{A}_1 \in SO(3)$ отвечает матрица $Q_1 \in SU(2)$, а оператору $\mathbf{A}_2 \in SO(3)$ отвечает $Q_2 \in SU(2)$. Тогда композиции преобразований $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ соответствует матрица*

$$Q = Q_1Q_2 \in SU(2).$$

Доказательство. Сначала применим оператор $\mathbf{A}_2$: $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_2\mathbf{x}$. Это преобразование по условию теоремы можно описать формулой

$$\tilde{P}_r = Q_2P_xQ_2^*.$$

Применим теперь к вектору $\tilde{\mathbf{r}}$ оператор $\mathbf{A}_1$: $\mathbf{r} = \mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{r}}$. Тогда

$$P_r = Q_1\tilde{P}_rQ_1^*.$$

Подставляя выражение для матрицы $\tilde{P}_r$, получим

$$P_r = Q_1Q_2P_xQ_2^*Q_1^*.$$

Но $(Q_1Q_2)^* = Q_2^*Q_1^*$ и произведение двух унитарных матриц есть также унитарная матрица. Поэтому матрица преобразования, получающегося в результате композиции, имеет вид $Q = Q_1Q_2$.$\square$

Установим соответствие между параметрами Кэли-Клейна и параметрами Эйлера. Пусть

$$\mathbf{a} \leftrightarrow P_a, \quad \mathbf{b} \leftrightarrow P_b, \quad \mathbf{c} \leftrightarrow P_c, \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} \leftrightarrow P_{[a,b]}, \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \leftrightarrow P_{[a,[b,c]]},$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ — векторы трехмерного пространства, а P_a, P_b, $P_{[a,b]}$, $P_{[a,[b,c]]}$ — их образы в пространстве комплексных косоэрмитовых (2×2) матриц.

Теорема 2.7.3. *Справедливы формулы*

$$P_aP_b = P_{[a,b]} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})E, \quad P_{[a,b]} = \frac{1}{2}(P_aP_b - P_bP_a),$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})E = -\frac{1}{2}(P_aP_b + P_bP_a), \quad P_{[a,[b,c]]} = P_b(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - P_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Доказательство. Как следует из определения, базисные косоэрмитовы матрицы σ_1, σ_2, σ_3, имеющие различные индексы, умножаются по правилам векторного произведения базисных векторов пространства R^3. Произведение указанных матриц с совпадающими индексами равно единичной матрице, взятой с обратным знаком (см. стр.103). Произведение P_aP_b можно представить в виде

$$P_aP_b = (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3)(b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3).$$

После перемножения всех матриц σ_i с разными индексами объединенные коэффициенты при матрицах σ_i будут совпадать с компонентами соответствующего векторного произведения. Перемножение базисных матриц с одинаковыми индексами дает $-(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)E$. В итоге получается первая формула утверждения теоремы. Очевидно, что

$$P_bP_a = P_{[b,a]} - E(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = -P_{[a,b]} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})E.$$

Вычитая эту формулу из первой формулы утверждения теоремы, получим вторую формулу, а складывая, получим третью формулу. Четвертая формула есть очевидное следствие известной формулы для двойного векторного произведения.$\square$

Теорема 2.7.4. *Пусть $Q \in SU(2)$. Тогда параметры Эйлера суть коэффициенты разложения*

$$Q = q_0E + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3.$$

Доказательство. Согласно определению 2.7.4 всякую матрицу $Q \in SU(2)$ можно представить в виде

$$Q = q_0E + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3.$$

причем $\det Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Пусть $P_\alpha = q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3$. Очевидно, что $Q = q_0E + P_\alpha$ и справедливо соответствие $P_\alpha \leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in R^3$, так что $\boldsymbol{\alpha} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$.

Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} P_r &= QP_xQ^* = (q_0E + P_\alpha)P_x(q_0E - P_\alpha) = \\ &= q_0^2P_x + q_0(P_\alpha P_x - P_xP_\alpha) - P_\alpha(P_xP_\alpha). \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой 2.7.3 имеем

$$P_\alpha(P_xP_\alpha) = P_\alpha(P_{[x,\alpha]} - E(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})) = P_{[\alpha,[x,\alpha]]} - P_\alpha(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}).$$

Кроме того,

$$P_{[\alpha,[x,\alpha]]} = P_x\boldsymbol{\alpha}^2 - P_\alpha(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad P_\alpha(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}) = P_x\boldsymbol{\alpha}^2 - P_{[\alpha,[x,\alpha]]}.$$

Учитывая сказанное, окончательно получим

$$P_r = QP_xQ^* = P_x + 2q_0P_{[\alpha,x]} + 2P_{[\alpha,[x,\alpha]]}.$$

Эта формула означает в точности такое же преобразование, какое получается с помощью параметров Эйлера в теореме 2.6.1. Чтобы убедится в этом, достаточно воспользоваться изоморфизмом пространства косоэрмитовых матриц и пространства R^3.$\square$

Следствие 2.7.1. *Параметры Кэли-Клейна выражаются через параметры Эйлера посредством следующих формул (см. определение 2.7.4)*

$$\alpha = q_0 + iq_1, \quad \beta = q_2 + iq_3, \quad \gamma = -q_2 + iq_3, \quad \delta = q_0 - iq_1.$$

Следствие 2.7.2. *Произвольному оператору $\mathbf{A} \in SO(3)$ соответствует матрица $Q \in SU(2)$, описывающая то же самое движение твердого тела, что и $\mathbf{A}$.*

Доказательство следует из теоремы 2.6.3, которая устанавливает правило вычисления параметров Эйлера для произвольной ортогональной матрицы A.$\square$

Теорема 2.7.5. *Пусть движение твердого тела с фиксированной точкой определено углами Эйлера ψ, ϑ, φ. Соответствующая матрица $Q \in SU(2)$ выражается формулой $Q = Q_\psi Q_\vartheta Q_\varphi$, где*

$$Q_\psi = E\cos\frac{\psi}{2} + \sigma_3\sin\frac{\psi}{2},$$

$$Q_\vartheta = E\cos\frac{\vartheta}{2} + \sigma_1\sin\frac{\vartheta}{2},$$

$$Q_\varphi = E\cos\frac{\varphi}{2} + \sigma_3\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Доказательство. С помощью углов Эйлера движение представляется в виде композиции преобразований вспомогательных базисов. Сначала происходит поворот исходного репера на угол прецессии ψ вокруг третьей координатной оси. Этот поворот (см. определение 2.6.1) задается набором параметров Эйлера: $q_0 = \cos(\psi/2)$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = \sin(\psi/2)$. Согласно теореме 2.7.4 получаем формулу для матрицы Q_ψ, описывающей поворот на угол прецессии.

Следующим происходит поворот на угол нутации ϑ вокруг первой координатной оси. Для него параметры Эйлера имеют вид $q_0 = \cos(\vartheta/2)$, $q_1 = \sin(\vartheta/2)$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$. Отсюда получается формула для матрицы Q_ϑ, задающей вращение по углу нутации.

Завершает композицию вращение на угол φ вокруг третьей координатной оси. Доказываемая формула для матрицы Q_φ вполне аналогична формуле для матрицы Q_ψ.

Согласно теореме 2.7.2 композиции преобразований соответствует произведение матриц составляющих преобразований, взятых в порядке преобразований вспомогательных базисов.□

Пример 2.7.1. Найдем формулы для параметров Эйлера, используя теорему 2.7.5. Выполнив умножение биномов

$$Q = \left(E\cos\frac{\psi}{2} + \sigma_3\sin\frac{\psi}{2}\right)\left(E\cos\frac{\vartheta}{2} + \sigma_1\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\left(E\cos\frac{\varphi}{2} + \sigma_3\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

с использованием правил умножения матриц σ_i, $i = 1,2,3$ (см. стр. 103), получим

$$Q = E\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2} + \sigma_1\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2} + \sigma_2\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2} + \sigma_3\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}.$$

Как и следовало ожидать, коэффициенты разложения матрицы Q по матрицам E, σ_1, σ_2, σ_3 совпадают с выражениями первого решения для параметров Эйлера, найденными в примере 2.6.1 для случая $q_0 \neq 0$. Второе решение получится, если ко всем эйлеровым углам прибавить 2π.

Следствие 2.7.3. *Пусть движение твердого тела задано с помощью карданових углов α, β, γ. Тогда $Q \in SU(2)$ выражается формулой $Q = Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$, где*

$$Q_\alpha = E\cos\frac{\alpha}{2} + \sigma_1\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$Q_\beta = E\cos\frac{\beta}{2} + \sigma_2\sin\frac{\beta}{2},$$

$$Q_\gamma = E\cos\frac{\gamma}{2} + \sigma_3\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Отметим, что если $Q \in SU(2)$ отвечает некоторому оператору $\mathbf{A} \in SO(3)$, то матрица $-Q$ дает тот же оператор. Поэтому присутствие половинных углов Эйлера в выражениях для параметров Кэли-Клейна вполне естественно. Имеем взаимно однозначное соответствие между одним оператором из $SO(3)$ и парой матриц $(Q, -Q)$ из $SU(2)$. Можно сказать, что Q есть двузначная функция операторов из SO(3).

Для того, чтобы установить соответствие между параметрами Кэли-Клейна и элементами матрицы A, совсем не обязательно сначала определять углы Эйлера или какие-либо другие угловые координаты. Используя изоморфизм, отмеченный в следствии 2.7.1, можно непосредственно применить теоремы 2.6.2 и 2.6.3.

§ 2.8. Кватрионы

Множество *кватернионов* — это пространство $\mathcal{H}$ линейных комбинаций вида

$$\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

где a, b, c, d — действительные числа, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — некоторые линейно независимые символы. В пространстве $\mathcal{H}$ вводится билинейное умножение по правилу

$$\mathbf{i}\circ\mathbf{j} = -\mathbf{j}\circ\mathbf{i} = \mathbf{k},\ \ \mathbf{j}\circ\mathbf{k} = -\mathbf{k}\circ\mathbf{j} = \mathbf{i},\ \ \mathbf{k}\circ\mathbf{i} = -\mathbf{i}\circ\mathbf{k} = \mathbf{j},\ \ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

Принимается, что кватернионы, у которых $b = c = d = 0$, коммутируют при умножении со всеми остальными кватернионами.

Сопоставим каждому кватериону $\mathbf{h}$ унитарную матрицу $Q(\mathbf{h})$, полагая

$$Q(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix},$$

где i — мнимая единица. Очевидно, что если имеются два кватерниона $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, то $Q(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = Q(\mathbf{h}_1) + Q(\mathbf{h}_2)$. В связи с этим

$$Q(\mathbf{h}) = aE + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3,$$

так как (см. стр. 103)

$$Q(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \sigma_1,\quad Q(\mathbf{j}) = \sigma_2,\quad Q(\mathbf{k}) = \sigma_3.$$

Тем самым установлен изоморфизм пространств унитарных матриц и кватернионов.

Лемма 2.8.1. *Пусть $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ — два кватерниона. Тогда справедливо равенство*

$$Q(\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2) = Q(\mathbf{h}_1)Q(\mathbf{h}_2).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$Q(\mathbf{i})Q(\mathbf{j}) = -Q(\mathbf{j})Q(\mathbf{i}) = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_3 = Q(\mathbf{k}),$$

$$Q(\mathbf{j})Q(\mathbf{k}) = -Q(\mathbf{k})Q(\mathbf{j}) = \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1 = Q(\mathbf{i}),$$

$$Q(\mathbf{k})Q(\mathbf{i}) = -Q(\mathbf{i})Q(\mathbf{k}) = \sigma_3\sigma_1 = \sigma_2 = Q(\mathbf{j}).$$

Таким образом, матрицы $Q(\mathbf{i})$, $Q(\mathbf{j})$, $Q(\mathbf{k})$ при умножении подчиняются тем же правилам, что и соответствующие им кватернионы. Зависимость же между матрицами Q и кватернионами взаимно однозначна и линейна.□

Пусть задан кватернион $\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. *Сопряжённым* к нему называется кватернион

$$\overline{\mathbf{h}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Теорема 2.8.1. *Справедливы равенства*

$$\overline{(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2)} = \overline{\mathbf{h}}_1 + \overline{\mathbf{h}}_2,\quad \overline{\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2} = \overline{\mathbf{h}}_2 \circ \overline{\mathbf{h}}_1.$$

Доказательство. Первое равенство с очевидностью следует из определения кватериона. Для доказательства второго равенства заметим, что $Q(\overline{\mathbf{h}}) = Q^*(\mathbf{h})$, и воспользуемся взаимно однозначным соответствием элементов пространства $U(2)$ и кватернионов:

$$Q(\overline{\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2}) = Q^*(\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2) = (Q(\mathbf{h}_1)Q(\mathbf{h}_2))^* = Q^*(\mathbf{h}_2)Q^*(\mathbf{h}_1) = Q(\overline{\mathbf{h}}_2)Q(\overline{\mathbf{h}}_1).$$□

Нормой кватерниона $\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ называется величина $|\mathbf{h}| \geq 0$, определенная равенством

$$|\mathbf{h}|^2 = \mathbf{h} \circ \overline{\mathbf{h}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Прямое вычисление показывает, что $|\mathbf{h}|^2 = \det Q(\mathbf{h})$. Поэтому норма обладает свойством

$$|\mathbf{h}_1 \circ \mathbf{h}_2| = |\mathbf{h}_1||\mathbf{h}_2|.$$

Для каждого отличного от нуля кватерниона $\mathbf{h}$ имеем $|\mathbf{h}| \neq 0$ и существует обратный кватернион

$$\mathbf{h}^{-1} = \overline{\mathbf{h}}/|\mathbf{h}|^2,$$

обладающий свойствами $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}^{-1} = 1$, $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{h} = 1$.

Множество кватернионов с нормой, равной единице, обозначим $\mathcal{H}_1$. Если $\mathbf{h} \in \mathcal{H}_1$, то $\mathbf{h}^{-1} = \overline{\mathbf{h}}$. Очевидно, что множество $\mathcal{H}_1$ есть группа по умножению. Эта группа изоморфна группе $SU(2)$. Изоморфизм устанавливается с помощью равенств

$$a = q_0,\quad b = q_1,\quad c = q_2,\quad d = q_3,$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 — параметры Эйлера.

Пусть $\mathcal{H}_0$ — трехмерное пространство кватернионов $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}.$$

Метрика в этом пространстве задается формулой

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \circ \overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^2.$$

Пространство $\mathcal{H}_0$ изоморфно евклидову пространству E^3 .

Теорема 2.8.2. *Если $|\mathbf{h}| = 1$, то преобразование $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{z}$:*

$$\mathbf{z} = \mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \overline{\mathbf{h}},\quad \mathbf{x} \in \mathcal{H}_0$$

есть вращение трехмерного евклидова пространства.

Доказательство. Так как $\overline{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$, $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^{-1}$, то

$$\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{h}^{-1}} = \overline{\mathbf{h}^{-1}} \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \overline{\mathbf{h}} = -\mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{h}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\overline{\mathbf{z}} = -\mathbf{z}.$$

Далее

$$|\mathbf{z}|^2 = \mathbf{z} \circ \overline{\mathbf{z}} = (\mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{h}^{-1}) \circ (\overline{\mathbf{h}^{-1}} \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \overline{\mathbf{h}}) = \mathbf{h} \circ \mathbf{x} \circ \overline{\mathbf{x}} \circ \mathbf{h}^{-1} = |\mathbf{x}|^2.$$

Другими словами, рассматриваемое преобразование сохраняет норму. Учитывая изоморфизм пространств $\mathcal{H}_0$ и E^3, получаем, что такое преобразование эквивалентно вращению трехмерного пространства. □

Поскольку параметры Эйлера служат коэффициентами кватернионов из $\mathcal{H}_1$, теорема 2.6.2 и теорема 2.6.3 дают возможность найти оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$ по заданному кватериону и обратно найти кватернион, описывающий то же движение, что и заданный оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$.

Заметим, что коэффициенты кватериона из $\mathcal{H}_1$, задающего преобразование $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{z}$ в соответствии с теоремой 2.8.2, называются *параметрами Родрига-Гамильтона*. Видим, что по смыслу параметры Эйлера и параметры Родрига-Гамильтона совпадают.

Пример 2.8.1 Воспользовавшись последним замечанием, легко устанавливаем связь между углами Эйлера и соответствующим кватернионом. Точно так же, как в теореме 2.7.5, этот кватернион можно представить в виде $\mathbf{h} = \mathbf{h}_\psi \circ \mathbf{h}_\vartheta \circ \mathbf{h}_\varphi$, где

$$\mathbf{h}_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + \mathbf{k}\sin\frac{\psi}{2},\quad \mathbf{h}_\vartheta = \cos\frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta}{2},\quad \mathbf{h}_\varphi = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbf{k}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Для карданових углов требуемые соотношения находятся аналогично.

§ 2.9. Произвольное движение твердого тела

В соответствии с теоремой 2.3.1 любой закон движения твердого тела можно выразить с помощью равенства

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}'(t),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор отдельной точки тела, имеющий начало в полюсе O, $\mathbf{r}'(t)$ — вектор с началом в том же полюсе, одинаковый для всех точек тела, оператор $\mathbf{A}(t) \in SO(3)$, $\mathbf{x}$ — постоянный вектор, конкретизирующий точку тела.

Движение, при котором все точки твердого тела получают одинаковое смещение в пространстве, называется *поступательным*.

Теорема 2.9.1. *Поступательное движение реализуется тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ — тождественный оператор.*

Доказательство. Необходимость. Пусть все точки тела получают одинаковое смещение в пространстве. Закон движения принимает вид $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{a}(t)$, где вектор $\mathbf{a}(t)$ один и тот же для всех точек. Выберем произвольно точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Для них получим

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1 + \mathbf{r}'(t),$$

$$\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{r}'(t),$$

Вычитая из второго равенства первое, найдем

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).$$

Необходимость доказана, так как вектор $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ может принять любое значение.

Достаточность. Если оператор $\mathbf{A}$ — тождественный, то все точки тела одинаково смещаются на вектор $\mathbf{r}'(t)$.□

Следствие 2.9.1. *Произвольное движение твердого тела есть композиция вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения.*

Теорема 2.9.2. *Всякое перемещение твердого тела можно представить либо как результат поступательного движения, либо как результат винтового движения, т.е. такого, при котором поступательный сдвиг осуществляется вдоль оси вращения, определенной оператором $\mathbf{A}$. Если проекция вектора $\mathbf{r}'$ на ось вращения отсутствует, то найдется точка твердого тела такая, что движение сводится к повороту вокруг оси, проходящей через эту точку.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.6.1 закон движения можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + 2q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}) + 2(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x})) + \mathbf{r}'(t).$$

Если вектор $\boldsymbol{\alpha} = 0$, то имеем поступательное движение. Пусть $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$. Обозначим $\mathbf{y}$ точку тела, которая испытывает перемещение только вдоль направления вектора $\boldsymbol{\alpha}$. Для этой точки имеем уравнение

$$\mathbf{y} + \lambda\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y} + 2q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y}) + 2(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y})) + \mathbf{r}'(t).$$

Примем $\mathbf{r}'(t) = \beta\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}''(t)$, где $\mathbf{r}''(t) \perp \boldsymbol{\alpha}$, λ и β — скалярные параметры. Очевидно, что тогда должно быть $\lambda = \beta$, так как результаты векторных произведений в исследуемом уравнении перпендикулярны вектору $\boldsymbol{\alpha}$, и

$$q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y}) + (\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y})) = -\mathbf{r}''(t)/2.$$

Это уравнение имеет множество решений, получающихся друг из друга сдвигом параллельно вектору $\boldsymbol{\alpha}$. Ограничимся решением, для которого $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{y} = 0$. После преобразования двойного векторного произведения последнее уравнение приводится к виду

$$q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y}) - \boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{y} = -\mathbf{r}''(t)/2.$$

Умножим его слева векторно на $\boldsymbol{\alpha}$. После преобразования двойного векторного произведения получим второе уравнение:

$$-\boldsymbol{\alpha}^2(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y}) - q_0\boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{y} = -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}''(t)/2.$$

Исключив из этих двух уравнений член, содержащий $(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{y})$, найдем решение

$$\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'' + q_0\boldsymbol{\alpha}^{-2}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'')).$$

Выберем теперь новый полюс, соответствующий концу вектора $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y},\quad \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{y},$$

где теперь уже вектор $\mathbf{z}$ задает точку твердого тела. Тогда получим

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{z} + 2q_0(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{z}) + 2(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{z})) + \beta\boldsymbol{\alpha}.$$

Такое преобразование и есть композиция вращения и поступательного сдвига вдоль оси вращения, Если $\beta = 0$, то получаем чистое вращение.□

§ 2.10. Дифференциал вращения

Как уже отмечалось, композиция $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ операторов $\mathbf{A}_1 \in SO(3)$, $\mathbf{A}_2 \in SO(3)$, вообще говоря, некоммутативна: $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1$. В выбранном ортонормированном репере $Oe_1e_2e_3$ действие оператора выражается матрицей. Оператору $\mathbf{A}_1$ сопоставим матрицу A_1, а оператору $\mathbf{A}_2$ — матрицу A_2. Композиции операторов $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ соответствует произведение матриц A_1A_2. Некоммутативность композиции операторов связана с тем, что произведение матриц некоммутативно.

Следствие 2.4.2 устанавливает, что каждый линейный оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$ задает конечный поворот твердого тела вокруг собственного вектора, соответствующего собственному значению, равному единице. Композиция операторов из $SO(3)$ (см. раздел 2.5) эквивалентна последовательному выполнению конечных поворотов вокруг отличающихся друг от друга в общем случае направлений. Некоммутативность композиции операторов означает, что результат выполнения конечных поворотов зависит от того, в каком порядке эти повороты выполняются. Проиллюстрируем сказанное.

Пример 2.10.1. Пусть оператор $\mathbf{A}_1$ определяет поворот твердого тела на угол $\pi/2$ против хода часовой стрелки вокруг оси e_3, а оператор $\mathbf{A}_2$ задает поворот на угол $\pi/2$ против хода часовой стрелки вокруг оси e_2. Матрицы этих операторов имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При действии композиции $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ сначала (см. теорему 2.5.1) происходит поворот вокруг оси e_3 и вектор e_2 переходит в $e_2^{(1)} = -e_1$, а затем осуществляется поворот вокруг вектора $e_2^{(1)}$. Произведение матриц равно

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним теперь композицию $\mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1$. Она означает, что сначала выполняется поворот вокруг вектора e_2 и вектор e_3 переходит в $e_3^{(1)} = e_1$,

а затем происходит поворот вокруг вектора $e_3^{(1)}$. Произведение матриц будет иметь вид

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что результаты применения операторов $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1$ получаются разными. ◇

Пусть $\mathbf{A} \in SO(3)$ есть дифференцируемая функция некоторого скалярного параметра ξ: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\xi)$, причем $\mathbf{A}(0) = \mathbf{E}$ — тождественному оператору. Изменяя ξ, получим различные повороты вокруг различных в общем случае собственных векторов оператора $\mathbf{A}(\xi)$, зависящих от параметра ξ. Выделим линейную по ξ часть матрицы оператора $\mathbf{A}$:

$$A = E + \mathcal{E}\xi + \cdots$$

Матрица $dA = \mathcal{E}\xi$ определяет линейный оператор, который называется *дифференциалом оператора* $\mathbf{A}$.

Теорема 2.10.1. *Дифференциалу $d\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$ отвечает кососимметричная матрица.*

Доказательство. Учитывая, что $AA^T = E$, получим

$$(E + \mathcal{E}\xi + \cdots)(E + \mathcal{E}^T\xi + \cdots) = E$$

или

$$E + (\mathcal{E} + \mathcal{E}^T)\xi + \cdots = E.$$

Последнее равенство должно быть выполнено при произвольном ξ. Поэтому $\mathcal{E} = -\mathcal{E}^T$.□

Кососимметричная матрица $\mathcal{E}\xi$ определяется тремя числами:

$$\mathcal{E}\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе e_1, e_2, e_3 матрице $\mathcal{E}\xi$ можно сопоставить вектор

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \mathbf{e}_i.$$

Легко проверить справедливость равенства $\mathcal{E}\xi\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{x}$.

В дальнейшем там, где это удобно и отсутствуют преобразования координат, будем отождествлять в записи оператор и его матрицу.

Теорема 2.10.2. *Дифференциал композиции операторов выражается суммой дифференциалов составляющих операторов:*

$$d(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2) = d\mathbf{A}_1 + d\mathbf{A}_2.$$

Доказательство. Рассмотрим композицию $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$. По определению дифференциала имеем $\Delta A_1 = \mathcal{E}_1\xi$, $\Delta A_2 = \mathcal{E}_2\xi$,

$$A_1A_2 = (E + \mathcal{E}_1\xi + \cdots)(E + \mathcal{E}_2\xi + \cdots) = E + \mathcal{E}_1\xi + \mathcal{E}_2\xi + \cdots$$

Следовательно, $d(A_1A_2) = \mathcal{E}_1\xi + \mathcal{E}_2\xi$.□

Видим, что дифференциал композиции операторов обладает свойством коммутативности. Он не будет зависеть от порядка выполнения участвующих в ней операторов: $d(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2) = d(\mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1)$.

Когда величина ξ, задающая дифференциалы

$$d\mathbf{A} = d(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2) = \mathcal{E}\xi,\quad d\mathbf{A}_1 = \mathcal{E}_1\xi,\quad d\mathbf{A}_2 = \mathcal{E}_2\xi,$$

мала, то с точностью до членов второго порядка малости действие операторов $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ можно представить с помощью векторных умножений

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{x} + \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{x},\quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x} \approx \mathbf{x} + \boldsymbol{\Phi}_1 \times \mathbf{x},\quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x} \approx \mathbf{x} + \boldsymbol{\Phi}_2 \times \mathbf{x}.$$

Векторы

$$\delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{x},\quad \delta\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\Phi}_1 \times \mathbf{x},\quad \delta\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\Phi}_2 \times \mathbf{x}$$

называются *дифференциалами вращений*.

Следствие 2.10.1. *Справедливо равенство*

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2.$$

Оно означает, что дифференциалы вращений образуют линейное пространство относительно композиции преобразований

$$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2.$$

По смыслу вектора $\boldsymbol{\Phi}$ ясно, что его влиянию не подвержены векторы $\mathbf{x}$, которые параллельны $\boldsymbol{\Phi}$. Такие векторы образуют ось дифференциала вращения. Смещение $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{x}$ происходит в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\Phi}$, а величина смещения равна

$$|\delta\mathbf{r}| = |\mathbf{x}||\boldsymbol{\Phi}|\sin\theta,$$

где θ — угол между $\boldsymbol{\Phi}$ и $\mathbf{x}$. Смещение $\delta\mathbf{r}$ можно отождествить с элементом дуги окружности, и тогда $|\boldsymbol{\Phi}|$ получает смысл угла малого поворота.

Рассмотрим два соседних по времени положения некоторой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного полюса O:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{A}(t+\Delta t)\mathbf{x}.$$

Учитывая свойства оператора $\mathbf{A}$, найдем

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{A}(t+\Delta t)\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{r}(t).$$

При малом Δt матрица $B = A(t+\Delta t)A^T(t)$ близка к единичной. Поэтому движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно приблизить последовательно выполняемыми дифференциалами вращений вокруг осей, соответствующих соседним моментам времени.

§ 2.11. Сложное движение точки

Пусть S — ортонормированный репер $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ с началом в точке O', который движется как твердое тело относительно репера S_o ортонормированных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с началом в полюсе O. Рассмотрим движение некоторой точки M. Его можно описать как с помощью репера S, так и с помощью репера S_o. Движение точки M по отношению к реперу S_o назовем *абсолютным движением*, а ее траекторию в этом репере — *абсолютной траекторией*. Движение точки M по отношению к реперу S назовем *относительным движением*, а траекторию M в репере S — *относительной траекторией*. Движение репера S назовем *переносным движением*.

Скорость $\mathbf{v}_a$ движения точки по абсолютной траектории называется *абсолютной скоростью*. Скорость $\mathbf{v}_r$ движения точки по отношению к подвижному реперу S называется *относительной скоростью*.

В каждый конкретный момент времени t точка M совпадает с некоторой точкой M' пространства, жестко связанного с репером S. Скорость точки M', возникающая из-за движения этого пространства (движения репера S), называется *переносной скоростью* $\mathbf{v}_e$ точки M.

Теорема 2.11.1. (О сложении скоростей). *Абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей:*

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}_a$ — вектор абсолютной скорости; $\mathbf{v}_e$ — вектор переносной скорости; $\mathbf{v}_r$ — вектор относительной скорости.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.3.1 сложное движение точки можно описать с помощью равенства

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}',$$

где зависящие от времени оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$ и вектор $\mathbf{r}'$ задают движение пространства, жестко связанного с репером S, а вектор $\mathbf{x}$ конкретизирует точку M в репере S. Если M движется относительно репера S, то $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ есть вектор-функция времени. Продифференцируем по времени закон движения точки:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}},$$

где символ $d\mathbf{A}/dt$ означает дифференцирование по времени каждой компоненты матрицы оператора $\mathbf{A}$.

Первые два слагаемых выражают скорость, которая была бы у точки, если бы вектор $\mathbf{x}$ сохранял постоянное значение. Такой вектор выделяет точку M' пространства, жестко связанного с репером S. В рассматриваемый момент времени точки M и M' совпадают. Другими словами,

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{r}}'.$$

Третье слагаемое представляет собой относительную скорость $\dot{\mathbf{x}}$, преобразованную с помощью оператора $\mathbf{A}$ к реперу S_o.□

Замечание. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ движущейся точки M можно всегда представить суммой векторов:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1,$$

где $\mathbf{r}_0$ есть радиус-вектор начала O' подвижного репера S, а $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор точки M с началом в O'. Дифференцируя это равенство по времени, найдем

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}.$$

Равенство верно в любой момент времени. Однако первое слагаемое в нем — не переносная скорость, а второе — не относительная скорость. Они станут таковыми лишь в случае поступательного движения репера S.

Теорема 2.11.2. (Случай нескольких реперов). *Допустим, что точка M совершает движение в репере S_1, который движется относительно репера S_2. Репер S_2 движется в репере S_3 и т.д. Наконец, репер S_k совершает движение относительно репера S_o. Тогда абсолютная скорость точки M выражается формулой*

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{v}_r$ — скорость M относительно репера S, а $\mathbf{v}_i$ — скорость относительно репера S_{i+1} той точки репера S_i, которая в данный момент совпадает с точкой M.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.11.1 о сложении скоростей и найдем скорость $\mathbf{v}_r^{(2)}$ точки M в репере S_2:

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_1,$$

где $\mathbf{v}_1$ — скорость относительно репера S_2 той точки репера S_1, которая совпадает в данный момент с точкой M. Обозначив далее $\mathbf{v}_2$ скорость относительно репера S_3 той точки репера S_2, которая совпадает в данный момент времени с точкой M, по теореме 2.11.1 найдем скорость $\mathbf{v}_r^{(3)}$ точки M в репере S_3:

$$\mathbf{v}_r^{(3)} = \mathbf{v}_r^{(2)} + \mathbf{v}_2.$$

Продолжая этот процесс, получим утверждение теоремы.□

§ 2.12. Поле скоростей твердого тела

При поступательном движении (см. стр. 113) векторы скорости всех точек тела равны между собой в любой момент времени. За *скорость поступательного движения* принимают скорость любой точки тела.

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором две точки тела неподвижно закреплены на этой оси.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси каждая его точка описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Радиус окружности равен расстоянию от точки до оси вращения. Положение некоторой точки M тела в пространстве можно однозначно охарактеризовать двугранным углом α между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения. Одна из плоскостей неподвижна, а вторая содержит точку M и вращается. Величина скорости точки M при движении по окружности есть

$$v = R\frac{d\alpha}{dt},$$

где выражение $d\alpha/dt$ называется *угловой скоростью* тела, R — расстояние от точки до оси вращения. Скорость точки M параллельна плоскости ее движения и направлена перпендикулярно радиусу в сторону вращения.

Введем скользящий вектор $\boldsymbol{\omega}$ (см. раздел 1.2), основание которого совпадает с осью вращения. Ориентируем его так, чтобы из его конца вращение было видно происходящим против хода часовой стрелки. Полюс O расположим на оси вращения. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор некоторой точки твердого тела. Тогда ее скорость может быть выражена с помощью векторного произведения (формула Эйлера):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Выражение, стоящее в правой части, не зависит от расположения полюса O на оси вращения. В самом деле, пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0 \parallel \boldsymbol{\omega}$. Тогда

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}.$$

Перейдем к изучению поля скоростей (см. стр. 15) в общем случае движения твердого тела.

Определение 2.12.1. Поле скоростей называется *поступательным*, если векторы скоростей всех точек тела совпадают. Поле скоростей называется *вращательным*, если существует скользящий вектор $\boldsymbol{\omega}$ (*вектор угловой скорости*) такой, что скорость $\mathbf{v}$ любой точки тела дается формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}},$$

где $\tilde{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки, имеющий начало на основании вектора $\boldsymbol{\omega}$, одинакового для всех точек тела.

Теорема 2.12.1. (Эйлера о поле скоростей твердого тела). *В любой момент времени произвольного движения твердого тела его поле скоростей может быть представлено как сумма поступательного и вращательного полей скоростей:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость, одинаковая для всех точек тела, $\tilde{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор точки тела, имеющий начало в полюсе O' репера S, связанного с телом, $\boldsymbol{\omega}$ — скользящий вектор с основанием, проходящим через точку O'.

Доказательство. Закон движения любой точки твердого тела можно в соответствии с теоремой 2.3.1 представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}'(t),$$

где $\mathbf{x}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}'(t)$ — абсолютный радиус-вектор полюса O', фиксированного в теле, $\mathbf{A}(t) \in SO(3)$ — ортогональный линейный оператор с матрицей A, удовлетворяющей условию $AA^T = E$.

Продифференцируем закон движения точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{x} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}.$$

Величина $d\mathbf{r}'/dt$ есть скорость точки O'. Вместе с тем она, будучи одинаково отнесена ко всем точкам, задает поступательное поле скоростей, упомянутое в условии теоремы. Обозначим $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}'/dt$. Далее, очевидно, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $\mathbf{x} = A^T\tilde{\mathbf{r}}$. Подставляя последнее выражение в формулу для скорости точки тела, найдем

$$\mathbf{v} = \frac{dA}{dt}A^T\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_0.$$

Покажем, что матрица $(dA/dt)A^T$ кососимметрична. В самом деле, учтем, что $AA^T = E$. Тогда

$$\frac{dA}{dt}A^T + A\frac{dA^T}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt}A^T = -A\frac{dA^T}{dt} = -\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)^T.$$

Следовательно, существует тройка чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ такая, что

$$\frac{dA}{dt}A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а умножение на эту матрицу эквивалентно операции векторного умножения на вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, ассоциированный с тройкой чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Поэтому

$$\frac{dA}{dt}A^T\tilde{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}.$$□

Следствие 2.12.1. *Проекции скоростей концов отрезка твердого тела на направление самого отрезка совпадают.*

Доказательство. Достаточно умножить формулу теоремы 2.12.1 скалярно на вектор $\tilde{\mathbf{r}}$. После умножения получим $\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_0$. Но $\mathbf{v}_0$ — скорость точки, совпадающей с началом вектора $\tilde{\mathbf{r}}$, а $\mathbf{v}$ — скорость конца этого вектора.□

В доказательстве теоремы 2.12.1 был использован тот факт, что умножение на кососимметричную матрицу эквивалентно векторному умножению на вектор, ассоциированный с его элементами. Построить такой вектор можно лишь тогда, когда фиксирован некоторый базис. Остался неизученным вопрос, будет ли этот вектор одним и тем же при изменении базиса. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.12.2. *Тройка $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ элементов угловой скорости образует скользящий псевдовектор $\boldsymbol{\omega}$ (это значит, что $\boldsymbol{\omega}$ изменяет направление при изменении ориентированности базиса).*

Доказательство. Пусть A — матрица оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{r}'(t),$$

в репере $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с началом в полюсе O. Выберем другой ортонормированный репер $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ с тем же началом и с постоянной матрицей направляющих косинусов $B = (b_{ij})$:

	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_2$	$\mathbf{k}_3$
$\mathbf{e}_1$	b_{11}	b_{12}	b_{13}
$\mathbf{e}_2$	b_{21}	b_{22}	b_{23}
$\mathbf{e}_3$	b_{31}	b_{32}	b_{33}

Очевидно, что в базисе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ матрица угловой скорости примет вид

$$\Omega = B^T\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)B.$$

Матрицу B символически запишем следующим образом:

$$B = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3),$$

где $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ заменяют собой столбцы, образованные координатами этих векторов в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Проводя формальные преобразования, получим

$$\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)B = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_3).$$

Правая часть, как и прежде, представляет собой матрицу, составленную из столбцов, образованных компонентами векторных произведений. Указанные векторные произведения имеют смысл, так как $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{k}_i$ определены в одном и том же базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Далее,

$$B^T\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)B = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1) & \mathbf{k}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_2) & \mathbf{k}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_3) \\ \mathbf{k}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1) & \mathbf{k}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_2) & \mathbf{k}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_3) \\ \mathbf{k}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_1) & \mathbf{k}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_2) & \mathbf{k}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_3) \end{pmatrix}.$$

Произведя циклические перестановки векторов, найдем

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1) & \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1) \\ \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2) & 0 & \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_2) \\ \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_3) & \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два возможных случая реализации матрицы B.

1) $\det B = 1$. Тогда зеркальные отражения осей координат отсутствуют и, если исходный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ был правоориентированным, то и базис $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ окажется правоориентированным. Значит, $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ и потому

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_3 & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_2 \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_3 & 0 & -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_1 \\ -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_2 & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, в новом базисе компоненты матрицы угловой скорости получаются путем проектирования $\boldsymbol{\omega}$ на новые базисные векторы. Следовательно, компоненты $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ преобразуются как координаты вектора.

2) $\det B = -1$. Тогда имеется зеркальное отражение одной из осей координат. Пусть для определенности это будет ось $\mathbf{k}_3$. Базис $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ станет левоориентированным. Поэтому

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_3, \quad \mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$$

и

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_3 & -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_2 \\ -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_3 & 0 & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_1 \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_2 & -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что при переходе от правоориентированного базиса к левоориентированному помимо применения к тройке $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ правила преобразования векторов требуется еще поменять ее знак на противоположный. Объекты, обладающие таким свойством, называются *псевдовекторами*.

Далее, $\boldsymbol{\omega}$ — скользящий псевдовектор, так как в соответствии с теоремой Эйлера основание $\boldsymbol{\omega}$ проходит через точку, определенную радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, и любая точка прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \lambda\boldsymbol{\omega},$$

где λ — произвольный скаляр, имеет скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ и может быть выбрана за полюс при описании поля скоростей в данный момент времени.□

Заметим, что скалярное произведение псевдовектора на вектор называется *псевдоскаляром*. Псевдоскаляр меняет знак при зеркальном отражении базисных векторов.

Если при преобразованиях координат выполнять переходы только к базисам одинаковой ориентированности (использовать либо только правоориентированные, либо только левоориентированные базисы),

то тройку $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ можно считать полноправным скользящим вектором. В связи с этим в механике условились всегда использовать только правоориентированные системы базисных векторов.

В дальнейшем ограничимся только такими преобразованиями координат, которые сохраняют ориентированность базиса. Это позволяет считать $\boldsymbol{\omega}$ скользящим вектором.

Перейдем к анализу элементарных эквивалентных операций над системой угловых скоростей.

§ 2.13. Система угловых скоростей

Теорема 2.13.1. *Пусть вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^1$ соответствует линейному оператору $\mathbf{A}_1(t) \in SO(3)$, а вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^2$ — линейному оператору $\mathbf{A}_2(t) \in SO(3)$. Тогда композиции линейных операторов $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ соответствует угловая скорость*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\omega}^2.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.11.1 о сложении скоростей в относительном движении. Действие композиции $\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ можно интерпретировать как последовательность преобразований

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}.$$

Следовательно (см. доказательство теоремы 2.11.1), координаты вектора $\mathbf{y}(t)$ задают точку M тела в подвижном репере S: $Oe'_1e'_2e'_3$. Движение репера S относительно S_o задается оператором A_1. Тем самым точка M участвует в сложном движении. Ее переносная скорость $\mathbf{v}_e$ из-за движения S и относительная скорость $\mathbf{v}_r$ в репере S даются выражениями

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{A}_1\dot{\mathbf{y}}.$$

С использованием матриц операторов выражение для $\mathbf{v}_r$ можно представить в виде

$$\mathbf{v}_r = A_1\frac{dA_2}{dt}\mathbf{x} = A_1\frac{dA_2}{dt}A_2^T\mathbf{y} = A_1\frac{dA_2}{dt}A_2^TA_1^T\mathbf{r},$$

где A_2 — матрица оператора $\mathbf{A}_2$ в репере S. Воспользуемся понятием угловой скорости и сопоставим матрице $(dA_1/dt)A_1^T$ вектор $\boldsymbol{\omega}^1$, матрице $(dA_2/dt)A_2^T$ — вектор $\boldsymbol{\omega}^2$. Рассмотрим матрицу

$$\Omega_2 = A_1(dA_2/dt)A_2^TA_1^T.$$

Кососимметричной матрице $(dA_2/dt)A_2^T$ соответствует вектор угловой скорости движения в репере S. Матрица Ω_2, как легко видеть,

также кососимметрична. Она получается вследствие перехода к реперу S_o преобразованием подобия с помощью матрицы A_1. Матрице Ω_2 сопоставим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^2$ относительного движения. Суммируя сказанное, имеем

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}^1 \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}^2 \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = (\boldsymbol{\omega}^1 + \boldsymbol{\omega}^2) \times \mathbf{r}.$$□

С помощью этой теоремы можно интерпретировать результат сложения нескольких вращательных полей, отвечающих угловым скоростям, основания которых пересекаются, как вращательное поле, полученное вследствие композиции угловых движений. Одновременно найдено правило сложения угловых скоростей, которое сформулируем в виде следствия.

Следствие 2.13.1. (Угловая скорость сложного движения). *Если поле скоростей в твердом теле соответствует вращению с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^r$ относительно репера S_1, который сам вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^1$ в репере S_2, репер S_2 вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^2$ в репере S_3 и т.д. и, наконец, репер S_k вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^k$ в неподвижном репере S_0, и если основания всех векторов $\boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^k$ пересекаются в одной точке, то результирующее поле скоростей в репере S_0 будет вращательным с угловой скоростью*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^r + \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\omega}^i.$$

Теорема 2.13.2. (Сложение поступательных полей скоростей). *Пусть поле скоростей твердого тела в репере S_1 — поступательное со скоростью $\mathbf{v}_r$, поле скоростей репера S_1 в репере S_2 — поступательное со скоростью $\mathbf{v}_1$, поле скоростей репера S_2 в репере S_3 — поступательное со скоростью $\mathbf{v}_2$ и т.д. Наконец, поле скоростей репера S_k в неподвижном репере S_0 — поступательное со скоростью $\mathbf{v}_r$. Тогда поле скоростей тела в репере S_0 — поступательное со скоростью*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i.$$

Доказательство. Каждая точка твердого тела участвует в сложном движении. Достаточно применить теорему 2.11.1.□

Рассмотрим общий случай, когда движение твердого тела есть композиция вращательных и поступательных перемещений. Такой случай описывается формулами

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}_1\mathbf{y} + \mathbf{r}'_1 \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{y}',$$

где операторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и векторы $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{y}'$ зависят от времени и одинаковы для всех точек твердого тела. Вектор $\mathbf{x}$ не зависит от времени и фиксирует конкретную точку твердого тела.

В рассматриваемом случае оператор $\mathbf{A}_1$ оставляет неподвижной точку O_1, совпадающую с концом вектора $\mathbf{r}_1'$, а оператор $\mathbf{A}_2$ — точку O_2, совпадающую с концом вектора $\mathbf{r}' = \mathbf{A}_1\mathbf{y}' + \mathbf{r}_1'$. Следовательно, основание вектора $\boldsymbol{\omega}^1$, соответствующего оператору $\mathbf{A}_1$, проходит через точку O_1, а основание вектора $\boldsymbol{\omega}^2$ проходит через точку O_2. Имеем два скользящих вектора угловых скоростей, основания которых могут, вообще говоря, не пересекаться.

Вместе с тем, очевидно, эти векторы приводятся к одному скользящему вектору $\boldsymbol{\omega}$, так как рассматриваемое сложное движение задается равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{r}'.$$

Видим, что всякому множеству скользящих векторов угловых скоростей можно сопоставить композицию линейных операторов. Поле скоростей, порождаемое композицией, будет равно сумме полей, порождаемых элементами этого множества. Тем самым получают смысл операции эквивалентного преобразования такого множества и возникает возможность рассматривать его как систему (см. раздел 1.3).

Определение 2.13.1. Пусть поле скоростей твердого тела представляется в виде суммы вращательного поля репера S с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, основание которой проходит через полюс O, и вращательного поля в репере S с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$, имеющей основание, параллельное $\boldsymbol{\omega}$. Такая система угловых скоростей называется *парой вращений*.

Теорема 2.13.3. *Пара вращений равносильна поступательному полю скоростей. Вектор $\mathbf{v}$ этого поля вычисляется по формуле*

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d},$$

где вектор $\mathbf{d}$ — плечо пары (см. стр. 31).

Доказательство. Пусть задана пара вращений

$$(0, \boldsymbol{\omega}), \quad (\mathbf{r}_A, -\boldsymbol{\omega}).$$

Воспользуемся теоремой о сложении скоростей. Переносная скорость произвольной точки M твердого тела, возникающая из-за движения репера S, определена выражением

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M. Относительная скорость точки M в репере S вычисляется по формуле

$$\mathbf{v}_r = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A).$$

Абсолютная скорость есть сумма этих двух скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}.$$

Тем самым скорости всех точек тела в рассматриваемый момент времени оказываются равными.□

Теорема 2.13.4. (Результирующее поле скоростей). *Поле скоростей твердого тела как сумма нескольких вращательных и нескольких поступательных полей сводится эквивалентными операциями (см. раздел 1.3) к сумме одного поступательного поля и одного вращательного поля скоростей.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.13.3 основание угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ можно смещать, добавляя соответствующее поступательное поле скоростей. В самом деле, выберем точку O, не принадлежащую основанию угловой скорости. Приложим к ней два вектора $\boldsymbol{\omega}$ и $-\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости. Они не изменяют поле скоростей в теле. Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$, действующий вдоль первоначальной оси, и вектор $-\boldsymbol{\omega}$ с параллельным основанием, проходящим через точку O, образуют пару, эквивалентную поступательному полю скоростей. Повторяя доказательство теоремы 1.5.1, сместим так каждый из заданных векторов угловых скоростей. Получим сумму поступательных полей и систему угловых скоростей, основания которых проходят через одну и ту же точку O. Вследствие теорем 2.13.1 и 2.13.2 заключаем, что такая система эквивалентна сумме одного поступательного и одного вращательного полей скоростей.□

Определение 2.13.2. Поле скоростей называется *винтовым*, если оно есть сумма поступательного и вращательного полей, причем скорость поступательного поля параллельна угловой скорости вращательного.

Теорема 2.13.5. *Сумма поступательного со скоростью $\mathbf{v}$ и вращательного с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ полей скоростей эквивалентна винтовому полю.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.5.2 с заменой $\mathbf{R} \rightharpoonup \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M} \rightharpoonup \mathbf{v}$.□

Таким образом, поле скоростей твердого тела в любой фиксированный момент времени движения всегда может быть представлено

как винтовое поле. Ось вращения (основание скользящего вектора $\boldsymbol{\omega}$), соответствующая винтовому полю скоростей, называется *винтовой осью*. Отношение скорости u поступательного поля, параллельного винтовой оси, к угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ называется параметром винта $p = u/|\boldsymbol{\omega}|$. При $p = 0$ остается только вращательное поле, при $p = \infty$ — только поступательное.

Если с течением времени положение винтовой оси, угловая и поступательная скорости не меняются, то твердое тело совершает движение, которое называется *винтовым*. Тогда за время полного оборота $\tau = 2\pi/|\boldsymbol{\omega}|$ тело продвинется вдоль оси вращения на расстояние $l = \tau u = 2\pi p$. Это расстояние называется *шагом винта*.

В общем случае движение твердого тела будет гораздо более сложным из-за того, что ориентация и положение винтовой оси, угловая и поступательная скорости могут изменяться со временем.

Параметрическое уравнение винтовой оси (см. стр.39) имеет вид

$$\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}{\omega^2} + \lambda\boldsymbol{\omega},$$

где λ — скалярный параметр; вектор $\mathbf{r}$, определяющий точку винтовой оси, имеет начало в произвольном полюсе O_1, выбранном для упрощения системы скользящих векторов угловых скоростей; $\mathbf{v}$ — скорость точки O_1.

Чтобы исключить λ, умножим параметрическое уравнение винтовой оси векторно на $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})}{\omega^2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}}{\omega^2}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}$$

или

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}}{\omega^2}\boldsymbol{\omega}.$$

Имеем векторное уравнение винтовой оси. Как и следовало ожидать, оно не дает однозначно значение $\mathbf{r}$, а определяет его лишь с точностью до произвольного смещения вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$. Поэтому три проекции этого уравнения на оси произвольной ортогональной системы координат будут линейно зависимыми.

При движении твердого тела его поле скоростей непрерывно меняется со временем. Изменяются и векторы $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$. В каждый следующий момент времени будет получаться, вообще говоря, другая винтовая ось.

Уравнение винтовой оси, точки которой в неподвижном репере S_0 задаются радиусом-вектором $\mathbf{r}_s$, имеет вид

$$\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}}{\omega^2}\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки O_1 в репере S_0, а $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}' + \mathbf{r}$.

Множество положений, которые последовательно занимает винтовая ось в неподвижном пространстве, связанном с репером S_0, называется *неподвижным аксоидом*.

Запишем уравнение винтовой оси в репере, жестко связанном с твердым телом:

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}}{\omega^2}\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки твердого тела, лежащей на винтовой оси, $\mathbf{A} \in SO(3)$ — оператор ориентации тела в неподвижном пространстве.

Множество положений, которые последовательно занимает винтовая ось в движущемся теле, называется *подвижным аксоидом*.

Подвижный и неподвижный аксоиды двумерны. Они имеют две координаты: одна из них — λ, отсчитываемая вдоль винтовой оси, другая — время движения t. Задание их однозначно определяет точку на аксоиде. Тем самым подвижный и неподвижный аксоиды суть *линейчатые поверхности*. Они в каждый момент времени имеют по крайней мере одну общую прямую — винтовую ось.

Теорема 2.13.6. *Подвижный и неподвижный аксоиды, если они не вырождаются в прямую, имеют общую касательную плоскость, проходящую через винтовую ось.*

Доказательство. Пусть закон движения точки M обеспечивает принадлежность ее в любой момент времени винтовой оси. Движение этой точки можно рассматривать как в неподвижном репере S_0, так и в репере S, связанном с телом. Всегда можно выбрать движение M так, чтобы существовали относительная $\mathbf{v}_r$ и абсолютная $\mathbf{v}_a$ скорости точки M. Можно считать, что в каждый момент времени M есть точка как неподвижного, так и подвижного аксоида. Перемещаясь по неподвижному аксоиду, точка M имеет абсолютную скорость $\mathbf{v}_a$, которая лежит в плоскости, касательной к неподвижному аксоиду. Относительная скорость $\mathbf{v}$ точки M в репере S направлена по касательной к относительной траектории, принадлежащей подвижному аксоиду, и потому лежит в плоскости, касательной к подвижному аксоиду. Переносная скорость $\mathbf{v}_e$ есть скорость точки M' твердого тела, совпадающей с M, и направлена вдоль винтовой оси. Она тоже принадлежит касательной плоскости к подвижному аксоиду. Имеем

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

Следовательно, $\mathbf{v}_a$ принадлежит плоскости, касательной к подвижному аксоиду. Так как закон движения точки M вдоль винтовой оси

можно выбрать произвольно, лишь бы он был дифференцируемым по времени, то вектор $\mathbf{v}_a$ можно считать непараллельным винтовой оси. Поэтому плоскости, касательные к подвижному и неподвижному аксоидам, совпадают.□

Следствие 2.13.2. *Произвольное непрерывное движение твердого тела можно представить как качение подвижного аксоида по неподвижному с возможным проскальзыванием вдоль винтовой оси.*

Отсюда ясна большая роль теории линейчатых поверхностей в вопросах, связанных с организацией требуемого сложного движения твердых тел, служащих деталями механических систем.

§ 2.14. Поле скоростей плоскопараллельного движения

Движение называется *плоскопараллельным*, если скорости всех точек твердого тела в любой момент времени параллельны некоторой неподвижной плоскости. Сечение твердого тела этой плоскостью представляет собой фигуру, дающую однозначное представление о положении тела в пространстве при плоскопараллельном движении.

Теорема 2.14.1. *Поле скоростей плоскопараллельного движения может быть либо поступательным, либо вращательным с осью, перпендикулярной плоскости движения.*

Доказательство. С помощью эквивалентных операций приведем поле скоростей к винтовому:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Начало вектора $\mathbf{r}$ расположено на оси винта, его конец фиксирует точку плоской фигуры твердого тела. Вектор $\mathbf{v}$ должен быть параллелен плоскости движения $\mathcal{P}$ для любого радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Покажем, что могут быть лишь два случая:

1. $\mathbf{u} = 0$, вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости $\mathcal{P}$,
2. $\boldsymbol{\omega} = 0$, вектор $\mathbf{u}$ параллелен плоскости $\mathcal{P}$.

Рассмотрим все логически возможные варианты.

Вариант 1. Вектор $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ и параллелен плоскости $\mathcal{P}$. Найдем скорости двух произвольных точек этой плоскости:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2.$$

Разность этих скоростей выражается формулой

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

В силу произвольности выбора точек разность $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ можно считать не параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$. Имеем противоречие. В левой части последнего равенства стоит вектор, параллельный плоскости $\mathcal{P}$, а в правой части — вектор, перпендикулярный этой плоскости. Значит, вариант 1 не может иметь места.

Вариант 2. Вектор $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, и винтовая ось пересекает плоскость $\mathcal{P}$ в точке O. Тогда скорость произвольной точки плоской фигуры выражается формулой $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, имеющий начало в O и принадлежащий $\mathcal{P}$. Скорость самой точки O равна $\mathbf{u}$. Отсюда ясно, что $\mathbf{u} = 0$, так как в противоположном случае скорость точки O должна быть направлена вдоль $\boldsymbol{\omega}$ и не будет параллельна плоскости $\mathcal{P}$. Значит, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Но векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ параллельны плоскости $\mathcal{P}$. Умножим $\mathbf{v}$ векторно на $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Вектор $\mathbf{r}$ всегда можно выбрать перпендикулярным $\boldsymbol{\omega}$, и тогда $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})/\mathbf{r}^2$. Тем самым вектор $\boldsymbol{\omega}$ обязан быть перпендикулярным плоскости $\mathcal{P}$.

Вариант 3. Вектор $\boldsymbol{\omega} = 0$. Тогда для любой точки плоской фигуры должно быть $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, и поле скоростей поступательное. Ясно, что тогда вектор $\mathbf{u}$ должен быть параллелен плоскости $\mathcal{P}$.□

Теорема 2.14.2. *Плоскопараллельное поступательное поле скоростей есть предельный случай вращательного поля, когда угловая скорость стремится к нулю, а ось вращения уходит в бесконечность.*

Доказательство. Рассмотрим следующую систему угловых скоростей:

$$(\mathbf{r}_1, \omega_1\mathbf{e}), \quad (\mathbf{r}_2, -\omega_2\mathbf{e}), \quad \omega_1 - \omega_2 = \alpha \neq 0.$$

Эта система эквивалентна скользящему вектору $(\mathbf{r}, \alpha\mathbf{e})$, где

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1\omega_1 - \mathbf{r}_2\omega_2}{\alpha}.$$

Пусть теперь $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ принадлежат плоскости движения, а $\mathbf{e}$ — нормаль к этой плоскости. Если $\omega_1 \rightharpoonup \omega_2$, то вектор $\mathbf{r}$, определяющий эквивалентную ось вращения, становится бесконечно большим по модулю, а $\alpha \rightharpoonup 0$. Вместе с тем рассматриваемая система угловых скоростей стремится к паре, которая эквивалентна поступательному движению.□

Таким образом, плоскопараллельное поле скоростей всегда можно привести к вращательному полю, основание угловой скорости которого перпендикулярно плоскости движения.

Аксоиды в плоскопараллельном движении представляют собой цилиндрические поверхности, образующие которых перпендикулярны плоскости движения. Аксоиды пересекаются с плоскостью движения по двум кривым, называемым соответственно *подвижной* и *неподвижной центроидами*.

Определение 2.14.1. Точка пересечения основания угловой скорости вращательного поля скоростей с плоскостью движения называется *мгновенным центром скоростей* (иногда *мгновенным центром вращения*).

Непрерывное плоскопараллельное движение твердого тела можно представить как качение без проскальзывания подвижной центроиды по неподвижной. Это следует из того, что скорость точки твердого тела, совпадающей с мгновенным центром скоростей, равна нулю.

Если положение мгновенного центра скоростей известно, то скорость произвольной точки твердого тела, лежащей в плоскости движения, перпендикулярна к прямой, соединяющей эту точку с мгновенным центром скоростей. Вектор скорости направлен по касательной к траектории. Зная законы движения двух точек твердого тела, можно определить центроиды как геометрическое место пересечений нормалей к траекториям точек, взятых в один и тот же момент времени, если только эти нормали не окажутся параллельными.

§ 2.15. Поле скоростей тела с одной неподвижной точкой

В случае, когда твердое тело имеет одну неподвижную точку O, основание винта поля скоростей в каждый момент времени должно проходить через эту точку. Иначе возникает противоречие с требованием равенства нулю скорости точки O. Точки тела, расположенные на основании винта, также будут иметь нулевую скорость, а скорость произвольной точки тела будет выражаться формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеют начало в неподвижной точке O. Следовательно, поле скоростей будет вращательным в любой момент времени. Угловая скорость задает направление *мгновенной оси вращения*, проходящей через точку O. Аксоиды представляют собой конические поверхности с общей вершиной в неподвижной точке. Подвижный аксоид катится по неподвижному без проскальзывания.

Пусть угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ представляет собой известную вектор-функцию времени t. В неподвижной точке O выберем ортонормированный репер S векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, жестко связанных с твердым

телом, и неподвижный ортонормированный репер S_0 векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Установим правило, с помощью которого, зная функцию $\boldsymbol{\omega}(t)$, можно вычислить матрицу оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$, описывающего движение тела.

Как отмечено на стр. 84, столбцы матрицы оператора $\mathbf{A}$ суть координаты векторов $\mathbf{e}_i'$, $i = 1, 2, 3$, жестко связанных с телом, взятые в неподвижном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если известен вектор $\boldsymbol{\omega}$, то скорость точки тела, совпадающей в каждый момент времени с концом вектора $\mathbf{e}_i'$, выражается формулой

$$\frac{d\mathbf{e}_i'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i', \quad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, относительно каждого вектора $\mathbf{e}_i'$ имеем одно векторное дифференциальное уравнение. В координатной форме оно эквивалентно системе из трех скалярных дифференциальных уравнений. Для того чтобы найти все столбцы матрицы оператора $\mathbf{A}$, имеем систему из трех векторных ($i = 1, 2, 3$) или из девяти скалярных дифференциальных уравнений. Скалярные произведения $\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j'$ остаются постоянными для решений указанной системы. В самом деле

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j') = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i') \cdot \mathbf{e}_j' + \mathbf{e}_i' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_j') = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e}_j' \times \mathbf{e}_i' + \mathbf{e}_i' \times \mathbf{e}_j') \equiv 0.$$

Различных скалярных произведений базисных векторов — шесть:

$$(\mathbf{e}_1')^2 = (\mathbf{e}_2')^2 = (\mathbf{e}_3')^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3' = 0.$$

Эти равенства должны быть выполнены в любой момент времени. Их наличие облегчает процедуру поиска столбцов матрицы оператора $\mathbf{A}$. Система уравнений, выражающая изменение векторов подвижного репера в репере S_0, называется *системой уравнений Пуассона* для базисных векторов, связанных с твердым телом. Такая система удобна, если вектор $\boldsymbol{\omega}$ задан координатами в неподвижном репере.

В том случае, когда координаты вектора $\boldsymbol{\omega}$ заданы в подвижном репере S, удобнее определять не столбцы, а строки матрицы оператора $\mathbf{A}$. Строки представляют собой координаты постоянных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в репере S. Чтобы получить нужные дифференциальные уравнения, заметим, что точка M_i, определяемая концом вектора $\mathbf{e}_i$, участвует в сложном движении. Будучи неподвижной, она перемещается относительно репера S, который в свою очередь имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Относительная скорость такого движения получается путем дифференцирования (d/dt) координат вектора $\mathbf{e}_i$ в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, так что $\mathbf{v}_r = d\mathbf{e}_i/dt$. Переносная скорость — это скорость,

которая была бы у точки M_i, будь она элементом твердого тела: $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$. Абсолютная скорость точки M_i равна нулю. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Получили *систему уравнений Пуассона для векторов неподвижного репера*. Она сохраняет скалярные произведения:

$$(\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_3)^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Установим теперь соотношения между координатами вектора $\boldsymbol{\omega}$ и производными по времени от углов Эйлера. Определение углов Эйлера дано на стр. 91, где оператор $\mathbf{A} \in SO(3)$ представлен в виде композиции $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\psi \circ \mathbf{A}_\vartheta \circ \mathbf{A}_\varphi$. Здесь $\mathbf{A}_\psi$ соответствует углу прецессии ψ, $\mathbf{A}_\vartheta$ — углу нутации ϑ, $\mathbf{A}_\varphi$ — углу собственного вращения φ. По определению вектор угловой скорости вращения вокруг некоторой оси направлен вдоль нее так, чтобы из его конца вращение было видно происходящим против хода часовой стрелки, а модуль вектора угловой скорости равен модулю производной по времени от угла поворота.

Оператор $\mathbf{A}_\varphi$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Угловая скорость собственного вращения равна $\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3^{(k)}$ (рис. 2.5.1).

Оператор $\mathbf{A}_\vartheta$ оставляет неподвижным вектор

$$\mathbf{e}_1^{(2)} = \mathbf{e}_1^{(k)} \cos\varphi - \mathbf{e}_2^{(k)} \sin\varphi.$$

Поэтому угловая скорость нутации $\boldsymbol{\omega}_\vartheta$ выражается равенством

$$\boldsymbol{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_1^{(2)}.$$

Оператор $\mathbf{A}_\psi$ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_3$. Значит, для угловой скорости прецессии $\boldsymbol{\omega}_\psi$ имеем

$$\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{e}_3.$$

В примере 2.6.1 указаны выражения для элементов матрицы оператора $\mathbf{A}$ через углы Эйлера. Из этих выражений следует

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1^{(k)} \sin\vartheta \sin\varphi + \mathbf{e}_2^{(k)} \sin\vartheta \cos\varphi + \mathbf{e}_3^{(k)} \cos\vartheta.$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1^{(k)} + \omega_2\mathbf{e}_2^{(k)} + \omega_3\mathbf{e}_3^{(k)}$. По теореме о сложении угловых скоростей будем иметь $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\vartheta + \boldsymbol{\omega}_\psi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin\vartheta \cos\varphi - \dot{\vartheta} \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos\vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем выражения для производных:

$$\dot\vartheta = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi,$$
$$\dot\psi = (\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)/\sin\vartheta,$$
$$\dot\varphi = \omega_3 - \dot\psi\cos\vartheta.$$

Получили *систему кинематических уравнений Эйлера*. Она позволяет вычислить угловое положение твердого тела, если проекции ω_1, ω_2, ω_3 угловой скорости на оси координат, жестко связанные с телом, заданы как функции времени.

Отметим вырождение кинематических уравнений Эйлера, когда $\vartheta = 0$. Оно возникает из-за совпадения действий поворотов по углу прецессии и углу собственного вращения, когда $\mathbf{e}_3^{(k)} = \mathbf{e}_3$ (см. рис. 2.5.1).

Найдем теперь соотношения между координатами вектора $\boldsymbol\omega$ и производными по времени от карданових углов α, β, γ (см. рис. 2.5.3). Оператор $\hat{\mathbf{A}}^{(3)}$ поворота на угол γ оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$. Угловая скорость $\boldsymbol\omega_\gamma$ выражается равенством $\boldsymbol\omega_\gamma = \dot\gamma\mathbf{e}_3^{(k)}$.

Оператор $\hat{\mathbf{A}}^{(2)}$ поворота на угол β оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_2^{(2)}$. Значит, $\boldsymbol\omega_\beta = \beta\mathbf{e}_2^{(2)}$. Наконец, оператор $\hat{\mathbf{A}}^{(1)}$ поворота на угол α оставляет неподвижным вектор $\mathbf{e}_1$. Следовательно, $\boldsymbol\omega_\alpha = \dot\alpha\mathbf{e}_1$. Учитывая действие операторов, будем иметь

$$\mathbf{e}_2^{(2)} = \mathbf{e}_1^{(k)}\sin\gamma + \mathbf{e}_2^{(k)}\cos\gamma,$$
$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{(k)}\cos\beta\cos\gamma - \mathbf{e}_2^{(k)}\cos\beta\sin\gamma + \mathbf{e}_3^{(k)}\sin\beta.$$

Кроме того, должно быть $\boldsymbol\omega = \boldsymbol\omega_\alpha + \boldsymbol\omega_\beta + \boldsymbol\omega_\gamma$. Поэтому

$$\omega_1 = \dot\alpha\cos\beta\cos\gamma + \dot\beta\sin\gamma,$$
$$\omega_2 = -\dot\alpha\cos\beta\sin\gamma + \dot\beta\cos\gamma,$$
$$\omega_3 = \dot\alpha\sin\beta + \dot\gamma.$$

Разрешая эти равенства относительно производных, получим

$$\dot\alpha = (\omega_1\cos\gamma - \omega_2\sin\gamma)/\cos\beta,$$
$$\dot\beta = \omega_1\sin\gamma + \omega_2\cos\gamma,$$
$$\dot\gamma = \omega_3 - \dot\alpha\sin\beta.$$

Имеем систему кинематических уравнений Эйлера для карданових углов. Она вырождается, но теперь уже при $\beta = \pi/2$.

Кинематические уравнения для параметров Эйлера (параметров Родрига-Гамильтона) свободны от вырождений. Вращение твердого тела (см. стр. 105) определено формулой

$$P_r = QP_xQ^*, \quad P_r = -P_r^*, \quad P_x = -P_x^*, \quad QQ^* = E, \quad \det Q = 1,$$

где $P_x = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ — косоэрмитова матрица, соответствующая вектору $\mathbf{x}$ точки в твердом теле, $P_r = r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + r_3\sigma_3$ — косоэрмитова матрица, соответствующая вектору $\mathbf{r}$ положения той же точки в неподвижном пространстве, базисные матрицы σ_i определены на стр. 103. Соответствующие векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{r}$ трехмерного пространства имеют вид

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3.$$

Матрица $Q \in SU(2)$. По теореме 2.7.4 параметры Эйлера служат коэффициентами ее разложения по базисным матрицам

$$Q = q_0E + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3.$$

С учетом того, что P_x — постоянная матрица, производная от матрицы P_r по времени дается равенством

$$\dot P_r = \dot QP_xQ^* + QP_x\dot Q^* = \dot QQ^*QP_xQ^* + QP_xQ^*\dot QQ^*$$

или

$$\dot P_r = \dot QQ^*P_r + P_rQ\dot Q^*.$$

Обозначим $P_\Omega = 2\dot QQ^*$. Очевидно, что $P_\Omega^* = 2Q\dot Q^*$. Кроме того,

$$QQ^* = E \to \dot QQ^* + Q\dot Q^* = 0 \to P_\Omega = -P_\Omega^*.$$

Поэтому матрица P_Ω косоэрмитова и

$$\dot P_r = \frac{1}{2}(P_\Omega P_r - P_rP_\Omega).$$

Теорема 2.15.1. *Справедлива формула*

$$P_\Omega = \begin{pmatrix} i\Omega_1 & \Omega_2 + i\Omega_3 \\ -\Omega_2 + i\Omega_3 & -i\Omega_1 \end{pmatrix},$$

где Ω_1, Ω_2, Ω_3 суть компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol\omega$ в неподвижном реперe: $\boldsymbol\omega = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2 + \Omega_3\mathbf{e}_3$.

Доказательство. Очевидно, имеем $\dot P_r = P_v$, где P_v — косоэрмитова матрица, соответствующая вектору скорости $\mathbf{v}$ точки твердого тела с радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Сопоставим матрице P_Ω вектор $\tilde\omega \in R^3$. Пользуясь формулами теоремы 2.7.3, получим

$$\dot P_r = P_v = P_{[\tilde\omega, r]}$$

или $\mathbf{v} = \tilde\omega \times \mathbf{r}$ для любой точки твердого тела. Другими словами, $\tilde\omega = \boldsymbol\omega$. При этом координаты вектора угловой скорости и радиуса-вектора точки тела берутся в одном и том же (неподвижном в данном случае) репере $Oe_1e_2e_3$.□

Теорема 2.15.2. *Параметры Кэли-Клейна и кватернионы подчиняются кинематическим уравнениям*

$$\dot Q = P_\Omega Q/2, \quad \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h}_\Omega \circ \mathbf{h}/2$$

соответственно. Здесь кватернион $\mathbf{h}_\Omega = \Omega_1\mathbf{i} + \Omega_2\mathbf{j} + \Omega_3\mathbf{k}$ задается компонентами вектора угловой скорости $\boldsymbol\omega$ в неподвижном репере $Oe_1e_2e_3$. Параметры Эйлера (Родрига-Гамильтона) подчиняются следующим кинематическим уравнениям

$$\dot q_0 = -\frac{1}{2}(\Omega_1q_1 + \Omega_2q_2 + \Omega_3q_3),$$
$$\dot q_1 = \frac{1}{2}(\Omega_1q_0 + \Omega_2q_3 - \Omega_3q_2),$$
$$\dot q_2 = \frac{1}{2}(\Omega_2q_0 + \Omega_3q_1 - \Omega_1q_3),$$
$$\dot q_3 = \frac{1}{2}(\Omega_3q_0 + \Omega_1q_2 - \Omega_2q_1).$$

Доказательство. По определению $P_\Omega = 2\dot QQ^*$. Чтобы получить кинематическое уравнение для параметров Кэли-Клейна, достаточно справа умножить это равенство на матрицу $Q/2$. Далее, матрице Q соответствует кватернион $\mathbf{h}$, а матрице P_Ω — кватернион $\mathbf{h}_\Omega$. Матричное и кватернионное кинематические уравнения изоморфны. Кинематические уравнения для параметров Эйлера получаются путем сравнения коэффициентов при одинаковых базисных матрицах E, σ_1, σ_2, σ_3 в соотношении

$$\dot q_0E + \dot q_1\sigma_1 + \dot q_2\sigma_2 + \dot q_3\sigma_3 = \frac{1}{2}(\Omega_1\sigma_1 + \Omega_2\sigma_2 + \Omega_3\sigma_3)(q_0E + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3),$$

которое получается после разложения правой и левой частей кинематических уравнений для параметров Кели-Клейна по базисным матрицам.□

Следствие 2.15.1. *Пусть вектор $\boldsymbol\omega$ представлен в виде разложения по базисным векторам $\mathbf{e}_1^{(k)}$, $\mathbf{e}_2^{(k)}$, $\mathbf{e}_3^{(k)}$ репера, жестко связанного с твердым телом:*

$$\boldsymbol\omega = \omega_1\mathbf{e}_1^{(k)} + \omega_2\mathbf{e}_2^{(k)} + \omega_3\mathbf{e}_3^{(k)}.$$

Тогда

$$P_\omega = \begin{pmatrix} i\omega_1 & \omega_2 + i\omega_3 \\ -\omega_2 + i\omega_3 & -i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_\omega = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k},$$

и кинематические уравнения для параметров Кэли-Клейна, кватернионов, параметров Эйлера соответственно принимают вид

$$\dot Q = QP_\omega/2, \quad \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_\omega/2,$$
$$\dot q_0 = -\frac{1}{2}(\omega_1q_1 + \omega_2q_2 + \omega_3q_3),$$
$$\dot q_1 = \frac{1}{2}(\omega_1q_0 - \omega_2q_3 + \omega_3q_2),$$
$$\dot q_2 = \frac{1}{2}(\omega_2q_0 - \omega_3q_1 + \omega_1q_3),$$
$$\dot q_3 = \frac{1}{2}(\omega_3q_0 - \omega_1q_2 + \omega_2q_1).$$

Доказательство. Имеем $\dot P_r = P_v = \dot QP_xQ^* + QP_x\dot Q^*$. Перейдем в этом равенстве к координатам точки в репере, жестко связанном с телом. Для этого умножим его слева на Q^*, а справа на Q. Тогда

$$P_V = Q^*P_vQ = Q^*\dot QP_x + P_xQ^*Q.$$

Косоэрмитовой матрице $P_\omega = 2Q^*\dot Q$ сопоставим вектор $\tilde\omega$ с координатами в репере, жестко связанном с твердым телом. Тогда матрица P_V, соответствующая компонентам вектора скорости в том же репере, выразится формулой

$$P_V = \frac{1}{2}(P_\omega P_x - P_xP_\omega) = P_{[\tilde\omega, x]}.$$

Отсюда, как и в теореме 2.15.2, заключаем, что матрице P_ω отвечает вектор угловой скорости, взятый в репере $Oe_1^{(k)}e_2^{(2)}e_3^{(k)}$. Остальные рассуждения проводятся аналогично доказательству теоремы 2.15.2.□

§ 2.16. Ускорение точки в сложном движении

Теорема 2.16.1. *Пусть имеется произвольный вектор $\mathbf{a}$, заданный координатами в подвижном ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$. Тогда абсолютная производная вектора $\mathbf{a}$ по времени выражается формулой*

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol\omega \times \mathbf{a},$$

где символ $\tilde d/dt$ означает дифференцирование по времени координат вектора $\mathbf{a}$ в подвижном базисе (относительная скорость изменения вектора $\mathbf{a}$), $\boldsymbol\omega$ — угловая скорость вращения базиса.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 2.12.1 Эйлера о поле скоростей твердого тела и теоремой 2.11.1 о сложении скоростей в относительном движении.□

Теорема 2.16.2. (Кориолиса о сложении ускорений). *Абсолютное ускорение точки M, участвующей в сложном движении, равно сумме*

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c,$$

где $\mathbf{w}_e$ — переносное ускорение, выражаемое формулой

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_o + \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}),$$

$\mathbf{w}_r$ — относительное ускорение точки, а $\mathbf{w}_c$ — добавочное или кориолисово ускорение:

$$\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_r,$$

$\mathbf{w}_o$ — ускорение начала O_1 подвижного репера, $\boldsymbol\omega$ — угловая скорость подвижного репера, $\dot{\boldsymbol\omega}$ — угловое ускорение, $\mathbf{v}_r$ — относительная скорость точки, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M, имеющий начало в точке O_1.

Доказательство. По теореме 2.12.1 Эйлера найдем абсолютную скорость точки M

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_o + \boldsymbol\omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}_o$ — скорость точки O_1 в неподвижном репере $Oe_1e_2e_3$. Дифференцируя абсолютную скорость по времени, получим

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_o + \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol\omega \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_r.$$

Применим правило дифференцирования вектора, заданного координатами в подвижном базисе:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_o + \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r) + \boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_r + \mathbf{w}_r.$$

После очевидных преобразований приходим к требуемой формуле.□

Отметим следующие свойства кориолисова ускорения:

1. Кориолисово ускорение обращается в нуль, когда поле скоростей подвижного репера поступательно (угловая скорость равна нулю), а также когда равна нулю скорость относительного движения точки M.

2. Кориолисово ускорение обращается в нуль, если относительная скорость точки и угловая скорость переносного движения становятся параллельными.

Теорема 2.16.3. (Ривальса). *Ускорение произвольной точки абсолютно твердого тела складывается из ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений:*

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_o + \mathbf{w}_\text{в} + \mathbf{w}_\text{oc}.$$

Вращательное ускорение дается формулой

$$\mathbf{w}_\text{в} = \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r}.$$

Осестремительное ускорение имеет вид

$$\mathbf{w}_\text{oc} = \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}) = \boldsymbol\omega(\boldsymbol\omega \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2.$$

Доказательство. Теорема Ривальса есть следствие теоремы Кориолиса, когда отсутствует относительное движение точки: $\mathbf{v}_r = 0$, $\mathbf{w}_r = 0$. В этом случае получим

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_o + \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}).$$

За полюс принимается начало O_1 подвижного репера.□

Следствие 2.16.1. *Вращательное ускорение возникает при изменении угловой скорости. Осестремительное ускорение имеется всегда при ненулевых неколлинеарных векторах $\boldsymbol\omega$ и $\mathbf{r}$. Оно направлено к основанию угловой скорости и перпендикулярно к нему.*

Пример 2.16.1. Пусть материальная точка M находится на плоской горизонтальной платформе. Платформа вращается с угловой скоростью $\Omega\mathbf{e}_3$ вокруг вертикальной оси $\mathbf{e}_3$, проходящей через неподвижную точку O. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M горизонтален и имеет начало в точке O. Относительно платформы точка M описывает окружность радиуса r с центром в O. Угловая скорость радиуса-вектора $\mathbf{r}$ относительно платформы равна $-\Omega\mathbf{e}_3$. Найти компоненты ускорения точки M.

Решение. Переносное ускорение возникает из-за вращения платформы:

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_\text{oc} = \Omega\mathbf{e}_3 \times (\Omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) = -\Omega^2\mathbf{r}.$$

Относительное ускорение возникает из-за движения точки по платформе:

$$\mathbf{w}_r = -\Omega\mathbf{e}_3 \times [(-\Omega\mathbf{e}_3) \times \mathbf{r}) = -\Omega^2\mathbf{r}.$$

Оно совпадает и по величине, и по направлению с переносным ускорением. Кориолисово ускорение составляет

$$\mathbf{w}_c = 2\Omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}_r = 2\Omega\mathbf{e}_3 \times (-\Omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) = 2\Omega^2\mathbf{r}.$$

Абсолютное ускорение отсутствует:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c = -2\Omega^2\mathbf{r} + 2\Omega^2\mathbf{r} = 0.$$

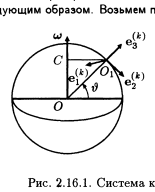
Этого и следовало ожидать, так как точка, участвуя в описанном сложном движении, остается неподвижной в абсолютном пространстве.◇

Пример 2.16.2. Найдем ускорение точки, движущейся относительно поверхности Земли. Пренебрегая сжатием Земли, примем ее за шар, радиус которого $R = 6371,1$ км. Так как Земля совершает оборот вокруг своей оси за одни сутки, то модуль Ω угловой скорости $\boldsymbol\omega$ вращения Земли ($|\boldsymbol\omega| = \Omega$) будем считать равным

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 0,00007272\,c^{-1}.$$

Подвижный репер, жестко связанный с поверхностью Земли, выберем следующим образом. Возьмем полюс O_1 на земной параллели, соответствующей какой-нибудь широте ϑ. Вектор $\mathbf{e}_3^{(k)}$ направим вдоль радиуса, проведенного из центра земной сферы в точку O_1. Вектор $\mathbf{e}_2^{(k)}$ направим по меридиану к югу, вектор $\mathbf{e}_1^{(k)}$ направим на запад по касательной к параллели (рис. 2.16.1). Точка O_1 имеет скорость $\mathbf{v}_o$, равную по модулю Ωp, где p есть радиус параллели на широте ϑ, и направленную в сторону, противоположную вектору $\mathbf{e}_1^{(k)}$. Имеем

$$\mathbf{v}_o = -\Omega R\cos\vartheta\mathbf{e}_1^{(k)}.$$



Начало координат O_1 лежит на поверхности Земли. Третья ось направлена вдоль радиуса из центра Земли. Вторая ось по меридиану к Югу. Первая ось направлена на запад. Выбранные оси образуют правую систему координат. Они жестко связаны с Землей и вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol\omega$.

Рис. 2.16.1. Система координат, связанная с Землей

В связи с тем что репер $O_1\mathbf{e}_1^{(k)}\mathbf{e}_2^{(k)}\mathbf{e}_3^{(k)}$ вращается вместе с Землей, его угловая скорость $\boldsymbol\omega$ совпадает с угловой скоростью Земли и направлена с юга на север, что соответствует вращению с запада на восток. Из рисунка видно, что вектор $\boldsymbol\omega$ образует с вектором $\mathbf{e}_3^{(k)}$ угол, равный $\pi/2 - \vartheta$, с

вектором $\mathbf{e}_2^{(k)}$ — угол, равный $\pi - \vartheta$, а с вектором $\mathbf{e}_1^{(k)}$ — угол, равный $\pi/2$. Следовательно,

$$\boldsymbol\omega = -\Omega\cos\vartheta\mathbf{e}_2^{(k)} + \Omega\sin\vartheta\mathbf{e}_3^{(k)}.$$

Абсолютная скорость точки M, заданной в репере $O_1\mathbf{e}_1^{(k)}\mathbf{e}_2^{(k)}\mathbf{e}_3^{(k)}$ радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1^{(k)} + x_2\mathbf{e}_2^{(k)} + x_3\mathbf{e}_3^{(k)},$$

выразится формулой

$$\mathbf{v} = \frac{\tilde d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol\omega \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_o$$

или

$$\mathbf{v} = \left(-\Omega R\cos\vartheta - x_3\Omega\cos\vartheta - x_2\Omega\sin\vartheta + \frac{dx_1}{dt}\right)\mathbf{e}_1^{(k)} + \left(x_1\Omega\sin\vartheta + \frac{dx_2}{dt}\right)\mathbf{e}_2^{(k)} + \left(x_1\Omega\cos\vartheta + \frac{dx_3}{dt}\right)\mathbf{e}_3^{(k)}.$$

Для вычисления абсолютного ускорения точки M воспользуемся теоремой Кориолиса. Точка O_1 описывает окружность с центром C (рис. 2.16.1) и имеет постоянную линейную скорость $\Omega R\cos\vartheta$. Поэтому модуль ее ускорения есть $\Omega^2R\cos\vartheta$. Перпендикуляр из точки O_1 на ось вращения образует с вектором $\mathbf{e}_2^{(k)}$ угол, равный $[-(\pi/2 + \vartheta)]$, а с вектором $\mathbf{e}_3^{(k)}$ — угол $\pi - \vartheta$. Значит,

$$\mathbf{w}_o = -\Omega^2R\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathbf{e}_2^{(k)} - \Omega^2R\cos^2\vartheta\,\mathbf{e}_3^{(k)}.$$

Угловое ускорение отсутствует. Осестремительное ускорение $\mathbf{w}_{oc}$ принимает вид

$$\mathbf{w}_{oc} = \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}) = -x_1\Omega^2\mathbf{e}_1^{(k)} - \Omega^2\sin\vartheta(x_3\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\mathbf{e}_2^{(k)} - \Omega^2\cos\vartheta(x_3\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta)\mathbf{e}_3^{(k)}.$$

Найдем координаты кориолисова ускорения $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_r$:

$$\mathbf{w}_c = 2\Omega\left[-\left(\frac{dx_3}{dt}\cos\vartheta + \frac{dx_2}{dt}\sin\vartheta\right)\mathbf{e}_1^{(k)} + \frac{dx_1}{dt}(\mathbf{e}_2^{(k)}\sin\vartheta + \mathbf{e}_3^{(k)}\cos\vartheta)\right].$$

Компоненты абсолютного ускорения

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1^{(k)} + w_2\mathbf{e}_2^{(k)} + w_3\mathbf{e}_3^{(k)}$$

выражаются следующими формулами:

$$w_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\Omega\left(\frac{dx_3}{dt}\cos\vartheta + \frac{dx_2}{dt}\sin\vartheta\right) - x_1\Omega^2,$$

$$w_2 = \frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\Omega\frac{dx_1}{dt}\sin\vartheta - \Omega^2\sin\vartheta(R\cos\vartheta + x_3\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta),$$

$$w_3 = \frac{d^2x_3}{dt^2} + 2\Omega\frac{dx_1}{dt}\cos\vartheta - \Omega^2\cos\vartheta(R\cos\vartheta + x_3\cos\vartheta + x_2\sin\vartheta).$$

Видим, что члены, связанные с осестремительным ускорением, весьма малы. Для того чтобы оценить влияние кориолисова ускорения, рассмотрим следующие частные случаи.

Случай 1. Пусть точка движется вдоль меридиана по траектории

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -R\sin\alpha, \quad x_3 = R(\cos\alpha - 1).$$

Тогда

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = -R\dot\alpha\cos\alpha, \quad \frac{dx_3}{dt} = -R\dot\alpha\sin\alpha.$$

В кориолисовом ускорении только первая компонента не равна нулю:

$$\mathbf{w}_c = 2\Omega R\dot\alpha\sin(\vartheta + \alpha)\mathbf{e}_1^{(k)}.$$

Тем самым кориолисово ускорение зависит от широты места расположения движущейся точки. Модуль этого ускорения равен нулю на экваторе ($\alpha = -\vartheta$), где скорость точки параллельна оси вращения Земли, и достигает максимума на полюсе ($\alpha = \pi/2 - \vartheta$).

Случай 2. Предположим, что вода течет в реке в Северном полушарии с юга на север ($\dot\alpha > 0$). При этом частицы воды должны получить ускорение $\mathbf{w}_c$, направленное с востока на запад. Такое ускорение сообщает частицам воды берег реки. Следовательно, правый берег должен интенсивнее подмываться водой и будет более крутым, чем левый. Если река течет с севера на юг, то $\dot\alpha < 0$, и кориолисово ускорение изменит свое направление на противоположное. Значит, и тогда река в Северном полушарии будет больше подмывать правый берег, который окажется круче, чем левый. Это свойство рек носит название закона Бэра. В Южном полушарии структура берегов будет иной.

Случай 3. Представим себе, что с корабля, находящегося на Северном полюсе, производится выстрел из пушки в горизонтальном направлении. Пусть снаряд имеет скорость v. Ускорение Кориолиса будет иметь величину $2\Omega v$, и линейное отклонение снаряда от его первоначального направления по истечении времени t будет приблизительно

равно Ωvt^2. Угловое же отклонение этого снаряда будет приблизительно равно линейному отклонению, деленному на пройденный путь. Следовательно, оно равно $\psi \approx \Omega vt^2/vt = \Omega t$, т. е. равно углу поворота земного шара за время t.

Случай 4. Значительное влияние кориолисова ускорения можно наблюдать в метеорологических явлениях. Ветер, т. е. движение воздушных масс, при отсутствии кориолисова ускорения дул бы в направлении от области бóльшего атмосферного давления к области мéньшего. Следовательно, направление ветра было бы перпендикулярно изобарам. Однако имеет место ускорение Кориолиса, направленное в Северном полушарии справа налево, если смотреть вдоль скорости потока. Поэтому в относительном движении частицы воздуха испытают добавочное ускорение. Область низкого давления с приблизительно концентрическими изобарами называют циклоном. Из-за кориолисова ускорения воздушные массы циклонов Северного полушария вращаются против хода часовой стрелки. В Южном полушарии такое движение совершается по ходу часовой стрелки.◇

§ 2.17. Поле ускорений в твердом теле

Определение 2.17.1. Точка твердого тела, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений*.

Пример 2.17.1. Рассмотрим круговой обруч, катящийся в вертикальной плоскости по горизонтальной прямой без проскальзывания. Если скорость центра обруча постоянна, то центр обруча и будет мгновенным центром ускорений. Вместе с тем мгновенный центр скоростей (см. определение 2.14.1) совпадает с точкой соприкосновения обруча и опорной прямой.◇

Теорема 2.17.1. *Если угловая скорость и угловое ускорение абсолютно твердого тела одновременно не равны нулю и не коллинеарны: $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$, то существует единственный мгновенный центр ускорений, и его радиус-вектор относительно полюса O_1 репера, жестко связанного с телом, выражается формулой*

$$\mathbf{r} = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}|^2}\big[(\mathbf{w}_o \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) + \omega^2(\mathbf{w}_o \cdot \boldsymbol{\omega}))\,\boldsymbol{\omega} + \\ + (\mathbf{w}_o \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}})\,\dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{w}_o \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})\big],$$

где обозначения совпадают с принятыми в разделе 2.16.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.16.3 Ривальса. Так как абсолютное ускорение искомой точки равно нулю, то имеем уравнение, определяющее радиус-вектор этой точки:

$$\mathbf{w}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2 = 0.$$

Вектор $\mathbf{r}$ будем искать в виде

$$\mathbf{r} = \alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\dot{\boldsymbol{\omega}} + \gamma(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}).$$

Подставим выражение для $\mathbf{r}$ в уравнение:

$$\mathbf{w}_o - (\alpha + \gamma\omega^2)(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) + (\gamma\dot{\omega}^2 + \beta(\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}))\boldsymbol{\omega} - (\gamma(\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \omega^2\beta)\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0.$$

Умножим полученное равенство скалярно сначала на $\boldsymbol{\omega}$, затем на $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, потом на $(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})$. Тогда получим систему трех уравнений относительно трех неизвестных α, β, γ:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}_o \cdot \boldsymbol{\omega} + \gamma[\omega^2\dot{\omega}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}})^2] = \mathbf{w}_o \cdot \boldsymbol{\omega} + \gamma|\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}|^2 = 0, \\ &\mathbf{w}_o \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \beta[(\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}})^2 - \omega^2\dot{\omega}^2] = \mathbf{w}_o \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \beta|\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}|^2 = 0, \\ &\mathbf{w}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) - (\alpha + \gamma\omega^2)|\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}|^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко найти α, β и γ. После подстановки их в выражение для $\mathbf{r}$ убеждаемся в справедливости теоремы.□

Если мгновенный центр ускорений принять за полюс, то для данного момента времени ускорение любой другой точки твердого тела выражается формулой

$$\mathbf{w} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*),$$

где $\mathbf{r}^*$ — радиус-вектор точки тела, имеющий начало в мгновенном центре ускорений. В правой части этой формулы имеются лишь две составляющие: вращательное и осестремительное ускорения.

Обратимся теперь к случаю, когда $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Так может быть, например, при $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} = 0$. Нетрудно убедиться в том, что тогда, если $\mathbf{w}_o = 0$, то мгновенным центром ускорений будет любая точка твердого тела, а если $\mathbf{w}_o \neq 0$, то мгновенный центр ускорений отсутствует. Пусть $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не равны нулю одновременно. При $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ они будут коллинеарными, и можно принять $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}\,\mathbf{e}_\omega$, $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_\omega$, где $\mathbf{e}_\omega$ — единичный вектор их общего направления.

Теорема 2.17.2. *Пусть угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ удовлетворяют условиям*

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \quad \dot{\omega}^2 + \omega^4 \neq 0.$$

Тогда, если $\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{w}_o \neq 0$, то мгновенный центр ускорений не существует, а если $\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{w}_o = 0$, то имеется множество мгновенных центров ускорений, составляющих прямую, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\left[\mathbf{w}_o\omega^2 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{w}_o\right] + \lambda\mathbf{e}_\omega,$$

где λ — произвольный скалярный параметр.

Доказательство. В условиях теоремы уравнение, служащее для определения радиуса-вектора мгновенного центра ускорений, запишем следующим образом:

$$\mathbf{w}_o + \dot{\omega}(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r}) + \omega^2\mathbf{e}_\omega \times (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r}) = 0.$$

Поскольку $\mathbf{e}_\omega \cdot (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r}) = 0$ и $\mathbf{e}_\omega \cdot [\mathbf{e}_\omega \times (\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r})] = 0$, то решение этого уравнения может быть тогда и только тогда, когда $\mathbf{w}_o \cdot \mathbf{e}_\omega = 0$. Пусть это условие выполнено. Будем искать $\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\omega}$. Для такого $\mathbf{r}$ уравнение принимает вид

$$\dot{\omega}(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r} = -\mathbf{w}_o.$$

Умножим это уравнение слева векторно на $\mathbf{e}_\omega$:

$$-\omega^2(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r}) - \dot{\omega}\mathbf{r} = -\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{w}_o.$$

Исключим из полученных двух уравнений член, содержащий $(\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{r})$:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\left[\mathbf{w}_o\omega^2 + \dot{\omega} \times \mathbf{w}_o\right].$$

Поскольку множество решений допускает сдвиг вдоль направления $\mathbf{e}_\omega$, получаем уравнение прямой, указанное в утверждении теоремы.□

Обратимся к изучению поля ускорений в плоскопараллельном движении. Зададим точку твердого тела радиусом-вектором $\mathbf{r}$, выходящим из неподвижного полюса O, а мгновенный центр скоростей — радиусом-вектором $\mathbf{r}_v$ с началом в том же полюсе. По теореме 2.14.1 найдем скорость точки твердого тела в плоскопараллельном движении:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_v),$$

где $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega} \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}_v)$.

Теорема 2.17.3. *Абсолютное ускорение $\mathbf{w}_v$ точки твердого тела, совпадающей с мгновенным центром скоростей, выражается формулой*

$$\mathbf{w}_v = -\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_v,$$

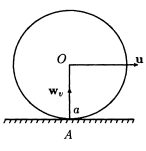
где $\dot{\mathbf{r}}_v$ — абсолютная скорость движения мгновенного центра скоростей по неподвижной центроиде.

Доказательство. Дифференцируя скорость плоскопараллельного движения, получим

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_v) + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_v).$$

Положим $\mathbf{r} = \mathbf{r}_v$. Тогда $\dot{\mathbf{r}} = 0$ как скорость точки тела, совпадающей с мгновенным центром вращения.□

Пример 2.17.2. Рассмотрим круговой обруч, катящийся в вертикальной плоскости по горизонтальной прямой без проскальзывания (рис.2.17.1). Пусть $\mathbf{u}$ — скорость центра обруча. Она направлена горизонтально. Мгновенный центр вращения в каждый момент времени совпадает с проекцией центра обруча на опорную прямую. Значит, $\dot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{u}$. Радиус обруча примем равным a. Тогда получим величину угловой скорости $\omega = u/a$. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_v$ направлен так, что из его конца вращение обруча видно происходящим против хода часовой стрелки. Воспользовавшись теоремой 2.17.3, найдем, что модуль ускорения точки обруча, совпадающей в данный момент времени с мгновенным центром скоростей, выражается формулой $\mathbf{w}_v = u^2/a$. Вектор $\mathbf{w}_v$ направлен по радиусу из мгновенного центра скоростей (точки касания обруча с опорной прямой) к центру обруча.◇



При качении обруча по горизонтальной неподвижной прямой мгновенный центр скоростей совпадает с точкой касания прямой и обруча. Если центр обруча движется равномерно, то мгновенный центр ускорений совпадает с центром обруча. Точка обруча, которая касается прямой, не имеет скорости, но имеет ускорение.

Рис. 2.17.1. Качение обруча по прямой

Из теоремы 2.17.3, в частности, следует, что мгновенный центр скоростей будет одновременно и мгновенным центром ускорений тогда и только тогда, когда $\dot{\mathbf{r}}_v = 0$.

Если за полюс принять мгновенный центр ускорений плоскопараллельного движения, то по теореме 2.16.3 (Ривальса) формула для расчета ускорения произвольной точки M тела примет вид

$$\mathbf{w} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_w) - \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w),$$

где $\mathbf{r}_w$ — радиус-вектор мгновенного центра ускорений. Другими словами, поле ускорений плоскопараллельного движения таково, как будто твердое тело вращается вокруг мгновенного центра ускорений.

Вращательное ускорение перпендикулярно вектору $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)$. Осестремительное ускорение параллельно $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)$. Следовательно, угол β между направлением ускорения точки M и прямой, соединяющей точку M с мгновенным центром ускорений, не зависит от расположения точки M в теле и может быть вычислен с помощью равенства $\operatorname{tg}\beta = \dot{\omega}/\omega^2$. Модуль ускорения точки вычисляется по формуле

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}.$$

В плоскопараллельном движении угловая скорость и угловое ускорение коллинеарны: $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} = 0$. Когда эти параметры известны, мгновенный центр ускорений можно определить с помощью теоремы 2.17.2. По смыслу введенных обозначений будем иметь

$$\mathbf{r}_w - \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\left[\mathbf{w}_1\omega^2 + \dot{\omega} \times \mathbf{w}_1\right],$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор точки, ускорение которой известно и равно $\mathbf{w}_1$. В частности, это может быть мгновенный центр скоростей. Тогда $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_v$, $\mathbf{w}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = -\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_v$ и

$$\mathbf{r}_w - \mathbf{r}_v = \frac{\omega}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}\left[\dot{\omega}\dot{\mathbf{r}}_v - \omega(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_v)\right].$$

Мгновенный центр ускорений можно определить и тогда, когда заданы не совпадающие друг с другом ускорения двух различных точек твердого тела. В самом деле, пусть $\mathbf{w}_1$ — ускорение точки тела, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}_1$, а $\mathbf{w}_2$ — ускорение точки, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}_2$. По теореме 2.16.3 должно быть выполнено равенство

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \omega^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

в котором учтено, что $\boldsymbol{\omega} \perp (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Из этого равенства следует

$$\omega^2 = -\frac{(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}.$$

Напомним, что модуль скалярного произведения векторов равен произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, а модуль векторного произведения равен произведению модулей сомножителей на синус угла между ними. Поэтому

$$\dot{\omega}^2 + \omega^4 = \frac{(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)^2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}.$$

Подставив найденные выражения в формулу для вычисления радиуса-вектора мгновенного центра ускорений и выполнив очевидные преобразования, получим

$$\mathbf{r}_w = \frac{1}{(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)^2}\{\mathbf{r}_1[(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_2] - \mathbf{r}_2[(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_1] + \\ + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_1)\}.$$

Контрольные вопросы к главе 2

2.1. Радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ движущейся точки можно представить координатами в различных реперах, в том числе подвижных и необязательно сохраняющих ортонормированность. Как следует выразить скорость точки, если базисные векторы $\mathbf{e}_i$ суть произвольные заданные функции времени?

2.2. В примере 2.1.1, вычислив скалярное произведение, убедиться, что вектор скорости точки перпендикулярен ее радиусу-вектору с началом (a, b, c). Какую поверхность заметает радиус-вектор движущейся точки, исходящий из начала координат?

2.3. Показать, что если точка движется по плоскости с постоянной по величине ненулевой скоростью и постоянным по величине ненулевым нормальным ускорением, то ее траектория есть окружность.

2.4. В каком случае закон движения абсолютно твердого тела можно однозначно определить, если заданы законы движения двух несовпадающих точек этого тела?

2.5. Доказать следствие 2.4.1.

2.6. Выписать зависимость компонент матрицы оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$ от углов Эйлера.

2.7. Выписать зависимость компонент матрицы оператора $\mathbf{A} \in SO(3)$ от кардановых углов.

2.8. Каким вращениям твердого тела соответствует значение параметра Эйлера $q_0 = 0$?

2.9. Каким вращениям твердого тела соответствуют значения параметров Эйлера $q_1 = q_2 = q_3 = 0$?

2.10. Доказать, что преобразование подобия $P = QP_xQ^{-1}$, $\det Q \neq 0$, сохраняет все собственные значения матрицы P_x.

2.11. Доказать формулу $P_{[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]} = P_b(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - P_c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (см. теорему 2.7.3).

2.12. Построить унитарную матрицу Q по углам Крылова.

2.13. Найти кватернион $h \in \mathcal{H}_1$ по кардановым углам.

2.14. Пусть q'_0, q'_1, q'_2, q'_3 — параметры Эйлера для $\mathbf{A}_1 \in SO(3)$, а q''_0, q''_1, q''_2, q''_3 — параметры Эйлера для $\mathbf{A}_2 \in SO(3)$. С использованием свойств унитарных матриц найти параметры Эйлера для композиции $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$.

2.15. Пусть q_0, q_1, q_2, q_3 — параметры Эйлера для композиции $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2$ операторов $\mathbf{A}_1 \in SO(3)$ и $\mathbf{A}_2 \in SO(3)$, а q'_0, q'_1, q'_2, q'_3 — параметры Эйлера для оператора $\mathbf{A}_1$. С использованием свойств унитарных матриц найти параметры Эйлера для оператора $\mathbf{A}_2$.

2.16. Є использованием понятия дифференциала вращения выразить множество всех дифференциалов смещений точек твердого тела, имеющего одну закрепленную точку.

2.17. Дать определение угловой скорости при произвольном движении твердого тела.

2.18. С помощью формулы Эйлера (см. теорему 2.12.1) выразить скорость точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, если радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки тела имеет начало в точке O, а ось вращения через точку O не проходит.

2.19. Доказать, что при движении твердого тела вокруг неподвижной точки справедлива формула

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}'_i \times \dot{\mathbf{e}}'_i,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, — базисные векторы репера, жестко связанного с телом и имеющего начало в неподвижной точке, а $\dot{\mathbf{e}}'_1$, $\dot{\mathbf{e}}'_2$, $\dot{\mathbf{e}}'_3$ — производные по времени от этих векторов.

2.20. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \sum \boldsymbol{\omega}_i$ — суммарный вектор системы угловых скоростей, а $\mathbf{V} = \sum \mathbf{v}_i$ — суммарный вектор поступательных полей скоростей. Показать, что если

a) $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$, то поле скоростей приводится к вращательному,

b) $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} \neq 0$, то поле скоростей приводится к винтовому,

c) $\boldsymbol{\Omega} = 0$, $\mathbf{V} \neq 0$, то поле скоростей приводится к поступательному,

d) $\boldsymbol{\Omega} = 0$, $\mathbf{V} = 0$, то скорости всех точек тела равны нулю.

2.21. Показать, что если $\boldsymbol{\Omega} = \sum \boldsymbol{\omega}_i \neq 0$ в плоскопараллельном движении, то поле скоростей приводится к вращательному. Найти уравнения результирующей оси угловой скорости в случае такого движения.

2.22. Пусть в осях, связанных с твердым телом, вектор угловой скорости тела, движущегося вокруг неподвижной точки, выражается формулой $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}'_1 + q\mathbf{e}'_2 + r\mathbf{e}'_3$. Выписать в скалярном виде систему уравнений Пуассона для координат векторов неподвижного репера. Непосредственным дифференцированием проверить сохранение скалярных произведений базисных векторов.

2.23. Выразить в скалярном виде компоненты угловой скорости твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, в осях, жестко связанных с телом, и в неподвижных осях через производные от параметров Эйлера.

2.24. Пусть абсолютное ускорение точки тождественно равно нулю, ускорение полюса и угловое ускорение движущейся системы координат отсутствуют. Написать уравнение, которому подчиняется относительное ускорение точки. Каким общим методом можно исследовать решения этого дифференциального уравнения?

2.25. Найти уравнения Земной параллели в координатах $O_1x_1x_2x_3$ примера 2.16.2. Исследовать в этих координатах влияние кориолисова ускорения в случае, когда точка движется вдоль параллели.

2.26. Пользуясь теоремой 2.17.1, определить положение мгновенного центра ускорений для случая, когда $\mathbf{w}_o \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{w}_o \perp \dot{\boldsymbol{\omega}}$.

2.27. Пользуясь теоремой 2.17.2, определить положение оси мгновенных центров ускорений движения в случае $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Объяснить механический смысл полученного решения.

2.28. По формуле, выражающей радиус-вектор мгновенного центра ускорений по заданным ускорениям двух точек в плоскопараллельном движении твердого тела, найти положение мгновенного центра ускорений для случая $\mathbf{w}_1 \parallel \mathbf{w}_2$, где $\mathbf{w}_1$ — ускорение точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{w}_2$ — ускорение точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}_2$. Показать, что мгновенный центр ускорений принадлежит прямой, соединяющей эти точки.

Глава 3

Динамика поступательного движения

§ 3.1. Пространственно-временна́я структура

Из всех событий реального мира теоретическая механика выделяет главным образом события, связанные с геометрическим аспектом процесса движения. Такие события состоят в том, что рассматриваемая геометрическая точка в заданный момент времени занимает конкретное положение в физическом пространстве. В этом смысле представление о мире можно предельно упростить, изображая его события точками в четырехмерном пространстве, полученном из трехмерного физического пространства добавлением измерения, отражающего ход времени. Время — особое измерение. Его отношение к геометрическим объектам зададим с помощью *галилео́вой пространственно-временно́й структуры*, включающей следующие аксиомы:

1. *Мир* — четырехмерное аффинное пространство A^4. Точки этого пространства называются *мировыми точками* или *событиями*. Пространству A^4 соответствует линейное пространство R^4.

2. *Интервал времени* — линейная функция $t : R^4 \to R$, отображающая линейное пространство векторов на вещественную "ось" времени. Промежутком времени от события $B \in A^4$ до события $C \in A^4$ называется число $t(\mathbf{BC})$. Если $t(\mathbf{BC}) = 0$, то события B и C называются *одновре́менными*. Множество всех одновременных событий трехмерно и образует аффинное пространство A^3. Ему соответствует линейное пространство R^3.

3. *Расстояние между одновременными событиями* задается скалярным произведением в пространстве R^3:

$$\rho(B,C) = |\mathbf{BC}|, \quad B \in A^3, \quad C \in A^3.$$

Пространство A^3, в котором введена указанная пространственно-временная структура, называется *галилеевым пространством*.

Галилеево преобразование — это аффинное преобразование $A^4 \to A^4$, сохраняющее структуру галилеева пространства, т.е. сохраняющее интервалы времени и расстояния между одновременными событиями.

Теорема 3.1.1. *Каждое галилеево преобразование представляет собой движение трехмерного пространства одновременных событий, сопровождаемое сдвигом начала отсчета времени.*

Доказательство. Пусть задано событие B. Выберем опорное событие O. Тогда в соответствии с галилеевой структурой будем иметь $B = (C, t(\mathbf{OB}))$, где C принадлежит пространству A^3 всех одновременных с B событий. В пространстве A^3 выберем опорную точку O'. Событие B можно охарактеризовать временем t и радиусом-вектором $\mathbf{x} \in R^3$ с началом в точке O' и концом в точке C. В общем случае аффинное преобразование $A^4 \to A^4$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}, \\ t' &= \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{x} + b_t t + c_t, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор; $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_t$, $\mathbf{c} \in R^3$; b_t, c_t — скалярные коэффициенты. При галилеевых преобразованиях любые два одновременных события переходят в одновременные. Пусть B и D два таких события: $B = (\mathbf{x}, t)$, $D = (\mathbf{y}, t)$. После галилеевого преобразования должно быть $\mathbf{a}_t \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ могут быть произвольными. Поэтому $\mathbf{a}_t = 0$. Таким образом, $t' = b_t t + c_t$. Коэффициент b_t задает изменение масштаба времени. Интервал времени сохраняется лишь при $b_t = 1$. Далее, в соответствии с теоремой 1.1.1 расстояния между одновременными событиями сохраняются тогда и только тогда, когда матрица A линейного оператора ортогональна. Следовательно, произвольное галилеево преобразование можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}, \quad AA^T = E, \\ t' &= t + c_t. \square \end{aligned}$$

Все галилеевы преобразования образуют группу. Примерами таких преобразований могут служить:

1. Равномерное движение со скоростью $\mathbf{b}$:

$$G_1(\mathbf{x}, t): \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{b}t.$$

2. Изменение опорной точки (сдвиг):

$$G_2(\mathbf{x}, t): \quad (\mathbf{x}, t) \to (\mathbf{x} + \mathbf{c}, t + c_t).$$

3. Вращение пространства A^3:

$$G_3(\mathbf{x}, t): \quad (\mathbf{x}, t) \to (\mathbf{A}\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{A} \in SO(3).$$

Следствие 3.1.1. *Каждое галилеево преобразование однозначно представляется с помощью композиции вращения, сдвига и равномерного движения: $G = G_1 \circ G_2 \circ G_3$.*

Для любой пары галилеевых пространств существует взаимно однозначное соответствие одного пространства другому, сохраняющее галилееву структуру. В этом смысле все галилеевы пространства изоморфны друг другу и изоморфны координатному пространству $R^3 \times R$.

Взаимно однозначное соответствие $A^4 \to R^3 \times R$ называется *галилеевой системой координат (системой отсчета)*.

§ 3.2. Первый закон Ньютона. Принцип относительности

При поступательном движении какого-нибудь тела скорости и ускорения любой пары его точек одинаковы, и все точки описывают траектории, которые можно получить друг из друга сдвигом на вектор, постоянный вдоль траектории отдельной точки. Анализ движения такого тела сводится к изучению движения какой-либо одной его точки.

Определение 3.2.1. *Материальная точка* — это точка, заменяющая реальное тело, способное в силу сложившихся конкретных условий совершать только лишь поступательное движение. Взаимодействие материальных точек означает взаимодействие соответствующих поступательно движущихся тел. Материальной точке придаются все свойства поступательно движущегося тела, определяющие закон его движения.

Замечание. Ответ на вопрос о том, можно ли заменить материальной точкой тот или иной объект, зависит не столько от размеров объекта, сколько от особенностей его движения и степени идеализации задачи.

Определение 3.2.2. Система отсчета называется *инерциальной*, если по отношению к ней любая свободная от взаимодействий с другими объектами Вселенной (изолированная) материальная точка движется равномерно и прямолинейно.

Первый закон (постулат) Ньютона состоит в утверждении, что *инерциальные системы отсчета существуют*. Наделение некоторой системы отсчета свойством инерциальности является сильным утверждением и всегда нуждается в обосновании.

Теорема 3.2.1. *Все системы отсчета, получающиеся из инерциальной с помощью галилеевого преобразования, будут инерциальными.*

Доказательство. Пусть в инерциальной системе отсчета координаты изолированной материальной точки имеют вид $(\mathbf{x}, t)$, а закон

ее равномерного движения задан равенством $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t$, где $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}$ суть постоянные векторы. Применим к этой системе галилеево преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}, \\ t' &= t + c_t. \end{aligned}$$

Тогда закон движения рассматриваемой материальной точки в новой системе отсчета $(\mathbf{y}, t')$ примет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{v}_\mathbf{y} t',$$

где $\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}c_t) - \mathbf{b}c_t + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b}$, причем векторы $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{v}_\mathbf{y}$ постоянны. Это — закон равномерного движения.$\square$

Из теоремы 3.2.1 следует, что инерциальных систем отсчета существует бесконечно много.

Принцип относительности Галилея утверждает, что *при изучении законов движения все инерциальные системы отсчета равноправны*. Экспериментатор, проводящий опыты в инерциальной системе отсчета, не может обнаружить движение этой системы.

Определение 3.2.3. *Механической системой* называется множество материальных точек и твердых тел, которые могут взаимодействовать друг с другом и с любыми другими объектами. *Изолированной механической системой* называется множество материальных точек и твердых тел, которые могут взаимодействовать друг с другом, но лишены возможности взаимодействовать с другими объектами Вселенной.

Согласно принципу относительности все законы и уравнения механики, установленные для изолированной механической системы в какой-либо одной инерциальной системе отсчета, сохраняют свой смысл и форму при переходе к любой другой инерциальной системе отсчета (инвариантны по отношению к преобразованию координат). Это значит, что после выполнения преобразований, связанных с переходом к новой системе отсчета, структура математических выражений законов в новых переменных имеет такой же вид, какой она имела в исходных переменных, и законы выражаются с помощью одних и тех же функциональных зависимостей.

Исследуем **ограничения, которые накладывает принцип относительности на структуру законов механики.** Пусть $\mathbf{w}_i$ — ускорения, $\mathbf{v}_i$ — скорости, $\mathbf{r}_i$ — радиусы-векторы материальных точек ($i = 1, \ldots, N$) изолированной механической системы, t — время и пусть равенство

$$\Phi(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0$$

выражает некоторый закон механики. Тогда:

1. Изолированная механическая система всегда автономна, т. е. функция Φ не зависит явно от времени. Действительно, пусть $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ суть законы движения всех точек системы. Среди галилеевых преобразований имеется сдвиг по времени. В соответствии с теоремой 3.2.1 и принципом относительности получим, что функции $\mathbf{r}_i(t-\tau)$, $i = 1, \ldots, N$ при любом значении τ будут законами движения тех же точек, а значит, соответствующие им $\mathbf{w}_i(t-\tau)$, $\mathbf{v}_i(t-\tau)$ вместе с $\mathbf{r}_i(t-\tau)$ обязаны удовлетворять уравнению

$$\Phi(\mathbf{w}_i(t-\tau), \mathbf{v}_i(t-\tau), \mathbf{r}_i(t-\tau), t) = 0.$$

Обозначив $s = t - \tau$, найдем

$$\Phi(\mathbf{w}_i(s), \mathbf{v}_i(s), \mathbf{r}_i(s), s + \tau) = 0.$$

Поскольку τ произвольно, видим, что Φ не зависит от τ.

2. Функция Φ может зависеть лишь от разностей радиусов-векторов и разностей скоростей точек изолированной системы. В самом деле, среди галилеевых преобразований имеются сдвиги в трехмерном пространстве. Пусть $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ суть законы движения всех точек системы. Тогда $\mathbf{r}_i(t) + \mathbf{r}$, $i = 1, \ldots, N$, $\mathbf{r} = \mathbf{const}$ также будут законами их движения. А это значит, что совместно должны быть выполнены равенства

$$\Phi(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0,$$

$$\Phi(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{r}_N + \mathbf{r}) = 0,$$

в любой момент времени t. Зафиксируем время и выберем сначала $\mathbf{r} = -\mathbf{r}_1$. Тогда получим другое, эквивалентное в данный момент времени исходному, выражение для исследуемого закона механики:

$$\Phi(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i, 0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1) = 0.$$

Применим к этому выражению повторный сдвиг всех векторов на вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'$, где $\mathbf{r}'$ — произвольный вектор. Тогда получим

$$\Phi(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}', \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1) = 0.$$

Поскольку значение $\mathbf{r}'$ произвольно, видим, что Φ от $\mathbf{r}'$ не зависит, а значит Φ может зависеть только от комбинаций $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1$. Аналогичное рассуждение можно провести для любого другого вектора $\mathbf{r}_i$. Следовательно, Φ может зависеть лишь от разностей $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Далее, среди галилеевых преобразований имеются переходы к равномерно движущимся системам отсчета с сохранением направлений базисных

векторов. Такие преобразования приводят к изменению всех скоростей $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, N$, на постоянный вектор $\mathbf{v}$. При этом закон $\Phi = 0$ должен остаться справедливым:

$$\Phi(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}_N + \mathbf{v}, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0.$$

Проводя теперь рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве первой части свойства, убеждаемся, что Φ может зависеть только от разностей $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ и не может зависеть непосредственно от значений скоростей.

3. Функция Φ инвариантна относительно преобразования всех аргументов с помощью ортогональных линейных операторов. По теореме 3.1.1 среди галилеевых преобразований имеются преобразования с помощью ортогональных линейных операторов. Значит, если $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, суть законы движения точек изолированной системы, то $\mathbf{r}'_i = \mathbf{A}\mathbf{r}_i$ выражают те же законы, но в повернутой инерциальной системе отсчета. При этом $AA^T = E$ и $\mathbf{A}$ — постоянный линейный оператор. Значит, $\mathbf{v}'_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}'_i = \mathbf{A}\mathbf{w}_i$. Согласно принципу относительности Галилея равенства

$$\Phi(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i) = 0, \quad \Phi(\mathbf{A}\mathbf{w}_i, \mathbf{A}\mathbf{v}_i, \mathbf{A}\mathbf{r}_i) = 0$$

должны быть эквивалентными, что и доказывает справедливость свойства.

4. Если изолированная механическая система состоит из одной материальной точки, то функция Φ зависит только от ускорения $\mathbf{w}$ этой точки, причем уравнение $\Phi(\mathbf{w}) = 0$ допускает нулевое решение. В самом деле, согласно пунктам 1 и 2 функция Φ в рассматриваемом случае не может зависеть от радиуса-вектора $\mathbf{r}$, скорости $\mathbf{v}$ точки, а также от времени t. По определению инерциальной системы отсчета изолированная материальная точка имеет в ней ускорение, равное нулю. Следовательно, равенство $\mathbf{w} = 0$ должно быть следствием рассматриваемого закона механики, и такое $\mathbf{w}$ должно удовлетворять уравнению $\Phi(\mathbf{w}) = 0$.

Изолированная материальная точка может испытывать ускорение в какой-либо системе отсчета, только если эта система отсчета не инерциальна. Если система отсчета инерциальна, а материальная точка имеет ускорение, то это ускорение есть следствие влияния других объектов и точка не изолирована.

§ 3.3. Принцип детерминированности

Состоянием механической системы (определение 3.2.3) называется набор одновременных значений радиусов-векторов и скоростей всех ее точек.

Принцип детерминированности Ньютона утверждает, что *состояние механической системы, заданное в любой момент времени, однозначно определяет все ее дальнейшее движение.*

Этот принцип безусловно удовлетворяется, когда между ускорениями точек механической системы и составляющими ее состояния существует зависимость, не содержащая третьих и более высокого порядка производных от радиусов-векторов точек. Существование такой зависимости в дальнейшем принимается в качестве эквивалента принципу детерминированности.

Зависимость между состоянием системы и производными третьего порядка и выше также может быть установлена, но без дополнительных ограничений она приведет к дифференциальным уравнениям, для однозначного решения которых недостаточно задать лишь состояние системы, что окажется в противоречии с принципом детерминированности.

Рассмотрим изолированную систему из двух материальных точек в инерциальной системе отсчета. Состояние первой точки пусть будет $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$, а второй — $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{v}_2$. Когда эти точки взаимодействуют, то изменение скоростей этих точек не будет одинаковым. Вместе с тем, согласно многочисленным экспериментальным данным, можно каждой материальной точке сопоставить такую скалярную постоянную $m_i > 0$, ($i = 1, 2$), называемую массой, что будет выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1) = -\frac{d}{dt}(m_2 \mathbf{v}_2).$$

Аксиома 3.3.1. *Масса материальной точки сохраняет свое значение не только во времени, но и при любых взаимодействиях материальной точки с другими материальными точками независимо от их числа и от природы взаимодействий.*

Рассмотрим теперь одну материальную точку с массой m, подверженную внешнему воздействию. В соответствии с принципом детерминированности ускорение этой точки есть функция от радиуса-вектора и скорости этой точки, а также, быть может, времени t. Математическим выражением этого служит *второй закон Ньютона:*

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Вектор, стоящий в правой части последнего равенства, называется *силой*. Сила есть мера воздействия, вследствие которого возникает или способно возникнуть ускорение точки. Произведение $m\mathbf{v}$ называется *количеством движения* материальной точки.

Второй закон Ньютона утверждает, что *производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на точку силе.*

В системе СИ единицей измерения силы служит 1н (ньютон), а единицей измерения массы — 1кг. По определению [н]=[м·кг/с^2]. Другими словами, 1н — это сила, которая масse 1кг сообщает ускорение 1м/с^2.

Понятие силы дает возможность сформулировать **третий закон Ньютона,** который описывает взаимодействие двух материальных точек (определение 3.2.1). Пусть имеются две материальные точки A и B. Действие точки B на точку A выразим силой $\mathbf{F}_A$, а действие точки A на точку B — силой $\mathbf{F}_B$.

Третий закон Ньютона утверждает, что *силы $\mathbf{F}_A$ и $\mathbf{F}_B$ равны по величине, действуют вдоль одной прямой, направлены в противоположные стороны, но приложены к соответствующим точкам физически различных поступательно перемещающихся тел A и B (закон равенства действия и противодействия).*

Пусть материальная точка взаимодействует с несколькими объектами. Можно рассматривать силу, которая воздействует на точку со стороны каждого объекта при условии, что другие объекты отсутствуют. В этом смысле будем говорить об одновременном действии на точку нескольких отдельных сил. Результат такого действия определяется следующими аксиомами.

Аксиома 3.3.2. *Все силы, действующие одновременно на поступательно движущееся тело, имеют начало в одной геометрической точке тела, которая и принимается в качестве материальной точки.*

Аксиома 3.3.3. *Действие на материальную точку двух сил эквивалентно действию одной равнодействующей силы, строящейся по правилу сложения векторов сил. Отсюда следует, что действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной равнодействующей.*

Аксиома 3.3.4. *Совокупность сил, приложенных к материальной точке, не вызывает ускорения, или, что то же самое, эквивалентна нулю тогда и только тогда, когда равнодействующая этой совокупности сил равна нулю.*

Аксиома 3.3.5. *К силам, действующим на материальную точку, можно добавить произвольное эквивалентное нулю множество сил. От этого ускорение точки не изменится.*

§ 3.4. Работа силы на перемещении

Пусть материальная точка, к которой приложена сила $\mathbf{F}$, перемещается из положения с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в положение с радиусом-вектором $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. *Работой силы* $\mathbf{F}$ на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ (*элементарной работой*) называется скалярное произведение вектора $\mathbf{F}$ на вектор $d\mathbf{r}$. При этом не имеет значения, действует или нет сила $\mathbf{F}$ на материальную точку на всем перемещении $d\mathbf{r}$. Таким образом, элементарная работа $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{A} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Единицей работы служит джоуль — работа, которую совершает сила 1н на расстоянии 1м при условии, что сила параллельна перемещению: 1дж = 1н · 1м. Отметим следующие свойства элементарной работы.

1. Работа равнодействующей силы на некотором элементарном перемещении равна сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i \quad \to \quad \mathcal{A} = \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i\right) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{A}_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}.$$

2. Работа силы на суммарном перемещении равна сумме работ этой силы на составляющих перемещениях:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} d\mathbf{r}_i \quad \to \quad \mathcal{A} = \mathbf{F} \cdot \sum_{i=1}^{m} d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{A}_i = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_i.$$

3. Работа равна нулю, когда либо $\mathbf{F} = 0$ (сила отсутствует), либо $d\mathbf{r} = 0$ (точка приложения силы не перемещается), либо $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$ (сила и перемещение взаимно перпендикулярны).

Определение 3.4.1. Пусть точка перемещается вдоль спрямляемой кривой $\mathcal{L}$ в E^3, а сила действует на точку в любом ее положении на кривой. Тогда *работой силы* $\mathbf{F}$ *на пути* $\mathcal{L}$ называется криволинейный интеграл второго рода

$$A = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

В общем случае работа зависит от формы кривой $\mathcal{L}$, по которой перемещается точка приложения силы.

Определение 3.4.2. Сила называется *потенциальной*, если ее элементарная работа на произвольном перемещении $d\mathbf{r}$ представляет собой полный дифференциал некоторой однозначной скалярной функции $U(\mathbf{r})$ от векторного аргумента, то есть

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = dU = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial r_i}dr_i.$$

Функция $U(\mathbf{r})$ в этом случае называется *силовой функцией*.

Следствие 3.4.1. *Потенциальная сила может быть выражена частными производными от функции* $U(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial r_i}\mathbf{e}_i.$$

Очевидно, что работа потенциальной силы на замкнутом контуре равна нулю. Работа такой силы на криволинейном участке пути зависит лишь от начального C и конечного D положений точки:

$$A = \int\limits_{\overset{\smile}{CD}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{C}^{D} dU = U(\mathbf{r}_D) - U(\mathbf{r}_C)$$

и не зависит от формы кривой $\overset{\smile}{CD}$.

Поверхности, на которых силовая функция принимает постоянное значение, называются *поверхностями уровня*. Потенциальная сила направлена перпендикулярно к поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции. Действительно, когда элементарное перемещение направлено вдоль поверхности уровня, то работа силы равна нулю. Но элементарная работа силы есть скалярное произведение силы на перемещение точки ее приложения. Отсюда следует ортогональность. Вместе с тем, если перемещение направлено в сторону увеличения силовой функции, то работа обязана быть положительной. Значит, косинус угла между силой и указанным перемещением положителен.

Теорема 3.4.1. *Силовая функция суммы нескольких потенциальных сил равна сумме силовых функций этих сил.*

Доказательство. Пусть на точку действуют потенциальные силы

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{r}},\quad i = 1,\ldots,n,$$

где $U_i(\mathbf{r})$ — их силовые функции, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки приложения всех этих сил. Рассмотрим функцию

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n}U_i(\mathbf{r}).$$

Для нее

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i.$$

Тем самым $U(\mathbf{r})$ есть силовая функция для суммарной силы.□

Заметим, что теорема 3.4.1 справедлива для любых потенциальных сил независимо от их природы.

Силовое поле — это область пространства, в каждой геометрической точке которого однозначно определена сила, действующая на материальную точку при выполнении необходимых для этого физических условий. Например, необходимым физическим условием действия электростатической силы будет присутствие на точке электрического заряда.

Поверхности уровня силовой функции представляют собой наглядный геометрический образ, характеризующий структуру потенциального силового поля. Другой характеристикой силового (не обязательно потенциального) поля могут служить силовые линии.

Силовая линия — это кривая, касательная к которой в каждой точке кривой совпадает с направлением силы.

Задать силовое поле — значит задать зависимость $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ силы от радиуса-вектора точки пространства. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — параметрическое уравнение силовой линии, причем s — длина ее дуги. Тогда силовая линия есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}.$$

Оно теряет смысл, когда либо $|\mathbf{F}| = 0$, либо $|\mathbf{F}| = \infty$. Во всех других точках пространства направление касательной к силовой линии однозначно определено, и в них силовые линии одного и того же силового поля не могут пересечься под ненулевым углом.

В случае потенциального силового поля уравнение силовой линии принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\left|\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\right|^{-1}.$$

Следовательно, касательная к силовой линии перпендикулярна поверхностям уровня. Учтем, что $|d\mathbf{r}| = ds$, и скалярно умножим уравнение силовой линии на $d\mathbf{r}$. Получим

$$ds = \left|\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\right|^{-1}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \left|\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\right|^{-1}dU.$$

Поэтому одинаковому приращению силовой функции отвечает смещение вдоль силовой линии, обратно пропорциональное модулю градиента силовой функции. В тех точках пространства, где сила больше, поверхности равного уровня будут ближе друг к другу, чем в других точках.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы силовых полей.

Пример 3.4.1. **Поле параллельных сил.** Пусть F — модуль силы, $\mathbf{e}$ — единичный вектор ее направления, произвольно ориентированный в пространстве и одинаковый для всех его точек:

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{e}.$$

Обозначим $z = \mathbf{e}\cdot\mathbf{r}$ проекцию радиуса-вектора точки на направление вектора $\mathbf{e}$. Предположим, что модуль силы зависит только от z: $F = F(z)$. Элементарная работа $\mathcal{A}$ силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\mathbf{r}$ выражается равенством

$$\mathcal{A} = F(z)\,\mathbf{e}\cdot d\mathbf{r} = F(z)\,d(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}) = F(z)\,dz.$$

Согласно определению первообразной, последнее выражение есть полный дифференциал от функции

$$U(z) = \int\limits_{z_0}^{z}F(z)\,dz + c,$$

где c — произвольная постоянная. Такое поле потенциально.

Частным случаем поля рассматриваемого типа будет поле силы тяжести. Для него $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, где m — масса, g — ускорение силы тяжести и $\mathbf{e}$ — направление отвеса. Тогда

$$U(z) = mgz + c = m\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} + c.$$

Другой частный случай — это электростатическое поле между заряженными пластинами конденсатора. Для него $\mathbf{F} = Eq\mathbf{e}$, где E — напряженность поля, q — точечный заряд, $\mathbf{e}$ — направление, перпендикулярное пластинам. Имеем

$$U(z) = Eqz + c = Eq\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} + c.$$

Силовые линии поля параллельных сил даются уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}\quad\text{или}\quad \mathbf{r} = s\,\mathbf{e} + \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{r}_0$ — произвольное начальное значение радиуса-вектора. Видим, что силовые линии — прямые, пронизывающие пространство параллельно вектору $\mathbf{e}$. Поверхности уровня силовой функции даются уравнением $\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} = z_0$, где z_0 — произвольное постоянное значение переменной z. Это плоскости, разрезающие пространство перпендикулярно вектору $\mathbf{e}$.◇

Пример 3.4.2. **Поле центральных сил.** В любой точке поля сила направлена вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}$, а ее модуль зависит только от $r = |\mathbf{r}|$. Начало радиуса-вектора называется центром поля.

$$\mathbf{F} = F(r)\,\mathbf{e}_r,\quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r.$$

Работа $\mathcal{A}$ силы $\mathbf{F}$ на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ выражается равенством

$$\mathcal{A} = F(r)\,\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{r} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}F(r)\frac{d(r^2)}{r} = F(r)\,dr$$

и представляет собой полный дифференциал от функции

$$U(r) = \int\limits_{r_0}^{r}F(r)\,dr + c,$$

где c — произвольная постоянная. Поэтому поле центральных сил потенциальное.

Поверхности уровня силовой функции $U(r)$ представляют собой концентрические сферы с различными значениями радиуса r. Силовые линии суть радиальные лучи, исходящие из центра сил.

Рассмотрим частные случаи, когда $F(r)$ задает степенную зависимость силы от радиуса:

$$F(r) = \text{æ}r^b.$$

Для силовой функции справедливо выражение

$$U(r) = \int\limits_{r_0}^{r}\text{æ}r^b dr + c = c + \begin{cases}\text{æ}\ln(r/r_0), & \text{если } b = -1;\\ \dfrac{\text{æ}}{b+1}(r^{b+1} - r_0^{b+1}), & \text{если } b \neq -1.\end{cases}$$

Учтем, что силовая функция может быть определена с точностью до произвольной постоянной. Тогда

а) Центральное поле ньютонианского тяготения:

$\text{æ} = -fMm$, где f — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего тела, расположенного в центре поля, m — масса притягиваемого тела, $b = -2$. Следовательно,

$$U(r) = f\frac{Mm}{r}.$$

б) Электростатическое поле: $\text{æ} = kQq$, где k — электростатическая постоянная, Q, q — величины точечных зарядов, $b = -2$. Следовательно,

$$U(r) = -k\frac{Qq}{r}.$$

Силовое поле будет притягивающим, когда $Qq < 0$ (заряды разных знаков), и отталкивающим, когда $Qq > 0$ (заряды одного знака).

в) Поле упругой силы: $\text{æ} = -c^2$, $b = 1$. Силовая функция имеет вид

$$U(r) = -\frac{c^2}{2}r^2.$$◇

Пример 3.4.3. **Силы трения скольжения** (Кулоновское сухое трение). Скольжению одного тела по поверхности другого всегда препятствуют силы, называемые силами трения. Это пассивные силы, мешающие возникновению относительного движения и стремящиеся успокоить такое движение, если оно возникло. Величина силы сухого трения $F_{\text{тр}}$ пропорциональна силе N, прижимающей друг к другу соприкасающиеся тела и направленной перпендикулярно к поверхности соприкосновения (N — сила нормального давления):

$$F_{\text{тр}} = kN,\quad k > 0.$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от того, движутся или нет друг относительно друга соприкасающиеся поверхности. Если проскальзывание отсутствует, то сила трения уравновешивает касательную проекцию активной силы, стремящуюся вызвать относительное перемещение. Следовательно, в этом случае

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\mathbf{F},\quad k = F/N,$$

где $\mathbf{F}$ — проекция активной силы на плоскость, касательную к поверхности контакта, F — модуль проекции активной силы.

Коэффициент k ограничен предельным значением $f = \max k$, называемым *коэффициентом сухого трения* (трения скольжения). Как только k достигает предельного значения, начинается относительное проскальзывание трущихся поверхностей. Коэффициент f зависит от

скорости v относительного смещения: $f = f(v)$. При малых значениях v функция $f(v)$ несколько больше, чем при больших. С ростом v эта функция асимптотически и очень быстро стремится к постоянному значению, являющемуся характеристикой трущихся поверхностей. На практике приближенно принимают $f = const$, $0 \le k \le f$.

Сила трения и сила, препятствующая проникновению тел сквозь поверхность контакта (противоположная силе нормального давления), в сумме образуют реакцию $\mathbf{R}$ опорной поверхности на действие активной силы.

Угол ϕ, образованный нормалью к поверхности контакта и линией действия реакции $\mathbf{R}$, отвечающей максимальной величине силы трения, называется *углом трения*. Угол трения связан с коэффициентом трения очевидным соотношением

$$\operatorname{tg}\phi = f.$$

Построим конус с вершиной в точке контакта. Ось конуса направим по нормали к поверхности контакта, а угол при вершине положим равным 2ϕ. Тогда реакция в данной точке всегда будет принадлежать этому конусу. Построенный конус называется конусом трения. Вообще говоря, шероховатость поверхностей контакта по различным направлениям может оказаться различной. Тогда конус трения уже не будет прямым круговым конусом.

Сила сухого трения дает пример силы, не обладающей силовой функцией (непотенциальной). В самом деле, сила сухого трения направлена всегда против скорости относительного перемещения. Следовательно,

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -fN\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Выражение для элементарной работы принимает вид

$$\mathcal{A} = \mathbf{F}_{\text{тр}}\cdot d\mathbf{r} = -fN\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot d\mathbf{r}.$$

Если $d\mathbf{r}$ — реальное перемещение, то $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$. Поэтому

$$\mathcal{A} = -fN\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot\mathbf{v}\,dt = -fNv\,dt = -fN\,ds < 0,$$

где $ds > 0$ — элемент длины дуги, взятый в направлении движения точки по траектории. Видим, что элементарная работа во всех случаях отрицательна, и ее знак не зависит от формы траектории. Когда траектория образует замкнутый контур, работа силы трения окажется не равной нулю, а потому сила сухого трения непотенциальна.◇

Пример 3.4.4. **Сила вязкого трения.** Такие силы возникают в присутствии смазки между трущимися поверхностями. Сила вязкого

трения направлена в сторону, противоположную скорости относительного движения:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\text{æ}\mathbf{v},\quad \text{æ} > 0.$$

В практически интересном диапазоне скорости относительного проскальзывания зависимость *коэффициента вязкого трения* æ от величины v скорости близка к линейной:

$$\text{æ} = \text{æ}_0 + \text{æ}_1 v,\quad \text{æ}_0 > 0,\quad \text{æ}_1 > 0,$$

где постоянные æ_0, æ_1 характеризуют тип смазки. Если скорость v мала, то коэффициент вязкого трения можно приближенно принять постоянным: $\text{æ} \approx \text{æ}_0$.

Вязкое трение дает еще один пример непотенциальной силы. Элементарная работа сил вязкого трения имеет вид (см. пример 3.4.3)

$$\mathcal{A} = -\text{æ}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = -\text{æ}v^2 dt = -\text{æ}v\,ds < 0.$$

Суммарная работа такой силы по замкнутому контуру, как и в примере 3.4.3, не может обратиться в нуль.◇

§ 3.5. Основные задачи динамики

Изучение движения материальной точки может производиться различными методами. В зависимости от цели изучения различают следующие основные задачи динамики.

1. *Прямая задача динамики* состоит в том, чтобы найти закон движения материальной точки под действием силы, определенной в достаточно широкой области пространства.

2. *Обратная задача динамики* состоит в том, чтобы по полностью заданному закону движения определить силу или силы, способные вызвать движение точки, соответствующее этому закону.

3. *Смешанная задача динамики* возникает, когда заданы некоторые характеристики сил и некоторые характеристики закона движения и требуется восстановить недостающие элементы движения.

Каждая задача имеет свои особенности и специфические трудности решения. Рассмотрим, например, обратную задачу динамики. В том случае, когда закон движения задан абсолютно точно с помощью по крайней мере дважды дифференцируемых по времени функций, проблема определения сил не вызывает принципиальных затруднений и сводится к вычислению второй производной по времени от заданного закона. Вместе с тем в достаточно часто встречающихся ситуациях закон движения точки нельзя задать по воле человека, но можно оценить путем проведения необходимых измерений. Тогда

из-за влияния неизбежно возникающих в процессе измерений ошибок операция получения второй производной оказывается некорректной, а ее результат существенно зависит от метода вычислений. Это так называемая задача математической диагностики, и для ее решения необходимо использовать как статистические свойства ошибок измерений, так и специальные методы анализа структуры изучаемого движения. Подобная задача была решена Кеплером и Ньютоном при открытии закона всемирного тяготения, управляющего движением небесных тел.

Обратимся к прямой задаче динамики и рассмотрим уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{w}$ — ускорение точки в некоторой инерциальной системе отсчета. Единичные базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ этой системы примем взаимно перпендикулярными и начинающимися в некотором полюсе O, служащем началом системы отсчета. Разложения радиуса-вектора $\mathbf{r}$ материальной точки и силы $\mathbf{F}$ по базисным векторам запишем в виде

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3.$$

Из равенства векторов следует равенство их компонент. В результате получаем три скалярных уравнения движения

$$m\frac{d^2r_1}{dt^2} = F_1,\quad m\frac{d^2r_2}{dt^2} = F_2,\quad m\frac{d^2r_3}{dt^2} = F_3,$$

которые называются *уравнениями движения в проекциях на декартовы оси координат*.

Пример 3.5.1. Относительно инерциальной системы отсчета материальная точка движется в поле параллельных сил тяжести. Помимо силы тяжести на точку действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости точки и направленная противоположно скорости. Найти закон движения точки.

Решение. Выберем правоориентированный инерциальный декартов репер $Oe_1e_2e_3$ так, чтобы вектор $\mathbf{e}_3$ был направлен в сторону, противоположную силе тяжести. Тогда векторное уравнение движения точки примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\,\mathbf{e}_3 - k\dot{\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор точки, g — ускорение силы тяжести, k — постоянный коэффициент силы сопротивления. В проекциях на декартовы оси координат уравнения движения примут вид

$$\ddot{r}_1 = -k\dot{r}_1,\quad \ddot{r}_2 = -k\dot{r}_2,\quad \ddot{r}_3 = -g - k\dot{r}_3.$$

Здесь каждое уравнение интегрируется независимо от других. Найдем проекции скорости точки как функции времени t:

$$\dot{r}_i = \dot{r}_{0i}\exp[-k(t-t_0)],\ i = 1,2;\ \dot{r}_3 = \left(\dot{r}_{03} + \frac{g}{k}\right)\exp[-k(t-t_0)] - \frac{g}{k},$$

где $\dot{r}_{0i}$, $(i = 1,2,3)$ — значения проекций скорости в начальный момент времени t_0. Видим, что скорости $\dot{r}_1$, $\dot{r}_2$ с течением времени стремятся к нулю, тогда как скорость $\dot{r}_3$ стремится к величине, равной $-g/k$, при которой правая часть дифференциального уравнения для r_3 обращается в нуль. В пространстве скоростей точка $(0,0,-g/k)$ служит аттрактором. Годографы скорости — прямолинейные лучи различных направлений, сходящиеся в этой точке. Движение по годографам происходит в направлении аттрактора. При этом время достижения аттрактора бесконечно. Вектор $(0,0,-g/k)$ называется скоростью парашютирования.

Найдем закон движения:

$$r_1 = r_{01} + \frac{\dot{r}_{01}}{k}(1 - \exp[-k(t-t_0)]),$$

$$r_2 = r_{02} + \frac{\dot{r}_{02}}{k}(1 - \exp[-k(t-t_0)]),$$

$$r_3 = r_{03} + \frac{1}{k}\left(\dot{r}_{03} + \frac{g}{k}\right)(1 - \exp[-k(t-t_0)]) - \frac{g}{k}(t-t_0),$$

где r_{0i} — начальные значения координат. Закон движения имеет асимптоту при $t \to \infty$, определенную уравнениями

$$r_1 = r_{01} + \frac{\dot{r}_{01}}{k},\quad r_2 = r_{02} + \frac{\dot{r}_{02}}{k},\quad r_3 = r_{03} + \frac{1}{k}\left(\dot{r}_{03} + \frac{g}{k}\right) - \frac{g}{k}(t-t_0).$$

Это вертикальная прямая, по которой предельная точка движется равномерно со скоростью парашютирования. ◇

Если действующая на точку сила задана в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, r_1, r_2, r_3, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3),$$

то уравнения движения представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$. Общее решение этих уравнений содержит шесть произвольных постоянных:

$$r_1 = r_1(t, c_1, \ldots, c_6),\quad r_2 = r_2(t, c_1, \ldots, c_6),\quad r_3 = r_3(t, c_1, \ldots, c_6).$$

Постоянные c_i можно найти, зная начальные условия, т.е. значения координат r_{01}, r_{02}, r_{03} и их производных $\dot{r}_{01}$, $\dot{r}_{02}$, $\dot{r}_{03}$ (скоростей) в начальный момент времени t_0. Тогда

$$r_{01} = r_1(t_0, c_1, \ldots, c_6),\quad r_{02} = r_2(t_0, c_1, \ldots, c_6),\quad r_{03} = r_3(t_0, c_1, \ldots, c_6).$$

$\dot r_{01} = \dot r_1(t_0, c_1, \dots, c_6), \quad \dot r_{02} = \dot r_2(t_0, c_1, \dots, c_6), \quad \dot r_{03} = \dot r_3(t_0, c_1, \dots, c_6).$

Разрешая эти уравнения относительно c_i, найдем

$$c_i = f_i(t_0, r_{01}, r_{02}, r_{03}, \dot r_{01}, \dot r_{02}, \dot r_{03}), \quad i = 1, \dots, 6.$$

Уравнения движения материальной точки удовлетворяют принципу детерминированности Ньютона, что эквивалентно выполнению условий существования и единственности решений задачи Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений. Поэтому каждой совокупности начальных условий отвечает одно движение.

Константы c_i можно найти также с помощью краевых условий, которые задают положение материальной точки для двух различных моментов времени $t = t_0$, $t = t_1$:

$$\text{при } t = t_0: \quad r_1 = r_{01}, \quad r_2 = r_{02}, \quad r_3 = r_{03},$$

$$\text{при } t = t_1: \quad r_1 = r_{11}, \quad r_2 = r_{12}, \quad r_3 = r_{13}.$$

Краевая задача состоит в определении значений произвольных постоянных по заданным краевым условиям. Следует отметить, что решение краевой задачи иногда требует предварительного анализа структуры траекторий. Могут существовать положения, через которые материальная точка не пройдет в момент $t = t_1$ ни при каких начальных скоростях.

Пример 3.5.2. Рассмотрим движение материальной точки массы m в поле параллельных сил $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$, где F — положительная постоянная, $\mathbf{e}$ — постоянный единичный вектор, задающий направление силы. Выберем инерциальный ортонормированный репер $Oe_1e_2e_3$ так, что $\mathbf{e}_z = -\mathbf{e}$, а единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют плоскость, перпендикулярную силе $\mathbf{F}$ (в том случае, когда $\mathbf{F}$ — сила тяжести, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ задают горизонтальную плоскость). Пусть $\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_z$ — радиус-вектор точки. Система дифференциальных уравнений движения принимает вид

$$m\ddot z = -F, \quad m\ddot r_1 = 0, \quad m\ddot r_2 = 0.$$

Представим вектор $\mathbf{r}$ следующим образом: $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z + \boldsymbol\rho$; $\boldsymbol\rho = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2$, так что $\boldsymbol\rho \perp \mathbf{e}_z$. Интегрируя уравнения движения, получим

$$z = -\frac{a\tau^2}{2} + \dot z_0\tau + z_0, \quad \boldsymbol\rho = \dot{\boldsymbol\rho}_0\tau + \boldsymbol\rho_0, \quad a = \frac{F}{m},$$

где $\tau = t - t_0$ — время, прошедшее от начала движения, $\dot z_0$ — проекция начальной скорости на направление $\mathbf{e}_z$, z_0 — начальное значение координаты z, $\dot{\boldsymbol\rho}_0$ — проекция начальной скорости на плоскость Oe_1e_2, $\boldsymbol\rho_0$

— начальное значение радиуса-вектора проекции точки на ту же плоскость. Примем, что в начальный момент времени t_0 модуль скорости равен v, а вектор скорости образует с плоскостью угол ϑ. Тогда

$$\dot z_0 = v\sin\vartheta, \quad \dot{\boldsymbol\rho}_0 = v\cos\vartheta\,\mathbf{e}_x,$$

где $\mathbf{e}_x$ —постоянный единичный вектор направления проекции начальной скорости на плоскость Oe_1e_2. Представим координату z и вектор $\boldsymbol\rho$ в виде

$$z = y + z_0, \quad \boldsymbol\rho = x\mathbf{e}_x + \boldsymbol\rho_0.$$

Закон движения точки определяется зависимостями

$$y = -\frac{a\tau^2}{2} + \tau v\sin\vartheta, \quad x = \tau v\cos\vartheta.$$

Таким образом, точка движется в плоскости, параллельной векторам $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_x$ и проходящей через начальное положение $(z_0, \boldsymbol\rho_0)$. В этой плоскости точка имеет декартовы координаты (x, y).

Исключив τ, получим уравнение траектории движения:

$$y = x\left[-\frac{ax}{2v^2}(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta) + \operatorname{tg}\vartheta\right].$$

Очевидно, это парабола, проходящая через начальную точку $x = 0$, $y = 0$. При

$$x = l = \frac{v^2}{a}\left(\frac{2\operatorname{tg}\vartheta}{1 + tg^2\vartheta}\right) = \frac{v^2}{a}\sin 2\vartheta$$

получим также $y = 0$. Величина l положительна при $\operatorname{tg}\vartheta > 0$. Так будет, например, если $0 < \vartheta \le \pi/2$. Тогда l представляет собой дальность бросания до точки, не совпадающей с начальной и соответствующей значению $y = 0$. Дальность l зависит от угла ϑ. Если $0 < \vartheta \le \pi/2$, то максимальная дальность

$$L = \max_\vartheta l(\vartheta) = \frac{v^2}{a}$$

соответствует значению $\vartheta = \pi/4$.

Найдем теперь область достижимости в координатном пространстве при фиксированном значении скорости v (все точки координатного пространства, через которые можно провести траекторию из заданной начальной точки с заданной начальной скоростью). С этой целью воспользуемся уравнением траектории, зафиксируем значение x и найдем максимум функции $y(\operatorname{tg}\vartheta)$. Он имеет место при

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{L}{x}$$

и равен

$$Y = \max_\vartheta [y(\operatorname{tg}\vartheta)] = -\frac{x^2}{2L} + \frac{L}{2}.$$

Парабола, соответствующая зависимости $Y(x)$, называется *параболой безопасности*. Она имеет вершину при $x = 0$ и ограничивает область достижимости на плоскости (y, x). При вращении параболы вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$, проходящей через конец вектора $\boldsymbol\rho_0$, получим *параболоид безопасности*. Достижимыми при заданной скорости будут все точки пространства, расположенные относительно параболоида безопасности со стороны, противоположной выпуклости параболоида. ◇

Возвращаясь к структуре решения системы дифференциальных уравнений движения в общем случае, отметим, что для произвольного момента времени справедливы равенства

$$f_i(t, r_1, r_2, r_3, \dot r_1, \dot r_2, \dot r_3) = c_i, \quad i = 1, \dots, 6,$$

где f_i — те же функции, которые определяют константы c_i по начальным условиям.

Определение 3.5.1. *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений движения называется функция времени, координат и скоростей, сохраняющая постоянное значение для любого конкретного решения системы. Очевидно, что при переходе от одного решения системы к другому постоянные первых интегралов могут изменяться.

Видим, что функции f_i суть первые интегралы соответствующих им уравнений движения материальной точки. Из сказанного ясно, что определение закона движения точки по заданной силе можно свести к задаче поиска достаточного набора независимых первых интегралов.

Определение 3.5.2. Пусть задана произвольная функция

$$\Phi(t, r_1, r_2, r_3, \dot r_1, \dot r_2, \dot r_3).$$

Тогда выражение

$$\dot\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}\dot r_i + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial \dot r_i}F_i,$$

где частные производные по какой-либо переменной берутся в предположении, что все остальные переменные зафиксированы, называется *производной функции Φ в силу уравнений движения*.

Замечание. Приведем более общее определение. Пусть заданы произвольная система дифференциальных уравнений

$$\dot x = X(x, t), \quad x \in R^n, \quad X \in R^n, \quad t \in R,$$

где t — независимая переменная, и функция $\Phi(x, t)$. *Производной функции Φ в силу указанной системы уравнений* называется выражение

$$\dot\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}X_i(x, t),$$

где x_i, X_i, $i = 1, \dots, n$ суть координаты векторов x, X соответственно. При этом, конечно, предполагается, что функция Φ существует.

Теорема 3.5.1. *Функция $\Phi(t, r_1, r_2, r_3, \dot r_1, \dot r_2, \dot r_3)$ есть первый интеграл уравнений движения тогда и только тогда, когда ее производная в силу этих уравнений тождественно равна нулю.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ есть первый интеграл, а $\mathbf{r}(t)$ — любой закон движения материальной точки, удовлетворяющий уравнению

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}.$$

Для этого закона будем иметь

$$\Phi(t, r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dot r_1(t), \dot r_2(t), \dot r_3(t)) = c.$$

где c не зависит от времени. Продифференцируем левую часть этого выражения по времени как сложную функцию:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}\dot r_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial \dot r_i}\ddot r_i = 0.$$

После подстановки в левую часть этого выражения значений $\ddot r_i$, взятых из уравнений движения, получим равенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}\dot r_i + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial \dot r_i}F_i = 0,$$

которое должно быть выполнено для любого набора координат и скоростей, принадлежащего области определения интеграла Φ.

Достаточность. Пусть для функции Φ имеем тождество

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}\dot r_i + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi}{\partial \dot r_i}F_i = 0.$$

Возьмем закон движения $\mathbf{r}(t)$, соответствующий силе $\mathbf{F}$. Подставив его в выражение для функции Φ, получим

$$\Phi(t, r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dot r_1(t), \dot r_2(t), \dot r_3(t)).$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и учитывая, что производная от Φ в силу уравнений движения равна нулю, найдем $d\Phi/dt = 0$. Значит, $\Phi = c$ есть первый интеграл.□

Для того чтобы полностью узнать закон движения материальной точки, достаточно найти шесть независимых первых интегралов. Такой набор первых интегралов назовем *полным*. Найти полный набор первых интегралов не всегда легко. Однако наличие первых интегралов упрощает исследование. Пусть, например, найдены три первых интеграла

$$\Phi_i(t, r_1, r_2, r_3, \dot r_1, \dot r_2, \dot r_3) = c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Их можно рассматривать как новую систему трех дифференциальных уравнений, эквивалентную исходной, но уже не содержащую вторых производных. Предположим, что новую систему удалось привести к следующей равносильной системе:

$$\frac{d}{dt}\Psi_i(t, r_1, r_2, r_3, c_1, c_2, c_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда следует

$$\Psi_i(t, r_1, r_2, r_3, c_1, c_2, c_3) = c_{3+i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Полученные функции, будучи независимыми, задают искомый закон движения.

§ 3.6. Скалярные формы уравнений движения

Положение материальной точки в пространстве не обязательно задавать непосредственно компонентами r_1, r_2, r_3 радиуса-вектора $\mathbf{r}$ в системе ортонормированных базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3.$$

Для этой цели годятся любые независимые координаты x_1, x_2, x_3, однозначно связанные с компонентами законом преобразования

$$r_1 = r_1(x_1, x_2, x_3), \quad r_2 = r_2(x_1, x_2, x_3), \quad r_3 = r_3(x_1, x_2, x_3).$$

Величины x_1, x_2, x_3 называются *криволинейными координатами точки*. Когда криволинейные координаты выбраны, закон движения $\mathbf{r}(t)$ однозначно задается функциями $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Переход к криволинейным координатам особенно эффективен, когда имеется априорная информация о траектории точки. Его полезно применять также, когда поле действующей силы обладает той или иной симметрией. Поясним это.

Пусть, например, из постановки задачи ясно, что точка может двигаться только вдоль поверхности, заданной уравнением

$$f(r_1, r_2, r_3) = 0.$$

Рассмотрим семейство поверхностей:

$$f(r_1, r_2, r_3) = x_3,$$

где x_3 — произвольный постоянный параметр. При выполнении условий теоремы о неявно заданной функции найдем

$$r_3 = \phi(r_1, r_2, x_3).$$

Полученное выражение может оказаться достаточно сложным. Допустим, что оно упрощается, если ввести замену

$$r_1 = r_1(x_1, x_2, x_3), \quad r_2 = r_2(x_1, x_2, x_3),$$

где x_1, x_2 — более удобные переменные. Тогда искомое преобразование координат примет вид

$$r_1 = r_1(x_1, x_2, x_3), \quad r_2 = r_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$r_3 = r_3(x_1, x_2, x_3) = \phi(r_1(x_1, x_2, x_3), r_2(x_1, x_2, x_3), x_3).$$

В итоге при движении точки будем иметь $x_3 \equiv 0$. Тем самым остается найти только две функции $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Аналогичную процедуру можно применить, когда по условиям решаемой задачи материальная точка должна двигаться вдоль кривой, заданной системой уравнений

$$f_1(r_1, r_2, r_3) = 0, \quad f_2(r_1, r_2, r_3) = 0.$$

Рассмотрим два семейства поверхностей

$$f_1(r_1, r_2, r_3) = x_2, \quad f_2(r_1, r_2, r_3) = x_3,$$

где x_2, x_3 — произвольные постоянные параметры. Разрешая систему уравнений поверхностей относительно r_2, r_3 при любых конкретных значениях параметров x_2, x_3, получим

$$r_2 = \phi_1(r_1, x_2, x_3), \quad r_3 = \phi_2(r_1, x_2, x_3).$$

Учитывая возможность упрощения полученных выражений, введем дополнительную замену переменной $r_1 = r_1(x_1, x_2, x_3)$, где x_1 — более удобная координата, чем r_1. В итоге получается преобразование координат

$$r_1 = r_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$r_2 = r_2(x_1, x_2, x_3) = \phi_1(r_1(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3),$$
$$r_3 = r_3(x_1, x_2, x_3) = \phi_2(r_1(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3).$$

По условию рассматриваемой задачи материальная точка обязана двигаться так, чтобы было $x_2 \equiv x_3 \equiv 0$. Остается найти только одну функцию $x_1(t)$. Рассмотрим примеры криволинейных координат.

Пример 3.6.1. **Цилиндрические координаты:**

$$r_1 = \rho\cos\varphi, \quad r_2 = \rho\sin\varphi, \quad r_3 = r_3.$$

При фиксированном значении ρ точки принадлежат поверхности прямого кругового цилиндра, заданного уравнением

$$r_1^2 + r_2^2 = \rho^2.$$

Направление оси цилиндра определено базисным вектором $\mathbf{e}_3$. Если зафиксировать угол φ, то точка принадлежит плоскости

$$-r_1\sin\varphi + r_2\cos\varphi = 0,$$

перпендикулярной единичному вектору

$$\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi$$

и проходящей через третью координатную ось. В этой плоскости ρ и r_3 служат декартовыми координатами, а радиус-вектор любой точки плоскости выражается формулой

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_1' + r_3\mathbf{e}_3,$$

где единичный вектор $\mathbf{e}_1'$ имеет вид

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi.$$

Наконец, когда постоянной считается координата r_3, то получаем плоскость, параллельную базисным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, и в этой плоскости ρ и φ суть полярные координаты точки.◇

Пример 3.6.2. **Сферические координаты:**

$$r_1 = \rho\cos\vartheta\cos\psi, \quad r_2 = \rho\cos\vartheta\sin\psi, \quad r_3 = \rho\sin\vartheta.$$

Координатная поверхность, соответствующая постоянному значению ρ, представляет собой сферу:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \rho^2.$$

При фиксированном значении r_3 точки принадлежат плоскости $\mathcal{P}$, параллельной базисным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и находящейся на расстоянии $\rho\sin\vartheta$ от соответствующей им координатной плоскости. При различных значениях r_3 соответствующие плоскости $\mathcal{P}$ пересекаются с координатными сферами по параллелям. В каждой плоскости $\mathcal{P}$ величины $\rho\cos\vartheta$, ψ суть полярные координаты точек.

Когда зафиксирован только угол ψ, то получается координатная плоскость $\mathcal{P}_1$, заданная уравнением

$$-r_1\sin\psi + r_2\cos\psi = 0.$$

Эта плоскость перпендикулярна вектору

$$\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1\sin\psi + \mathbf{e}_2\cos\psi$$

и проходит через третью координатную ось. Каждая точка этой плоскости задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e} + x_2\mathbf{e}_3,$$

где

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1\cos\psi + \mathbf{e}_2\sin\psi, \quad x_1 = \rho\cos\vartheta, \quad x_2 = \rho\sin\vartheta.$$

Ясно, что в плоскости $\mathcal{P}_1$ величины ρ и ϑ служат полярными координатами. При всевозможных значениях ψ координатная сфера пересекается плоскостями $\mathcal{P}_1$ по меридианам. Параллели и меридианы образуют сетку координатных кривых.◇

Как уже отмечалось выше, выбранным конкретным значениям криволинейных координат x_1, x_2, x_3 соответствует единственный радиус-вектор евклидова пространства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3).$$

Когда меняется только одна координата x_i, а остальные остаются постоянными, конец этого вектора описывает координатную кривую, отвечающую координате x_i. Частная производная $\partial\mathbf{r}/\partial x_i$ задает касательный вектор к этой кривой. Из произвольной точки A пространства можно провести три единичных вектора

$$\boldsymbol\tau_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}\right|^{-1}, \quad \boldsymbol\tau_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}\right|^{-1}, \quad \boldsymbol\tau_3 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_3}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_3}\right|^{-1},$$

касательные к соответствующим координатным кривым. Векторы $\boldsymbol\tau_1$, $\boldsymbol\tau_2$ $\boldsymbol\tau_3$, с началом в точке A образуют локальный репер криволинейной системы координат.

Пример 3.6.3. Локальный базис цилиндрической системы координат принимает вид

$$\boldsymbol\tau_\rho = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\right|^{-1} = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi,$$
$$\boldsymbol\tau_\varphi = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|^{-1} = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi,$$
$$\boldsymbol\tau_3 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r_3}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r_3}\right|^{-1} = \mathbf{e}_3.$$

Видим, что это — взаимно ортогональные векторы.◇

Пример 3.6.4. Локальный базис сферической системы координат:

$$\boldsymbol\tau_\rho = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\right|^{-1} = \mathbf{e}_1\cos\vartheta\cos\psi + \mathbf{e}_2\cos\vartheta\sin\psi + \mathbf{e}_3\sin\vartheta,$$
$$\boldsymbol\tau_\vartheta = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\right|^{-1} = -\mathbf{e}_1\sin\vartheta\cos\psi - \mathbf{e}_2\sin\vartheta\sin\psi + \mathbf{e}_3\cos\vartheta,$$
$$\boldsymbol\tau_\psi = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\right|^{-1} = -\mathbf{e}_1\sin\psi + \mathbf{e}_2\cos\psi.$$

Здесь вектор $\boldsymbol\tau_\rho$ направлен вдоль радиуса-вектора, вектор $\boldsymbol\tau_\vartheta$ — по касательной к меридиану, вектор $\boldsymbol\tau_\psi$ — по касательной к параллели. Векторы $\boldsymbol\tau_\rho$, $\boldsymbol\tau_\vartheta$, $\boldsymbol\tau_\psi$ взаимно перпендикулярны.◇

С целью получения *уравнений движения в проекциях на оси локального репера* криволинейной системы координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим скалярные произведения ускорения материальной точки и единичных векторов $\boldsymbol\tau_1$, $\boldsymbol\tau_2$, $\boldsymbol\tau_3$:

$$w_i^\tau = \mathbf{w}\cdot\boldsymbol\tau_i = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\right|^{-1}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\right) = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\right|^{-1}\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\right) - \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\right].$$

Очевидно имеем

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\dot x_i = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}\dot x_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}\dot x_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_3}\dot x_3.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot x_i}, \quad \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot x_i} = \frac{\partial}{\partial\dot x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_1 \partial x_i}\dot{x}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_2 \partial x_i}\dot{x}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_3 \partial x_i}\dot{x}_3,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_3}\dot{x}_3.$$

Сопоставив эти равенства, найдем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}.$$

Значит,

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Отсюда

$$w_i^\tau = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\right|^{-1}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right], \quad i = 1, 2, 3.$$

Определение 3.6.1. Выражение

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

называется *кинетической энергией* материальной точки. Выражение

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}$$

называется *обобщенной силой*, соответствующей координате x_i.

Теорема 3.6.1. *Уравнения движения материальной точки в проекциях на оси локального репера криволинейной системы координат имеют вид*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{\tau}_i$:

$$m w_i^\tau = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\right|^{-1}.$$

Учитывая найденное выше выражение для w_i^τ и то, что масса материальной точки всегда постоянна, получаем утверждение теоремы.□

Система дифференциальных уравнений теоремы 3.6.1 вместе с начальными условиями определяет зависимости криволинейных координат x_1, x_2, x_3 от времени. Они задают закон движения материальной точки.

Элементарное перемещение точки имеет вид

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}dx_i.$$

Рассмотрим элементарную работу силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\mathbf{r}$:

$$\mathcal{A} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}dx_i = \sum_{i=1}^{3}Q_i\,dx_i.$$

Видим, что обобщенные силы суть коэффициенты при дифференциалах криволинейных координат в выражении для элементарной работы.

Скорость и квадрат скорости даются равенствами

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\dot{x}_i, \quad v^2 = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j.$$

Квадрат скорости не меняется при преобразованиях координат, и коэффициенты

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j}\right|\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j$$

суть компоненты метрического тензора. Когда локальный базис $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\tau}_3$ ортонормирован, имеем

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\right|^2\dot{x}_i^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\right|^2\dot{x}_i.$$

Таким образом, для составления уравнений движения достаточно выразить в криволинейных координатах элементарную работу силы и кинетическую энергию точки. После этого составление уравнений движения сводится к операциям дифференцирования.

Уравнения движения материальной точки в форме, представленной теоремой 3.6.1, носят название *уравнений Лагранжа второго рода*.

Пример 3.6.5. **Уравнения движения в цилиндрических координатах.** Соответствующий локальный базис ортонормирован. Далее

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right| = 1, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = \rho, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3}\right| = 1.$$

Скорость в этом базисе имеет координаты

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_3 = \dot{r}_3.$$

Выражение для кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}_3^2).$$

Обобщенные силы даются формулами

$$Q_\rho = F_1\cos\varphi + F_2\sin\varphi = F_\rho,$$
$$Q_\varphi = (-F_1\sin\varphi + F_2\cos\varphi)\rho = F_\varphi\rho,$$
$$Q_3 = F_3,$$

где $F_\rho = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_\rho$, $F_\varphi = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_\varphi$. В итоге получаются следующие уравнения движения:

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 = F_\rho, \quad m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = F_\varphi\rho, \quad m\ddot{r}_3 = F_3.$$

Они удобны, когда нет проекции силы на локальные оси $\boldsymbol{\tau}_\varphi$ и $\boldsymbol{\tau}_3$.◇

Замечание 3.6.1. В случае плоскопараллельного движения кинетическая энергия в полярных координатах ρ и φ имеет вид

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2).$$

Пример 3.6.6. **Уравнения движения в сферических координатах.** Локальный базис в таких координатах будет ортонормированным, причем

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right| = 1, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}\right| = \rho, \quad \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi}\right| = \rho\cos\vartheta.$$

Скорость имеет компоненты

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\vartheta = \rho\dot{\vartheta}, \quad v_\psi = \rho\dot{\psi}\cos\vartheta.$$

Поэтому кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2\cos^2\vartheta).$$

Вычислим обобщенные силы

$$Q_\rho = F_1\cos\vartheta\cos\psi + F_2\cos\vartheta\sin\psi + F_3\sin\vartheta = F_\rho,$$
$$Q_\vartheta = (-F_1\sin\vartheta\cos\psi - F_2\sin\vartheta\sin\psi + F_3\cos\vartheta)\rho = F_\vartheta\,\rho,$$
$$Q_\psi = (-F_1\sin\psi + F_2\cos\psi)\rho\cos\vartheta = F_\psi\,\rho\cos\vartheta,$$

где $F_\rho = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_\rho$, $F_\vartheta = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_\vartheta$, $F_\psi = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_\psi$. В итоге получим следующие уравнения движения:

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\vartheta}^2 - m\rho\dot{\psi}^2\cos^2\vartheta = F_\rho, \quad m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\vartheta}) + m\rho^2\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = F_\vartheta\,\rho,$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\psi}\cos^2\vartheta) = F_\psi\,\rho\cos\vartheta.$$

Такие уравнения удобны, когда либо $F_\psi = 0$, либо равны тождественно нулю обе проекции F_ψ и F_ϑ.◇

В том случае, когда движение происходит вдоль известной кривой, заданной параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

где s — длина дуги траектории, удобными могут оказаться естественные оси. По теореме 2.2.1 проекции ускорения на естественные оси имеют вид

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_\nu = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_\beta = 0,$$

где

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \boldsymbol{\nu} = \rho\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu},$$

$\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой в данной точке, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор главной нормали, перпендикулярный к $\boldsymbol{\tau}$ и образующий вместе с $\boldsymbol{\tau}$ соприкасающуюся плоскость, $\boldsymbol{\beta}$ — единичный вектор бинормали, перпендикулярный к соприкасающейся плоскости, v — модуль скорости, ρ — радиус кривизны.

Теорема 3.6.2. *Уравнения движения в проекциях на естественные оси имеют вид*

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_\nu, \quad F_\beta = 0,$$

где

$$F_\tau = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad F_\nu = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad F_\beta = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Доказательство получается посредством проектирования векторного уравнения второго закона Ньютона (см. стр. 160) на естественные оси.□

Следствие 3.6.1. *Полная сила $\mathbf{F}$, под действием которой происходит движение материальной точки, всегда принадлежит соприкасающейся плоскости. Соприкасающаяся плоскость есть линейная оболочка векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}$.*

Следствие 3.6.2. *Для того, чтобы вычислить нормальную составляющую суммарной силы, достаточно знать лишь скорость v движения точки по кривой.*

Если касательная составляющая силы $F_\tau = F_\tau(s, v, t)$ известна в каждой точке кривой, то проекция

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau(s, \frac{ds}{dt}, t),$$

уравнения движения на касательную определяет закон $s = s(t)$, когда в начальный момент времени t_0 задано $s = s_0$, $ds/dt = v_0$.

Положение материальной точки на известной кривой не всегда удобно задавать длиной дуги s. Пусть q — произвольная переменная, связанная с s посредством равенства $s = s(q)$. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q), \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dq}\dot{q}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2s}{dq^2}\dot{q}^2 + \frac{ds}{dq}\ddot{q}.$$

Будем считать, что $ds/dq \neq 0$ для любой точки траектории. Проекцию уравнения движения на касательную перепишем в виде

$$\ddot{q} = \Phi(q, \dot{q}, t),$$

где

$$\Phi(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{m}\frac{dq}{ds}\left[F_\tau(s(q), \frac{ds}{dq}\dot{q}, t) - m\frac{d^2s}{dq^2}\dot{q}^2\right].$$

Имеем *дифференциальное уравнение одномерного движения*.

Пример 3.6.7. Пусть траектория материальной точки представляет собой винтовую линию, параметризованную углом φ:

$$r_1 = R\cos\varphi, \quad r_2 = R\sin\varphi, \quad r_3 = -h\varphi/(2\pi).$$

Эта линия принадлежит поверхности цилиндра радиуса R. Ось цилиндра совпадает с третьей координатной осью. Когда φ кратно 2π: $\varphi = 2k\pi$, третья координата кратна шагу винта h: $r_3 = -kh$. На точку действует сила тяжести

$$\mathbf{P} = -mg\,\mathbf{e}_3,$$

и точка не испытывает сопротивления движению вдоль винтовой линии. Требуется составить уравнение одномерного движения точки.

Решение задачи можно осуществить различными способами. Сначала применим уравнения в проекциях на цилиндрические оси. Если бы на точку действовала только сила тяжести, то точка, имея постоянное ускорение, двигалась бы либо вдоль третьей координатной оси, либо по параболе в плоскости начального вектора скорости и вектора силы тяжести. Чтобы точка двигалась по винтовой линии, помимо силы тяжести требуется дополнительная сила $\mathbf{N}$ (реакция связи). Обозначим $N_\rho = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}_\rho$, $N_\varphi = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau}_\varphi$, $N_3 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3$. Уравнения движения в цилиндрических координатах примут вид

$$-mR\dot{\varphi}^2 = N_\rho, \quad m\frac{d}{dt}(R^2\dot{\varphi}) = N_\varphi R, \quad -m\frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi} = -mg + N_3,$$

так как по условию задачи должно быть выполнено $r = R = const$, $P_r = P_\varphi = 0$. Имеем смешанную задачу динамики: задан вид траектории и частично заданы силы. Реакция $\mathbf{N}$ неизвестна, но в условии сказано, что $\mathbf{N}$ не влияет на движение точки вдоль винтовой линии. Значит, $\mathbf{N}$ перпендикулярна касательной к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$. Направление касательной дается в данном случае выражением

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = R\boldsymbol{\tau}_\varphi - \frac{h}{2\pi}\mathbf{e}_3.$$

Учитывая, что $\mathbf{N} = N_\rho\boldsymbol{\tau}_\rho + N_\varphi\boldsymbol{\tau}_\varphi + N_3\mathbf{e}_3$, запишем условие ортогональности:

$$\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = N_\varphi R - N_3\frac{h}{2\pi} = 0.$$

Тем самым получено дополнительное уравнение, позволяющее полностью решить задачу. Из условия ортогональности найдем

$$N_\varphi R = N_3 h/(2\pi).$$

Тогда второе и третье уравнения движения можно представить в виде

$$mR^2\ddot{\varphi} = \frac{h}{2\pi}N_3, \quad -m\frac{h}{2\pi}\ddot{\varphi} = -mg + N_3.$$

Исключив неизвестную N_3, получим искомое уравнение

$$\ddot{\varphi} = \frac{gh}{2\pi}\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-1}.$$

Поставленная задача решена, но дополнительно мы можем найти также все составляющие реакции $\mathbf{N}$:

$$N_3 = mR^2 g\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-1}, \quad N_\varphi = \frac{mRhg}{2\pi}\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-1}, \quad N_\rho = -mR\dot{\varphi}^2.$$

Для сравнения решим теперь эту же задачу посредством проектирования уравнения движения на касательную к траектории. Имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}\right|^{-1} = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[R\boldsymbol{\tau}_\varphi - \frac{h}{2\pi}\mathbf{e}_3\right].$$

Следовательно,

$$P_\tau = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{mgh}{2\pi}.$$

По условию задачи реакция $\mathbf{N}$ не дает проекцию на касательную к траектории. Поэтому проекция уравнения движения на направление вектора $\boldsymbol{\tau}$ примет вид

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{mgh}{2\pi}\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

По определению винтовой линии

$$v_1 = -R\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad v_2 = R\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad v_3 = -\frac{h}{2\pi}\dot{\varphi},$$

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}\dot{\varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}\ddot{\varphi}.$$

Подставляя найденное выражение в левую часть проекции уравнения движения на касательную $\boldsymbol{\tau}$, выводим искомое дифференциальное уравнение одномерного движения

$$\ddot{\varphi} = \frac{gh}{2\pi}\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-1},$$

в точности совпадающее с найденным выше.

Второй путь решения задачи оказался более экономным. Удалось обойтись без явного использования компонент реакции $\mathbf{N}$, исключив их путем проектирования уравнений движения на перпендикулярное к $\mathbf{N}$ направление.

При желании можно и с помощью второго способа найти реакцию $\mathbf{N}$. Здесь получим лишь составляющую реакции вдоль главной нормали. Единичный вектор касательной дается формулой

$$\boldsymbol{\tau} = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[-R\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + R\cos\varphi\,\mathbf{e}_2 - \frac{h}{2\pi}\mathbf{e}_3\right].$$

По определению главной нормали получим

$$\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho_k} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = -R\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{d\varphi}{ds}\boldsymbol{\tau}_\rho,$$

где ρ_k — радиус кривизны траектории. Очевидно, что

$$\frac{ds}{d\varphi} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}\right| = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho_k} = -R\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]^{-1}\boldsymbol{\tau}_\rho,$$

т. е. главная нормаль направлена в сторону, противоположную вектору $\boldsymbol{\tau}_\rho$, а выражение для радиуса кривизны ρ_k имеет вид

$$\rho_k = \frac{1}{R}\left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right].$$

Выше были найдены формулы для компонент вектора скорости. Из них следует

$$v^2 = \left[R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right]\dot{\varphi}^2.$$

Проекция уравнений движения на нормаль к траектории имеет вид

$$N_\nu = \frac{mv^2}{\rho_k} = mR\dot{\varphi}^2.$$

Но так как $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\tau}_\rho$, получим $N_\nu = -N_\rho$. Это соответствует найденному выше значению реакции.◇

Обратимся к геометрическим методам анализа свойств движения. Обозначим $\mathcal{Q} \ni x = \{x_i\}$ — пространство координат (криволинейных в общем случае), задающих радиус-вектор материальной точки. Размерность пространства координат $\mathcal{Q}$ не превосходит трех. Скорость точки задается набором $\dot{x} = \{\dot{x}_i\} \in \mathcal{Q}_T$. Пространство скоростей $\mathcal{Q}_T$ имеет ту же размерность, что и пространство $\mathcal{Q}$.

Определение 3.6.2. *Фазовое пространство* есть прямое произведение $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}_T$ координатного множества и множества скоростей. Тем самым фазовое пространство всегда четномерно.

В частности, три координаты радиуса-вектора и три компоненты скорости образуют шестимерное фазовое пространство. Если положение точки в пространстве вполне определено лишь одной координатой (точка движется по заданной кривой), то ее фазовое пространство двумерно и может интерпретироваться как фазовая плоскость.

Каждому состоянию материальной точки, представляющему собой некоторый набор координат x и их скоростей $\dot{x}$, соответствует одна и только одна точка фазового пространства (фазовая точка).

Движению материальной точки в реальном пространстве соответствует движение фазовой точки в фазовом пространстве. Траектория движения фазовой точки называется *фазовой кривой*. Фазовая кривая может вырождаться в единственную точку. Такая точка называется *положением равновесия*.

Если существуют какие-либо первые интегралы уравнений движения, то эти интегралы выделяют в фазовом пространстве гиперповерхности, которым должна принадлежать фазовая точка в любой момент времени.

Рассмотрим решение уравнений движения, начальные условия которого при $t = 0$ изображаются некоторой точкой M фазового пространства. Для момента t будем иметь преобразование в силу уравнений движения, переводящее точку M в точку $M(t)$. Пусть уравнения движения автономны, т. е. ускорение не зависит явно от времени, и пусть любое их решение продолжается на всю ось времени. Преобразование G^t, обеспечивающее переход $M \to M(t)$, взаимно однозначно и дифференцируемо по фазовым координатам (*диффеоморфизм*). Все такие преобразования G^t образуют группу:

$$G^t \circ G^s = G^{t+s}, \quad G^0 = 1, \quad G^{-t} = (G^t)^{-1}.$$

Эту группу называют *фазовым потоком*, определенным уравнениями движения в фазовом пространстве. Фазовая кривая может быть представлена параметрически:

$$x = x(x_0, \dot{x}_0, t), \quad \dot{x} = \dot{x}(x_0, \dot{x}_0, t),$$

где $x_0, \dot{x}_0$ — начальное положение фазовой точки. В общем случае это кривая в шестимерном пространстве. *Фазовый портрет* движения есть полное множество возможных типов фазовых кривых.

Фазовые кривые обладают рядом специфических свойств. Проиллюстрируем эти свойства на примере фазовой плоскости.

Теорема 3.6.3. *Плоская фазовая кривая, в точках которой ускорение не обращается в нуль, может иметь касательную, параллельную оси скорости, только при $\dot{x} = 0$.*

Доказательство. Уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = f(x, \dot{x}, t).$$

Отсюда при $f(x,\dot{x},t)\neq 0$ получим

$$\frac{dx}{d\dot{x}}=\frac{\dot{x}}{f(x,\dot{x},t)}.$$

Параллельность касательной и оси скорости означает равенство нулю производной $dx/d\dot{x}$.□

Следствие 3.6.3. *Фазовая кривая не может быть замкнутой ни в полуплоскости, где $\dot{x}>0$, ни в полуплоскости, где $\dot{x}<0$. При $\dot{x}>0$ фазовая точка движется в направлении увеличения координаты x.*

Аналогичные свойства можно установить в случае большего числа измерений.

§ 3.7. Основные теоремы динамики материальной точки

Определение 3.7.1. *Количеством движения* материальной точки называется вектор $\mathbf{Q}=m\mathbf{v}$.

С учетом этого определения второй закон Ньютона может быть представлен в виде

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\mathbf{F}.$$

Другими словами, скорость изменения количества движения материальной точки равна вектору силы, действующей на точку.

Теорема 3.7.1. (Интеграл количества движения). *Пусть проекция силы $\mathbf{F}$ на направление постоянного вектора $\mathbf{e}$ равна нулю. Тогда равенство*

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}=c$$

есть первый интеграл уравнений движения, выражающий сохранение проекции количества движения на ось с направляющим вектором $\mathbf{e}$.

Доказательство. Умножим обе части равенства $\dot{\mathbf{Q}}=\mathbf{F}$ скалярно на $\mathbf{e}$. С учетом условия теоремы получим $\mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{Q}}=0$. Вектор $\mathbf{e}$ не меняется. Поэтому

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{Q})=0.$$

Следовательно, в силу уравнений движения, скалярное произведение $\mathbf{e}\cdot\mathbf{Q}$ будет постоянным.□

Пример 3.7.1. Пусть материальная точка движется в поле параллельных сил $\mathbf{F}=F\mathbf{k}$, где F — величина силы (не обязательно постоянная), а $\mathbf{k}$ — постоянный единичный вектор. Выберем вектор $\mathbf{e}\perp\mathbf{k}$. Все такие векторы $\mathbf{e}$ образуют плоскость $\mathcal{P}$, перпендикулярную вектору $\mathbf{k}$. По теореме 3.7.1 должно быть $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}=c$, так как $\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}=0$. Учитывая, что масса точки постоянна, получим следствие: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}=v_e=const$. Следовательно, проекция вектора скорости точки на плоскость $\mathcal{P}$ обязана сохраняться во все время движения.◇

Определение 3.7.2. *Кинетический момент* материальной точки *(момент количества движения)* относительно точки (полюса) O есть вектор

$$\mathbf{K}=\mathbf{r}\times\mathbf{Q},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, имеющий начало в O.

Теорема 3.7.2. (Об изменении кинетического момента). *Производная по времени от кинетического момента, взятого относительно неподвижного полюса O, равна моменту суммы всех сил, приложенных к материальной точке:*

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}.$$

Доказательство.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{Q})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{Q}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F},$$

так как $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ параллельно $\mathbf{Q}$.□

Следуя Резалю, доказанной теореме можно дать геометрическую формулировку: *скорость конца вектора кинетического момента, взятого относительно неподвижного полюса, равна моменту суммы всех сил, действующих на материальную точку.*

Теорема 3.7.3. *Если на точку действует центральная сила, то существует векторный первый интеграл $\mathbf{K}=\mathbf{c}$ и движение точки происходит в неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{c}$ и проходящей через центр силы.*

Доказательство. Выберем полюс O, совпадающий с центром силы. По теореме 3.7.2 получим

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=0,$$

так как $\mathbf{F}=F(r)\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0$. Поэтому $\mathbf{K}=\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, определяемый начальными условиями движения. Кинетический момент перпендикулярен плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Значит, эта плоскость не меняет своей ориентации в пространстве. Кроме того, эта плоскость проходит через центр неподвижной силы.□

Пусть вектор $\mathbf{r}_\text{п}(t)$ начинается в неподвижной точке O и принадлежит при любом t некоторой плоскости $\mathcal{P}$. Обозначим $\mathbf{v}_\text{п}=d\mathbf{r}_\text{п}/dt$, $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к плоскости $\mathcal{P}$, $S(t)$ — площадь сектора, ограниченного начальным вектором $\mathbf{r}_\text{п}(t_0)$, вектором $\mathbf{r}_\text{п}(t)$, соответствующим некоторому значению времени $t>t_0$, и траекторией конца вектора $\mathbf{r}_\text{п}(t)$, получающейся при изменении t от начального значения t_0. Будем считать приращение $S(t)$ положительным, когда оно происходит вследствие вращения $\mathbf{r}_\text{п}(t)$ против хода часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{\nu}$.

Теорема 3.7.4. *Пусть $\mathbf{r}_\text{п}\in\mathcal{P}$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathbf{r}_\text{п}\times\mathbf{v}_\text{п}=2\nu\frac{dS}{dt}.$$

Доказательство. За элемент площади сектора можно взять площадь треугольника с вершиной в полюсе O. Одна сторона треугольника образована вектором $\mathbf{r}_\text{п}(t)$, а другая сторона начинается из конца вектора $\mathbf{r}_\text{п}(t)$ и образована вектором $\boldsymbol{\tau}ds$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к траектории, вычерчиваемой концом вектора $\mathbf{r}_\text{п}(t)$, а ds — элемент дуги траектории.

Предположим сначала, что если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{\nu}$ на плоскость $\mathcal{P}$, то переход в кратчайшем направлении от вектора $\mathbf{r}_\text{п}$ к вектору $\boldsymbol{\tau}$ осуществляется против хода часовой стрелки ($\mathbf{r}_\text{п}$ вращается против хода часовой стрелки). Тогда

$$\mathbf{r}_\text{п}\times\boldsymbol{\tau}ds=\nu|\mathbf{r}_\text{п}\times\boldsymbol{\tau}|\,ds=\nu r_\text{п}ds\sin(\widehat{\mathbf{r}_\text{п},\boldsymbol{\tau}})=2\nu\,dS.$$

Если переход от вектора $\mathbf{r}_\text{п}$ к вектору $\boldsymbol{\tau}$ осуществляется по ходу часовой стрелки, то

$$\mathbf{r}_\text{п}\times\boldsymbol{\tau}ds=-\nu|\mathbf{r}_\text{п}\times\boldsymbol{\tau}|\,ds=-\nu r_\text{п}ds\sin(\widehat{\mathbf{r}_\text{п},\boldsymbol{\tau}})=2\nu\,dS,$$

что соответствует принятому определению знака приращения площади. Учитывая, что $ds/dt=v_\text{п}$, получаем утверждение теоремы.□

Определение 3.7.3. Величина dS/dt называется *секторной скоростью* вектора $\mathbf{r}_\text{п}(t)$.

Пример 3.7.2. Пусть в плоскости $\mathcal{P}$ траектория точки задана полярными координатами $r=r(\varphi)$. Направление отсчета φ положительно при вращении $r(\varphi)$ против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{\nu}$. Установим выражение для секторной скорости в полярных координатах.

Обозначим $d\varphi$ — приращение полярного угла. Тогда

$$r(\varphi+d\varphi)=|\mathbf{r}+\boldsymbol{\tau}ds|=\sqrt{(\mathbf{r}+\boldsymbol{\tau}ds)^2}\approx r+\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\tau}}{r}ds.$$

Приближенное равенство выполнено с точностью до малых второго порядка относительно ds. Пусть $d\varphi$ положительно. По определению секторной скорости найдем

$$2dS=r(\varphi)r(\varphi+d\varphi)\sin(\widehat{\mathbf{r}(\varphi),\mathbf{r}(\varphi+d\varphi)})=\mathbf{r}^2d\varphi.$$

Последнее соотношение справедливо, так как речь идет о равенстве дифференциалов. Таким образом,

$$2\frac{dS}{dt}=r^2\frac{d\varphi}{dt}.◇$$

Теорема 3.7.5. *Проекция кинетического момента на постоянный единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ равна произведению массы и удвоенной секторной скорости, которую имеет проекция радиуса-вектора материальной точки на плоскость $\mathcal{P}$, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{\nu}$.*

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nu}=m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\boldsymbol{\nu}.$$

Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_\text{п}+r_e\boldsymbol{\nu},\quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_\text{п}+v_e\boldsymbol{\nu},$$

где $\mathbf{r}_\text{п}\in\mathcal{P}$, $\mathbf{v}_\text{п}\in\mathcal{P}$, причем $\mathbf{v}_\text{п}=d\mathbf{r}_\text{п}/dt$. Следовательно,

$$(\mathbf{r}\times\mathbf{v})=(\mathbf{r}_\text{п}+r_e\boldsymbol{\nu})\times(\mathbf{v}_\text{п}+v_e\boldsymbol{\nu})=\mathbf{r}_\text{п}\times\mathbf{v}_\text{п}+r_e\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{v}_\text{п}+v_e\mathbf{r}_\text{п}\times\boldsymbol{\nu}.$$

Векторное произведение ортогонально сомножителям. Поэтому

$$(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\boldsymbol{\nu}=(\mathbf{r}_\text{п}\times\mathbf{v}_\text{п})\cdot\boldsymbol{\nu}.$$

Теперь достаточно применить теорему 3.7.4:

$$\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nu}=2m\frac{dS}{dt},$$

где S — площадь, заметаемая вектором $\mathbf{r}_\text{п}$ в плоскости $\mathcal{P}$.□

Теорема 3.7.6. (Теорема площадей). *Если проекция момента силы на какое-либо постоянное направление $\boldsymbol{\nu}$ равна нулю, то проекция радиуса-вектора материальной точки на плоскость, перпендикулярную $\boldsymbol{\nu}$, заметает в любые равные промежутки времени одинаковые площади.*

Доказательство. Применим теорему 3.7.2 и учтем, что проекция момента силы на направление $\boldsymbol{\nu}$ равна нулю:

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{F})=0.$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ не изменяется. Имеем первый интеграл

$$\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nu}=c.$$

Постоянная c вычисляется по начальным условиям, заданным в момент времени t_0. По теореме 3.7.5 получим

$$2m\frac{dS}{dt}=c,$$

где S — площадь, заметаемая проекцией радиуса-вектора на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{\nu}$. После интегрирования найдем

$$S=\frac{c}{2m}(t-t_0)+S_0,$$

где S_0 — начальное значение площади.□

Теорема 3.7.7. *Если материальная точка описывает плоскую траекторию, причем ее радиус-вектор с началом в полюсе O, расположенном на плоскости, заметает за любые равные промежутки времени одинаковые площади, то движение осуществляется под действием центральной силы, линия действия которой проходит через точку O.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, перпендикулярный к упомянутой в условии теоремы плоскости. Тогда кинетический момент $\mathbf{K}$ точки параллелен вектору $\boldsymbol{\nu}$. По условию теоремы секторная скорость точки постоянна:

$$2m\frac{dS}{dt}=\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nu}=c.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{K}}{dt}=0.$$

Поэтому $\mathbf{F}\|\mathbf{r}$.□

Доказанная теорема есть пример частичного решения обратной задачи механики. Наличие векторного интеграла кинетического момента представляет собой необходимый и достаточный признак того, что сила, действующая на материальную точку, будет центральной.

Теорема 3.7.8.(Об изменении кинетической энергии). *Дифференциал dT кинетической энергии $T=mv^2/2$ равен работе силы на действительном элементарном перемещении материальной точки:*

$$dT=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Доказательство. Умножим уравнение, выражающее второй закон Ньютона, скалярно на $\mathbf{v}$. Будем иметь

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}.□$$

Теорема 3.7.9. (Интеграл энергии). *Если сила, действующая на материальную точку, потенциальна с силовой функцией $U(\mathbf{r})$, то уравнения движения допускают первый интеграл (интеграл энергии)*

$$T+\Pi=h,$$

где $\Pi=-U$ — потенциальная энергия, h — постоянная энергии, вычисляемая по начальным условиям.

Доказательство. На элементарном перемещении, учитывая определение силовой функции, будем иметь $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=dU$. Теорема 3.7.8 дает $dT=dU$, или $d(T-U)=0$. Поэтому утверждение теоремы справедливо, причем h сохраняется на конкретной траектории. От траектории к траектории величина h может принимать разные значения, так как изменить траекторию — значит взять другие начальные условия.□

Определение 3.7.4. Скалярная величина $E=T+\Pi$ называется *полной механической энергией* материальной точки.

С помощью теоремы 3.7.9 можно сделать качественные выводы о характере движения. Например, пусть на точку действуют потенциальные силы с силовой функцией $U(\mathbf{r})$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2}=U(\mathbf{r})+h.$$

Имеем $v^2\geq 0$. Следовательно, $U(\mathbf{r})+h\geq 0$, что выделяет область допустимых положений движущейся точки.

Определение 3.7.5. Скалярное произведение $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ вектора силы $\mathbf{F}$ и вектора скорости $\mathbf{v}$ материальной точки называется *мощностью силы*. Единицей мощности служит "ватт": $1\text{вт}=1\text{н}\cdot\text{м/с}$. Мощность имеет смысл работы, которую сила способна совершить за единицу времени.

Следствие 3.7.1.*Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности силы, действующей на эту точку:*

$$\frac{dT}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

Пример 3.7.3. **Движение точки в поле параллельных сил тяжести.** Основные формулы для такого движения можно найти в примере 3.5.2. Здесь проиллюстрируем действие основных теорем динамики точки. Пусть вектор $\mathbf{e}_3$ задает направление вертикали, и на материальную точку действует сила тяжести $\mathbf{P}=-mg\mathbf{e}_3$. Выберем ортонормированный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с началом в произвольной точке O трехмерного пространства. Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют горизонтальную плоскость $\mathcal{P}$, проходящую через начало координат O. Количество движения материальной точки подчиняется уравнению

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=-mg\mathbf{e}_3.$$

Проекция силы на горизонтальную плоскость $\mathcal{P}$ равна нулю. Согласно теореме 3.7.1, проекция скорости точки на горизонтальную плоскость (горизонтальная скорость) будет сохраняться как по величине, так и по направлению. Поэтому проекция точки на плоскость $\mathcal{P}$ будет перемещаться по прямой линии l, уравнение которой зададим в параметрическом виде:

$$\mathbf{r}_\text{п}=\mathbf{r}_o+x\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e}\in\mathcal{P}$ — постоянный единичный вектор направления горизонтальной скорости, x — координата переменного положения проекции материальной точки на плоскости $\mathcal{P}$, вектор $\mathbf{r}_o\in\mathcal{P}$ привязывает прямую к началу координат, задает точку прямой при $x=0$ и остается постоянным при движении материальной точки. Таким образом, $\mathbf{r}_\text{п}\in\mathcal{P}$ при любом значении x. Обозначим $v_\text{г}$ модуль горизонтальной составляющей скорости и представим радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки и ее скорость $\mathbf{v}$ в виде

$$\mathbf{r}=y\mathbf{e}_3+\mathbf{r}_\text{п},\quad \mathbf{v}=\dot{y}\mathbf{e}_3+v_\text{г}\mathbf{e}.$$

Очевидно, что

$$\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{v}=\dot{y}\mathbf{e}_3+\dot{\mathbf{r}}_\text{п}.$$

Откуда $\dot{\mathbf{r}}_\text{п}=\dot{x}\mathbf{e}=v_\text{г}\mathbf{e}\to\dot{x}=v_\text{г}=const$. Поэтому

$$x=x_0+(t-t_0)\,v_\text{г},$$

где x_0 — значение координаты x в начальный момент движения $t=t_0$.

Проекция уравнения количества движения на вертикальную ось дает

$$\ddot{y}=-g\longrightarrow y=-\frac{g}{2}(t-t_0)^2+(t-t_0)v_\text{в}+y_0,$$

где $v_\text{в}$ — начальное значение вертикальной скорости, а y_0 — начальное значение вертикальной координаты.

Максимальное значение y_m координаты y можно найти с помощью интеграла энергии (теорема 3.7.9). Имеем

$$m\frac{\dot{y}^2+v_\tau^2}{2}+mgy=h=m\frac{v_\text{в}^2+v_\tau^2}{2}+mgy_0\quad\text{или}\quad y_m-y_0=\frac{v_\text{в}^2}{2g},$$

так как для максимальной высоты y_m-y_0 имеем $\dot{y}=0$.

Отметим, что в рассматриваемой задаче вектор силы тяжести не создает момента вокруг вертикальной оси. Теорема 3.7.6 утверждает, что в этом случае горизонтальная проекция радиуса-вектора будет иметь постоянную секторную скорость. В самом деле, площадь, заметаемую проекцией радиуса-вектора на горизонтальную плоскость, можно найти по формуле

$$2S\mathbf{e}_3=(\mathbf{r}_o\times\mathbf{e})(x-x_0)=v_\tau(\mathbf{r}_o\times\mathbf{e})(t-t_0).$$

Видим, что S меняется равномерно по времени, и теорема площадей в данном случае имеет очевидную интерпретацию. ◇

Ниже будут даны другие примеры применения доказанных теорем, иллюстрирующие их эффективность при исследовании движения.

§ 3.8. Влияние связей на движение материальной точки

Рассмотрим задачи, в которых из-за геометрических и кинематических ограничений (*связей*) ускорение $\mathbf{w}$, реально получаемое точкой, не совпадает с ускорением $\mathbf{w}_F=\mathbf{F}/m$, которое возникло бы под действием заданной силы $\mathbf{F}$ при отсутствии ограничений. Естественно разницу между $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}_F$ объяснить влиянием некоторой дополнительной силы.

Определение 3.8.1. *Реакция связи* есть сила, которая, будучи приложенной к материальной точке вместо связи, сохраняет неизменным закон движения точки.

Принцип освобождения от связей утверждает, что всегда существует реакция связи, действие которой эквивалентно действию связи.

Пусть $\mathbf{N}$ — реакция связи. При освобождении от связи второй закон Ньютона следует записать в виде

$$m\mathbf{w}=\mathbf{F}+\mathbf{N}.$$

Силу $\mathbf{F}$ в отличие от реакции связи будем называть *активной силой*, вызывающей требуемое движение.

Предположим, что ограничение задано с помощью уравнения

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=0,$$

причем $\partial\Phi/\partial\mathbf{v}\neq 0$. Такое ограничение носит название *дифференциальной связи*. Это ограничение выделяет допустимые значения вектора скорости для любого заданного положения точки и для любого заданного фиксированного момента времени. Активная сила $\mathbf{F}$ обеспечивает выбор действительных значений скорости среди всех допустимых.

При действии активной силы $\mathbf{F}$ реакция связи $\mathbf{N}$ должна быть такой, чтобы левая часть уравнения дифференциальной связи была первым интегралом уравнения движения, ибо вдоль действительной траектории эта связь должна тождественно удовлетворяться.

Воспользовавшись теоремой 3.5.1, приравняем нулю производную в силу уравнений движения от функции Φ:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{N})+\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0.$$

Отсюда получаем необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять реакция $\mathbf{N}$, чтобы движение материальной точки происходило в соответствии с заданной дифференциальной связью:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{N}=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{F}+m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right].$$

Это условие ограничивает лишь проекцию $\mathbf{N}$ на вектор $\partial\Phi/\partial\mathbf{v}$. Следовательно, вектор $\mathbf{N}$ целесообразно представить в виде

$$\mathbf{N}=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}+\mathbf{N}_\tau,$$

где скаляр $\lambda=\lambda(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ однозначно определен:

$$\lambda=-\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\right|^{-2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{F}+m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\right],$$

а вектор $\mathbf{N}_\tau\perp\partial\Phi/\partial\mathbf{v}$, и для его определения нужна дополнительная информация.

В механике реакция связи всегда считается *пассивной силой*. Это означает, что реакция связи не может самостоятельно вызвать движение, не приводящее к нарушению связи, а может тормозить такое движение или препятствовать его возникновению. Вместе с тем реакция всегда препятствует нарушению связи. Чтобы однозначно найти $\mathbf{N}_\tau$, следует указать закон торможения. Таким, в частности, может быть закон сухого трения скольжения (см. пример 3.4.3)

$$\mathbf{N}_\tau = -f\left|\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\right|\frac{\mathbf{v}_\tau}{|\mathbf{v}_\tau|},$$

где f — коэффициент трения, а вектор

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\right|^{-2}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}$$

есть составляющая скорости, перпендикулярная вектору $\partial\Phi/\partial\mathbf{v}$ и потому сохраняющая связь. Может встретиться также и закон вязкого трения (см. пример 3.4.4):

$$\mathbf{N}_\tau = -æ(\mathbf{v}_\tau)\mathbf{v}_\tau, \quad æ(\mathbf{v}_\tau) \geq 0.$$

Особо выделим случай, когда $\mathbf{N}_\tau = 0$. Тогда $\mathbf{N} = \lambda\,\partial\Phi/\partial\mathbf{v}$.

Определение 3.8.2. Пусть вектор $\delta\mathbf{r}$ задает перемещение точки, удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{r} = 0.$$

Такой вектор $\delta\mathbf{r}$ называется *виртуальным перемещением точки*. Вектор $\delta\mathbf{r}$ определен неоднозначно. Он принадлежит плоскости, перпендикулярной вектору $\partial\Phi/\partial\mathbf{v}$.

Определение 3.8.3. Связь, стесняющая движение материальной точки, называется *идеальной*, если для любого виртуального перемещения $\delta\mathbf{r}$ ее реакция $\mathbf{N}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{r} = 0.$$

Очевидно, что условие ортогональности реакции $\mathbf{N}$ и любого виртуального перемещения есть необходимое и достаточное условие того, что $\mathbf{N}_\tau = 0$. Можно сказать также, что реакция идеальной связи не препятствует движению, совместимому со связью в данный момент времени, и однозначно определена активной силой и уравнением связи.

Особо обратим внимание на различие между *действительным перемещением* $d\mathbf{r}$ материальной точки во времени и виртуальным ее перемещением $\delta\mathbf{r}$ в данный фиксированный момент времени.

Лемма 3.8.1. *Справедлива формула*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\,dt,$$

где $d\mathbf{r}$ — дифференциал перемещения точки в действительном движении (действительное перемещение).

Доказательство. Скорость точки и дифференциал ее радиуса-вектора в действительном движении связаны равенством $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$. Умножив обе части этого равенства скалярно на $\partial\Phi/\partial\mathbf{v}$, получим утверждение леммы.□

Видим (см. определение 3.8.2), что при

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} \neq 0$$

множество виртуальных перемещений не включает действительное перемещение. Если же

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = 0,$$

то действительное перемещение точки за время dt будет принадлежать множеству виртуальных.

Теорема 3.8.1. *Связь $\Phi(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0$ допускает принадлежность действительного перемещения множеству виртуальных тогда и только тогда, когда при фиксированных $\mathbf{r}$ и t она определяет в пространстве скоростей коническую поверхность с вершиной в точке $\mathbf{v} = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть связь допускает принадлежность действительного перемещения множеству виртуальных. Тогда одновременно должны быть выполнены уравнения

$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Зафиксируем $\mathbf{r}$ и t. Так как $|\partial\Phi/\partial\mathbf{v}| \neq 0$, можем воспользоваться теоремой о неявной функции и записать эти уравнения в виде

$$\Phi = v_3 - f(v_1,v_2) = 0, \quad v_3 = \frac{\partial f}{\partial v_1}v_1 + \frac{\partial f}{\partial v_2}v_2,$$

где v_1, v_2, v_3 — координаты вектора $\mathbf{v}$ в каком-нибудь ортонормированном базисе. На плоскости (v_1,v_2) рассмотрим произвольный луч $v_1 = s\alpha$, $v_2 = s\beta$, где α и β фиксированы, а s переменный параметр,

выделяющий точки луча. Тогда второе уравнение можно преобразовать к виду

$$s\frac{df}{ds} = f \quad \text{или} \quad f = s\frac{f_0}{s_0} \longrightarrow v_3 = s\gamma,$$

где f_0 есть значение функции f при начальном $s = s_0$. Следовательно $\gamma = f_0/s_0$ фиксировано при изменении s. Тем самым показано, что если уравнению связи удовлетворяет вектор $\mathbf{v}$, то и вектор $s\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению той же связи. Точка $\mathbf{v} = 0$, будучи предельной при $s \to 0$, всегда может быть доопределена, как удовлетворяющая уравнению связи. В пространстве скоростей имеем структуру конической поверхности с вершиной в точке 0. Заметим, что плоскость есть частный случай конической поверхности.

Достаточность. Если уравнение $\Phi = 0$ определяет коническую поверхность с вершиной в точке 0, то это означает, что функция Φ не меняется вдоль направления скорости, а потому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = 0.□$$

Реакция идеальной связи выразится формулой

$$\mathbf{N} = \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}.$$

Для материальной точки, стесненной идеальной связью $\Phi(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0$, уравнение движения принимает вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}},$$

и оно вместе с уравнениями связи и начальными условиями однозначно определяет закон движения. Полученное уравнение называется *уравнением Лагранжа с множителем*.

Теорема 3.8.2. (Влияние идеальной связи на кинетическую энергию). *Допустим, что на материальную точку наложена идеальная связь $\Phi(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0$. Тогда изменение кинетической энергии определено выражением*

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}.$$

Доказательство. Поскольку связь идеальна, мы можем воспользоваться уравнением Лагранжа с множителем и скалярно умножить обе его части на скорость $\mathbf{v}$ точки. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}.□$$

Член $[(\lambda\,\partial\Phi/\partial\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}]$ выражает мощность (см. определение 3.7.5), затрачиваемую реакцией связи при движении точки.

Теорема 3.8.3. (Интеграл энергии при наличии идеальной связи). *Пусть связь идеальна и такова, что действительное перемещение в любой момент времени принадлежит множеству виртуальных, а активная сила потенциальна с силовой функцией $U(\mathbf{r})$. Тогда имеет место интеграл энергии*

$$T = U + h.$$

Доказательство. Коль скоро действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных и силы потенциальны, то

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}},$$

и доказываемая теорема есть следствие теоремы 3.8.2.□

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы связей. Пусть уравнение связи имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + B = 0, \quad \mathbf{A} \neq 0,$$

где вектор $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и скаляр $B = B(\mathbf{r},t)$ зависят только от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки и времени t. Такое ограничение носит название *линейной дифференциальной связи*. Из-за нее конец вектора $\mathbf{v}$ должен принадлежать плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{A}$ и смещенной от материальной точки на расстояние $B/|\mathbf{A}|$. Это ограничение выделяет допустимые значения вектора скорости для любого заданного положения точки и для любого заданного фиксированного момента времени. Для такой связи $\partial\Phi/\partial\mathbf{v} = \mathbf{A}$, и уравнение, определяющее векторы виртуальных перемещений, представляется следующим образом

$$\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{r} = 0.$$

Вектор $\delta\mathbf{r}$ определен неоднозначно. Он принадлежит плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{A}$. Далее, в силу уравнения связи получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = -B.$$

Таким образом при $B \neq 0$ множество виртуальных перемещений не включает действительное перемещение. Если же $B = 0$, то действительное перемещение точки за время dt будет принадлежать множеству виртуальных.

Реакция идеальной линейной дифференциальной связи выразится формулой

$$\mathbf{N} = \lambda\mathbf{A}.$$

Для материальной точки, стесненной такой связью, уравнение Лагранжа с множителем принимает вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \lambda\mathbf{A},$$

и оно вместе с уравнением связи и начальными условиями однозначно определяет закон движения.

Следствие 3.8.1. *Допустим, что на материальную точку наложена идеальная связь $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}+B = 0$. Тогда изменение кинетической энергии определено выражением*

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} - \lambda B.$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 3.8.2, найдем

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \lambda\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}.$$

Но уравнение связи влечет $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = -B$.□

Член $(-\lambda B)$ выражает мощность, затрачиваемую реакцией связи при движении точки.

Следствие 3.8.2. *Пусть линейная дифференциальная связь идеальна и такова, что действительное перемещение в любой момент времени принадлежит множеству виртуальных ($B = 0$), а активная сила потенциальна с силовой функцией $U(\mathbf{r})$. Тогда имеет место интеграл энергии*

$$T = U + h.$$

Доказательство. Коль скоро $B = 0$ и $\mathbf{F} = \partial U/\partial\mathbf{r}$, то доказываемое утверждение вытекает из следствия 3.8.1.□

Пример 3.8.1. Точка перемещается в трехмерном пространстве относительно ортонормированного репера $Oe_1e_2e_3$. Ее радиус-вектор выражается формулой

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Пусть в каждой плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}_3$, задано направление проекции скорости точки на эту плоскость, зависящее от координаты x_3 и времени:

$$\dot{x}_2 = f(x_3,t)\dot{x}_1,$$

где $f(x_3,t)$ — заданная функция. В этом случае имеем дифференциальную связь $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + B = 0$, для которой

$$\mathbf{A} = (f(x_3,t),-1,0), \quad B = 0,$$

и действительное перемещение принадлежит множеству виртуальных, несмотря на зависимость вектора $\mathbf{A}$ от времени. Функция $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = f(x_3,t)\dot{x}_1 - \dot{x}_2.$$

Множитель λ дается выражением

$$\lambda = -(1+f^2)^{-1}\left[f(x_3,t)F_1 - F_2 + m\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \frac{\partial f}{\partial t}\dot{x}_1\right)\right],$$

где F_1 и F_2 — компоненты активной силы $\mathbf{F}$.◇

Выше были рассмотрены случаи, когда связь существенно зависит от скорости. Предположим теперь, что $\partial\Phi/\partial\mathbf{v} \equiv 0$. Такая связь означает, что движение материальной точки ограничено поверхностью, заданной уравнением $f(\mathbf{r},t) = 0$ *(геометрическая связь)*. Соответствующая дифференциальная связь имеет вид $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + B = 0$, где

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Примем, что $\partial f/\partial\mathbf{r} \neq 0$. Виртуальные перемещения определены уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}\cdot\delta\mathbf{r} = 0$$

и принадлежат плоскости, касательной к связи при фиксированном времени t. Действительное перемещение принадлежит множеству виртуальных тогда и только тогда, когда $B = \partial f/\partial t = 0$, т. е. когда связь не зависит явно от времени. Реакция геометрической идеальной связи $f(\mathbf{r},t) = 0$ направлена вдоль градиента:

$$\mathbf{N} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}.$$

Мощность реакции связи выражается формулой $(-\lambda\,\partial f/\partial t)$. Теорему 3.8.3 можно сформулировать следующим образом.

Следствие 3.8.3. *Если геометрическая связь идеальна и не зависит явно от времени, а активная сила потенциальна, то имеет место интеграл энергии.*

Максимальное число независимых связей для материальной точки, движущейся в трехмерном пространстве, не может превышать трех. Если имеются три такие связи, то ими скорость точки определена однозначно как функция координат и времени. Изучение закона движения в этом случае представляет собой задачу кинематики, а задачей динамики тогда будет лишь определение усилий, реализуемых этими связями.

Рассмотрим случай, когда имеются две независимые дифференциальные связи

$$\Phi_1(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0, \quad \Phi_2(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0, \quad \left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}}\times\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}\right| \neq 0.$$

Движение материальной точки будет происходить в соответствии с заданными дифференциальными связями тогда и только тогда, когда реакция $\mathbf{N}$ удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{N} = -\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{F} + m\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)\right],$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{N} = -\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{F} + m\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right)\right].$$

Решение этой системы неоднозначно. Однако можно заметить, что при выполнении условия невырожденности она однозначно определяет линейную комбинацию

$$\tilde{\mathbf{N}} = \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}} + \lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}},$$

где λ_1 и λ_2 — искомые скалярные параметры. Реакцию связей тогда можно представить в виде $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{N}_\tau$, где составляющая $\mathbf{N}_\tau$ может совпадать по направлению с любым ненулевым вектором $\delta\mathbf{r}$, перпендикулярным одновременно и вектору $\partial\Phi_1/\partial\mathbf{v}$, и вектору $\partial\Phi_2/\partial\mathbf{v}$. Из системы уравнений для реакции невозможно определить такую составляющую $\mathbf{N}_\tau$. Все указанные векторы $\delta\mathbf{r}$ называются *виртуальными перемещениями* в данном случае, и их множество описывается системой однородных линейных уравнений

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{r} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}\cdot\delta\mathbf{r} = 0.$$

Условие идеальности связей (условие однозначной определимости реакции $\mathbf{N}$) состоит в том, чтобы было выполнено $\mathbf{N}\cdot\delta\mathbf{r} = 0$ для любого виртуального перемещения, что означает равенство нулю составляющей $\mathbf{N}_\tau$.

Теорема 3.8.4. *Пусть на материальную точку действуют две независимые идеальные дифференциальные связи*

$$\Phi_1(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0, \quad \Phi_2(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = 0.$$

Тогда изменение кинетической энергии точки выражается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v},$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты разложения вектора реакции связей:

$$\mathbf{N} = \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}} + \lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}.$$

Доказательство. С учетом условия идеальности связей уравнения движения материальной точки можно представить в виде

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}} + \lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}}.$$

Осталось умножить это равенство на $\mathbf{v}$ и преобразовать стандартным образом получившуюся левую часть.□

Следствие 3.8.4. (Интеграл энергии). *Если две независимые идеальные связи таковы, что действительное перемещение материальной точки в любой момент времени принадлежит множеству виртуальных, а сила, действующая на точку, потенциальна с силовой функцией $U = U(\mathbf{r})$, то имеет место интеграл энергии*

$$T = U + h.$$

Доказательство. Действительное перемещение принадлежит множеству виртуальных в любой момент времени тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}\cdot(\partial\Phi_1/\partial\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\partial\Phi_2/\partial\mathbf{v}) = 0$. Кроме того, $\mathbf{F} = \partial U/\partial\mathbf{r}$.□

Рассмотрим подробнее часто встречающиеся случаи.

1. Заданы две линейные по скоростям дифференциальные связи

$$\Phi_1 = \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{v} + B_1 = 0,$$

$$\Phi_2 = \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{v} + B_2 = 0, \quad \mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2 \neq 0, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{v}} = \mathbf{A}_1, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{v}} = \mathbf{A}_2.$$

Каждое уравнение выделяет в пространстве скоростей плоскость, содержащую конец вектора допустимой скорости. Обозначим эти плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ соответственно. Множество допустимых скоростей есть прямая, служащая пересечением плоскостей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.

Виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$ точки в этом случае следует определить как решение системы уравнений

$$\mathbf{A}_1\cdot\delta\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{A}_2\cdot\delta\mathbf{r} = 0.$$

Таким образом, множество виртуальных перемещений состоит из всех векторов, перпендикулярных как вектору $\mathbf{A}_1$, так и вектору $\mathbf{A}_2$. Это множество можно описать формулой

$$\delta\mathbf{r} = \beta\,\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2,$$

где β — скалярный коэффициент.

Пусть заданные дифференциальные связи идеальны (см. определение 3.8.3). Поскольку β — произвольный коэффициент, будем иметь

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2) = 0.$$

Такое равенство означает компланарность векторов $\mathbf{N}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$. Поэтому суммарную реакцию идеальных связей следует искать в виде

$$\mathbf{N} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2.$$

По смыслу первое слагаемое правой части можно рассматривать как реакцию первой связи, а второе слагаемое — второй:

$$\mathbf{N}_1 = \lambda_1\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{N}_2 = \lambda_2\mathbf{A}_2.$$

Теорема 3.8.5. *Пусть на материальную точку действуют две независимые идеальные дифференциальные связи*

$$\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{v} + B_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{v} + B_2 = 0.$$

Тогда изменение кинетической энергии точки выражается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} - \lambda_1B_1 - \lambda_2B_2,$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты разложения вектора реакции связей по векторам $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{N} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3.8.4 и учтем, что в соответствии с уравнениями связей $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{v} = -B_1$, $\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{v} = -B_2$.□

Следствие 3.8.5. (Интеграл энергии). *Если две независимые идеальные линейные дифференциальные связи однородны: $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ (действительное перемещение материальной точки в любой*

момент времени принадлежит множеству виртуальных), а сила, действующая на точку, потенциальна с силовой функцией $U = U(\mathbf{r})$, то имеет место интеграл энергии

$$T = U + h.$$

Доказательство получается с помощью следствия 3.8.4.□

2. Заданы две геометрические связи:

$$f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad f_2(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Они накладывают ограничения на скорость точки:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v} + B_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v} + B_2 = 0,$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}}; \quad B_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t}.$$

Векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ направлены по нормалям к соответствующим поверхностям, когда время t рассматривается как фиксированный параметр. Действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных при $B_1 = B_2 = 0$. Для геометрических связей это означает, что левая часть их уравнений не зависит явно от времени. Имеем тогда две неподвижные поверхности в пространстве, пересечение которых дает траекторию материальной точки, и требуется определить лишь закон ее движения вдоль траектории.

Следствие 3.8.5 об интеграле энергии для данного случая можно переформулировать следующим образом.

Следствие 3.8.6. *Пусть уравнения поверхностей, в пересечении которых лежит траектория материальной точки, не зависят явно от времени, а активная сила потенциальна. Тогда имеет место интеграл энергии.*

3. Геометрическая связь задана с помощью параметра:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t),$$

где q — скалярный параметр, определяющий положение точки на связи, t — время. Такая связь накладывает ограничение на скорость точки:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Исключив параметр $\dot{q}$, можно получить уравнение связи в стандартной форме. Действительно, векторно умножив дифференциальную связь на $\partial \mathbf{r}/\partial q$, получим

$$\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = 0.$$

Введем кососимметричную матрицу, соответствующую векторному произведению:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial r_3}{\partial q} & -\dfrac{\partial r_2}{\partial q} \\ -\dfrac{\partial r_3}{\partial q} & 0 & \dfrac{\partial r_1}{\partial q} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial q} & -\dfrac{\partial r_1}{\partial q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Она вырожденная, в чем легко убедиться, умножив ее первую строку на $\partial r_1/\partial q$, вторую — на $\partial r_2/\partial q$, третью — на $\partial r_3/\partial q$ и результаты сложив. Следовательно, векторное уравнение

$$D\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) = 0$$

эквивалентно двум скалярным уравнениям, линейным относительно компонент вектора скорости. Согласно определению (см. стр. 205) виртуальное перемещение удовлетворяет уравнению

$$D\mathbf{v} = \delta\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = 0,$$

решением которого служит вектор

$$\delta\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\delta q.$$

Здесь δq — произвольный параметр. Как и следовало ожидать, виртуальное перемещение происходит вдоль направления касательной к связи при фиксированном времени. Условие идеальности связи

$$\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

означает, что векторы $\mathbf{N}$ и $\partial \mathbf{r}/\partial q$ взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = 0.$$

Уравнение движения материальной точки с учетом воздействия на нее связи следует записать в виде

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}.$$

Когда связь рассматриваемого типа идеальная, то реакция связи полностью исключается:

$$m\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}.$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q},$$

полученное уравнение (см. доказательство теоремы 3.6.1) приводится к виду уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}.$$

Таким образом, имеем одно дифференциальное уравнение второго порядка, позволяющее установить закон движения точки по связи под действием активной силы $\mathbf{F}$. Умножив это уравнение на $\dot{q}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\ddot{q} - \frac{\partial T}{\partial q}\dot{q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - T\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Это уравнение выражает закон изменения кинетической энергии. Член $\mathbf{F} \cdot \partial \mathbf{r}/\partial t$ учитывает мощность активной силы, возникающую из-за того, что связь зависит не только от q, но и от t. Если сила, действующая на точку, потенциальна с силовой функцией $U(\mathbf{r})$, то полученное уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - T\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Следствие 3.8.7. *Пусть сумма $T + U$ не зависит явно от времени:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(T + U) = 0.$$

Тогда справедлив **обобщенный интеграл энергии Якоби**

$$\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - T = U + h.$$

Если связь от времени явно не зависит, то $\dot{q}(\partial T/\partial \dot{q}) = 2T$, и этот интеграл переходит в обычный интеграл энергии.

Отсутствие явной зависимости суммы $T + U$ от времени служит достаточным условием существования обобщенного интеграла энергии не только для случаев, рассмотренных выше, но и в гораздо более общем случае (см: следствие 8.4.3).

§ 3.9. Одномерные осцилляторы

Изучим свойства решений часто встречающихся на практике типов дифференциальных уравнений движения. Они будут иметь приложение как к движению одной материальной точки, так и к движению систем материальных точек, подверженных связям.

Гармоническим осциллятором называется механическая система, движение которой полностью описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где x — координата, а ω — положительная постоянная, называемая *циклической частотой*.

Пример 3.9.1. Ареометр — это цилиндрический сосуд с делениями, по глубине погружения которого в жидкость можно судить о ее плотности. Пусть z_0 — уровень равновесного положения, P — вес, S — площадь поперечного сечения ареометра, ρ — плотность жидкости. В положении равновесия вес ареометра уравновешен силой Архимеда: $P = z_0 S\rho g$. Если ареометр имеет меньший уровень погружения $z = z_0 - x$, то архимедова сила станет меньше веса. Без учета сил трения прибора о жидкость проекция уравнения второго закона Ньютона на вертикальное направление примет вид

$$m\ddot{x} = -P + (z_0 - x)S\rho g,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{S\rho g}{m}x = 0.$$

Тем самым ареометр представляет собой гармонический осциллятор с циклической частотой $\omega = \sqrt{S\rho g/m}$.◇

Пример 3.9.2. Пусть однородная ровная доска находится под действием силы тяжести и лежит горизонтально на двух роликах, быстро вращающихся так, что силы сухого трения, возникающие в точках контакта доски с роликами, направлены навстречу друг другу. В положении, когда центр тяжести доски расположен точно посередине между роликами, силы трения взаимно уравновешены. Половину расстояния между роликами обозначим l. Сдвинем доску на расстояние x от первого ролика ко второму. Тогда сила давления N_1 со стороны доски на первый ролик и сила давления N_2 со стороны доски на второй ролик

уравновешивают вес доски и связаны друг с другом правилом рычага первого рода

$$N_1(l + x) = N_2(l - x), \quad N_1 + N_2 = P,$$

или $N_1 - N_2 = -xP/l$. По условию задачи имеем выражения для сил трения: $F_1 = kN_1$, $F_2 = kN_2$, где k — коэффициент трения скольжения роликов о доску. Уравнение движения доски принимает вид

$$m\ddot{x} = k(N_1 - N_2) = -\frac{xkP}{l}.$$

Следовательно, рассматриваемая механическая система есть гармонический осциллятор

$$\ddot{x} + \frac{gk}{l}x = 0$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{gk/l}$.◇

Пример 3.9.3. Рассмотрим электрический колебательный контур, состоящий из конденсатора емкости C и катушки индуктивности L. Пусть q — заряд на конденсаторе, I — ток в контуре. При изменении тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$u_c = -L\frac{dI}{dt}.$$

Разность потенциалов на пластинах конденсатора есть $u = q/C$. Следовательно,

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C}.$$

По определению тока $I = dq/dt$. Колебания заряда на пластинах конденсатора описываются уравнением гармонического осциллятора

$$\ddot{q} + (CL)^{-1}q = 0$$

с циклической частотой $\omega = \sqrt{(CL)^{-1}}$.◇

Видим, что весьма разнородные физические явления подчиняются дифференциальному уравнению одного и того же типа и в этом смысле оказываются подобными. Каждый раз, когда имеется такое подобие, возникает принципиальная возможность моделировать явления одной физической природы явлениями другой природы, по той или иной причине более удобными для экспериментатора. Гармонический осциллятор — это система с одной степенью свободы, заданной координатой x. Фазовое пространство для него есть фазовая плоскость $(x, \dot{x})$. Общее решение уравнения гармонического осциллятора выражается равенствами

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t,$$
$$\dot{x} = \omega(-c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t),$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям.

Пусть в момент времени $t = 0$ заданы $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Тогда, очевидно,

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \dot{x}_0/\omega.$$

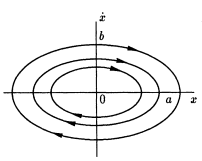
Уравнение гармонического осциллятора допускает интеграл энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = h,$$

где $h = (\dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2)/2$ — постоянная энергии. Из интеграла энергии следует, что фазовая кривая представляет собой эллипс, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{2h}/\omega$, $b = \sqrt{2h}$ — полуоси. Фазовая точка движется по эллипсу в направлении часовой стрелки (рис. 3.9.1). Пусть посто-



В зависимости от различных начальных условий имеем семейство концентрических эллипсов, отличающихся друг от друга только одним параметром — постоянной энергии. Начало координат (положение равновесия гармонического осциллятора) в соответствии с общепринятой классификацией особых точек представляет собой *центр*.

Рис. 3.9.1. Фазовый портрет гармонического осциллятора

янная энергии фиксирована. Тогда увеличение частоты ω влечет уменьшение полуоси a, из-за чего фазовый эллипс выглядит все более вытянутым вдоль оси ординат.

Фазовый поток выражается матрицей

$$G^t = \begin{pmatrix} \cos\omega t, & \omega^{-1}\sin\omega t \\ -\omega \sin\omega t, & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Общее решение уравнения гармонического осциллятора можно переписать в виде

$$x = a\cos(\omega t + \alpha),$$

где

$$a = \frac{1}{\omega}\sqrt{\dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2} = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Осциллятор совершает *гармонические колебания*. Коэффициент a называется амплитудой колебаний, а аргумент косинуса — фазой колебаний, α есть начальное значение фазы, зависящее от выбора начала отсчета времени. Время τ одного колебания (период колебаний) выражается формулой

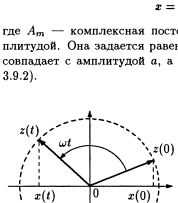
$$\tau = 2\pi/\omega = 1/\nu,$$

где ν — число колебаний за 1 с. Частота колебаний ν измеряется в "герцах": $\nu = 1\text{гц}$ — это частота, при которой за одну секунду совершается одно колебание. Энергия $h = a^2\omega^2/2$ гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды.

Зависимость от времени координаты x гармонического осциллятора часто бывает удобно представить в виде действительной (вещественной) части комплексной функции

$$x = Re\left(A_m e^{i\dot{t}}\right),$$

где A_m — комплексная постоянная, называемая комплексной амплитудой. Она задается равенством $A_m = ae^{i\alpha}$, так что модуль A_m совпадает с амплитудой a, а аргумент — с начальной фазой (рис. 3.9.2).



Комплексный вектор $z(t)$ имеет модуль, равный амплитуде a, и в начальный момент времени $z(0) = A_m$. Если из этого положения вектор z, сохраняя его модуль, вращать против хода часовой стрелки с угловой скоростью ω, то его проекция на действительную ось дает в любой момент времени значение действительной координаты x, соответствующее гармоническому колебанию.

Рис. 3.9.2. Комплексная плоскость гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор представляет собой идеализированную механическую систему, в которой не учитывается трение. Обычно на систему действуют *диссипативные силы*, рассеивающие энергию движения. Ниже иллюстрируется изменение свойств системы из-за добавления такого рода сил.

Осциллятор с сухим трением описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -f \operatorname{sign}\dot{x},$$

где f — постоянная, характеризующая абсолютную величину силы трения, функция $\operatorname{sign}\dot{x}$ выделяет знак скорости $\dot{x}$.

Пример 3.9.4. Рассмотрим движение груза, лежащего на шероховатой горизонтальной плоскости и прикрепленного к вертикальной стене с помощью горизонтальной пружины. Если груз оттянуть от стены на достаточно большое (см. ниже) расстояние, то под действием упругости пружины он будет стремиться к исходному положению и возникнут колебания груза в окрестности положения, соответствующего недеформированному состоянию пружины (положение равновесия). Пусть x — отклонение груза от положения, в котором пружина недеформирована. На груз действуют две горизонтальные силы: сила $F_n = -cx$, развиваемая пружиной, где c — жесткость пружины, и сила трения скольжения $F_{тр} = -kN \operatorname{sign}\dot{x}$. Нормальное давление N на горизонтальную плоскость равно весу груза, k — коэффициент трения. Уравнение движения груза принимает вид

$$m\ddot{x} = -cx - kmg \operatorname{sign}\dot{x},$$

что совпадает с изучаемым уравнением при $\omega^2 = c/m$, $f = kg$.◇

Перейдем к анализу общих свойств движения осциллятора с сухим трением. Для этого, в зависимости от знака скорости $\dot{x}$, выделим два случая.

Случай 1: $\dot{x} > 0$. Уравнение движения осциллятора запишется следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -f.$$

Оно имеет первый интеграл типа интеграла энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + fx = h^+,$$

где h^+ — постоянная вдоль отдельной фазовой траектории, расположенной в верхней фазовой полуплоскости (рис. 3.9.3). С помощью тождественных преобразований приведем этот интеграл к виду

$$\frac{\dot{x}^2}{2h'} + \frac{\omega^2(x + f/\omega^2)^2}{2h'} = 1, \quad h' = h^+ + \frac{f^2}{2\omega^2}.$$

Полученное уравнение задает на фазовой полуплоскости $\dot{x} > 0$ семейство (по h') половин эллипсов с центром в точке O^+, имеющей абсциссу $-f/\omega^2$.

Случай 2: $\dot{x} < 0$. Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f.$$

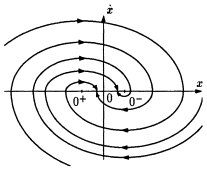
Для него существует первый интеграл

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} - fx = h^-,$$

где h^- — постоянная для фазовых траекторий, расположенных в нижней фазовой полуплоскости ($\dot{x} < 0$). Фазовые траектории подчиняются уравнению

$$\frac{\dot{x}^2}{2h''} + \frac{\omega^2(x - f/\omega^2)^2}{2h''} = 1, \quad h'' = h^- + \frac{f^2}{2\omega^2}.$$

Они образуют семейство (по h'') половин эллипсов, расположенных на фазовой полуплоскости $\dot{x} < 0$, и их центр смещен в точку O^-, имеющую абсциссу f/ω^2. Полная фазовая траектория получается сопряжением половины эллипса одного семейства с половиной эллипса другого семейства в момент прохождения фазовой точки через ось абсцисс. В такие моменты особенно наглядно видно уменьшение размаха (амплитуды) колебаний.



Полуэллипсы, изображающие фазовые траектории в верхней фазовой полуплоскости осциллятора с сухим трением, переходят в полуэллипсы, изображающие фазовые траектории в нижней фазовой полуплоскости. Из-за смещения центров эллипсов происходит уменьшение амплитуды колебаний осциллятора.

Рис. 3.9.3. Осциллятор с сухим трением

Отрезок $[O^+, O^-]$ — особый. Он называется зоной застоя осциллятора. В этот отрезок попадают фазовые точки, движущиеся как по верхним, так и по нижним полуэллипсам. Тем самым все его точки суть положения равновесия. Фазовая точка, попав в процессе движения в некоторую точку отрезка $[O^+, O^-]$, навсегда в ней останется (рис. 3.9.3).

Строго говоря, такой вывод противоречив. Непосредственно из уравнения движения следует, что постоянное значение координаты x может быть его решением, только если $x \equiv 0$. Вместе с тем приведенные выше рассуждения показывают, что фазовая точка не может покинуть отрезок $[O^+, O^-]$, так как для него сила упругости меньше по модулю силы трения скольжения.

Указанное противоречие можно устранить, если ввести в модель осциллятора силу трения покоя. Эта сила трения должна быть в точности такой, чтобы для точек отрезка $[O^+, O^-]$ обеспечивалось ускорение, равное нулю.

Закон движения осциллятора с сухим трением имеет следующий вид:

$$x = \begin{cases} \left(x_0^+ + \dfrac{f}{\omega^2}\right)\cos\omega(t-t^+) + \dfrac{\dot{x}_0^+}{\omega}\sin\omega(t-t^+) - \dfrac{f}{\omega^2} & \text{при } \dot{x} > 0, \\ \left(x_0^- - \dfrac{f}{\omega^2}\right)\cos\omega(t-t^-) + \dfrac{\dot{x}_0^-}{\omega}\sin\omega(t-t^-) + \dfrac{f}{\omega^2} & \text{при } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

После дифференцирования по времени получим скорость осциллятора, необходимую для более подробного анализа движения фазовой точки:

$$\dot{x} = \begin{cases} -\omega\left(x_0^+ + \dfrac{f}{\omega^2}\right)\sin\omega(t-t^+) + \dot{x}_0^+\cos\omega(t-t^+) & \text{при } \dot{x} > 0, \\ -\omega\left(x_0^- - \dfrac{f}{\omega^2}\right)\sin\omega(t-t^-) + \dot{x}_0^-\cos\omega(t-t^-) & \text{при } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Постоянные $x_0^+, x_0^-, \dot{x}_0^+, \dot{x}_0^-, t^+, t^-$ вычисляются в соответствии с начальными условиями и условиями сопряжения при прохождении фазовой кривой через ось абсцисс. Пусть, например, при $t = 0$ заданы значения $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, причем $x_0 < -f/\omega^2$. В этом случае (см. рис. 3.9.3) фазовая точка сначала будет двигаться вдоль полуэллипса, расположенного в верхней полуплоскости (при $x_0^+ = x_0$, $\dot{x}_0^+ = 0$, $t^+ = 0$), вплоть до момента $\tau = \pi/\omega$, когда фазовая траектория пересечется с осью Ox в точке $x_1 = -(x_0 + 2f/\omega^2)$. От точки $(x_1, 0)$ движение будет происходить вдоль полуэллипса, расположенного в нижней полуплоскости, для которого $x_0^- = x_1$, $\dot{x}_0^- = 0$, $t^- = \pi/\omega$. Время этого движения до нового пересечения оси Ox в точке $x_2 = x_0 + 4f/\omega^2$ есть $(t - t^-) = \tau = \pi/\omega$. От точки $(x_2, 0)$ фазовая кривая составит верхний полуэллипс с $x_0^+ = x_2$, $\dot{x}_0^+ = 0$, и т. д. Абсциссы точек пересечения фазовой кривой с осью Ox можно записать с помощью формулы

$$x_n = (-1)^n\left(x_0 + \frac{2nf}{\omega^2}\right), \quad \dot{x}_0 = 0, \quad x_0 < -\frac{f}{\omega^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В случае $x_0 > f/\omega^2$ с помощью аналогичных рассуждений получим

$$x_n = (-1)^n\left(x_0 - \frac{2nf}{\omega^2}\right), \quad \dot{x}_0 = 0, \quad x_0 > \frac{f}{\omega^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Эти формулы можно объединить:

$$x_n = (-1)^n\left(x_0 - \operatorname{sign}(x_0)\frac{2nf}{\omega^2}\right), \quad \dot{x}_0 = 0, \quad |x_0| > \frac{f}{\omega^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Число колебаний определяется как минимальное натуральное значение n, удовлетворяющее условию

$$-\frac{f}{\omega^2} \le |x_0| - \frac{2nf}{\omega^2} \le \frac{f}{\omega^2}$$

или

$$-\frac{1}{2} + \frac{|x_0|\omega^2}{2f} \le n \le \frac{1}{2} + \frac{|x_0|\omega^2}{2f}.$$

Если заданные начальные условия отличаются от только что рассмотренных, то для решения задачи о числе колебаний осциллятора с сухим трением достаточно выполнить один дополнительный шаг, найдя точку первого пересечения фазовой траектории с осью абсцисс. Далее ход решения задачи можно оставить таким, какой был приведен выше.

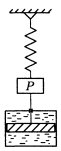
Осциллятор с вязким трением описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Пример 3.9.5. Рассмотрим груз, подвешенный на пружине к некоторому основанию. К грузу с помощью штока прикреплен поршень, перемещающийся в цилиндрическом сосуде, наполненном жидким маслом (демпфер) (рис. 3.9.4). В положении равновесия вес груза с поршнем за вычетом архимедовой силы равен силе, развиваемой пружиной: $P = c(l - l_0)$, где c — жесткость, l_0 — длина нерастянутой пружины, l — длина пружины в положении равновесия. Если пружину укоротить на величину x, то сила, развиваемая пружиной, будет $F = c(l - x - l_0)$. Груз под действием силы тяжести начнет опускаться. Масло из нижней части сосуда, просачиваясь между краями поршня и стенками цилиндра в верхнюю часть, окажет поршню сопротивление силой $F_т = -\alpha\dot{x}$. Уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{x} = -P + c(l - l_0 - x) - \alpha\dot{x}, \quad \alpha > 0.$$

Легко убедиться в том, что это есть уравнение рассматриваемого типа. ◇



В масляном демпфере движение поршня вызывает просачивание масла с одной стороны поршня на другую. Возникающая при этом сила сопротивления прямо пропорциональна скорости движения поршня и называется силой вязкого трения. За счет вязкого трения происходит рассеивание энергии и остановка поршня.

Рис. 3.9.4. Масляный демпфер

Уравнение осциллятора с вязким трением есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение следует искать в виде $x = \exp(\lambda t)$, где λ — скалярный коэффициент, t — время. Подставляя экспоненту вместо x в уравнение осциллятора, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k\lambda + \omega^2 = 0,$$

два корня которого даются формулами

$$\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

В зависимости от знака подкоренного выражения рассмотрим следующие варианты.

Вариант 1: $k^2 - 4\omega^2 < 0$. Обозначим $\Omega = \sqrt{4\omega^2 - k^2}/2$. Решение уравнения осциллятора принимает вид

$$x = e^{-kt/2}(c_1\cos\Omega t + c_2\sin\Omega t).$$

Постоянные c_1 и c_2 определены начальными условиями:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 k/2}{\Omega},$$

где x_0, $\dot{x}_0$ — значения x и $\dot{x}$ соответственно при $t = 0$.

Чтобы получить фазовый портрет, введем переменную

$$\xi = x\exp\left(\frac{kt}{2}\right).$$

Тогда

$$\xi = c_1\cos\Omega t + c_2\sin\Omega t,$$

$$\dot{\xi} = -c_1\Omega\sin\Omega t + c_2\Omega\cos\Omega t.$$

На плоскости $(\xi, \dot{\xi})$ образ фазовой точки описывает эллипс с уравнением

$$\dot{\xi}^2 + \Omega^2\xi^2 = a^2,$$

где $a^2 = (c_1^2 + c_2^2)\Omega^2$. Движение образа фазовой точки — периодическое с периодом $\tau = 2\pi/\Omega$. Через период τ значения ξ, $\dot{\xi}$ в точности повторяются.

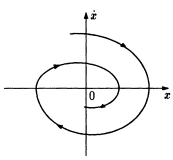
Переход от переменных ξ, $\dot{\xi}$ к переменным x, $\dot{x}$ осуществляется по формулам

$$x = \xi\exp\left(-\frac{kt}{2}\right), \quad \dot{x} = \left(\dot{\xi} - \frac{k}{2}\xi\right)\exp\left(-\frac{kt}{2}\right).$$

Пусть $t = t_n = n\tau$, где n — натуральное число. Для таких t координаты ξ, $\dot{\xi}$ не меняются. Но меняются x, $\dot{x}$:

$$x = \xi\exp\left(-\frac{k\tau n}{2}\right), \quad \dot{x} = \left(\dot{\xi} - \frac{k}{2}\xi\right)\exp\left(-\frac{k\tau n}{2}\right).$$

С ростом n фазовая точка стремится к началу координат вдоль фиксированного луча на фазовой плоскости. Фазовые кривые — спирали, закручивающиеся вокруг точки 0. Имеем особую точку типа "*фокус*" (рис. 3.9.5). Движение асимптотически успокаивается около положения равновесия. Это — точка 0. Точка 0 из любой не совпадающей с ней точки фазовой плоскости не достигается ни за какой конечный промежуток времени.



При $k^2 - 4\omega^2 < 0$ фазовая точка движется по спирали, закручивающейся около положения равновесия по ходу часовой стрелки. Осциллятор совершает колебания с уменьшающейся амплитудой. Однако положение равновесия не достигается ни за какое конечное время.

Рис. 3.9.5. Затухающие колебания

Полученный тип движения можно интерпретировать как колебания с убывающей амплитудой. Постоянная $d = \exp(k/2)$ называется *декрементом затухания*. Она показывает, во сколько раз амплитуда уменьшается за 1 с.

Вариант 2: $k^2 = 4\omega^2$. Это — случай кратных корней характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -k/2$. Общее решение уравнения осциллятора с вязким трением имеет вид

$$x = (c_1 + c_2 t)\exp\left(-\frac{kt}{2}\right), \quad \dot{x} = -\frac{k}{2}x + c_2\exp\left(-\frac{kt}{2}\right),$$

где постоянные c_1 и c_2 выражаются через начальные условия следующим образом:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \dot{x}_0 + \frac{k}{2}x_0.$$

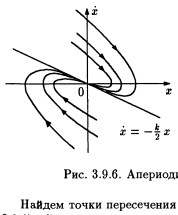
Из зависимости $\dot{x}(t)$ следует, что все фазовые кривые по касательной приближаются при $t \to +\infty$ к прямой

$$\dot{x} = -\frac{k}{2}x.$$

Вычислим

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{-k\dot{x} - k^2x/4}{\dot{x}} = -k - \frac{k^2}{4}\frac{x}{\dot{x}}.$$

Следовательно, все фазовые траектории пересекают ось $x = 0$ под одинаковым углом наклона, тангенс которого равен $-k$.



При $k^2 - 4\omega^2 = 0$ колебаний не происходит. Фазовая точка стремится попасть в положение равновесия, приближаясь к прямой $\dot{x} = -kx/2$. Эта прямая служит асимптотой для всех фазовых траекторий. Фазовые траектории приближаются к началу координат асимптотически, достигая его лишь при $t \to \infty$.

Рис. 3.9.6. Апериодическое движение: $k^2 = 4\omega^2$

Найдем точки пересечения фазовых кривых с осью абсцисс (рис. 3.9.6). Сначала определим момент времени $\tilde{t}$, при котором достигается равенство $\dot{x} = 0$:

$$\tilde{t} = 2\dot{x}_0/[k(\dot{x}_0 + kx_0/2)].$$

Видим, что если $\dot{x}_0 > 0$, $\dot{x}_0 + kx_0/2 > 0$, то существует единственный положительный момент $\tilde{t}$ пересечения фазовой кривой с осью Ox (прямое направление движения вдоль фазовой кривой). При $\dot{x}_0 < 0$, $\dot{x}_0 + kx_0/2 > 0$ получим $\tilde{t} < 0$, что соответствует обратному движению вдоль фазовой кривой.

Аналогично, если $\dot{x}_0 < 0$, $\dot{x}_0 + kx_0/2 < 0$, то $\tilde{t} > 0$, а если $\dot{x}_0 > 0$, $\dot{x}_0 + kx_0/2 < 0$, то $\tilde{t} < 0$. Сопоставив выражения для x и $\tilde{t}$, убедимся, что в момент $\tilde{t}$ справедливо равенство

$$x = \frac{2}{k}\left(\dot{x}_0 + \frac{k}{2}x_0\right)\exp\left(-\frac{k\tilde{t}}{2}\right).$$

Значит, если $\dot{x}_0 + kx_0/2 > 0$, то равенство $\dot{x} = 0$ достигается при положительном значении x, а если $\dot{x}_0 + kx_0/2 < 0$ — то при отрицательном.

Суммируя сказанное, получаем фазовый портрет системы в рассматриваемом случае (рис. 3.9.6). Начало координат представляет собой особую точку типа "*вырожденный узел*".

Вариант 3: $k^2 > 4\omega^2$. Тогда корни характеристического уравнения действительны и различны

$$\lambda_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2} < 0, \quad \lambda_1 < \lambda_2.$$

Общее решение уравнения осциллятора дается формулами

$$x = c_1\exp(\lambda_1 t) + c_2\exp(\lambda_2 t), \quad \dot{x} = c_1\lambda_1\exp(\lambda_1 t) + c_2\lambda_2\exp(\lambda_2 t).$$

Используя начальные условия, получим

$$c_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Исключив время из общего решения, найдем уравнение фазовой траектории

$$\left[\frac{\lambda_1 x - \dot{x}}{c_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\right]^{\lambda_1} = \left[\frac{\lambda_2 x - \dot{x}}{c_1(\lambda_2 - \lambda_1)}\right]^{\lambda_2}.$$

Чтобы построить фазовый портрет, сделаем замену переменных:

$$\xi = \frac{\lambda_1 x - \dot{x}}{c_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \eta = \frac{\lambda_2 x - \dot{x}}{c_1(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

В новых переменных фазовая траектория подчиняется степенной зависимости:

$$\eta = \xi^{\varpi}, \quad \varpi = \lambda_1/\lambda_2 > 1,$$

причем во все время движения имеем $\xi > 0$, $\eta > 0$. Образ фазовой точки перемещается вдоль графика степенной зависимости к началу координат (рис. 3.9.7, а). Поэтому (рис. 3.9.7, б) все фазовые кривые

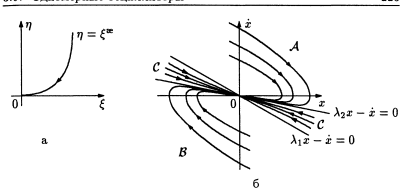


Рис. 3.9.7. Апериодическое движение: $k^2 > 4\omega^2$

стремятся к положению равновесия. Они не могут пересекать ни прямую, соответствующую $\xi = 0$, ни прямую, соответствующую $\eta = 0$, т.е. прямые, определенные уравнениями

$$\lambda_1 x - \dot{x} = 0, \quad \lambda_2 x - \dot{x} = 0.$$

Впадая в начало координат, фазовые кривые касаются прямой $\eta = 0$, т.е.

$$\lambda_2 x - \dot{x} = 0.$$

Если (рис. 3.9.7, б) начальная фазовая точка принадлежит области A, для которой выполнены неравенства

$$\lambda_1 x - \dot{x} < 0, \quad \lambda_2 x - \dot{x} < 0,$$

то существует момент времени $\tilde{t}$ пересечения фазовой кривой с осью абсцисс. Этот момент вычисляется как решение уравнения

$$c_1\lambda_1\exp(\lambda_1\tilde{t}) = -c_2\lambda_2\exp(\lambda_2\tilde{t}), \quad c_1 < 0, \quad c_2 > 0.$$

Отсюда

$$\tilde{t} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ln\left(-\frac{c_1\lambda_1}{c_2\lambda_2}\right).$$

Подставив $t = \tilde{t}$ в функцию $x(t)$, найдем, что фазовая кривая пересекает ось абсцисс в точке с координатой

$$\tilde{x} = c_1\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}\left(-\frac{c_1\lambda_1}{c_2\lambda_2}\right)^{\frac{\varpi}{1-\varpi}} > 0.$$

Аналогично если начальная фазовая точка принадлежит области B (рис. 3.9.7, *б*), для которой выполнены неравенства

$$\lambda_1 x - \dot{x} > 0, \quad \lambda_2 x - \dot{x} > 0,$$

то фазовая кривая пересечет ось абсцисс в точке с координатой $\tilde{x} < 0$.

Легко установить, что если начальная фазовая точка принадлежит области C, для которой справедливо альтернативное выполнение двух систем неравенств

$$\lambda_1 x - \dot{x} < 0, \quad \lambda_2 x - \dot{x} > 0,$$

либо

$$\lambda_1 x - \dot{x} > 0, \quad \lambda_2 x - \dot{x} < 0,$$

то фазовая кривая не имеет точек пересечения с осью абсцисс. Суммируя сказанное, получаем фазовый портрет, изображенный на рис. 3.9.7, б. Движение, соответствующее такому фазовому портрету, называется *апериодическим*. Процесс успокоения асимптотически устойчивый. Вместе с тем ни за какой конечный интервал времени система не в состоянии попасть в начало координат. Имеем особую точку типа "*узел*".

Все рассмотренные выше примеры механических систем объединяет то, что активная сила стремится вернуть систему к положению равновесия. Изучим теперь движение под действием *отталкивающей силы*, описываемое следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0, \quad \omega > 0.$$

Пример 3.9.6. Возьмем механическую систему такую же, как в примере 3.9.2, с тем лишь отличием, что ролики, поддерживающие доску, вращаются в противоположном направлении. При этом силы трения будут направлены от середины доски. Уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} - \frac{kg}{l}x = 0.$$

Для него $\omega^2 = kg/l$.◇

В рассматриваемом случае характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0$$

имеет решение $\lambda = \pm\omega$. Закон движения выражается формулой

$$x = c_1\exp(\omega t) + c_2\exp(-\omega t).$$

Используя гиперболические функции

$$\operatorname{ch}(\omega t) = [\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)]/2, \quad \operatorname{sh}(\omega t) = [\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)]/2,$$

представим закон движения в виде

$$x = x_0\operatorname{ch}(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\operatorname{sh}(\omega t).$$

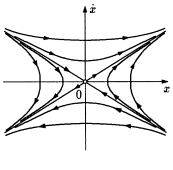
Интеграл энергии определяет уравнение фазовой траектории

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} = h.$$

Изменяя значение постоянной энергии h, получаем семейство гипербол, асимптотически приближающихся к прямым

$$\dot{x} = \pm\omega x.$$

На рис. 3.9.8 изображен фазовый портрет системы. Начало координат — особая точка типа "*седло*". Видим, что фазовая точка, не совпадающая с началом координат и не лежащая на асимптоте $\dot{x} = -\omega x$, покидает любую сколь угодно малую окрестность начала координат, удаляясь в бесконечность. Реальная механическая система, описываемая дифференциальным уравнением рассматриваемого типа, неустойчива и имеет тенденцию к разрушению.



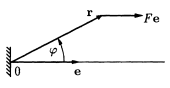
Под действием отталкивающей силы фазовая точка стремится покинуть окрестность положения равновесия, если только она не принадлежит асимптоте с отрицательным наклоном: $\dot{x} = -\omega x$. Точки, принадлежащие указанной асимптоте, стремятся к положению равновесия, однако ни за какое конечное время его не достигают.

Рис. 3.9.8. Неустойчивое движение

Изученные выше характерные особенности простейших законов движения часто встречаются как элементы фазового портрета более сложных движений. Проиллюстрируем это, построив фазовый портрет математического маятника.

Определение 3.9.1. *Математический маятник* — это материальная точка, вынужденная двигаться по дуге неподвижной окружности в поле параллельных сил. Модуль и направление силы предполагаются постоянными. Направление сил параллельно плоскости окружности.

Начало полярной системы координат поместим в центр упомянутой окружности. Тогда радиус-вектор математического маятника имеет постоянный модуль r. Пусть вектор $\mathbf{e}$ задает направление силы: $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$. Положение материальной точки на окружности будем задавать углом φ между радиусом-вектором точки и вектором $\mathbf{e}$ (рис. 3.9.9).



Материальная точка, вынужденная оставаться на окружности постоянного радиуса, совершает в поле параллельных сил движение, аналогичное движению груза на растянутой нити, когда размеры груза малы по сравнению с размерами нити.

Рис. 3.9.9. Математический маятник

Уравнение изменения кинетического момента

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

имеет ненулевую проекцию только на перпендикуляр к плоскости окружности. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ и скорость $\mathbf{v}$ взаимно перпендикулярны, и $v = r\dot\varphi$. После преобразований уравнение изменения кинетического момента для математического маятника примет вид

$$\ddot\varphi + \omega^2\sin\varphi = 0,$$

где $\omega^2 = F/mr$. Это и есть *уравнение движения математического маятника*.

Пример 3.9.7. Груз подвешен на невесомой нити длины l и колеблется под действием силы тяжести около нижнего положения равновесия. Если угол φ измеряет отклонение нити от вертикали, то когда нить натянута и имеет длину, значительно превышающую размеры груза, уравнение движения груза практически совпадает с уравнением математического маятника, в котором $\omega^2 = g/l$ (см. § 6.4).◇

Для малых значений угла φ ($\varphi \ll 1$) можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$. Оказывается, что при малых углах движение математического маятника приближенно описывается уравнением гармонического осциллятора. Если $\varphi = \pi + x$, где $x \ll 1$, то $\sin\varphi \approx -x$, и для переменной x

получаем приближенное уравнение, соответствующее движению под действием отталкивающей силы.

Уравнение движения маятника допускает интеграл энергии

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} = \omega^2\cos\varphi + h = \Phi(\varphi, h),$$

который при конкретном значении h следует рассматривать как уравнение фазовой кривой. Область допустимых значений угла φ выделяется неравенством

$$\Phi(\varphi, h) = \omega^2\cos\varphi + h \ge 0.$$

Рассмотрим эволюцию фазовых кривых при изменении постоянной энергии h в пределах $-\omega^2 \le h < +\infty$. Выделим следующие случаи.

Случай 1: $h = -\omega^2$. Допустимыми будут значения

$$\varphi = 2k\pi, \quad \dot\varphi = 0, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

На фазовом портрете (рис. 3.9.10) им соответствуют изолированные положения равновесия, которые в реальном физическом пространстве совпадают, так как получаются друг из друга целым числом полных оборотов по углу φ.

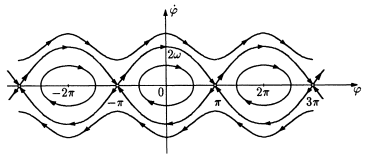


Рис. 3.9.10. Фазовый портрет математического маятника

Случай 2: $-\omega^2 < h < \omega^2$. Допустимые значения φ выражаются неравенством

$$2k\pi - \arccos(-h/\omega^2) \le \varphi \le \arccos(-h/\omega^2) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm1, \dots$$

Для конкретного значения k выделяется связная область положительных значений функции $\Phi(\varphi, h)$. В каждой такой области имеем семейство симметричных относительно оси абсцисс замкнутых фазовых кривых, заданных соотношением

$$\dot\varphi = \pm\sqrt{2\Phi(\varphi, h)}.$$

Ветвь, соответствующая знаку "+", непрерывно (с вертикальной касательной) сопрягается с ветвью, соответствующей знаку "−". Такие фазовые траектории изображают периодическое движение системы. В течение периода τ фазовая точка пройдет всю фазовую кривую по ходу часовой стрелки и вернется в исходное положение. Из симметрии фазовой кривой заключаем, что за четверть периода абсцисса фазовой точки смещается от положения равновесия на величину размаха колебаний

$$A_m = \arccos(-h/\omega^2).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{\tau}{4} = \int_0^{A_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\Phi(\varphi,h)}} = \int_0^{A_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\omega^2\cos\varphi + h)}} = \frac{1}{\omega}\int_0^{A_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos A_m)}}.$$

Сделав замену $\sin(\varphi/2) = u\sin(A_m/2)$ и обозначив $\varepsilon = \sin(A_m/2)$, выражение для периода колебаний можно привести к виду

$$\tau = \frac{4}{\omega}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-\varepsilon^2u^2)(1-u^2)}}.$$

Интеграл в правой части называется эллиптическим интегралом второго рода. Значение его можно получить с помощью таблиц, но можно с этой же целью применить разложение подынтегрального выражения в ряд по степеням параметра ε. Тогда формула для периода колебаний примет вид

$$\tau = \tau_0 + \tau_2\varepsilon^2 + \tau_4\varepsilon^4 + \dots$$

В разложении будут присутствовать члены только с четными степенями относительно ε.

Видим, что период колебаний математического маятника зависит от начальной амплитуды (размаха колебаний A_m). Вместе с тем если начальная амплитуда A_m мала настолько, что членами второго и более высокого порядка по ε можно пренебречь, то период

$$\tau \approx \tau_0 = \frac{4}{\omega}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

от начальной амплитуды не зависит и совпадает, как этого и следовало ожидать, с периодом колебаний гармонического осциллятора, для которого ω — циклическая частота.

Для следующего приближения по ε получим

$$\tau_2 = \frac{2}{\omega}\int_0^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{\omega}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2}{\omega}\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du =$$
$$= \frac{2}{\omega}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2}{\omega}\int_0^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Поэтому

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2\omega},$$

а приближенная формула для периода колебаний принимает вид

$$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right) = \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{A_m}{2}\right)\right].$$

Случай 3: $h = \omega^2$. Имеем особый случай:

$$\Phi(\varphi, h) = \omega^2(1+\cos\varphi) = 2\omega^2\cos^2(\varphi/2).$$

Фазовая кривая определена зависимостью

$$\dot\varphi = \pm2\omega|\cos(\varphi/2)|.$$

Эта кривая подходит к оси абсцисс (рис. 3.9.10) в точках

$$\varphi = \pi + 2\pi k, \quad \dot\varphi = 0, \quad k = 0, \pm1, \dots$$

Они — тоже положения равновесия математического маятника. Касательная к фазовой кривой в этих точках не вертикальна, что допустимо, так как в них

$$\ddot\varphi = -\omega^2\sin(\pi + 2\pi k) = 0.$$

Область изменения угла φ в данном случае неограничена. Выделим в ней отрезки с помощью неравенств

$$2\pi k - \pi \le \varphi \le \pi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \dots$$

Фазовая кривая для конкретного значения k окружает соответствующее устойчивое положение равновесия, расположенное в точках

$$\varphi = 2k\pi, \quad \dot\varphi = 0, \quad k = 0, \pm1, \dots$$

Однако характер движения вдоль нее существенно отличается от изученного в случае 2. Чтобы убедиться в этом, назначим $k = 0$ и в

начальный момент времени поместим фазовую точку на пересечение рассматриваемой фазовой кривой и положительной полуоси ординат:

$$\dot\varphi = 2\omega, \quad \varphi = 0.$$

По аналогии со случаем 2 попытаемся найти время $\tau/4$, за которое фазовая точка достигнет оси абсцисс при значениях

$$\dot\varphi = 0, \quad \varphi = \pi.$$

Учитывая, что в правой части получается несобственный интеграл, запишем расчетную формулу в виде

$$t(x) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{\pi-x}\frac{d\varphi}{\cos(\varphi/2)} = \frac{1}{2\omega}\ln\left[\frac{1+\cos(x/2)}{1-\cos(x/2)}\right],$$

где $t(x)$ — время, за которое фазовая точка приобретает абсциссу, равную $\pi - x$. При $x \to 0$ имеем $t(x) \to \infty$. Это означает, что фазовая точка реально никогда не попадет в положение равновесия $\varphi = \pi$, $\dot\varphi = 0$, а будет бесконечно долго к нему приближаться.

Если в начальный момент фазовая точка точно попала в положение равновесия ($\dot\varphi = 0$, $\varphi = \pi$), то она там останется навсегда, а если ее начальное положение было смещено вдоль фазовой кривой в область отрицательных значений $\dot\varphi$, то фазовая точка уйдет от точки ($\dot\varphi = 0$, $\varphi = \pi$) и будет бесконечно долго приближаться к положению равновесия ($\dot\varphi = 0$, $\varphi = -\pi$).

Случай 4: $h > \omega^2$. Для любых значений φ имеем $\Phi(\varphi, h) > 0$. Каждому значению h соответствуют две фазовые кривые, не пересекающиеся друг с другом и с осью абсцисс. Они определены функциями

$$\dot\varphi = \sqrt{2\Phi(\varphi, h)}, \quad \dot\varphi = -\sqrt{2\Phi(\varphi, h)}$$

и удаляются от оси абсцисс с ростом h. Такие фазовые кривые соответствуют движению, при котором угол φ монотонно увеличивается при положительном значении $\dot\varphi$ и монотонно убывает при отрицательном, угловая скорость ни в одной точке не обращается в нуль. Случай 4 завершает построение фазового портрета математического маятника.

Определение 3.9.2. Фазовые кривые, соответствующие случаю 3, называются *сепаратрисами*.

Сепаратрисы отделяют два принципиально различных типа движения системы в случаях 2 и 4. В окрестности положений равновесия при

$$\dot\varphi = 0, \quad \varphi = \pi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

имеем картину фазовых кривых, характерную для особой точки типа "седло" (неустойчивое равновесие). В окрестности положений равновесия при

$$\dot\varphi = 0, \quad \varphi = 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

имеем характерную картину особой точки типа "центр" (устойчивое положение равновесия).

Фазовый портрет математического маятника повторяет все свои особенности с периодом 2π. В этом смысле достаточно построить фазовый портрет в вертикальной полосе, ограниченной значениями угла φ:

$$-\pi \le \varphi \le \pi.$$

Чтобы получить полную картину движения, эту полосу можно свернуть в вертикальный цилиндр, а ее края склеить. Полученную фигуру называют *фазовым цилиндром*. Он нагляднее, чем фазовая плоскость, отражает периодичность закона движения системы в физическом пространстве.

Определение 3.9.3. *Циклоидальный маятник* — это материальная точка, вынужденная двигаться по дуге неподвижной циклоиды в поле параллельных сил. Циклоидой называется плоская кривая, вычерчиваемая фиксированной точкой окружности, катящейся без проскальзывания по направляющей прямой. Для циклоидального маятника направляющая прямая выбирается перпендикулярно силам, а указанная окружность располагается относительно прямой так, чтобы циклоида была выпукла в сторону действия сил.

Пусть по-прежнему постоянный вектор $\mathbf{e}$ задает направление силы $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$, причем $F = const > 0$. Выберем единичный вектор $\mathbf{e}_1$ вдоль направляющей прямой циклоиды так, что $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}$, а $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}$. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ маятника представим в виде $\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2$. Уравнение циклоиды зададим параметрически:

$$r_1 = l(\varphi + \sin\varphi), \quad r_2 = -l(1+\cos\varphi),$$

где l — постоянный радиус окружности, а φ — параметр (по геометрическому смыслу — угол поворота окружности при ее качении по направляющей). В диапазоне $-\pi \le \varphi \le \pi$ координата r_2 меняется от наименьшего $r_2 = -2l$ при $\varphi = 0$ до наибольшего своего значения $r_2 = 0$ при $\varphi = \pm\pi$. Закон движения задается функцией $\varphi = \varphi(t)$. Циклоиду будем предполагать идеально гладкой. Движение одномерно и происходит под действием потенциальной силы. Исследование закона движения выполним с помощью интеграла энергии. Кинетиче-

ская энергия T и силовая функция U принимают вид

$$T = \frac{m\dot\varphi^2}{2}\left[\left(\frac{dr_1}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{d\varphi}\right)^2\right] = 2m\dot\varphi^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$U = -Fr_2 = Fl(1+\cos\varphi) = 2Fl\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Сделаем замену переменной:

$$q = \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \dot\varphi = 2\dot q\cos^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

взаимно однозначную и не имеющую особенностей при $-\pi < \varphi < \pi$. С ее помощью интеграл энергии $T - U = h$ принимает форму

$$\frac{\dot q^2}{2} + \frac{\omega^2q^2}{2} = h' = \frac{h+2Fl}{16ml^2}, \quad \omega^2 = \frac{F}{4ml},$$

которая совпадает с формой интеграла энергии для гармонического осциллятора (см. § 3.9). Таким образом, переменная q позволяет отождествить движение циклоидального маятника с движением гармонического осциллятора. Из сказанного, в частности, следует, что в отличие от математического маятника период колебаний циклоидального маятника около положения равновесия $\varphi = 0$ в диапазоне $-\pi < \varphi < \pi$ вообще не зависит от амплитуды колебаний.

§ 3.10. Резонансные явления

На движение реальных колебательных систем могут оказывать существенное воздействие различные возмущающие факторы. Исследуем сначала влияние на гармонический осциллятор силы, изменение которой во времени описывается некоторой заданной функцией $f(t)$. Рассмотрим следующее уравнение движения:

$$\ddot x + \omega^2 x = f(t).$$

Закон движения, задаваемый этим дифференциальным уравнением, называется возмущенным по сравнению с законом движения гармонического осциллятора при тех же начальных условиях. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного (правая часть равна нулю) уравнения и некоторого частного решения изучаемого уравнения:

$$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + x_\text{ч}(t).$$

Частное решение $x_\text{ч}(t)$ можно получить посредством квадратур по *методу Лагранжа вариации произвольных постоянных*. Этот метод широко используется в механике для изучения движения возмущенных систем. Воспользуемся им. Представим $x_\text{ч}(t)$ в виде

$$x_\text{ч}(t) = y_1(t)\cos\omega t + y_2(t)\sin\omega t,$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$ — искомые функции. Тем самым структура частного решения совпадает со структурой общего решения однородного уравнения, но произвольные постоянные c_1 и c_2 заменены функциями времени. Дифференцируя, получим

$$\dot x_\text{ч}(t) = \dot y_1\cos\omega t + \dot y_2\sin\omega t + (-y_1\omega\sin\omega t + y_2\omega\cos\omega t).$$

Мы вправе потребовать, чтобы искомые функции y_1, y_2 в любой момент времени удовлетворяли уравнению

$$\dot y_1\cos\omega t + \dot y_2\sin\omega t = 0.$$

Тогда выражение для $\dot x_\text{ч}(t)$ упрощается:

$$\dot x_\text{ч}(t) = \omega(-y_1\sin\omega t + y_2\cos\omega t).$$

Найдем вторую производную:

$$\ddot x_\text{ч}(t) = \omega(-\dot y_1\sin\omega t + \dot y_2\cos\omega t) - \omega^2x_\text{ч}(t).$$

Подставив значения для $x_\text{ч}$ в уравнение движения, получим еще одно уравнение для определения y_1, y_2, которое вместе с указанным выше образует систему

$$\begin{cases} -\dot y_1\sin\omega t + \dot y_2\cos\omega t = f(t)/\omega, \\ \dot y_1\cos\omega t + \dot y_2\sin\omega t = 0. \end{cases}$$

Разрешая ее относительно $\dot y_1$ и $\dot y_2$, найдем

$$\dot y_1 = -\frac{1}{\omega}f(t)\sin\omega t, \quad \dot y_2 = \frac{1}{\omega}f(t)\cos\omega t.$$

Нам требуется только одно решение этих уравнений. В частности, можно взять

$$y_1 = -\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^t f(t)\sin\omega t\,dt + p_1, \quad y_2 = \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^t f(t)\cos\omega t\,dt + p_2,$$

выбрав какие-нибудь значения постоянных p_1 и p_2. Полученные формулы дают возможность при конкретном задании $f(t)$ оценить влияние возмущающей силы на движение системы.

Пусть, например,

$$f(t) = b\cos(\nu t + \beta), \quad \nu > 0.$$

Тогда y_1, y_2 можно представить в виде

$$y_1 = -\frac{b}{2\omega}\int_{t_0}^t\{\sin[(\omega+\nu)t+\beta] + \sin[(\omega-\nu)t-\beta]\}\,dt + p_1,$$

$$y_2 = \frac{b}{2\omega}\int_{t_0}^t\{\cos[(\omega+\nu)t+\beta] + \cos[(\omega-\nu)t-\beta]\}\,dt + p_2.$$

Структура частного решения зависит от значения разности $\omega - \nu$.

Случай 1: $\omega - \nu \ne 0$. Тогда

$$y_1 = \frac{b}{2\omega}\left\{\frac{\cos[(\omega+\nu)t+\beta]}{\omega+\nu} + \frac{\cos[(\omega-\nu)t-\beta]}{\omega-\nu}\right\},$$

$$y_2 = \frac{b}{2\omega}\left\{\frac{\sin[(\omega+\nu)t+\beta]}{\omega+\nu} + \frac{\sin[(\omega-\nu)t-\beta]}{\omega-\nu}\right\}.$$

Подставив этот результат в формулу для частного решения и выполнив преобразования, найдем

$$x_\text{ч}(t) = \frac{b}{\omega^2-\nu^2}\cos(\nu t + \beta).$$

Следовательно, частное решение имеет частоту и фазу вынуждающей силы. Его амплитуда обратно пропорциональна разности $\omega^2 - \nu^2$. Амплитуда неограниченно возрастает, когда $\nu \to \omega$.

Пусть ν мало отличается от ω: $\nu = \omega + \varepsilon$. Общее решение рассматриваемого уравнения можно представить в виде

$$x(t) = Re\{A\exp(i\omega t) + B\exp[i(\omega+\varepsilon)t]\} = Re\{[A + B\exp(i\varepsilon t)]\exp(i\omega t)\},$$

где $A = a\exp(i\alpha)$, $B = b\exp(i\beta)/(\omega^2-\nu^2)$, постоянные a и α зависят от начальных условий (см. стр. 214). Так как ε мало, то закон $x(t)$ можно интерпретировать как колебания с частотой ω и медленно меняющейся амплитудой

$$d = |A + B\exp(i\varepsilon t)|.$$

Представив комплексные числа A и $B\exp(i\varepsilon t)$ векторами на комплексной плоскости и используя теорему косинусов, найдем

$$d^2 = a^2 + \frac{b^2}{(\omega^2-\nu^2)^2} + 2\frac{ab}{\omega^2-\nu^2}\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha).$$

С течением времени амплитуда d периодически изменяется, оставаясь ограниченной:

$$\left|a-\frac{b}{\omega^2-\nu^2}\right| \le d \le \left|a+\frac{b}{\omega^2-\nu^2}\right|.$$

Это явление носит название *биений*.

Случай 2. Частота возмущающей силы в точности совпадает с собственной частотой осциллятора. Для функций y_1, y_2 имеем выражения

$$y_1 = -\frac{b}{2\omega}\int_{t_0}^{t}[\sin(2\omega t+\beta)-\sin\beta]\,dt+p_1,$$

$$y_2 = \frac{b}{2\omega}\int_{t_0}^{t}[\cos(2\omega t+\beta)+\cos\beta]\,dt+p_2.$$

Отсюда

$$y_1 = \frac{b}{2\omega}\left[\frac{\cos(2\omega t+\beta)}{2\omega}+t\sin\beta\right],$$

$$y_2 = \frac{b}{2\omega}\left[\frac{\sin(2\omega t+\beta)}{2\omega}+t\cos\beta\right].$$

Следовательно,

$$x_ч = \frac{b}{2\omega}\left[\frac{\cos(\omega t+\beta)}{2\omega}+t\sin(\omega t+\beta)\right].$$

Первое слагаемое в квадратных скобках удовлетворяет однородному уравнению гармонического осциллятора. Поэтому за частное решение можно принять

$$x_ч = \frac{bt}{2\omega}\sin(\omega t+\beta).$$

Имеем колебание с частотой ω и линейно возрастающей по времени амплитудой. Это явление называется *частотным резонансом*. Оно проявляется в неограниченной раскачке вынужденных колебаний при сколь угодно малой амплитуде b внешней силы и может привести к разрушению механической конструкции.

В реальности всегда существуют силы сопротивления. Их роль в развитии резонанса проанализируем на примере осциллятора с вязким трением:

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2 x = b\cos(\nu t+\beta),$$

где коэффициенты b, ν, β — характеристики возмущающей силы. Частное решение будем искать в виде

$$x_ч(t) = A\cos(\nu t+\beta)+B\sin(\nu t+\beta).$$

Постоянные A и B подлежат определению. Очевидно, что

$$\dot{x}_ч = -A\nu\sin(\nu t+\beta)+B\nu\cos(\nu t+\beta),$$

$$\ddot{x}_ч = -A\nu^2\cos(\nu t+\beta)-B\nu^2\sin(\nu t+\beta).$$

Подставляя эти выражения в уравнение осциллятора, собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим относительно коэффициентов A и B систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}(\omega^2-\nu^2)A+k\nu B=b,\\ -k\nu A+(\omega^2-\nu^2)B=0.\end{cases}$$

Эта система имеет решение

$$A=\frac{b(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2-\nu^2)^2+k^2\nu^2},\quad B=\frac{bk\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+k^2\nu^2}.$$

Амплитуда d частного решения представляется в виде

$$d=\sqrt{A^2+B^2}=b[(\omega^2-\nu^2)^2+k^2\nu^2]^{-1/2}.$$

Следствие 3.10.1. *При действии сил вязкого трения совпадение частоты ν возмущающей силы с частотой ω собственных колебаний осциллятора не приводит к неограниченному увеличению амплитуды, и не существует значения частоты ν возмущающей силы, при котором такой эффект мог бы возникнуть.*

Вместе с тем, когда частота ω собственных колебаний осциллятора приближается к частоте возмущающей силы, амплитуда частного решения становится максимальной. На этом свойстве основано действие различных акустических резонаторов, маятниковых систем, настроечных колебательных контуров в радиотехнике.

Общее решение $x(t)$ уравнения движения осциллятора с вязким трением представляется в виде суммы решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения осциллятора. В § 3.9 установлено, что, когда $k>0$, любое решение однородного уравнения асимптотически стремится к нулю. Следовательно,

$$x(t)\longrightarrow x_ч(t),\quad t\to\infty$$

независимо от значений начальных условий. Другими словами, частное решение $x_ч(t)$ осциллятора с вязким трением асимптотически устойчиво, и поведение системы вполне им определяется, когда время развития процесса достаточно велико.

Рассмотрим теперь резонансное явление другого типа. Параметры реальной системы, описываемой уравнением осциллятора, не всегда могут оставаться постоянными. Тогда собственная частота ω будет изменяться во времени.

Пример 3.10.1. Пусть груз весом P подвешен на нити, длина которой l может изменяться: $l=l(t)$. Считая груз материальной точкой, уравнение его движения получим с помощью теоремы 3.7.2 о кинетическом моменте относительно неподвижной точки подвеса:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -Pl\sin\varphi,$$

где φ — угол отклонения нити от вертикали, m — масса. Считая, что $l>0$, перейдем к новой независимой переменной σ с помощью соотношения $dt=l^2\,d\sigma$. Полученное уравнение приведется к виду

$$\varphi''+\omega^2\sin\varphi=0,\quad \omega^2=gl^3(\sigma),\quad \varphi''=\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}.$$

Оно по виду совпадает с уравнением гармонического осциллятора, однако коэффициент при угловой координате φ не постоянен. Задавая закон $l(\sigma)$, можно в определенной мере влиять на движение груза.◇

Возможность управления движением осциллятора с помощью периодического воздействия на его параметры изучим на примере линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\ddot{x}+a(t)\dot{x}+b(t)x=0,$$

где $a(t)$, $b(t)$ — периодические функции времени с одинаковым периодом $\tau\ne0$:

$$a(t+\tau)=a(t),\quad b(t+\tau)=b(t).$$

Лемма 3.10.1. *Пусть $a(t)$ — интегрируемая периодическая функция с периодом $\tau\ne0$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_t^{t+\tau}a(t)\,dt=\int_0^{\tau}a(t)\,dt,$$

каково бы ни было t из области определения функции $a(t)$.

Доказательство. При произвольных пределах интегрирования c и d будет выполнено

$$\int_c^d a(t)\,dt=\int_{c+\tau}^{d+\tau}a(x-\tau)\,dx.$$

Положив теперь $c=0$, $d=t$ и учитывая свойство периодичности функции $a(t)$, получим

$$\int_0^t a(t)\,dt=\int_{\tau}^{t+\tau}a(t)\,dt.$$

Далее

$$\int_t^{t+\tau}a(t)\,dt=\int_t^0 a(t)\,dt+\int_0^{\tau}a(t)\,dt+\int_{\tau}^{t+\tau}a(t)\,dt=\int_0^{\tau}a(t)\,dt.\square$$

Лемма 3.10.2. *Если $x(t)$ — произвольное решение рассматриваемого уравнения с периодическими коэффициентами, то функция $y=x(t+\tau)$, где τ — период функций $a(t)$, $b(t)$, есть решение того же уравнения.*

Доказательство. Если $x(t)$ — решение, то для него

$$\ddot{x}(t+\tau)+a(t+\tau)\dot{x}(t+\tau)+b(t+\tau)x(t+\tau)=0.$$

Но $a(t+\tau)=a(t)$ и $b(t+\tau)=b(t)$. Следовательно,

$$\ddot{y}+a(t)\dot{y}+b(t)y=0.\square$$

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — два линейно независимых решения изучаемого уравнения с периодическими коэффициентами. Любое решение того же уравнения выражается как их линейная комбинация. В частности,

$$x_1(t+\tau)=a_{11}x_1(t)+a_{21}x_2(t),\quad x_2(t+\tau)=a_{12}x_1(t)+a_{22}x_2(t),$$

где постоянные коэффициенты a_{ij} образуют *матрицу монодро́мии*

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

задающую преобразование решений через период τ.

Пусть $z(t)$ — произвольное решение уравнения с периодическими коэффициентами:

$$z(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t).$$

Функцию $z(t+\tau)$ представим аналогично:

$$z(t+\tau)=c_1'x_1(t)+c_2'x_2(t).$$

Найдем c_1' и c_2':

$$z(t+\tau)=c_1x_1(t+\tau)+c_2x_2(t+\tau)=(a_{11}c_1+a_{12}c_2)x_1(t)+(a_{21}c_1+a_{22}c_2)x_2(t).$$

Следовательно, коэффициенты c_1' и c_2' можно вычислить по формуле

$$\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

Тем самым матрица монодромии задает *линейный оператор монодромии* в пространстве решений уравнения с периодическими коэффициентами. Для конкретной матрицы A роль базисных векторов играют функции $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Рассмотрим задачу об отыскании собственных векторов и собственных значений оператора монодромии. Эта задача сводится к решению системы двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}a_{11}c_1+a_{12}c_2&=\mu c_1,\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2&=\mu c_2.\end{aligned}$$

Собственные значения μ для этой системы называются *мультиплика́торами*. Они суть решения характеристического уравнения монодромии

$$\det(A-\mu E)=0,$$

или

$$\mu^2-(a_{11}+a_{22})\mu+\det A=0.$$

Это уравнение инвариантно относительно выбора базисных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Для удобства дальнейшего изложения будем считать решения уравнения с периодическими коэффициентами комплексными функциями времени, выделяя действительную часть этих решений в случае необходимости перехода к реальным приложениям. Заметим, что $\det A\ne0$, так как матрица A осуществляет переход от одних линейно независимых функций к другим. Поэтому $\mu\ne0$.

Лемма 3.10.3. *Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ суть два решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Тогда соответствующий определитель Вро́нского $W(t)$ выражается следующим равенством*

$$W(t)=\begin{vmatrix}z_1&z_2\\ \dot{z}_1&\dot{z}_2\end{vmatrix}=z_1\dot{z}_2(t)-\dot{z}_1(t)z_2(t)=c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right),$$

где c — постоянная, t_0 — начальный момент времени.

Доказательство. Так как и z_1, и z_2 обращают рассматриваемое уравнение в тождество, то

$$\ddot{z}_1(t)+a(t)\dot{z}_1(t)+b(t)z_1(t)\equiv0,\quad \ddot{z}_2(t)+a(t)\dot{z}_2(t)+b(t)z_2(t)\equiv0.$$

Умножая первое тождество на z_2, второе — на z_1 и вычитая из второго первое, получим

$$z_1(t)\ddot{z}_2(t)-\ddot{z}_1(t)z_2(t)+a(t)[z_1\dot{z}_2(t)-\dot{z}_1(t)z_2(t)]=0.$$

Но

$$z_1(t)\ddot{z}_2(t)-\ddot{z}_1(t)z_2(t)=\frac{d}{dt}[z_1(t)\dot{z}_2(t)-\dot{z}_1(t)z_2(t)].$$

Поэтому справедливо уравнение

$$\frac{dW}{dt}+a(t)W=0.$$

Решением этого уравнения служит

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right).\square$$

Теорема 3.10.1. (Флоке́). *Пусть μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения монодромии и*

$$D=\exp\left(-\int_0^{\tau}a(t)\,dt\right).$$

Тогда $\mu_1\mu_2=D$ и существуют линейно независимые решения y_1, y_2 такие, что:

1. Если $\mu_1\ne\mu_2$, то

$$y_1(t+\tau)=\mu_1y_1(t),\quad y_2(t+\tau)=\mu_2y_2(t).$$

2. Если $\mu_1=\mu_2=\beta$ — кратный корень: $\beta^2=D$, то

$$y_1(t+\tau)=\beta y_1(t),\quad y_2(t+\tau)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t),$$

где α — постоянный коэффициент.

Доказательство. Рассмотрим каждый из упомянутых в формулировке случаев.

1. $\mu_1\ne\mu_2$. Возьмем для μ_1 и μ_2 соответствующие им собственные функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$. По определению $y_1\not\equiv0$, $y_2\not\equiv0$ и

$$y_1(t+\tau)=\mu_1y_1(t),\quad y_2(t+\tau)=\mu_2y_2(t).$$

Предположим, что $y_1(t)$ и $y_2(t)$ линейно зависимы. Тогда существуют не равные нулю одновременно константы λ_1 и λ_2, для которых

$$\lambda_1y_1(t)+\lambda_2y_2(t)\equiv0,$$

$$\lambda_1\mu_1y_1(t)+\lambda_2\mu_2y_2(t)\equiv0.$$

Пусть $\lambda_1\ne0$. Умножая первое уравнение на μ_2 и вычитая из него второе, найдем

$$\lambda_1(\mu_2-\mu_1)y_1(t)\equiv0,$$

что противоречит неравенству $\mu_1\ne\mu_2$. Далее, применив к функциям $y_1(t)$, $y_2(t)$ лемму 3.10.3, получим

$$y_1(t)\dot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)y_2(t)=c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right),$$

где $c\ne0$, так как y_1 и y_2 линейно независимы. Через период τ

$$\mu_1\mu_2c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right)=c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right)\exp\left(-\int_t^{t+\tau}a(t)\,dt\right).$$

С использованием леммы 3.10.1 будем иметь,

$$\mu_1\mu_2=\det A=\exp\left(-\int_t^{t+\tau}a(t)\,dt\right)=D.$$

2. $\mu_1=\mu_2=\beta$ (случай кратного корня). Возьмем собственную функцию $y_1(t)\not\equiv0$, соответствующую корню β, за базисное решение. Пусть y_2 — другое базисное решение, независимое от y_1. Тогда преобразование функций через период примет вид

$$y_1(t+\tau)=\beta y_1(t),\quad y_2(t+\tau)=a_{12}y_1(t)+a_{22}y_2(t).$$

Матрица монодромии оказывается треугольной:

$$A=\begin{pmatrix}\beta&a_{12}\\ 0&a_{22}\end{pmatrix},$$

и ей соответствует характеристическое уравнение

$$(\beta-\mu)(a_{22}-\mu)=0.$$

Поскольку β — кратный корень, заключаем, что $a_{22}=\beta$. Обозначив $\alpha=a_{12}$, получим формулу для случая 2 утверждения теоремы. На основании леммы 3.10.3 имеем

$$y_1\dot{y}_2-\dot{y}_1y_2=c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right),\quad c\ne0.$$

Через период τ получим

$$\beta^2c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right)=c\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a(t)\,dt\right)\exp\left(-\int_t^{t+\tau}a(t)\,dt\right).$$

Поэтому $\beta^2=\det A=D$.$\square$

Следствие 3.10.2. *Характеристическое уравнение матрицы монодромии имеет вид*

$$\mu^2-B\mu+D=0,$$

где $B=a_{11}+a_{22}$ — след матрицы монодромии, сохраняющийся при переходе от одних базисных функций к другим,

$$D=\exp\left(-\int_0^{\tau}a(t)\,dt\right).$$

Коэффициенты B и D целиком определяются свойствами функций $a(t)$, $b(t)$.

Изучим структуру базисных решений y_1, y_2, существование которых утверждает теорема 3.10.1. Пусть сначала $\mu_1\ne\mu_2$. Тогда

$$y_1(t+\tau)=\mu_1y_1(t),\quad y_2(t+\tau)=\mu_2y_2(t).$$

Из этих равенств следует, что функции

$$\Pi_1(t)=\frac{y_1(t)}{\mu_1^{t/\tau}},\quad \Pi_2(t)=\frac{y_2(t)}{\mu_2^{t/\tau}}$$

будут периодическими с периодом τ. В самом деле,

$$\Pi_1(t+\tau)=y_1(t+\tau)\mu_1^{-(t+\tau)/\tau}=\mu_1y_1(t)\mu_1^{-1}\mu_1^{-t/\tau}=\Pi_1(t),$$

$$\Pi_2(t+\tau)=y_2(t+\tau)\mu_2^{-(t+\tau)/\tau}=\mu_2y_2(t)\mu_2^{-1}\mu_2^{-t/\tau}=\Pi_2(t).$$

Следовательно, y_1 и y_2 представляются в виде

$$y_1=\mu_1^{t/\tau}\Pi_1(t),\quad y_2=\mu_2^{t/\tau}\Pi_2(t),$$

где Π_1, Π_2 — периодические с периодом τ функции и $\mu_1\mu_2=D$. Таким образом, когда выполнено либо $|\mu_1|>1$, либо $|\mu_2|>1$, либо справедливы одновременно оба этих неравенства, то хотя бы одна из базисных функций неограниченно возрастает. Это значит, что состояние покоя будет неустойчивым. Достаточно сколь угодно малого отклонения от этого состояния, чтобы появившееся смещение стало возрастать со временем. Такое явление называется *параметрическим резонансом*. Оно реально возникает, например, когда стоящий на качелях человек раскачивает их, приседая в такт качаниям.

Предположим теперь, что корни характеристического уравнения монодромии кратные: $\mu_1=\mu_2=\mu$. Согласно теореме Флоке будем иметь

$$y_1(t+\tau)=\mu y_1(t),\quad y_2(t+\tau)=\alpha y_1(t)+\mu y_2(t),\quad \mu^2=D.$$

Функции y_1, y_2 представим в виде

$$y_1=\mu^{t/\tau}f_1(t),\quad y_2=\frac{\mu}{D}\frac{\alpha t}{\tau}y_1(t)+\mu^{t/\tau}f_2(t).$$

Рассмотрим, как эти функции изменятся через период τ:

$$y_1(t+\tau)=\mu^{(t+\tau)/\tau}f_1(t+\tau)=\mu\mu^{t/\tau}f_1(t+\tau),$$

$$y_2(t+\tau)=\frac{\mu}{D}\frac{(t+\tau)\alpha}{\tau}y_1(t+\tau)+\mu^{(t+\tau)/\tau}f_2(t+\tau)=$$

$$=\left(\frac{\alpha t}{\tau}+\alpha\right)y_1(t)+\mu\mu^{t/\tau}f_2(t+\tau).$$

С другой стороны, по теореме Флоке функции $y_1(t+\tau)$, $y_2(t+\tau)$ выражаются формулами

$$y_1(t+\tau)=\mu\mu^{t/\tau}f_1(t),\quad y_2(t+\tau)=\alpha y_1+\frac{\alpha t}{\tau}y_1+\mu\mu^{t/\tau}f_2(t).$$

Приравнивая соответствующие правые части, получим

$$f_1(t+\tau)=f_1(t),\quad f_2(t+\tau)=f_2(t),$$

то есть функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ — периодические с периодом τ. Следовательно, параметрический резонанс может возникнуть и в случае кратных корней характеристического уравнения.

Для вычисления мультипликаторов μ_1, μ_2 требуется найти след матрицы монодромии $B = a_{11} + a_{22}$. Пусть базисные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1.$$

Тогда

$$a_{11} = x_1(\tau), \quad a_{22} = \dot{x}_2(\tau), \quad a_{21} = \dot{x}_1(\tau), \quad a_{12} = x_2(\tau).$$

Таким образом

$$B = x_1(\tau) + \dot{x}_2(\tau).$$

Теорема 3.10.2. (Критерий параметрического резонанса). *Пусть движение системы описывается однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими коэффициентами, имеющими одинаковый период. Параметрический резонанс в ней возникает тогда и только тогда, когда реализуется какой-либо из следующих случаев:*

1. $D > 1$,
2. $D = 1$: $|B| > 2$, *либо* $|B| = 2$ *и* $a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$,
3. $D < 1$: $|B| > D + 1$,

где a_{ij} *суть компоненты матрицы монодромии.*

Доказательство. Пусть сначала $D > 1$. Имеем $\mu_1\mu_2 = D$. Следовательно, модуль хотя бы одного из мультипликаторов превосходит единицу, и соответствующее решение неограниченно возрастает.

Предположим теперь, что $D = 1$. Мультипликаторы выражаются формулами

$$\mu_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4}}{2}.$$

Если $B^2 < 4$, то корни будут комплексно сопряженными и различными, но $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$, и резонанса не возникает. Если $B^2 = 4$, то корни будут кратными и $\mu = 1$. Как следует из сказанного выше, если при этом $a_{12} = a_{21} = 0$, то резонанс отсутствует, а если матрица монодромии треугольная, то резонанс будет иметь место. Предположим теперь, что $B^2 = 4$, но $a_{12}a_{21} \neq 0$. Тогда собственную функцию монодромии можно взять в виде

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{a_{11} - \mu}{a_{12}} x_2(t).$$

Через период получим

$$y_1(t + \tau) = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 - \frac{a_{11} - \mu}{a_{12}}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = \mu\, y_1(t).$$

Заметим, что $a_{11} + a_{22} = 2\mu$, и учтем, что характеристическое уравнение можно представить в виде $(a_{11} - \mu)(a_{22} - \mu) = a_{12}a_{21}$. Поэтому при $a_{12}a_{21} \neq 0$ будет также выполнено $(a_{11} - \mu) \neq 0$ и, следовательно, функции y_1 и x_2 линейно независимы. Примем $y_2 = x_2$. Через период τ получим

$$y_2(t+\tau) = x_2(t+\tau) = a_{12}\left(y_1(t) + \frac{a_{11} - \mu}{a_{12}} x_2(t)\right) + a_{22}x_2 = a_{12}y_1 + \mu y_2.$$

Таким образом, для функций y_1, y_2 матрица монодромии принимает треугольный вид, что влечет наличие резонанса.

Пусть, наконец, $|B| > 2$. Тогда корни характеристического уравнения действительны, взаимно обратны и отличны от единицы. Поэтому в системе имеет место параметрический резонанс.

Предположим теперь, что $D < 1$. Мультипликаторы имеют вид

$$\mu_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4D}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D}}{2}.$$

Если $B^2 < 4D$, то они будут различными и комплексно сопряженными, причем $|\mu_1| = |\mu_2| = \sqrt{D} < 1$. В этом случае резонанс будет отсутствовать. Если $B^2 = 4D$, то корни характеристического уравнения монодромии будут действительными и кратными. Собственные решения имеют структуру

$$y_1 = \mu^{t/\tau} f_1(t), \quad y_2 = \frac{\mu}{D}\frac{\alpha t}{\tau} y_1(t) + \mu^{t/\tau} f_2(t),$$

причем $|\mu| = \sqrt{D} < 1$. Следовательно, при $t \to \infty$ будем иметь

$$y_1 \to 0, \quad y_2 \to 0, \quad \text{так как} \quad \frac{\alpha t}{\tau} y_1 \to 0,$$

и резонанса не возникает. Пусть, наконец, $B^2 > 4D$. Тогда мультипликаторы действительны и различны. Резонанс будет иметь место, когда абсолютная величина хотя бы одного мультипликатора превосходит единицу. Другими словами,

$$\frac{|B| + \sqrt{B^2 - 4D}}{2} > 1 \quad \longrightarrow \quad |B| > D + 1.\square$$

Пример 3.10.2. Уравнение Хи́лла

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0,$$

где $\omega(t)$ периодическая функция времени: $\omega(t+\tau) = \omega(t)$, принадлежит к числу рассмотренных выше линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. При этом $a(t) \equiv 0$ и следовательно $D = 1$. Чтобы проиллюстрировать применение теории Флоке, рассмотрим кусочно-постоянные периодические функции $\omega(t)$, имеющие в пределах одного периода следующий вид:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1, & \text{при } 0 \le t < t_1, \\ \omega_2, & \text{при } t_1 \le t < \tau, \end{cases}$$

где постоянные $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $t_1 \le \tau$. Обозначим $t_2 = \tau - t_1$. Построим матрицу монодромии. Пусть решения уравнения Хилла $x_1(t)$ и $x_2(t)$ таковы, что

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1.$$

Тогда

$$x_1(\tau) = a_{11} = \cos(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2) - \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2),$$

$$\dot{x}_1(\tau) = a_{21} = -\omega_2\cos(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2) - \omega_1\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2),$$

$$x_2(\tau) = a_{12} = \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2) + \frac{1}{\omega_2}\cos(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2),$$

$$\dot{x}_2(\tau) = a_{22} = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\sin(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2) + \cos(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2).$$

Воспользуемся теоремой 3.10.2 и изучим сначала условие резонанса $|a_{11} + a_{22}| > 2$. Обозначим $\tau_1 = \omega_1 t_1$, $\tau_2 = \omega_2 t_2$. Рассматриваемое условие резонанса принимает вид

$$\left|2\cos\tau_1\cos\tau_2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin\tau_1\sin\tau_2\right| > 2$$

или, преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму,

$$|\text{æ}_1\cos(\tau_1 + \tau_2) - \text{æ}_2\cos(\tau_1 - \tau_2)| > 2,$$

где

$$\text{æ}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + 1, \quad \text{æ}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - 1.$$

Очевидно, что $\text{æ}_1 \ge 2$, $\text{æ}_2 \ge 0$ при любых положительных значениях ω_1, ω_2. Равенства $\text{æ}_1 = 2$, $\text{æ}_2 = 0$ достигаются тогда и только тогда, когда $\omega_1 = \omega_2$. Условие параметрического резонанса можно представить в виде следующей совокупности неравенств

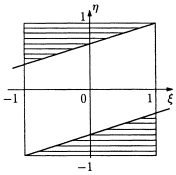
$$\cos(\tau_1+\tau_2) > \frac{2}{\text{æ}_1} + \frac{\text{æ}_2}{\text{æ}_1}\cos(\tau_1 - \tau_2) \text{ либо } \cos(\tau_1+\tau_2) < -\frac{2}{\text{æ}_1} + \frac{\text{æ}_2}{\text{æ}_1}\cos(\tau_1 - \tau_2).$$

Пусть $\eta = \cos(\tau_1 + \tau_2)$, $\xi = \cos(\tau_1 - \tau_2)$. На плоскости введем декартовы координаты и вдоль вертикальной оси будем откладывать значения переменной η, а вдоль горизонтальной — значения ξ. Очевидно, имеем $|\xi| \le 1$, $|\eta| \le 1$, что геометрически соответствует квадрату, стороны которого параллельны осям координат и проходят через точки $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Чтобы получить область резонанса, из этого квадрата следует вырезать полосу, заключенную между прямыми

$$\eta = \frac{2}{\text{æ}_1} + \frac{\text{æ}_2}{\text{æ}_1}\xi, \quad \eta = -\frac{2}{\text{æ}_1} + \frac{\text{æ}_2}{\text{æ}_1}\xi.$$

Отметим, что $\text{æ}_2/\text{æ}_1 < 1$, так что угол наклона указанных прямых не превышает $\pi/4$.

На рис. 3.10.1 области, соответствующие параметрическому резонансу, выделены штриховкой. Они существуют при любых не равных друг



Области параметрического резонанса для уравнения Хилла центрально симметричны относительно начала координат плоскости (ξ, η). Они получаются после исключения из единичного квадрата полосы, заключенной между наклонными прямыми. Левый верхний и правый нижний углы квадрата принадлежат резонансной области при любых отличных друг от друга положительных значениях ω_1, ω_2.

Рис. 3.10.1. Области резонанса для уравнения Хилла

другу ω_1 и ω_2. Резонансные области исчезают только при $\omega_1 = \omega_2$. Таким образом, если

$$\cos(\tau_1 + \tau_2) = 1, \quad \cos(\tau_1 - \tau_2) = -1,$$

либо

$$\cos(\tau_1 + \tau_2) = -1, \quad \cos(\tau_1 - \tau_2) = 1$$

и $\omega_1 \neq \omega_2$, неизбежно возникает параметрический резонанс. Вторая группа равенств, в частности, означает, что

$$\tau_1 + \tau_2 = \pi + 2\pi k, \quad \tau_1 - \tau_2 = 2\pi l, \quad k, l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Например, при $k = 0$ и $l = 0$, получаем резонансные соотношения параметров t_1 и t_2:

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2}, \quad \tau = t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right).$$

Если условно принять, что система имеет среднюю частоту $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ и соответствующий ей средний период $T = 2\pi/\bar{\omega}$, то можно получить физически легко ощутимое резонансное соотношение периодов

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{8}\frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{4}\text{æ}_1.$$

Откуда при $\omega_1 \longrightarrow \omega_2$ имеем $(\tau/T) \longrightarrow 1/2$ Другие резонансные соотношения можно проанализировать совершенно аналогично.

Рассмотрим теперь случай кратных корней уравнения монодромии. Согласно теореме 3.10.2, резонанс в этом случае отсутствует тогда и только тогда, когда одновременно выполнены равенства

$$a_{21} = -\omega_2\cos(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2) - \omega_1\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2) = 0,$$

$$a_{12} = \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2) + \frac{1}{\omega_2}\cos(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2) = 0.$$

С учетом принятых обозначений имеем однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\sin(\tau_1 + \tau_2)$, $\sin(\tau_1 - \tau_2)$:

$$\begin{cases} (\omega_1 + \omega_2)\sin(\tau_1 + \tau_2) + (\omega_1 - \omega_2)\sin(\tau_1 - \tau_2) = 0, \\ (\omega_1 + \omega_2)\sin(\tau_1 + \tau_2) - (\omega_1 - \omega_2)\sin(\tau_1 - \tau_2) = 0. \end{cases}$$

Если $\omega_1 \neq \omega_2$, определитель системы отличен от нуля, и ее решением служат

$$\sin(\tau_1 + \tau_2) = 0, \quad \sin(\tau_1 - \tau_2) = 0,$$

что отвечает углам квадрата на рис. 3.10.1. Таким образом, параметрический резонанс будет иметь место также и в случае кратных корней характеристического уравнения монодромии, а заштрихованные области на рис. 3.10.1 включают границу, кроме точек $(1, 1)$, $(-1, -1)$.$\diamond$

Пример 3.10.3. Частным случаем уравнения Хилла служит однородное уравнение Матьé

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\cos\nu t)\, x = 0, \quad \omega > 0, \quad \nu > 0, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

Где ω, ε, ν — постоянные параметры. Используем результаты предыдущего примера и проанализируем возможность появления резонанса для уравнения Мейсснера, аналогичного уравнению Матье:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0,$$

где $\omega(t)$ — периодическая с периодом $\tau = 2\pi/\nu$ функция, в пределах одного периода определенная выражением

$$\omega(t) = \begin{cases} (1 + \varepsilon)\,\omega, & \text{если } 0 \le t < \tau/2, \\ (1 - \varepsilon)\,\omega, & \text{если } (\tau/2) \le t < \tau. \end{cases}$$

В обозначениях примера 3.10.2 будем иметь

$$\omega_1 = (1 + \varepsilon)\omega, \quad \omega_2 = (1 - \varepsilon)\omega, \quad t_1 = t_2 = \frac{\tau}{2}, \quad \text{æ}_1 = \frac{2}{1 - \varepsilon^2},$$

$$\text{æ}_2 = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}, \quad \tau_1 = \frac{\omega\tau(1 + \varepsilon)}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\omega\tau(1 - \varepsilon)}{2}.$$

Условие параметрического резонанса принимает вид

$$|\cos(\omega\tau) - \varepsilon^2\cos(\omega\tau\varepsilon)| \ge 1 - \varepsilon^2.$$

Обозначим

$$\chi = \frac{1}{2}\omega\tau = \pi\frac{\omega}{\nu}.$$

Параметрический резонанс возникает, когда либо

$$\cos(2\chi) - \varepsilon^2\cos(2\chi\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon^2,$$

либо

$$\cos(2\chi) - \varepsilon^2\cos(2\chi\varepsilon) \le -1 + \varepsilon^2.$$

Таким образом, после упрощений получаем два случая реализации параметрического резонанса:

случай 1. $\varepsilon^2\sin^2(\chi\varepsilon) \ge \sin^2\chi$,
случай 2. $\varepsilon^2\cos^2(\chi\varepsilon) \ge \cos^2\chi$.

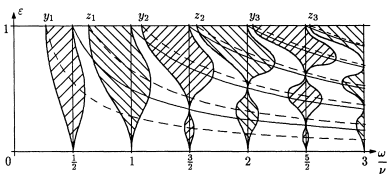


Рис. 3.10.2. Области резонансов уравнения Мейсснера.

На рис. 3.10.2 показаны области резонансных соотношений параметров Штриховка слева-вниз-направо выделяет области, соответствующие случаю 1, а штриховка слева-вверх-направо — случаю 2. Величины y_i, z_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ суть последовательные корни уравнений

$$\pi y = \operatorname{ctg}\pi y, \quad \pi z = -\operatorname{tg}\pi z$$

соответственно. Эти корни задают аргументы максимумов для функций

$$f_1(\varepsilon) = \varepsilon^2\sin^2\chi\varepsilon, \quad f_2(\varepsilon) = \varepsilon^2\cos^2\chi\varepsilon$$

при фиксированном отношении ω/ν. Например, значения аргумента ε, при которых функция $f_1(\varepsilon)$ достигает максимума, выражаются формулой $\varepsilon_i = z_i\nu/\omega$ Точно так же вычисляются аргументы максимумов для функции $f_2(\varepsilon)$. Указанным аргументам максимумов на рис. 3.10.2 отвечают пунктирные линии. Аналогично пересчитываются и нули функций $f_1(\varepsilon)$ и $f_2(\varepsilon)$. Графики соответствующих обратно пропорциональных зависимостей выделены на рис. 3.10.2 сплошными тонкими линиями. В целом структура областей резонансных соотношений достаточно сложна Существуют особые отношения частот вида $n/2$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых резонанс возникает при любых значениях параметра ε. В окрестности особых отношений с ростом n резонансные области очень быстро сужаются для любых значений параметра $\varepsilon < 1$. Вместе с тем для значений $\varepsilon = 1$ резонансные области, наоборот, расширяются, хотя между ними всегда остаются уменьшающиеся островки нерезонансных отношений ω/ν.

Одним из способов получения приближенных условий резонанса для уравнения Матье

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon\cos\nu t)\, x = 0, \quad \omega > 0, \quad \nu > 0, \quad 0 < \varepsilon \le 1,$$

служит метод малого параметра. Проиллюстрируем соответствующую процедуру поиска решений.

Будем считать, что $\varepsilon \ll 1$. Укажем способ получения решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ в виде рядов по степеням ε:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i y_i(t).$$

Очевидно, что

$$\ddot{x} = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i \ddot{y}_i(t).$$

Подставим это выражение в уравнение Матье:

$$\ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i[\ddot{y}_i(t) + \omega^2 y_i + (\omega^2\cos\nu t)y_{i-1}] = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 = 0, \quad \ddot{y}_i + \omega^2 y_i = -\omega^2 y_{i-1}\cos\nu t, \quad i = 1, \ldots$$

Для удобства можно выбрать следующие начальные условия:

$$y_0(0) = x(0), \quad \dot{y}_0 = \dot{x}(0), \quad y_i(0) = 0, \quad \dot{y}_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots$$

На основании исследования уравнения Мейсснера следует ожидать, что зависимость параметра B от ε должна начинаться с членов порядка ε^2. Непосредственные вычисления подтверждают это наблюдение.

Дифференциальные уравнения для функций y_i представляют собой неоднородные уравнения гармонического осциллятора. Для каждого из этих уравнений могут возникать явления частотного резонанса при некоторых сочетаниях частоты ω с частотами правой части. При переходе частот через резонансные соотношения возможны существенные изменения закона движения. $\diamond$

Пример 3.10.4. Обратимся к примеру 3.10.1 и предположим, что длина маятника меняется периодически по закону

$$l(t) = \begin{cases} l_1, & \text{если } 0 \le t < t_1, \\ l_2, & \text{если } t_1 \le t < t_1 + t_2, \quad \tau = t_1 + t_2 \end{cases}$$

в пределах одного периода τ. Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Имеем

$$a(t) = 2\dot{l}/l, \quad D = \exp\left(-\int_0^{\tau} a(t)\, dt\right) = exp\left(-2\ln\frac{l(\tau)}{l(0)}\right) = 1.$$

При изменении t внутри пределов постоянства функции $l(t)$ будет справедливо уравнение колебаний математического маятника, которое для малых амплитуд можно приближенно представить в виде уравнения гармонического осциллятора

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(t)\,\varphi = 0,$$

где

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{g/l_1}, & \text{если } 0 \le t < t_1, \\ \omega_2 = \sqrt{g/l_2}, & \text{если } t_1 \le t < t_1 + t_2, \quad \tau = t_1 + t_2. \end{cases}$$

Все это напоминает постановку задачи в рассмотренном выше примере 3.10.2. Отличие состоит в том, что в моменты скачкообразного (очень быстрого) изменения длины маятника членом, содержащим произведение скоростей $\dot{l}\,\dot{\varphi}$ в уравнении движения маятника, нельзя пренебречь.

В уравнении Хилла при скачкообразном изменении функции ω координата и скорость оставались непрерывными. В рассматриваемом примере координата φ в момент переключения будет непрерывной, а скорость $\dot{\varphi}$ изменится скачком вместе с изменением длины маятника. Чтобы определить это изменение, воспользуемся уравнением кинетического момента относительно точки подвеса маятника

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -Pl\sin\varphi.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от t_1 до $(t_1 + \Delta t)$, получим

$$l^2(t_1 + \Delta t)\,\dot{\varphi}(t_1 + \Delta t) - l^2(t_1)\,\dot{\varphi}(t_1) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} -gl(t)\sin\varphi\, dt.$$

Подынтегральные члены ограничены. Поэтому в пределе при $\Delta t \to 0$ получим

$$l_2^2\,\dot{\varphi}^+ = l_1^2\,\dot{\varphi}^- \quad \longrightarrow \quad \dot{\varphi}^+ = \frac{l_1^2}{l_2^2}\dot{\varphi}^-,$$

где $\dot{\varphi}^+$ значение угловой скорости после, а $\dot{\varphi}^-$ — до скачкообразного изменения длины маятника. При изменении длины со значения l_2 на значение l_1 соответствующий коэффициент пересчета угловой скорости поменяется на взаимно обратный.

Теперь мы можем воспользоваться критерием параметрического резонанса. Как и в примере 3.10.2, построим матрицу монодромии. Пусть решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ таковы, что

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 1.$$

Тогда

$$\varphi_1(\tau) = a_{11} = \cos(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2) - \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2),$$

$$\dot{\varphi}_1(\tau) = a_{21} = -\frac{l_2^2}{l_1^2}\left[\omega_2\cos(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2) + \omega_1\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2)\right],$$

$$\varphi_2(\tau) = a_{12} = \frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t_1)\cos(\omega_2 t_2) + \frac{1}{\omega_2}\frac{l_1^2}{l_2^2}\cos(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2),$$

$$\dot{\varphi}_2(\tau) = a_{22} = \frac{l_2^2}{l_1^2}\left[-\frac{\omega_2}{\omega_1}\sin(\omega_1 t_1)\sin(\omega_2 t_2) + \cos(\omega_1 t_1)\frac{l_1^2}{l_2^2}\cos(\omega_2 t_2)\right].$$

Отметим в формулах для a_{21} и a_{12} наличие множителя l_2^2/l_1^2, связанного с тем, что период функции $l(t)$ заканчивается тогда, когда она принимает то значение, которое было в начале периода.

В соответствии с теоремой 3.10.2 изучим сначала условие резонанса $|a_{11}+a_{22}|>2$. Как и в примере 3.10.2, обозначим $\tau_1=\omega_1 t_1$, $\tau_2=\omega_2 t_2$. Рассматриваемое условие резонанса принимает вид

$$\left|2\cos\tau_1\cos\tau_2-\left(\frac{\omega_1 l_1^2}{\omega_2 l_2^2}+\frac{\omega_2 l_2^2}{\omega_1 l_1^2}\right)\sin\tau_1\sin\tau_2\right|>2$$

или после преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$|\text{æ}_1\cos(\tau_1+\tau_2)-\text{æ}_2\cos(\tau_1-\tau_2)|>2,$$

где

$$\text{æ}_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1 l_1^2}{\omega_2 l_2^2}+\frac{\omega_2 l_2^2}{\omega_1 l_1^2}\right)+1,\quad \text{æ}_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1 l_1^2}{\omega_2 l_2^2}+\frac{\omega_2 l_2^2}{\omega_1 l_1^2}\right)-1.$$

Очевидно, что при любых положительных значениях l_1, l_2 имеем $\text{æ}_1\geq 2$, $\text{æ}_2\geq 0$. Равенства $\text{æ}_1=2$, $\text{æ}_2=0$ достигаются тогда и только тогда, когда $l_1=l_2$. Условие параметрического резонанса можно представить с помощью следующей совокупности неравенств

$$\cos(\tau_1+\tau_2)>\frac{2}{\text{æ}_1}+\frac{\text{æ}_2}{\text{æ}_1}\cos(\tau_1-\tau_2)\ \text{ либо }\ \cos(\tau_1+\tau_2)<-\frac{2}{\text{æ}_1}+\frac{\text{æ}_2}{\text{æ}_1}\cos(\tau_1-\tau_2).$$

Рассмотрим теперь случай кратных корней уравнения монодромии. В этом случае согласно теореме 3.10.2 резонанс отсутствует тогда и только тогда, когда одновременно выполнены равенства

$$a_{21}=-\frac{l_2^2}{l_1^2}\left[\omega_2\cos\tau_1\sin\tau_2+\omega_1\frac{l_1^2}{l_2^2}\sin\tau_1\cos\tau_2\right]=0,$$
$$a_{12}=\frac{1}{\omega_1}\sin\tau_1\cos\tau_2+\frac{1}{\omega_2}\frac{l_1^2}{l_2^2}\cos\tau_1\sin\tau_2=0.$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases}\left(\omega_1+\omega_2\dfrac{l_2^2}{l_1^2}\right)\sin(\tau_1+\tau_2)+\left(\omega_1-\omega_2\dfrac{l_2^2}{l_1^2}\right)\sin(\tau_1-\tau_2)=0,\\ \left(\omega_1+\omega_2\dfrac{l_2^2}{l_1^2}\right)\sin(\tau_1+\tau_2)-\left(\omega_1-\omega_2\dfrac{l_2^2}{l_1^2}\right)\sin(\tau_1-\tau_2)=0.\end{cases}$$

При $l_1\neq l_2$ определитель этой системы отличен от нуля, и ее решением служат

$$\sin(\tau_1+\tau_2)=0,\quad \sin(\tau_1-\tau_2)=0.$$

После сравнения полученных формул с аналогичными формулами примера 3.10.2 видим, что заштрихованные области на рис.3.10.1 вместе с их границей дают правильное представление об условиях резонанса и в рассматриваемом случае.◇

§ 3.11. Движение под действием сил всемирного тяготения

Уравнение движения материальной точки в поле центральных сил допускает интеграл площадей относительно центра O поля (см. теорему 3.7.3):

$$\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\boldsymbol{\sigma},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — постоянный для конкретного закона движения вектор, вычисленный по начальным условиям. Движение происходит в неподвижной плоскости $\mathcal{P}$, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\sigma}$ и проходящей через точку O. В плоскости $\mathcal{P}$ введем полярные координаты r и ϑ с полюсом в центре O. Угол ϑ будем отсчитывать от какого-нибудь фиксированного в плоскости $\mathcal{P}$ направления.

Теорема 3.11.1. (Бине). *Предположим, что постоянная площадей $c=(\sigma/m)\neq 0$. Тогда модуль скорости v и величина (со знаком) F центральной силы, под действием которой происходит движение, выражаются формулами*

$$v^2=c^2\left\{\left[\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right\},\quad F=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right],$$

носящими название первой и второй формул Бине соответственно.

Доказательство. Теорема 3.7.8 об изменении кинетической энергии T в случае действия центральной силы $\mathbf{F}=F\,\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ дает

$$dT=F\,dr,$$

где правая часть представляет собой произведение скалярных величин силы и дифференциала модуля радиуса-вектора точки (см. пример 3.4.2). При этом если $dr>0$, то для притягивающей силы приращение кинетической энергии будет отрицательным, а для отталкивающей силы — положительным. Кинетическая энергия дается формулой (см. замечание 3.6.1)

$$T=\frac{m}{2}v^2=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right].$$

Интеграл площадей (см. пример 3.7.2) можно представить в виде

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt}=c\neq 0,$$

откуда $dt=r^2 d\vartheta/c$. Подставив это выражение в правую часть формулы для кинетической энергии, получим первую формулу Бине.

Разделив уравнение для приращения кинетической энергии на $d\vartheta$, найдем

$$F\frac{dr}{d\vartheta}=\frac{dT}{d\vartheta}=mc^2\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

Примем во внимание, что

$$\frac{dr}{d\vartheta}=-r^2\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Подставив это выражение вместо коэффициента при F, убедимся в справедливости второй формулы Бине.□

Формулы Бине дают возможность рассчитывать скорость и действующую силу в зависимости от положения точки на заданной в плоскости $\mathcal{P}$ траектории. Их можно использовать, в частности, для вывода закона всемирного тяготения Ньютона из законов, сформулированных И. Кеплером по наблюдениям за движением небесных тел солнечной системы. Приведем *законы Кеплера.*

Закон 1. *Орбиты всех планет и комет солнечной системы представляют собой конические сечения, в одном из фокусов которых расположено Солнце.*

Закон 2. *Площади, заметаемые радиусами-векторами планет, имеющими начало в Солнце, прямо пропорциональны интервалам времени движения планет.*

Закон 3. *Планеты движутся по эллипсам, и квадраты времен τ их обращения вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей a эллипсов:*

$$\tau^2/a^3=const.$$

Коэффициент пропорциональности один и тот же для всех планет солнечной системы.

По этим законам однозначно решается обратная задача механики. Другими словами, по ним можно восстановить силу взаимодействия планет с Солнцем. Этот результат был впервые опубликован Ньютоном в 1687 г.

Теорема 3.11.2. (Ньютон). *Законы Кеплера справедливы тогда и только тогда, когда сила взаимодействия планеты с Солнцем выражается формулой*

$$\mathbf{F}=-f\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор планеты, имеющий начало в Солнце, m — масса планеты, M — масса Солнца, f — универсальная постоянная тяготения (гравитационная постоянная).

Доказательство. Необходимость. Первый и второй законы Кеплера позволяют сделать вывод, что орбита каждой планеты есть плоская кривая, и для нее имеет место интеграл площадей относительно Солнца. Из теоремы 3.7.7 следует, что тогда сила взаимодействия планеты с Солнцем — центральная с центром в Солнце. Постоянная площадей для планет не равна нулю, и мы можем воспользоваться формулами Бине. Выберем полярные координаты с центром в Солнце и полярную ось направим в точку орбиты, ближайшую к Солнцу (перицентр орбиты). Полярный угол, полученный таким способом, обозначим ν. Он называется *истинной аномалией*. Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\nu}{p},$$

где e — эксцентриситет эллипса:

$$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2},$$

a и b — большая и малая полуоси эллипса, $p=b^2/a$ — фокальный параметр. Подставив зависимость радиуса от истинной аномалии во вторую формулу Бине, получим

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{-e\cos\nu+1+e\cos\nu}{p}\right)=-\frac{mc^2}{pr^2}.$$

Таким образом, сила, действующая на планету, центральная, притягивающая, а ее величина обратно пропорциональна квадрату радиуса. Покажем, что постоянная

$$\mu=\frac{c^2}{p}=\frac{c^2 a}{b^2}$$

одинакова для всех планет. Действительно, за период τ обращения вокруг Солнца радиус-вектор заметает всю площадь эллипса. Значит,

$$\frac{c}{2}\tau=\pi ab.$$

Поэтому

$$\mu=\frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}.$$

Но отношение a^3/τ^2 для всех планет совпадает. Отсюда и следует постоянство величины μ. Если принять $\mu=fM$, где M — масса Солнца, то сила, действующая на планету, представляется в виде, указанном в утверждении теоремы.

Достаточность. Пусть сила выражается указанной в утверждении теоремы формулой. Выберем произвольно полярную ось. Воспользуемся второй формулой Бине

$$-\frac{\mu m}{r^2}=-\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

Выполнив очевидные преобразования и обозначив $u=r^{-1}$, получим уравнение траектории

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u=\frac{\mu}{c^2}.$$

Это уравнение аналогично уравнению осциллятора с постоянной возмущающей силой. Решение уравнения имеет вид

$$u=A\cos(\vartheta-\vartheta_0)+\frac{\mu}{c^2},$$

или

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\vartheta-\vartheta_0)},\quad e=\frac{Ac^2}{\mu},\quad p=\frac{c^2}{\mu}.$$

Полученная формула описывает все конические сечения и только их. Существование интеграла площадей обеспечивает выполнение третьего закона Кеплера.□

Закон всемирного тяготения, сформулированный Ньютоном, гласит, что *если размерами материальных тел можно пренебречь по сравнению с расстояниями между ними, то любые два таких тела притягиваются друг к другу с силой, по модулю равной*

$$F=f\frac{m_1 m_2}{\rho^2},$$

где f — гравитационная постоянная, m_1, m_2 — массы тел, ρ — расстояние между ними. Сила притяжения направлена вдоль прямой, соединяющей эти тела.

В соответствии с теоремой 3.11.2 движение планет солнечной системы происходит так, как будто они взаимодействуют только с Солнцем и не взаимодействуют друг с другом. По закону всемирного тяготения на каждую планету действует не только Солнце, но и другие планеты. Однако сила притяжения Солнца существенно превосходит влияние других планет. Точность измерений, доступных Кеплеру, не позволяла уловить это влияние.

Рассмотрим две изолированные материальные точки с массами m_1 и m_2. Пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы этих точек. Размерами тел, соответствующих материальным точкам, пренебрежем. Тогда

сила $\mathbf{F}_{12}$ притяжения второго тела первым и сила $\mathbf{F}_{21}$ притяжения первого тела вторым выражаются формулами

$$\mathbf{F}_{12}=-f\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r},\quad \mathbf{F}_{21}=f\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$. Уравнения движения точек принимают вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2}=f\frac{m_2}{r^3}\mathbf{r},\quad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2}=-f\frac{m_1}{r^3}\mathbf{r}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, найдем

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{m_1+m_2}{r^3}\mathbf{r}.$$

В небесной механике задача о движении двух материальных точек под действием сил всемирного тяготения называется *задачей двух тел.* Полученный результат можно сформулировать следующим образом. В задаче двух тел относительное движение точек описывается уравнением движения, справедливым для одной материальной точки в поле центральной ньютонианской силы (теорема 3.11.2), когда в неподвижном центре помещена притягивающая масса, равная сумме масс взаимодействующих тел.

Таким образом, при изучении движения планеты относительно Солнца следует принять массу M равной сумме масс Солнца и планеты. Однако масса планеты в данном случае пренебрежимо мала.

Пусть в задаче двух тел

$$\mathbf{r}_c=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2},\quad \mathbf{v}_c=\frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1+m_2}$$

— соответственно радиус-вектор и скорость центра масс материальных точек. Умножив уравнение движения первой точки на m_1, уравнение движения второй точки на m_2 и сложив их, получим

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2)=0.$$

Следовательно, $\mathbf{v}_c$ — постоянный вектор, и

$$\mathbf{r}_c=(t-t_0)\mathbf{v}_c+\mathbf{r}_c(t_0),$$

где $\mathbf{r}_c(t_0)$ — начальное значение радиуса-вектора центра масс. Значит, центр масс точек движется в инерциальном пространстве равномерно. Если нам удалось найти $\mathbf{r}(t)$, то радиусы-векторы точек можно вычислить по формулам

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_c-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}(t),\quad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_c+\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}(t).$$

С учетом сказанного обратимся к задаче о движении материальной точки в поле ньютонианской силы притяжения к неподвижному центру O (пример 3.4.2). Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r},$$

где μ — постоянная, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{v}$ — скорость точки относительно центра O. Оно допускает интеграл энергии

$$\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=h$$

и интеграл площадей

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\mathbf{c}.$$

Постоянный вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен плоскости траектории материальной точки. Траектория точки в небесной механике называется *орбитой*. Вектор $\mathbf{c}$ определяется начальными значениями радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$ и скорости $\mathbf{v}_0$ при $t=t_0$:

$$\mathbf{c}=\mathbf{r}(t_0)\times\mathbf{v}(t_0)=\mathbf{r}_0\times\mathbf{v}_0,\quad c=|\mathbf{c}|=r_0 v_0\sin(\widehat{\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0}).$$

Выполним преобразование

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{c})=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{c}=-\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r}\times\mathbf{c})=-\frac{\mu}{r^3}\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right]=$$
$$=-\frac{\mu}{r^3}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)-\frac{d\mathbf{r}}{dt}r^2\right]=-\frac{\mu}{r^3}\left[\mathbf{r}\left(r\frac{dr}{dt}\right)-\frac{d\mathbf{r}}{dt}r^2\right]=$$
$$=\mu\left(-\frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt}+\frac{1}{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\mathbf{r}\right).$$

Следовательно, вектор

$$\mathbf{v}\times\mathbf{c}-\frac{\mu}{r}\mathbf{r}=\mathcal{L}$$

остается постоянным для конкретного движения точки. Постоянный вектор $\mathcal{L}$ называется *вектором Лапласа*, а полученный первый интеграл — *интегралом Лапласа.*

Теорема 3.11.3. (Лаплас). *Вектор Лапласа направлен вдоль большой полуоси в сторону перицентра орбиты.*

Доказательство. Напомним, что перицентр есть ближайшая к притягивающему центру точка орбиты. Следовательно, в перицентре производная от модуля радиуса-вектора по времени должна быть равна нулю: $\dot{\mathbf{r}}=0$. Справедливо тождество

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}.$$

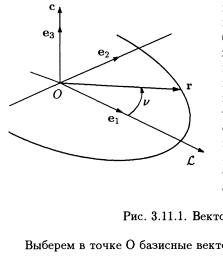
Пусть $\mathbf{r}_\pi$ — радиус-вектор перицентра, $\mathbf{v}_\pi$ — скорость точки в перицентре. Тогда, очевидно, $\mathbf{r}_\pi\cdot\mathbf{v}_\pi=0$, т.е. радиус-вектор и скорость в перицентре взаимно ортогональны. Умножим интеграл Лапласа скалярно на $\mathbf{v}$:

$$-\frac{\mu}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})=\mathcal{L}\cdot\mathbf{v}.$$

Отсюда ясно, что в перицентре $\mathcal{L}\cdot\mathbf{v}_\pi=0$, а значит, $\mathcal{L}\parallel\mathbf{r}_\pi$. Из интеграла энергии заключаем, что значение скорости в перицентре должно быть максимальным. Имеем $\mathbf{v}\perp\mathbf{c}$. Из интеграла Лапласа следует

$$vc=|\mathcal{L}+\frac{\mu}{r}\mathbf{r}|.$$

Правая часть этого выражения максимальна тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}$ совпадает по направлению с $\mathcal{L}$.□



Вектор кинетического момента и вектор Лапласа позволяют построить репер, в котором орбита материальной точки, движущейся в поле центральной ньютонианской силы, представляется каноническим уравнением в полярных координатах. При этом вектор Лапласа направлен из притягивающего центра в перицентр орбиты, а вектор кинетического момента перпендикулярен плоскости орбиты.

Рис. 3.11.1. Вектор Лапласа

Выберем в точке O базисные векторы (рис. 3.11.1)

$$\mathbf{e}_1=\mathcal{L}/|\mathcal{L}|,\quad \mathbf{e}_3=\mathbf{c}/|\mathbf{c}|,\quad \mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1.$$

Орбита материальной точки лежит в плоскости векторов $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$. Если в этой плоскости ввести полярные координаты, для которых

полярный угол ν отсчитывается от направления вектора $\mathbf{e}_1$, то орбита точки выразится уравнением

$$r=\frac{p}{1+e\cos\nu}.$$

При доказательстве теоремы 3.11.2 был вычислен фокальный параметр $p=c^2/\mu$. Найдем связь между эксцентриситетом e и начальными условиями. Используя первую формулу Бине, получим

$$v^2=\frac{c^2}{p^2}(1+e^2+2e\cos\nu).$$

Подставим это выражение в интеграл энергии:

$$\frac{1+e^2+2e\cos\nu}{2p}-\frac{1+e\cos\nu}{p}=\frac{h}{\mu}.$$

Отсюда

$$e^2=1+\frac{2ph}{\mu}.$$

Тем самым тип орбиты зависит только от знака h постоянной энергии. Возможны следующие случаи.

1. При $h<0$ получаем $e<1$, и орбита — эллипс.
2. При $h=0$ получаем $e=1$, и орбита — парабола.
3. При $h>0$ получаем $e>1$, и орбита — гипербола.
4. При $h=-\mu/(2p)$ получаем $e=0$, и орбита — окружность.

Для того чтобы постоянная энергии h обратилась в нуль, начальная скорость должна быть равна

$$v_0=v_{\text{II}}=\sqrt{2\mu/r_0}.$$

Это — *вторая космическая скорость.* Она минимальная среди всех скоростей, при которых материальная точка неограниченно удаляется от притягивающего центра.

Для того чтобы получить круговую орбиту, надо обеспечить равенство

$$v_0=v_{\text{I}}=\sqrt{\mu/r_0}$$

и направить вектор скорости перпендикулярно радиусу-вектору. Величина v_{I} называется *первой космической скоростью.* Очевидно, что

$$v_{\text{II}}=v_{\text{I}}\sqrt{2}.$$

Определим закон движения точки по орбите. При движении точки в поле центральной силы секторная скорость постоянна:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{c}{2}.$$

Пусть S заметается от луча с направлением $\mathbf{e}_1$ (в небесной механике прямая, проходящая через притягивающий центр параллельно вектору $\mathbf{e}_1$, называется *линией апсид*). Обозначим t_π время прохождения через перицентр. Тогда

$$S = \frac{c}{2}(t - t_\pi).$$

С другой стороны (см. пример 3.7.2),

$$dS = \frac{1}{2}r^2\,d\nu.$$

Отсюда

$$S = \frac{p^2}{2}\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} = S(\nu).$$

Из уравнения

$$S(\nu) = \frac{c}{2}(t - t_\pi)$$

найдем $\nu(t)$ и тем самым установим закон движения

$$r_1 = r(\nu)\cos\nu, \quad r_2 = r(\nu)\sin\nu, \quad r_3 = 0.$$

Уравнение для определения $\nu(t)$ оказывается трансцендентным. Оно решается численно.

Пример 3.11.1. Определим закон движения точки по эллиптической орбите. Имеем $e < 1$. Сделаем замену переменной

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Переменную u называют *эксцентрической аномалией*. Дифференцируя, получим

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\,du.$$

Кроме того,

$$1 + e\cos\nu = \frac{1-e^2}{1-e\cos u}.$$

Поэтому

$$\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\int_0^u (1-e\cos u)\,du = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(u - e\sin u).$$

Пусть a — большая полуось эллипса. Учтем, что

$$p = a(1-e^2), \quad c = \sqrt{\mu p}.$$

Тогда получим

$$u - e\sin u = \sqrt{\mu a^{-3}}(t - t_\pi).$$

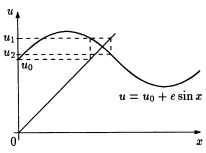
Это — *уравнение Кеплера*. Для его численного решения можно использовать рекуррентную последовательность

$$u_0 = \sqrt{\mu a^{-3}}(t - t_\pi), \quad u_i = u_0 + e\sin u_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Процесс получения приближений u_i продолжается пока

$$|u_i - u_{i-1}| > \epsilon,$$

где ϵ — заданная точность вычислений. Рис. 3.11.2 иллюстрирует процедуру получения u_i. Очевидна сходимость процесса. На рис. 3.11.3 изображены эксцентрическая и истинная аномалии данной точки M орбиты. С центром O' в середине большой оси эллипса построена окружность радиуса a. Через точку M, определенную истинной аномалией ν, проведен перпендикуляр к большой оси эллипса. Он пересекает окружность в точке M'. Угол между отрезком $O'M'$ и направлением на перицентр есть эксцентрическая аномалия u.◇

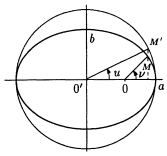


Уравнение Кеплера можно решать методом простой итерации. На рисунке представлен результат трех первых итераций. Видно, что отображение через итерацию оказывается сжимающим. Число арифметических операций для каждой итерации невелико, и процесс сходится достаточно быстро.

Рис. 3.11.2. Решение уравнения Кеплера

Вычисление функции $\nu(t)$ завершает решение задачи Коши об определении закона движения материальной точки по заданным начальным значениям радиуса-вектора и вектора скорости.

Рассмотрим теперь краевую задачу. *Баллистика* — это наука о движении снарядов, мин, бомб, неуправляемых ракет в поле силы тяжести. Одна из основных задач баллистики состоит в построении



Эксцентрическая аномалия есть центральный угол образа M' точки M после превращения эллипса в окружность пропорциональным его растяжением вдоль оси ординат. Эксцентрическая аномалия так же, как и истинная аномалия, однозначно определяет положение точки на эллипсе. Связь между эксцентрической аномалией и временем движения по орбите дается уравнением Кеплера.

Рис. 3.11.3. Эксцентрическая аномалия

траектории, проходящей через две заданные точки пространства *(задача о попадании)*.

Рассмотрим задачу о попадании в ньютонианском центральном поле силы. Пусть O — центр силы, а M и M' — две точки пространства, через которые необходимо провести траекторию материальной точки. Предположим, что три точки O, M, M' не лежат на одной прямой. Они определяют плоскость $\mathcal{P}$, которая содержит искомую траекторию.

Примем для определенности, что эта траектория — эллипс. Тогда притягивающий центр O находится в одном из фокусов эллипса. Задача будет решена, если указать второй фокус O'.

По свойству эллипса имеем

$$r + \rho = r' + \rho',$$

где r и ρ — расстояния от точки M до точек O и O' соответственно, а r' и ρ' — от точки M' до тех же точек. Следовательно,

$$\rho' - \rho = r - r'.$$

Но по условию задачи величины r и r' фиксированы. Поэтому все допустимые положения второго фокуса O' стеснены условием, что разность их расстояний ρ' и ρ до заданных точек M и M' одинакова. Такие точки O' образуют гиперболу, и мы имеем бесчисленное множество решений.

Зададим модуль скорости в точке M. Тем самым задана постоянная энергии h. Справедлива формула

$$a = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{\mu}{2h}.$$

Значит, в этом случае нам известна и длина большой полуоси. По основному свойству эллипса имеем

$$r + \rho = r' + \rho' = 2a,$$

или

$$\rho = 2a - r, \quad \rho' = 2a - r'.$$

Из первого равенства следует, что точка O' лежит на окружности радиуса $2a - r$ с центром в M, а из второго равенства следует, что точка O' лежит на окружности радиуса $2a - r'$ с центром в M'.

Две окружности либо пересекаются в двух точках, либо касаются, либо не пересекаются. Значит, имеются либо два решения задачи, либо одно, либо ни одного.

Изучим случай, когда имеется лишь одно решение. Тогда точка O' должна лежать на прямой MM'. Поскольку искомая траектория есть эллипс, точка O' расположена между точками M и M'. Касание окружностей будет внешним, и мы имеем, следовательно, случай предельно возможного удаления точки M' от M для заданного значения начальной скорости. Найдем все точки M', удовлетворяющие этому условию. В соответствии с принятыми обозначениями

$$r' + MM' = r' + \rho' + \rho = 2a + 2a - r = 4a - r.$$

Ясно, что все точки M', для которых решение задачи о попадании единственно, лежат на эллипсе с фокусами в точках O и M и с большой полуосью

$$a' = \frac{1}{2}(4a - r) = -\frac{\mu}{h} - \frac{r}{2}.$$

Если этот эллипс вращать вокруг прямой OM, то получим эллипсоид, который в баллистике называется *эллипсоидом безопасности*. В точки, лежащие вне этого эллипсоида, невозможно попасть из заданной точки M. Краевая задача не имеет решения. Для любой точки внутри эллипсоида безопасности имеются два решения краевой задачи.

Если начальную скорость увеличивать, то $h \to 0$, а большая полуось эллипсоида безопасности неограниченно возрастает. Это значит, что для попадания из точки M в любую точку пространства не требуется развивать начальную скорость более второй космической скорости. На этом закончим анализ задачи о движении в центральном поле тяготения. В заключение сделаем следующие замечания.

Замечание 3.11.1. Задача двух тел верно отражает лишь основные закономерности взаимодействия планеты с Солнцем. Вместе с

тем имеется ряд особенностей движения (например, отклонения траекторий от конических сечений и др.), которые не могут быть объяснены без учета влияния сил притяжения от других планет солнечной системы. Соответствующая задача называется задачей n тел.

Пусть имеется n материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_n$, взаимодействующих друг с другом по закону тяготения Ньютона. Система уравнений движения для задачи n тел имеет вид

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_{i\neq j}\frac{fm_im_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиусы-векторы материальных точек. Аналитическое исследование этой задачи затруднительно даже в случае $n = 3$ (задача трех тел). Эффективными здесь могут быть методы математического моделирования на ЭВМ.

Замечание 3.11.2. Применение закона всемирного тяготения в форме, предложенной Ньютоном, ограничено условием малости размеров притягивающихся тел по сравнению с расстоянием между ними. Когда размеры тел существенны, взаимное гравитационное воздействие может быть найдено из закона Ньютона с помощью интегрирования.

Теорема 3.11.4. *Пусть задана материальная точка m пренебрежимо малых размеров по сравнению с ее расстоянием r до центра однородного шара массы M и радиуса R. Тогда силовая функция $U(\mathbf{r})$ гравитационного воздействия шара на точку выражается формулой*

$$U(\mathbf{r}) = \begin{cases} f\dfrac{Mm}{r}, & \text{если } r \geq R, \\ f\dfrac{Mm}{2R^3}(3R^2 - r^2), & \text{если } r < R. \end{cases}$$

Доказательство теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. Пусть в плоскости $\mathcal{P}$ лежит однородный материальный обруч радиуса ρ и массы M_1, а на оси, перпендикулярной к плоскости $\mathcal{P}$ и проходящей через центр обруча, расположена материальная точка массы m. Начало отсчета поместим в центр обруча. Расстояние от точки m до плоскости $\mathcal{P}$ обозначим y. Чтобы найти силовую функцию $U_1(y)$ гравитационного воздействия со стороны обруча на точку m, разобьем обруч на одинаковые малые отрезки с угловым размером $d\varphi$ относительно центра обруча. Искомая силовая функция $U_1(y)$ получается суммированием силовых функций, соответствующих каждому малому отрезку:

$$U_1(y) = \int_0^{2\pi} f\frac{mM_1\,d\varphi}{2\pi\sqrt{\rho^2+y^2}} = f\frac{mM_1}{\sqrt{\rho^2+y^2}}.$$

Этап 2. Пусть в плоскости $\mathcal{P}$ расположен круговой однородный диск массы M_2 и радиуса l. На оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр, расположена материальная точка массы m. Начало отсчета поместим в центр диска. Расстояние от точки m до плоскости $\mathcal{P}$ обозначим y. Чтобы найти силовую функцию $U_2(y)$, разобьем диск концентрическими окружностями. Пусть ρ — радиус такой окружности, а $d\rho$ — ширина кольца между соседними окружностями. С точностью до малых второго порядка масса кольца $M_1 = 2\pi M_2\rho\,d\rho/(\pi l^2)$. Искомая силовая функция получается суммированием силовых функций, соответствующих всем кольцам разбиения. Воспользуемся результатом первого этапа:

$$U_2(y) = \frac{f\,mM_2}{l^2}\int_0^l \frac{d(\rho^2)}{\sqrt{\rho^2+y^2}} = 2\frac{f\,mM_2}{l^2}\left(\sqrt{y^2+l^2} - |y|\right).$$

Этап 3. Пусть имеются однородный шар радиуса R и массы M и материальная точка массы m, расположенная от центра шара на расстоянии r. Разобьем шар плоскостями, перпендикулярными к прямой, соединяющей центр шара и точку m. Пусть $\mathcal{P}$ — одна из таких плоскостей. Расстояние от центра O шара до этой плоскости обозначим x. Будем считать $x > 0$, когда плоскость $\mathcal{P}$ расположена между точками O и m, и $x < 0$ в противоположном случае. В сечении шара плоскостью $\mathcal{P}$ получается круг радиуса $l = \sqrt{R^2 - x^2}$, а расстояние y от точки m до плоскости $\mathcal{P}$ дается равенством $y = r - x$. С точностью до малых второго порядка слой, вырезаемый из шара соседними плоскостями указанного разбиения, имеет массу

$$M_2 = \frac{3M}{4\pi R^3}\,\pi l^2\,dx.$$

Используя результат второго этапа, получаем выражение для искомой силовой функции

$$U(\mathbf{r}) = f\frac{3Mm}{2R^3}\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{r^2 - 2rx + R^2} - |r - x|\right)dx.$$

В зависимости от значения r следует рассмотреть два случая:

а) $r \geq R$. Тогда $r - x \geq 0$ для всего интервала интегрирования. Поэтому знак модуля можно заменить скобками, и

$$U(\mathbf{r}) = f\frac{Mm}{r}.$$

б) $r < R$. Тогда по определению модуля будем иметь

$$U(\mathbf{r}) = f\frac{3Mm}{2R^3}\left[\int_{-R}^{R}\sqrt{r^2 - 2rx + R^2}\,dx - \int_{-R}^{r}(r - x)\,dx - \int_{r}^{R}(x - r)\,dx\right] =$$

$$= f\frac{3Mm}{2R^3}\left\{\frac{1}{3r}\left[(R+r)^3 - (R-r)^3\right] - (r^2 + R^2)\right\} = f\frac{3Mm}{2R^3}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

Учитывая, что силовая функция определена с точностью до произвольной постоянной, получаем формулу, содержащуюся в утверждении теоремы.□

Следствие 3.11.1. *Когда материальное тело малых размеров находится вне материального однородного шара (например, спутник Земли), то независимо от расстояния между ними силу притяжения тела шаром можно получить, сосредоточив всю массу шара в его центре.*

Следствие 3.11.2. *Два материальных однородных шара независимо от расстояния между ними притягиваются друг к другу с силой притяжения точечных масс, равных массам шаров и сосредоточенных в их центрах.*

Замечание 3.11.3. Этапы, выделенные в доказательстве теоремы 3.11.4, имеют самостоятельную ценность. Вспомним, что закон электростатического взаимодействия точечных зарядов имеет вид закона Ньютона, когда вместо масс используются заряды, а вместо гравитационной постоянной — диэлектрическая проницаемость. Пусть точечный положительный заряд q находится между бесконечными противоположно заряженными пластинами. Примем, что первая пластина заряжена отрицательно с плотностью заряда $-\sigma$. Расстояние от точечного заряда до первой пластины обозначим y_1, а до второй пластины — y_2. Цилиндром с осью, перпендикулярной к пластинам и проходящей через точечный заряд, вырежем в этих пластинах два круга радиуса l. В соответствии с этапом 2 доказательства теоремы 3.11.4 силовая функция от воздействия кругов на точечный заряд будет выражаться формулой

$$U^*(y_1, y_2) = U_1(y_1) + U_2(y_2) = k\frac{2\pi\sigma l^2 q}{l^2}\left[\sqrt{y_1^2 + l^2} - \sqrt{y_2^2 + l^2} + |y_2| - |y_1|\right],$$

где k — диэлектрическая проницаемость среды. Чтобы найти силовую функцию U для бесконечных пластин, следует выполнить предельный переход

$$U(y_1, y_2) = \lim_{l\to\infty} U^*(y_1, y_2) = 2\pi k\sigma q(|y_2| - |y_1|).$$

Пусть расстояние между пластинами равно d. Примем $y_2 = y_1 - d$. Тогда

$$U(y_1) = 2\pi k\sigma q\begin{cases} d & \text{при } y_1 < 0; \\ d - 2y_1 & \text{при } 0 \leq y_1 \leq d; \\ -d & \text{при } y_1 > d. \end{cases}$$

Таким образом, силовое поле отсутствует вне пластин. Между пластинами силовое поле однородно, а силы направлены перпендикулярно пластинам.

§ 3.12. Сферический маятник

Сферическим маятником называется материальная точка, которая принуждена под действием наложенных на нее связей двигаться по поверхности неподвижной сферы в поле силы тяжести. Такая связь может быть реализована, например, с помощью жесткого стержня, соединяющего подвижную точку с центром сферы. Связь будем предполагать идеальной, так что на точку действуют сила тяжести $\mathbf{P}$ и реакция связи $\mathbf{N}$, направленная по радиусу к центру сферы.

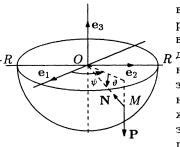
Пусть начало координатного репера $Oe_1e_2e_3$ совпадает с центром сферы, плоскость векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ перпендикулярна силе тяжести $\mathbf{P}$, а вектор $\mathbf{e}_3$ параллелен $\mathbf{P}$, так что $\mathbf{P} = -mg\mathbf{e}_3$, m — масса точки, g — ускорение силы тяжести. Воспользуемся сферической системой координат (рис. 3.12.1), в которой угол ϑ характеризует широту точки на поверхности сферы, а угол ψ — долготу (см. примеры 3.6.2 и 3.6.6). Поскольку радиус сферы R не изменяется, кинетическая энергия T и силовая функция U примут вид

$$T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\cos^2\vartheta\,\dot{\psi}^2), \quad U = -mgR\sin\vartheta.$$

Существует интеграл энергии

$$R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\cos^2\vartheta\,\dot{\psi}^2 = -2gR\sin\vartheta + h,$$

где h — постоянная в силу уравнений движения. В нижнем положении маятника имеем $\vartheta = -\pi/2$.



Расстояние R между точкой O подвеса и материальной точкой M сферического маятника не меняется во все время движения. Таким образом, движение материальной точки стеснено геометрической идеальной связью. Реакция $\mathbf{N}$ связи направлена по нормали к поверхности сферы. Положение точки M в пространстве однозначно определяется заданием ее широты и долготы на сфере радиуса R с началом в точке подвеса O маятника.

Рис. 3.12.1. Сферический маятник

Так как реакция связи $\mathbf{N}$ направлена по радиусу, будет справедлив интеграл площадей относительно вертикальной оси, проходящей через центр сферы (теорема 3.7.6):

$$\dot{\psi}R^2\cos^2\vartheta = c.$$

С учетом этого выражения интеграл энергии примет вид

$$R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{c^2}{R^2\cos^2\vartheta} = -2gR\sin\vartheta + h.$$

Сделаем замену переменной $z = R\sin\vartheta$. По смыслу z — вертикальная координата материальной точки. Тогда

$$R^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (h - 2gz)(R^2 - z^2) - c^2.$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$R\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(h-2gz)(R^2-z^2) - c^2}} = \pm(t - t_0).$$

Многочлен, стоящий под знаком радикала, имеет третью степень. Поэтому левая часть содержит эллиптический интеграл. Полученное равенство определяет закон изменения $z(t)$, и мы можем теперь узнать зависимость $\vartheta(t)$, а из интеграла площадей и $\psi(t)$.

Обратимся к задаче качественного исследования движения сферического маятника. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть вектор начальной скорости принадлежит вертикальной плоскости, содержащей центр сферы и материальную точку. Это значит, что в начальный момент времени $\psi = 0$ и поэтому $c = 0$. Следовательно, $\psi \equiv 0$, и траектория движения будет принадлежать начальной вертикальной плоскости. Имеем изученный выше математический маятник (определение 3.9.1).

Случай 2. Пусть $c \neq 0$. Тогда знак $\dot\psi$ будет постоянным, и ψ будет монотонной функцией времени. Рассмотрим многочлен

$$f(z) = (h - 2gz)(R^2 - z^2) - c^2.$$

Имеем

$$f(\pm R) = -c^2 < 0, \quad f(+\infty) > 0, \quad f(-\infty) < 0.$$

Таким образом, на интервале $(R, +\infty)$ имеется по крайней мере один корень γ уравнения $f(z) = 0$. Действительное движение соответствует неотрицательным значениям $f(z)$, причем таким, для которых

$$-R \le z \le R.$$

Поскольку начальное значение dz/dt вещественно и отлично от нуля, то в начальный момент времени будет $f(z) > 0$, а так как в этот же момент справедливо $-R \le z \le R$, то в интервале $(-R, R)$ имеются действительные корни α и β уравнения $f(z) = 0$.

Представим многочлен $f(z)$ в виде

$$f(z) = 2g\left(z^3 - \frac{h}{2g}z^2 - R^2 z + \frac{hR^2 - c^2}{2g}\right) = 2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Сравним коэффициенты при первой степени z:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -R^2.$$

Отсюда

$$\gamma = -\frac{R^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} > 0.$$

Корни α и β по модулю меньше R. Следовательно, должно быть

$$\alpha + \beta < 0.$$

Поэтому один из корней α или β отрицателен. Пусть $\alpha < 0$. Корень $\beta > \alpha$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Примем для определенности, что в начальный момент времени движения при $z = z_0$ задано $\dot z = \dot z_0 < 0$. Тогда в выражении

$$R\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{f(z)}$$

надлежит взять знак "$-$", и z будет уменьшаться до тех пор, пока оно не достигнет значения α. Производная $\dot z$ может изменить знак, лишь когда $f(z) = 0$. Продифференцировав по времени равенство

$$\dot z^2 = \frac{f(z)}{R^2},$$

найдем

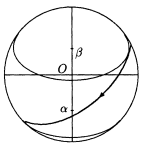
$$\ddot z = \frac{1}{2R^2}\frac{df}{dz}.$$

Если корни α и β простые, то

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_\alpha \neq 0, \quad \left.\frac{df}{dz}\right|_\beta \neq 0.$$

Значит, в точках α и β знак скорости $\dot z$ должен изменяться на противоположный.

Геометрическая иллюстрация движения сферического маятника в случае простых корней α и β приведена на рис. 3.12.2. Поверхность



Траектория сферического маятника изображена толстой линией и заключена в полосе на сфере, расположенной между двумя параллельными горизонтальными плоскостями, имеющими высоту α и β относительно точки подвеса соответственно. В сечении сферы указанными плоскостями получаются окружности, и траектория касается этих окружностей, так что общая касательная горизонтальна.

Рис. 3.12.2. Движение сферического маятника: $\alpha \neq \beta$

сферы пересечена двумя горизонтальными плоскостями, проходящими через точки вертикальной оси со значениями $z = \alpha$ и $z = \beta$. В сечении сферы получаются две параллели. Траектория материальной точки на сфере расположена между этими параллелями и гладко их касается.

В случае кратного корня $z_0 = \alpha = \beta$ две параллели сливаются, и точка описывает окружность в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{e}_3$. Имеем конический маятник. Условие кратности корней

состоит в том, что совместно должны быть выполнены равенства

$$f(z_0) = (h - 2gz_0)(R^2 - z_0^2) - c^2 = 0,$$

$$\left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} = -2g(R^2 - z_0^2) - 2z_0(h - 2gz_0) = 0.$$

Из интеграла энергии и интеграла площадей следует, что если $\dot z_0 = 0$, то должно быть выполнено соотношение

$$h - 2gz_0 = (R^2 - z_0^2)\dot\psi^2.$$

Из второго условия кратности корней найдем

$$\dot\psi^2 = -\frac{g}{z_0}.$$

Отсюда ясно, что случай кратного корня можно реализовать только при отрицательных значениях координаты z_0.

Выполним расчет силы реакции $\mathbf{N}$, возникающей при произвольном движении сферического маятника. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, P — вес материальной точки, N — модуль реакции. Уравнение движения маятника имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{N}{R}\mathbf{r} - P\mathbf{e}_3.$$

Продифференцировав дважды уравнение $\mathbf{r}^2 = R^2$, найдем $\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r} = -v^2$. Если теперь учесть уравнение движения и интеграл энергии, то

$$N = \frac{1}{R}(mh - 3Pz).$$

Тем самым модуль реакции зависит только от вертикальной координаты маятника.

Рассмотрим движение проекции на горизонтальную плоскость материальной точки сферического маятника в случае его малых отклонений от нижнего положения равновесия. Представим радиус-вектор $\mathbf{r}$ маятника в виде суммы

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\text{п} + z\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{r}_\text{п}$ — горизонтальный вектор, причем $\mathbf{r}_\text{п}/R$ — малая величина. Относительно величины z будем иметь

$$z = -\sqrt{R^2 - r_\text{п}^2} \approx -R\left(1 - \frac{r_\text{п}^2}{2R^2}\right).$$

Следовательно,

$$N \approx \frac{mh}{R} + 3P - 3P\frac{r_\text{п}^2}{2R^2}.$$

Другими словами, для малых отклонений маятника от нижнего положения равновесия модуль N реакции связи оказывается постоянным с точностью до членов второго порядка малости по координатам:

$$N \approx N_0 = \frac{mh}{R} + 3P.$$

Отметим, что если малы также и скорости, то $h \approx -2gR$ и $N_0 \approx P$. С точностью до членов третьего порядка малости уравнение движения в проекции на горизонтальную плоскость принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_\text{п} + \omega^2\mathbf{r}_\text{п} = 0, \quad \omega^2 = N_0/(mR).$$

Решение такого уравнения выражается равенством

$$\mathbf{r}_\text{п} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t,$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, принадлежащие горизонтальной плоскости и вычисляемые по начальным условиям. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, то конец вектора $\mathbf{r}_\text{п}$ описывает эллипс (замкнутую кривую второго порядка). Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то конец вектора $\mathbf{r}_\text{п}$ движется по отрезку прямой. Начало координат для этого отрезка служит серединой.

Выяснение остальных конкретных подробностей движения сферического маятника предоставим читателю.

§ 3.13. Относительное движение

В соответствии с принципами относительности и детерминированности (см. § 3.2, § 3.3) второй закон Ньютона, связывающий ускорение материальной точки с действующими на нее от других объектов силами, справедлив и имеет одинаковое выражение для всех инерциальных систем отсчета. Если система отсчета неинерциальна, то связь между ускорением материальной точки и приложенными к ней силами будет более сложной.

Теорема 3.13.1. *Уравнение относительного движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета имеет вид*

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + (-m\mathbf{w}_e) + (-m\mathbf{w}_c),$$

где $\mathbf{w}_e$ — переносное ускорение, а $\mathbf{w}_c$ — кориолисово ускорение:

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \dot{\boldsymbol\omega}\times\mathbf{r} + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\mathbf{r}),$$
$$\mathbf{w}_c = 2\,\boldsymbol\omega\times\mathbf{v}_r,$$

$\mathbf{w}_0$ — ускорение начала системы отсчета, $\boldsymbol\omega$ — ее угловая скорость, $\dot{\boldsymbol\omega}$ — угловое ускорение, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки в подвижном репере, $\mathbf{v}_r$ — ее относительная скорость.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Кориолиса 2.16.2. Из нее следует, что ускорение точки в инерциальной системе отсчета (абсолютное ускорение) выражается следующим образом:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c.$$

Осталось подставить правую часть в закон Ньютона.□

Таким образом, движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета можно изучать точно так же, как и в инерциальной системе, но к силам взаимодействия между физическими объектами (абсолютным силам), учитываемым в инерциальной системе, следует добавить силы, связанные с движением неинерциальной системы и называемые *силами инерции:*

$$\mathbf{F}_e = -m\mathbf{w}_e, \quad \mathbf{F}_c = -m\mathbf{w}_c.$$

Перено́сная сила $\mathbf{F}_e$ возникает из-за переносного ускорения. *Кориоли́сова сила* $\mathbf{F}_c$ возникает из-за ускорения Кориолиса.

Теорема 3.13.2. (О кинетической энергии относительного движения). *Дифференциал кинетической энергии относительного движения равен работе абсолютной силы и переносной силы инерции на относительном действительном элементарном перемещении точки $d\mathbf{r}$:*

$$dT_r = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_e\cdot d\mathbf{r}, \quad T_r = \frac{mv_r^2}{2}.$$

Доказательство. Чтобы получить закон изменения кинетической энергии относительного движения, умножим уравнение относительного движения теоремы 3.13.1 на вектор $\mathbf{v}_r$ и учтем, что

$$\mathbf{w}_r = \frac{\tilde d\mathbf{v}_r}{dt}, \quad \frac{\tilde d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{w}_c\cdot\mathbf{v}_r = 2(\boldsymbol\omega\times\mathbf{v}_r)\cdot\mathbf{v}_r = 0,$$

где символ "$\tilde d$" означает дифференцирование компонент вектора в неинерциальном репере. После преобразований получим утверждение теоремы.□

Теорема 3.13.3. *Если компоненты ускорения $\mathbf{w}_0$ сохраняются в неинерциальном репере и угловая скорость $\boldsymbol\omega$ этого репера постоянна, то переносная сила инерции $\mathbf{F}_e$ потенциальна с силовой функцией*

$$U_e = -m\left[\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol\omega\cdot\mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right].$$

Доказательство. Напомним, что сила потенциальна тогда и только тогда, когда ее работа на элементарном перемещении точки есть полный дифференциал. Но по условию теоремы имеем $\dot{\boldsymbol\omega} = 0$. Поэтому

$$\mathbf{w}_e\cdot\tilde d\mathbf{r} = \mathbf{w}_0\cdot\tilde d\mathbf{r} + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\mathbf{r})\cdot\tilde d\mathbf{r} = \mathbf{w}_0\cdot\tilde d\mathbf{r} + [(\boldsymbol\omega\cdot\mathbf{r})\boldsymbol\omega - \omega^2\mathbf{r}]\tilde d\mathbf{r} =$$
$$= \tilde d\left[\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol\omega\cdot\mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right].□$$

Теорема 3.13.4. (Интеграл энергии в относительном движении). *Если связи, стесняющие относительное движение точки, идеальны и таковы, что ее действительное элементарное перемещение принадлежит множеству виртуальных, активные силы потенциальны с потенциальной энергией Π и переносная сила инерции $\mathbf{F}_e$ обладает силовой функцией U_e, то в относительном движении справедлив интеграл энергии*

$$T_r + \Pi - U_e = h.$$

Доказательство. Сформулированное утверждение непосредственно следует из теоремы 3.13.2.□

Пример 3.13.1. Пусть система отсчета движется поступательно с постоянным ускорением $\mathbf{a}$ (например, вагон ускоряющегося поезда). В ней помимо активной силы $\mathbf{F}$ действует сила инерции $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}$. Предположим, что активная сила есть сила тяжести: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения. Относительное движение и равновесие будут иметь специфические особенности.

1. Рассмотрим движение математического маятника. Момент сил относительно точки подвеса маятника будет равен нулю только тогда, когда отрезок между материальной точкой и точкой подвеса окажется параллельным вектору $\boldsymbol\Phi = m(\mathbf{g} - \mathbf{a})$. Направление этого вектора следует взять в качестве начала отсчета угла отклонения маятника. Период малых колебаний, очевидно, будет

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\mathbf{g} - \mathbf{a}|}},$$

где l — длина маятника.

2. Известно, что свободная поверхность жидкости, покоящейся в некотором силовом поле, совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей этого поля. Поверхность жидкости, покоящейся под действием силы тяжести в инерциальной системе отсчета, представляет собой горизонтальную плоскость, а эквипотенциальная поверхность силового поля задается уравнением

$$U_\tau = m\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = c,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки поверхности. В системе отсчета, движущейся поступательно с ускорением $\mathbf{a}$, эквипотенциальная поверхность удовлетворяет уравнению

$$U = U_\tau + U_e = m(\mathbf{g} - \mathbf{a})\cdot\mathbf{r} = c.$$

Поэтому свободная поверхность жидкости есть наклонная плоскость, перпендикулярная вектору $\boldsymbol\Phi$.◇

Пример 3.13.2. Пусть ось цилиндрического сосуда расположена вертикально, и сосуд вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω. Если в такой сосуд налить жидкость и рассмотреть условие ее равновесия относительно сосуда под действием силы тяжести, то по теореме 3.13.3 уравнение эквипотенциальной поверхности можно записать следующим образом:

$$\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\boldsymbol\omega\cdot\mathbf{r})^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = c.$$

Представим радиус-вектор $\mathbf{r}$ в виде

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_3 + \mathbf{r}_\text{п},$$

где базисный вектор $\mathbf{e}_3$ направлен вертикально вверх и $\mathbf{r}_\text{п}\cdot\mathbf{e}_3 = 0$. Так как по условию $\boldsymbol\omega = \omega\mathbf{e}_3$, то уравнение эквипотенциальной поверхности будет

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\mathbf{r}_\text{п}^2 + c_1, \quad c_1 = -\frac{c}{g}.$$

Свободная поверхность жидкости есть параболоид вращения вокруг вертикальной оси.◇

Пример 3.13.3. Рассмотрим движение сферического маятника (см. § 3.12) в поле параллельной силы $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$, $F = const > 0$. Представим себе, что связь реализована посредством гладкого кольца, имеющего возможность вращаться вокруг неподвижного диаметра, параллельного единичному вектору $\mathbf{e}$. Радиус кольца равен r. Положение материальной точки M массы m на кольце зададим углом φ между вектором $\mathbf{e}$ и радиусом, направленным из центра кольца в точку M.

Если кольцо сделать неподвижным, то получим математический маятник. Пусть кольцо вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг неподвижного диаметра. Во вращающейся вместе с кольцом системе координат помимо силы $\mathbf{F}$ на материальную точку будут действовать силы инерции. Исследуем их влияние. Очевидно, что кориолисова сила инерции будет перпендикулярна плоскости кольца. Она полностью компенсируется реакцией связи. Сила $\mathbf{F}$ и переносная сила потенциальны. Применив теорему 3.13.3, найдем силовые функции:

$$U_e = \frac{m}{2}\Omega^2 r^2\sin^2\varphi, \quad U_F = Fr\cos\varphi.$$

Рассматриваемое движение одномерно. Воспользуемся интегралом энергии:

$$\frac{mr^2\dot\varphi^2}{2} = Fr\cos\varphi + \frac{m}{2}\Omega^2 r^2\sin^2\varphi + h,$$

где h — произвольная постоянная. В дальнейшем предполагается, что $\Omega \neq 0$. После преобразований интеграл энергии приводится к виду

$$\dot\varphi^2 = \Omega^2[f(u) + h'],$$

где

$$u = \cos\varphi, \quad f(u) = -(u-p)^2, \quad p = \frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad \omega^2 = \frac{F}{mr}, \quad h' = \frac{2h}{m\Omega^2 r^2} + p^2 + 1.$$

Отметим, что ω — циклическая частота малых колебаний соответствующего математического маятника, p — параметр, определяющий свойства движения. В зависимости от значения p рассмотрим следующие случаи.

1. $p \ge 1$. Видим, что в диапазоне $-1 \le u \le 1$ функция $f(u)$ монотонно возрастает вместе с u. Следовательно, функция $f(\cos\varphi)$ имеет в точности такие же экстремумы, что и функция $\cos\varphi$. Фазовый портрет движения изучаемой системы оказывается полностью аналогичным фазовому портрету движения математического маятника (см. рис. 3.9.10).

2. $p < 1$. При $u = p$ функция $f(u)$ имеет максимум, и $f(p) = 0$. На границах допустимого диапазона $-1 \le u \le 1$ имеем:

$$f(-1) = -(p+1)^2 < -(1-p)^2 = f(1), \; f'(-1) = 2(p+1) > 0, \; f'(1) = (p-1) < 0.$$

Функция $f(\cos\varphi)$ периодична с периодом 2π. Рассмотрим отрезок $-\pi \le \varphi \le \pi$. В зависимости от значения h' получаются различные области допустимых значений угла φ в выражении интеграла энергии. Очевидно, что для $h' < 0$ область допустимых значений угла φ отсутствует.

а) $h' = 0$. На рассматриваемом отрезке допустимыми будут значения

$$\varphi_1 = -\arccos p, \quad \varphi_2 = \arccos p,$$

которым на фазовом портрете (рис. 3.13.1) соответствуют изолированные положения равновесия. Очевидно, что $|\varphi_1| = |\varphi_2| < \pi/2$, так как $p > 0$.

б) $0 < h' < (1-p)^2$. Допустимые значения φ определяются неравенствами

$$-\sqrt{h'} + p \le \cos\varphi \le \sqrt{h'} + p.$$

Получаются две области:

$$0 < \arccos(\sqrt{h'} + p) \le \varphi \le \arccos(-\sqrt{h'} + p),$$

$$-\arccos(-\sqrt{h'} + p) \le \varphi \le -\arccos(\sqrt{h'} + p) < 0.$$

Для каждой из двух этих областей имеем непересекающиеся замкнутые фазовые кривые, охватывающие точки $(\varphi_1, 0)$, $(\varphi_2, 0)$ и расположенные симметрично строго в правой и левой полуплоскостях соответственно. Локально в окрестности каждой из точек $(\varphi_1, 0)$, $(\varphi_2, 0)$ фазовый портрет отвечает особой точке типа "центр" и характеризует устойчивое положение равновесия.

в) $h' = (1-p)^2$. Тогда $f(u) + h' = (1-u)(1+u-2p)$. Поэтому

$$\dot\varphi = \pm 2\Omega\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2} - p}.$$

Фазовая кривая представляет собой сепаратрису, имеющую характерный вид "восьмерки" на рис. 3.13.1. Допустимая область изменения угла φ имеет вид

$$-2\arccos\sqrt{p} \le \varphi \le 2\arccos\sqrt{p}.$$

г) $(1-p)^2 < h' < (1+p)^2$. Тогда для допустимых значений должно быть

$$-\sqrt{h'} + p \le \cos\varphi \le \sqrt{h'} + p.$$

Правая часть этого неравенства заведомо больше единицы. Ясно также, что в рассматриваемом случае будет выполнено $(2p-1) > -\sqrt{h'} + p > -1$. Поэтому допустимая область определена неравенствами

$$-\arccos(-\sqrt{h'} + p) \le \varphi \le \arccos(-\sqrt{h'} + p).$$

Получаются замкнутые фазовые кривые, охватывающие сепаратрису, имеющую вид "восьмерки" (рис. 3.13.1).

д) $h' = (1+p)^2$. Имеем $f(u) + h' = (1+u)(1-u+2p)$. Следовательно,

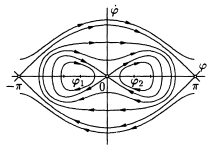
$$\dot\varphi = \pm 2\Omega\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} + p}.$$

Видим, что подкоренное выражение существенно положительно. Получается сепаратриса, аналогичная сепаратрисе математического маятника, проходящей через точки $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$ (см. рис. 3.9.10).

е) $h' > (1+p)^2$. Функция $f(u) + h'$ ни при каком значении φ не обращается в нуль. Поэтому имеем две непересекающиеся ветви фазовой кривой:

$$\dot\varphi = \pm\Omega\sqrt{f(u) + h'},$$

расположенные в верхней и нижней фазовых полуплоскостях. Верхняя кривая соответствует вращению маятника в положительном направлении, а нижняя — в отрицательном.



Если угловая скорость вращения кольца превосходит циклическую частоту маятника, то положение равновесия в начале координат перестает быть устойчивым. Вместо него возникают два других устойчивых положения равновесия φ_1 и φ_2, отделенных друг от друга сепаратрисой, проходящей через начало координат. Сепаратриса, проходящая через точки π и $-\pi$, сохраняется.

Рис. 3.13.1. Маятник под действием центробежной силы

Полный фазовый портрет получается периодическим продолжением найденных фрагментов фазовых кривых на всю ось φ. Видим, что возможные движения рассматриваемой системы существенно зависят от значения параметра p. Если $p \geq 1$ (угловая скорость Ω вращения кольца невелика сравнительно с циклической частотой ω маятника), то фазовый портрет системы аналогичен фазовому портрету математического маятника. Если $p < 1$ (угловая скорость вращения кольца больше циклической частоты маятника), то фазовый портрет системы приобретает существенные отличия от фазового портрета математического маятника: прежние устойчивые положения равновесия становятся неустойчивыми, появляются новые устойчивые положения равновесия с соответствующей перестройкой фазового портрета и добавлением новых сепаратрис. Такое явление можно интерпретировать как катастрофу качественной картины поведения системы при прохождении параметра p через значение $p = 1$. $\diamond$

§ 3.14. Силы инерции из-за вращения Земли

Земля движется вокруг Солнца по орбите, близкой к круговой, с радиусом $R_з = 149,6 \cdot 10^6$ км. Средняя линейная скорость такого движения составляет $v_з = 29,8$ км/с. С Землей жестко свяжем систему отсчета с началом в центре Земли. Вычислим модуль ускорения начала отсчета w_0. Это — центростремительное ускорение

$$w_0 = \frac{v_з^2}{R_з} \approx 5,9 \cdot 10^{-6}\ \text{км/с}^2 = 5,9 \cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2.$$

Оно составляет $\sim 0,6 \cdot 10^{-1}\,\%$ от ускорения силы тяжести. Ввиду относительной малости ускорением $\mathbf{w}_0$ пренебрежем. Примем, что Земля представляет собой однородный шар и вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol\omega$ (пример 2.16.2). Рассмотрим следующие задачи.

Задача 3.14.1. Равновесие материальной точки на поверхности Земли. Поскольку при равновесии относительные ускорение и скорость точки отсутствуют, то, учитывая закон всемирного тяготения Ньютона, получим

$$\mathbf{N} - \frac{\mu m}{r^3}\mathbf{r} - m\,\boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}) = 0,$$

где $\mathbf{N}$ — реакция поверхности Земли, т.е. то, что противодействует *силе веса тела*. Поэтому ускорение $\mathbf{g}$, создаваемое силой веса, можно выразить формулой

$$\mathbf{g} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}).$$

Вектор $\mathbf{g}$ задает направление отвеса.

Угол между линией отвеса и плоскостью земного экватора называется *астрономической широтой местности*. Ускорение $\mathbf{g}$ можно представить в виде

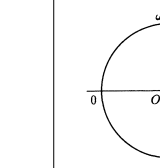
$$\mathbf{g} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - (\boldsymbol\omega \cdot \mathbf{r})\boldsymbol\omega + \omega^2\mathbf{r}.$$

Пусть θ — астрономическая широта, а ϑ — геоцентрическая широта. Спроектируем вектор $\mathbf{g}$ на направление оси вращения Земли и на плоскость экватора (рис. 3.14.1):

$$\sin\theta = \frac{\mu}{r^3 g} r\sin\vartheta, \quad \cos\theta = \frac{1}{g}\left(\frac{\mu}{r^3}r - r\omega^2\right)\cos\vartheta.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\mu}{r^2}}{\frac{\mu}{r^2} - r\omega^2}\operatorname{tg}\vartheta.$$



Сила веса отклоняется от радиуса, проведенного из центра Земли $O_з$ в точку O, из-за действия центробежной силы, вызванной вращением Земли. Это отклонение отсутствует на полюсе Земли и на ее экваторе. На полюсе центробежная сила равна нулю, а на экваторе ее направление совпадает с направлением радиуса-вектора. Вектор $\mathbf{e}_z$ ориентирован по местной вертикали.

Рис. 3.14.1. Сила веса

Таким образом, экспериментально определив разницу между астрономической и геоцентрической широтами, можно судить об отношении осестремительного ускорения к ускорению тяготения.

Пусть теперь материальная точка движется относительно поверхности Земли. Тогда вектор относительной скорости будет отличен от нуля. Помимо центробежной силы возникнет сила Кориолиса

$$\mathbf{F}_c = -2m\,\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_r.$$

Вектор этой силы перпендикулярен к направлению скорости. Если точка находится в Северном полушарии и движется вдоль меридиана, то сила Кориолиса направлена вправо относительно вектора скорости. В Южном полушарии — влево (см. пример 2.16.2).

Задача 3.14.2. Падение тяжелой материальной точки в пустоте с нулевой начальной скоростью относительно вращающейся Земли. Чтобы изучить такое движение, представим векторное уравнение относительного движения в виде

$$\frac{\tilde d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{g} - 2\,\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{g}$ учитывает вращение Земли. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх противоположно вектору $\mathbf{g}$. Ось Ox направим к западу по касательной к параллели, ось Oy — в плоскости меридиана к югу перпендикулярно Oz, как показано на рис. 3.14.1. Единичные векторы осей обозначим $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ соответственно. Ось Oz отклоняется от плоскости экватора на астрономическую широту θ. Считая расстояние от материальной точки до

поверхности Земли достаточно малым, будем полагать вектор $\mathbf{g}$ постоянным и равным его значению в точке O. Вектор $\boldsymbol\omega$ в осях $Oxyz$ имеет следующие координаты:

$$\boldsymbol\omega = (0, -\omega\cos\theta, \omega\sin\theta).$$

Поэтому

$$\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_r = -\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta\right)\mathbf{e}_x + \frac{dx}{dt}\sin\theta\,\mathbf{e}_y + \frac{dx}{dt}\cos\theta\,\mathbf{e}_z.$$

Система скалярных уравнений, получающаяся путем проектирования векторного уравнения движения на выбранные оси координат, принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\frac{dx}{dt}\sin\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2\omega\frac{dx}{dt}\cos\theta - g.$$

Она представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для нее можно указать три очевидных первых интеграла, которые не дают полного решения задачи. Однако их можно учесть с целью упрощения вычислений (см. стр. 176). Пусть материальная точка начинает падение без относительной начальной скорости, в начальный момент времени $t = 0$ расположена на оси z и имеет высоту H. Тогда, проинтегрировав один раз уравнения движения и приняв во внимание начальные условия, найдем

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega(z\cos\theta + y\sin\theta) - 2\omega H\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega x\sin\theta,$$

$$\frac{dz}{dt} = -2\omega x\cos\theta - gt.$$

В итоге имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка. Ее можно интегрировать стандартным приемом, составив характеристическое уравнение. Заметим, однако, что ω сравнительно невелико: $\omega \approx 0,7 \cdot 10^{-4}\text{с}^{-1}$. Применим метод малого параметра, что

даст нам возможность нагляднее выявить влияние вращения Земли. Будем искать решение в виде рядов по степеням ω:

$$x = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\omega^k x_k,$$

$$y = y_0 + \omega y_1 + \omega^2 y_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\omega^k y_k,$$

$$z = x_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\omega^k z_k.$$

Подставив эти ряды в систему скалярных уравнений движения, найдем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega^k\frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty}2\omega^k\left(z_{k-1}\cos\theta + y_{k-1}\sin\theta\right) - 2\omega H\cos\theta,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega^k\frac{dy_k}{dt} = -\sum_{k=1}^{\infty}2\omega^k x_{k-1}\sin\theta,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega^k\frac{dz_k}{dt} = -gt - \sum_{k=1}^{\infty}2\omega^k x_{k-1}\cos\theta.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω:

$$\dot x_0 = 0, \quad \dot y_0 = 0, \quad \dot z_0 = -gt,$$

$$\dot x_1 = 2(z_0\cos\theta + y_0\sin\theta) - 2H\cos\theta,\ \dot y_1 = -2x_0\sin\theta,\ \dot z_1 = -2x_0\cos\theta,$$

$$\dot x_2 = 2(z_1\cos\theta + y_1\sin\theta), \quad \dot y_2 = -2x_1\sin\theta, \quad \dot z_2 = -2x_1\cos\theta,$$

. . . . . .

Потребуем, чтобы заданным начальным условиям удовлетворяло нулевое приближение. Начальные условия для остальных приближений положим равными нулю. Будем иметь

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = H - gt^2/2.$$

Тем самым нулевое приближение дает известный закон равноускоренного вертикального падения тяжелой точки.

Выпишем уравнения первого приближения:

$$\dot x_1 = -gt^2\cos\theta, \quad \dot y_1 = 0, \quad \dot z_1 = 0.$$

Начальные условия для этих уравнений приняты равными нулю:

$$x_1 = -\frac{1}{3}gt^3\cos\theta, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0.$$

Уравнения второго приближения принимают вид

$$\dot x_2 = 0, \quad \dot y_2 = \frac{2}{3}gt^3\sin\theta\cos\theta, \quad \dot z_2 = \frac{2}{3}gt^3\cos^2\theta.$$

Интегрируя их с соблюдением начальных условий, получим

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{12}gt^4\sin 2\theta, \quad z_2 = \frac{1}{6}gt^4\cos^2\theta.$$

Ограничимся первыми тремя членами разложения закона движения по степеням малого параметра:

$$x \approx -\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\theta,\ y \approx \frac{1}{12}\omega^2 gt^4\sin 2\theta,\ z \approx H - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\omega^2 gt^4\cos^2\theta.$$

Из найденных формул следует, что, начав падение без начальной скорости относительно вращающейся Земли, материальная точка отклоняется от вертикального направления к востоку и югу. Ньютон первым предсказал это отклонение. Оно было подтверждено экспериментально в 1795 г.

Задача 3.14.3. Маятник Фуко́ — это сферический маятник, совершающий относительное движение в системе отсчета, жестко связанной с вращающейся Землей. Систему отсчета выберем такой же, как при изучении свободного падения тяжелой материальной точки (см. рис. 3.14.1). Предположим, что радиус сферического маятника равен l, а точка подвеса маятника находится на оси Oz на расстоянии l от начала координат. Координаты материальной точки во все время движения стеснены уравнением связи

$$x^2 + y^2 + (z-l)^2 - l^2 = 0.$$

Скалярные уравнения движения имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2m\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta\right) + \lambda x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2m\omega\frac{dx}{dt}\sin\theta + \lambda y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -2m\omega\frac{dx}{dt}\cos\theta - mg + \lambda(z-l),$$

где члены, содержащие множитель λ, выражают реакцию связи.

Будем изучать малые колебания, возникающие при отклонении маятника от нижнего положения равновесия, когда начальная скорость отсутствует. Термин "малые колебания" означает, что должно быть выполнено неравенство

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \ll l^2.$$

Из уравнения связи найдем

$$(z-l)^2 = l^2\left(1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}\right),$$

или с учетом того, что $z < l$,

$$z - l = -l\left(1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как ρ мало, то приближенно получим

$$z \approx \frac{x^2+y^2}{2l}.$$

Для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений справедлив интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + gz = h.$$

Учтем, что начальная скорость равна нулю:

$$\frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) = g(z_0 - z).$$

Значит, для любого момента времени справедливо неравенство

$$z_0 \geq z(t) \geq 0.$$

Другими словами, малое начальное отклонение маятника влечет его малые колебания в последующем движении.

Из интеграла энергии заключаем также, что

$$\frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) \leq gz_0 \approx \frac{g}{2l}(x_0^2 + y_0^2) \ll \frac{gl}{2}.$$

Следовательно, при малых колебаниях и скорости будут малыми:

$$\dot x^2 + \dot y^2 \ll gl.$$

Величины

$$x_м = \frac{x}{l}, \quad y_м = \frac{y}{l}, \quad \dot x_м = \frac{\dot x}{\sqrt{gl}}, \quad \dot y_м = \frac{\dot y}{\sqrt{gl}}$$

будем считать малыми первого порядка по сравнению с единицей. Тогда величина

$$z_м = \frac{z}{l} \approx \frac{1}{2}(x_м^2 + y_м^2)$$

имеет второй порядок малости. Дифференцируя приближенное выражение для z, получим

$$\dot z \approx \frac{1}{l}(x\dot x + y\dot y), \quad \ddot z \approx \frac{1}{l}(\dot x^2 + \dot y^2 + x\ddot x + y\ddot y).$$

Поэтому величина $\dot z$, так же как и величина $\ddot z$, в силу уравнений движения имеет второй порядок малости.

Сопоставим проекцию силы Кориолиса на ось Oz с ускорением силы тяжести:

$$\frac{\omega\dot x}{g} = \omega\sqrt{\frac{l}{g}}\,\dot x_м.$$

Коэффициент при $\dot x_м$ есть отношение угловой скорости вращения Земли к циклической частоте математического маятника той же длины, что и радиус маятника Фуко. Чтобы это отношение было близким к единице, радиус маятника должен составить $\sim 2 \cdot 10^6$ км. Реальная длина маятника может быть не более нескольких десятков метров. Отсюда ясно, что постоянную

$$\omega_м = \omega\sqrt{l/g}$$

можно принять за малую величину, а кориолисовы силы инерции считать малыми второго порядка. Из третьего дифференциального уравнения движения будем иметь с точностью до членов второго порядка малости

$$\lambda = -\frac{mg}{l}.$$

Удержим в первых двух дифференциальных уравнениях движения только малые первого и второго порядков:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2m\omega\frac{dy}{dt}\sin\theta - \frac{mg}{l}x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2m\omega\frac{dx}{dt}\sin\theta - \frac{mg}{l}y.$$

Представим уравнения движения в другой системе координат Ox_1y_1, вращающейся вокруг оси Oz по ходу часовой стрелки с угловой скоростью

$$\omega' = \omega\sin\theta.$$

Имеем преобразование

$$x = x_1\cos\omega' t + y_1\sin\omega' t,$$

$$y = -x_1\sin\omega' t + y_1\cos\omega' t.$$

По теореме Кориолиса 2.16.2 об ускорении в сложном движении получим

$$\ddot x = \ddot x_1\cos\omega' t + \ddot y_1\sin\omega' t + 2\omega'\dot y + (\omega')^2 x,$$

$$\ddot y = -\ddot x_1\sin\omega' t + \ddot y_1\cos\omega' t - 2\omega'\dot x + (\omega')^2 y.$$

С помощью этих формул уравнения движения приводятся к виду

$$\ddot x_1 = -\omega_1^2 x_1, \quad \ddot y_1 = -\omega_1^2 y_1,$$

где $\omega_1^2 = (\omega')^2 + g/l$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ оси Oxy и Ox_1y_1 совпадают и задано

$$x = a, \quad y = 0, \quad \dot x = 0, \quad \dot y = 0.$$

В системе координат Ox_1y_1 при $t = 0$ будем иметь

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0, \quad \dot x_1 = 0, \quad \dot y_1 = \omega' a.$$

Решение уравнений движения, удовлетворяющее этим начальным условиям, записывается в виде

$$x_1 = a\cos\omega_1 t, \quad y_1 = a\frac{\omega'}{\omega_1}\sin\omega_1 t.$$

Исключив время, найдем, что в осях Ox_1y_1 проекция маятника на горизонтальную плоскость описывает кривую, близкую к эллипсу

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2\frac{\omega'^2}{\omega_1^2}} = 1.$$

Так как $\omega'/\omega_1 < 1$, большая ось эллипса лежит на оси Ox_1, вдоль которой маятник имел первоначальное отклонение, а малая ось — на оси Oy_1. На экваторе, где $\theta = 0$, эллипс вырождается в двойной прямолинейный отрезок между точками $(-a, 0)$, $(a, 0)$. В системе

координат Oxy, жестко связанной с Землей, полученный эллипс вращается по ходу часовой стрелки с угловой скоростью ω' вокруг оси Oz. Это вращение отсутствует на экваторе и происходит с наибольшей угловой скоростью на полюсе.

Первым, кто опытным путем проверил эти результаты, был французский ученый Фуко (1851 г.). Маятник Фуко имел массу 30 кг. Длина маятника составляла 67 м. Аналогичный маятник был построен в Петербурге в Исаакиевском соборе.

§ 3.15. Элементы теории удара

Когда к материальной точке кратковременно прикладывается значительная по величине сила, то возникает эффект, близкий к удару. При этом должно выполняться определенное соотношение между силой и временем ее воздействия. Поясним сказанное примером.

Пример 3.15.1. Пусть на материальную точку массы m в интервале времени (t_0, t_1) действует постоянная сила $\mathbf{F}$. Движение точки будет равноускоренным. Найдем изменение количества движения

$$\Delta\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\,dt = (t_1 - t_0)\mathbf{F},$$

где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ — скорости точки в моменты t_1 и t_0 соответственно. За тот же промежуток времени точка сместится на величину

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = (t_1 - t_0)\mathbf{v}_0 + (t_1 - t_0)^2\frac{\mathbf{F}}{2m} = \left(\mathbf{v}_0 + \frac{\Delta\mathbf{Q}}{2m}\right)(t_1 - t_0).$$

Зафиксируем $\Delta\mathbf{Q}$. Тогда, уменьшая $(t_1 - t_0)$, можно добиться того, чтобы смещение точки за время воздействия силы было сколь угодно малым. Модуль силы окажется большим, а приращение скорости — заданным. Другими словами, можно добиться скачка скорости, практически не изменив положения точки в пространстве.◇

Процессы, реально происходящие при кратковременном и сильном механическом взаимодействии, могут быть достаточно сложными, а сила взаимодействия далеко не всегда будет постоянной. Однако и в общем случае, когда нас интересует лишь закон движения материальной точки, эффект действия такой силы можно характеризовать лишь приращением количества движения. При достаточно малом времени взаимодействия смещение точки будет пренебрежимым.

Определение 3.15.1. *Ударным воздействием* на материальную точку в некоторый момент времени называется скачок количества

движения (скорости), не сопровождаемый изменением радиуса-вектора точки. Величина $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ называется *ударом*.

Если рассматривать удар как результат действия некоторой силы $\mathbf{F}$, то эта сила должна удовлетворять равенству

$$\mathbf{P} = \lim_{t\to t_0}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,dt,$$

где t_0 — момент нанесения удара, $t > t_0$. Для любой конечной силы этот предел будет, очевидно, равен нулю. Ненулевое значение предела возможно, лишь когда функция $\mathbf{F}(t)$ в точке t_0 имеет особенность. Кроме того, по смыслу ударного воздействия при $t \neq t_0$ должно быть $\mathbf{F} = 0$. Функции $\mathbf{F}(t)$, обладающие указанными свойствами, называются *сингулярными*. Они могут быть получены посредством предельного перехода.

Рассмотрим, например, монотонно убывающую к t_0 бесконечную последовательность моментов времени

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_i > t_{i+1} > \ldots > t_0, \quad \lim_{i\to\infty} t_i = t_0.$$

Поставим ей в соответствие последовательность функций

$$\mathbf{F}_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \dfrac{\mathbf{P}}{t_i - t_0} & \text{при } t_0 \le t \le t_i, \\ 0 & \text{при } t > t_i. \end{cases}$$

Интеграл от функции $\mathbf{F}_i(t)$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{I}_i = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_i(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{t - t_0}{t_i - t_0}\,\mathbf{P} & \text{при } t_0 \le t \le t_i, \\ \mathbf{P} & \text{при } t > t_i. \end{cases}$$

Последовательность вектор-функций $\{\mathbf{F}_i(t)\}$ имеет единственную предельную "точку" — вектор-функцию $\mathbf{F}(t)$, которая, очевидно, обладает требуемыми свойствами. В самом деле, $\mathbf{F}(t)$ равна нулю всюду, кроме точки t_0, где она принимает бесконечно большое значение. Далее вычислим интеграл от этой функции. С этой целью зафиксируем момент $t > t_0$. По определению последовательности $\{t_i\}$ найдется такой номер n, что при всех $i > n$ будем иметь $t_0 < t_i < t$. Следовательно, для всех $i > n$ будет выполнено равенство $\mathbf{I}_i = \mathbf{P}$.

Для предельной функции естественно принять

$$\mathbf{I}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t)\,dt = \lim_{i\to\infty}\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_i(t)\,dt = \mathbf{P}.$$

Отсюда

$$\mathbf{I} = \lim_{t\to t_0} \mathbf{I}(t) = \mathbf{P}.$$

Таким образом, интеграл от построенной сингулярной функции $\mathbf{F}(t)$ равен заданному импульсу $\mathbf{P}$ и отличен от нуля, хотя $\mathbf{F}(t)$ равна нулю всюду, кроме точки t_0. Построенная функция относится к классу *обобщенных функций*, изучением свойств которых занимается специальная математическая дисциплина.

Конкретный выбор последовательности $\{\mathbf{F}_i(t)\}$ неоднозначен. Он зависит от физической природы протекания ударного взаимодействия. Примененная выше последовательность $\{\mathbf{F}_i(t)\}$ основана на гипотезе о постоянстве силы взаимодействия за время удара. При фиксированном значении i вектор

$$\mathbf{F}_i = \frac{\mathbf{P}}{t_i - t_0}$$

можно рассматривать как *среднюю силу*, соответствующую ударному воздействию, когда время протекания процесса равно $t_i - t_0$.

Ударное воздействие может возникать, например, когда материальная точка попадает на границу области, свободной от препятствий. Рассмотрим этот случай. Пусть область допустимых положений материальной точки в пространстве описывается с помощью неравенства

$$f(\mathbf{r}, t) \le 0,$$

причем в начальный момент времени t_0 радиус-вектор $\mathbf{r}$ материальной точки удовлетворяет строгому неравенству $f(\mathbf{r}, t) < 0$ (точка находится внутри допустимой области). Предположим, что в каждый фиксированный момент времени уравнение $f(\mathbf{r}, t) = 0$ определяет поверхность, сквозь которую материальная точка не может проникать. Точка может либо находиться в области пространства, ограниченной этой поверхностью, либо двигаться вдоль поверхности, сходя с нее только внутрь допустимой области. Имеем так называемую *неудерживающую (освобождающую) связь*.

Удар точки о связь может возникать, когда точка попадает на ограничивающую поверхность. Пусть $\mathbf{r}(t)$ — закон движения точки внутри допустимой области. Момент $t_1 > t_0$ достижения точкой

границы области должен быть наименьшим корнем уравнения

$$f(\mathbf{r}(t_1), t_1) = 0$$

при условии $df/dt \ge 0$, так как граница достигается изнутри области. В момент $t_1 + 0$ скорость $\mathbf{v}$ точки не может иметь произвольного значения, а должна удовлетворять условиям

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \le 0.$$

Следовательно, на материальную точку со стороны связи будет оказано ударное воздействие. Ударная реакция связи $\mathbf{P}$ изменит в момент t_1 скорость точки. Специально подчеркнем, что при ударе материальная точка и ограничивающая поверхность не изменят своего положения, а импульс любой конечной силы равен нулю.

Удар не будет равен нулю, если выполнены условия

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_1} > 0, \quad \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_1+0} \le 0.$$

Абсолютно неупругим называется удар, при котором

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_1+0} = 0.$$

Упругим называется удар, при котором

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_1+0} < 0.$$

Скоростью падения называется скорость $\mathbf{v}_1$, с которой материальная точка приходит в соприкосновение со связью. *Скоростью отражения* называется скорость $\mathbf{v}$, с которой точка покидает связь. *Углом падения* α называют угол между отрицательным направлением скорости $\mathbf{v}_1$ и нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к граничной поверхности. Нормаль направлена внутрь допустимой области (рис. 3.15.1). *Углом отражения* β называют угол между направлением скорости $\mathbf{v}$ и нормалью $\boldsymbol{\nu}$.

Связь называют *идеальной при ударе*, если элементарная работа ударной реакции $\mathbf{P}$ на любом виртуальном перемещении точки вдоль связи равна нулю. В этом случае реакция $\mathbf{P}$ направлена по нормали к поверхности и

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{P} = P\,\boldsymbol{\nu}.$$

При ударе материальной точки об идеальную связь приращение скорости направлено параллельно нормали, а скорости падения и отражения расположены в одной плоскости с нормалью $\boldsymbol{\nu}$ (нормальной

плоскости). Кроме того,

$$v_1 \sin\alpha = v \sin\beta.$$

Обозначим $v_{1\nu} = v_1\cos\alpha$, $v_\nu = v\cos\beta$. Отношение

$$\text{æ} = \left|\frac{v_\nu}{v_{1\nu}}\right|$$

называется *коэффициентом восстановления* (Ньютон). Для абсолютно неупругого удара æ $= 0$. Когда æ $= 1$, то удар называют *абсолютно упругим*. Коэффициент восстановления не может быть больше единицы. Иначе можно было бы построить вечный двигатель. Поэтому

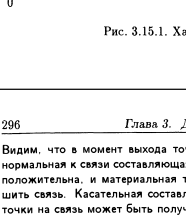
$$0 \le \text{æ} \le 1.$$

В указанных пределах значение æ зависит от материала соударяющихся поверхностей и может быть определено экспериментально.

Знание коэффициента восстановления позволяет замкнуть задачу о вычислении скачка скорости материальной точки при наложении связи, идеальной при ударе. Такой будет, например, любая связь, идеальная по отношению к конечным силам реакции. В самом деле, сила, с которой такая связь действует на материальную точку, всегда направлена по нормали к связи. Поэтому и удар из-за ее наложения, вычисляемый с помощью соответствующего предельного перехода, будет направлен по нормали.

Для неидеальных связей помимо нормальной составляющей скорости будет меняться при ударе также и касательная составляющая. В простейшем случае направление касательной сохранится, а изменится лишь ее величина. Тогда задача о расчете удара замыкается введением *коэффициента мгновенного трения* χ. Обозначим $v_{1\tau} = v_1\sin\alpha$, $v_\tau = v\sin\beta$. По определению

$$\chi = 1 - \left|\frac{v_{1\tau}}{v_\tau}\right|.$$



При ударе о связь точка отражается внутрь области, ограниченной поверхностью $f(\mathbf{r}, t) = 0$. Нормаль $\boldsymbol{\nu}$ направлена в сторону, где разрешено свободное движение точки. Касательная к поверхности в точке падения изображена пунктирной линией.

Рис. 3.15.1. Характеристики удара

Коэффициент χ, как и æ, определяется экспериментально. Иногда используется какая-нибудь эмпирическая зависимость $\chi = \chi(\text{æ})$.

Пример 3.15.2. Рассмотрим движение материальной точки в вертикальной плоскости в поле параллельных сил тяжести. Материальная точка соединена нитью длины l с неподвижной точкой O. Нить реализует одностороннюю связь вида $|\mathbf{r}| \le l$. где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки, имеющий начало в точке O. Когда нить натянута, материальная точка описывает окружность радиуса l, и ее движение подчиняется уравнению

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{e} - \frac{N}{l}\,\mathbf{r},$$

где m — масса точки, g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{e}$ — единичный вектор вертикали, N — величина реакции нити. Согласно условию задачи, N не может быть отрицательным.

Найдем N при условии, что связь напряжена: $\mathbf{r}^2 = l^2$. Тогда мы можем воспользоваться формулой для реакции, найденной в § 3.12:

$$N = \frac{1}{l}(2h - 3mgz), \quad z = \mathbf{e}\cdot\mathbf{r},$$

где h — постоянная энергии, z — высота материальной точки над точкой подвеса O. Из интеграла энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = h$$

следует, что $h \ge mgz$. Поэтому $N \ge (-mgz/l)$. Иными словами, материальная точка не может освободиться от связи, если она находится в текущий момент ниже точки подвеса ($z < 0$). Пусть точка $z = 0$ достигается при движении маятника по связи. Тогда либо $h = 0$, либо $h > 0$. Если $h = 0$, то при $z = 0$ будем иметь $v = 0$, высота $z = 0$ окажется максимальной, и маятник начнет попятное движение при напряженной связи. Если же $h > 0$, то при $z = 0$ будем иметь $N > 0$, так что и в точке, для которой $z = 0$, связь никогда не освобождается. Таким образом, материальная точка может сойти со связи только, если при движении по связи она оказалась выше точки подвеса ($z > 0$).

Представим себе теперь, что при движении материальной точки с набором высоты при условии $0 < z < l$ выполнилось равенство $N = (2h - 3mgz)/l = 0$. Тогда $mv^2 = 2(h - mgz) = mgz > 0$. Так как скорость направлена по касательной к окружности, отсюда получаем, что при $N = 0$ выполнено $\dot{z} > 0$. Следовательно в последующем движении высота будет увеличиваться, N станет отрицательным, и точка сойдет со связи. В данном случае условие $2h = 3mgz$ есть критерий схода материальной точки со связи.

Пусть $\mathbf{r}_f$ радиус-вектор точки на окружности, где выполнено условие схода со связи $2h = 3mgz_f$. Из интеграла энергии найдем скорость в точке схода: $v_f = \sqrt{gz_f}$. Эта скорость направлена вверх по касательной к окружности (перпендикулярно радиусу-вектору). Можно проверить, что вектор скорости в точке схода выражается формулой

$$\mathbf{v}_f = \frac{v_f}{\sqrt{l^2 - z_f^2}}\left(l\,\mathbf{e} - \frac{z_f}{l}\,\mathbf{r}_f\right).$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}_f$ и вектор скорости $\mathbf{v}_f$ служат начальными условиями для движения свободной материальной точки в поле параллельных сил тяжести.

Закон движения точки после схода со связи примет вид

$$\mathbf{r} = -\frac{gt^2}{2}\,\mathbf{e} + \mathbf{v}_f t + \mathbf{r}_f, \quad \dot{\mathbf{r}} = -gt\,\mathbf{e} + \mathbf{v}_f.$$

Очевидно, это парабола. Она частично расположена внутри окружности радиуса l с центром в точке O, а частично вне ее. Точка пересечения параболы с окружностью есть точка нового выхода на связь. Приравняв $\mathbf{r}^2$ к l^2, найдем момент времени пересечения параболы с окружностью: $t_1 = 4\mathbf{v}_f\cdot\mathbf{e}/g = 4v_{fz}/g$. По смыслу v_{fz} есть проекция скорости на вертикальное направление в момент схода точки со связи. Справедливо равенство

$$v_{fz} = \sqrt{gz_f\left(1 - \frac{z_f^2}{l^2}\right)},$$

из которого ясно, что время t_1 равно нулю лишь при $z_f = 0$ и при $z_f = l$. Как было отмечено выше, в точке окружности, где $z_f = 0$, не может быть схода со связи. При $z_f > 0$ время свободного движения сначала растет и в точке $z_f = l/\sqrt{3}$ достигает максимума, а при дальнейшем росте z_f убывает до нуля в верхней точке окружности ($z_f = l$). Поэтому в верхней точке ($z_f = l$) окружности, реализуемой связью, схода со связи также быть не может.

Предположим теперь, что $t = t_1$. В этот момент точка войдет в контакт со связью и будет иметь следующие значения радиуса-вектора и скорости

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{8v_{fz}^2}{g}\,\mathbf{e} + \frac{4v_{fz}}{g}\,\mathbf{v}_f + \mathbf{r}_f, \quad \dot{\mathbf{r}}_1 = -4v_{fz}\mathbf{e} + \mathbf{v}_f.$$

Найдем проекцию v_ν^- скорости на направление радиуса-вектора в момент выхода точки на связь (радиальную составляющую скорости).

$$v_\nu^- = \frac{\mathbf{r}_1\cdot\dot{\mathbf{r}}_1}{l} = \frac{8v_{fz}^2}{lg}.$$

Видим, что в момент выхода точки на связь неизбежен удар, так как нормальная к связи составляющая скорости в этот момент всегда строго положительна, и материальная точка в момент удара стремится нарушить связь. Касательная составляющая $\mathbf{v}_\tau^-$ скорости в момент выхода точки на связь может быть получена из соотношения

$$\mathbf{v}_\tau^- = \dot{\mathbf{r}}_1 - \frac{\mathbf{r}_1}{l}\,v_\nu^-.$$

После удара найдем

$$\mathbf{v}_\nu^+ = -\frac{\mathbf{r}_1}{l}\,\text{æ}v_\nu^-, \quad \mathbf{v}_\tau^+ = (1 - \chi)\mathbf{v}_\tau^-,$$

где æ — коэффициент восстановления, а χ — коэффициент мгновенного трения. Если æ $\neq 0$, то удар будет упругим, точка отразится от окружности и вновь будет двигаться по параболе до новой встречи с окружностью и т.д. Если удар абсолютно неупругий (æ $= 0$), то точка после удара останется на окружности, и анализ ее движения можно выполнить так же, как это было проделано выше. Значения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\nu^+ + \mathbf{v}_\tau^+$$

служат начальными условиями для движения после удара.

В случае, когда при каждой встрече со связью материальная точка испытывает абсолютно упругий удар (æ $= 1$), и мгновенное трение отсутствует ($\chi = 0$), энергия точки при многократных соударениях со связью сохраняется. Процесс соударений, раз начавшись, не сможет прекратиться. Вместе с тем в ходе такого движения могут встретиться случаи плавного (по касательной) выхода на связь. Чтобы убедиться в существовании такой возможности, достаточно обратиться к изученному выше случаю схода точки с окружности и в момент t_1 принять направление скорости противоположным, сохранив ее величину. Тогда движение материальной точки пойдет в обратную сторону с сохранением траектории и всех свойств движения в обращенном времени. Точка, гладко выйдя на связь, будет двигаться по окружности и вновь сойдет с нее в симметричной относительно вертикального диаметра точке окружности. После этого движение, приведшее к гладкому выходу материальной точки на связь, повторится в обратном порядке с симметричным отражением относительно вертикального диаметра окружности.

В случае абсолютно упругого удара материальной точки об идеальную (без мгновенного трения) связь интерес представляют так называемые периодические движения с соударениями. В рассматриваемой задаче простейший пример такого движения доставляет падение материальной точки без начальной скорости на внутреннюю поверхность окружности. Отразившись от связи, точка приобретет направленную вверх

скорость, равную скорости падения, поднимется на исходную высоту, и процесс повторится.

Другой пример периодического движения с соударениями можно построить, воспользовавшись решением примера 3.5.2. Пусть $x = l\sqrt{2}$ — длина горизонтальной хорды, находящейся ниже центра окружности, ограничивающей область свободного движения. Пусть v_1 — скорость материальной точки в пересечении хорды с окружностью. Обозначим $L = v_1^2/g$ максимальную горизонтальную дальность бросания и ϑ начальный угол наклона скорости к горизонту. Если $x < L$, то в пределах $0 \le \vartheta \le (\pi/2)$ существует два угла наклона, при которых достигается дальность бросания x:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{L}, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{L} + \frac{\pi}{2}.$$

Направление биссектрисы угла между этими начальными векторами задается углом $\vartheta_b = \pi/4$. При выбранной длине хорды это будет как раз направление к центру окружности. Выпустим теперь из какой-нибудь границы хорды внутрь области свободного движения траекторию с начальным углом ϑ_1. Траектория достигнет окружности в симметричной относительно вертикального диаметра точке, отразится от нее под углом ϑ_2 к симметричному горизонтальному направлению бросания, вернется в исходную точку, отразится от нее под углом ϑ_1 и так далее. Существуют и другие, более сложные типы периодических траекторий с соударениями. ◇

Контрольные вопросы к главе 3

3.1. Будет ли галилеевым преобразование $A^4 \to A^4$, если до преобразования время измерялось в секундах, а после преобразования оно измеряется в часах?

3.2. Будет ли галилеевым преобразование $A^4 \to A^4$, если до преобразования расстояние измерялось в метрах, а после преобразования оно измеряется в сантиметрах?

3.3. Доказать, что всякое движение трехмерного пространства, сопровождаемое сдвигом начала отсчета времени, есть галилеево преобразование.

3.4. Доказать следствие 3.1.1.

3.5. Почему в качестве системы отсчета, близкой к инерциальной, традиционно принимают систему отсчета с началом в Солнце и с осями, направленными на удаленные звезды?

3.6. Могут ли силы зависеть от ускорений? От каких переменных величин могут зависеть силы? Постарайтесь обосновать Ваш ответ.

3.7. Доказать, что работа потенциальной силы на любом замкнутом контуре равна нулю.

3.8. Могут ли пересекаться различные поверхности уровня силового поля? Обосновать ответ.

3.9. Пусть $U(\mathbf{r})$ — силовая функция некоторой силы. Показать, что $U(\mathbf{r}) + c$, где c — произвольная постоянная, есть силовая функция той же силы.

3.10. Могут ли пересекаться силовые линии силового поля? Доказать ответ.

3.11. Найти условия, при которых материальная точка в поле параллельных сил тяжести совершает то же движение, что электрон между пластинами конденсатора, заряженного до потенциала u.

3.12. Написать уравнение поверхностей уровня для силового поля двух центров ньютонианского тяготения с равными притягивающими массами. Какой вид будет иметь поверхность уровня, проходящая через середину отрезка между притягивающими центрами? Как пройдут остальные поверхности уровня?

3.13. Автомобиль начинает движение по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения скольжения f колес о дорогу. Какое максимальное ускорение автомобиль может развить?

3.14. Материальная точка под действием силы тяжести соскальзывает с наклонной плоскости, имея в начальный момент движения высоту h. После окончания наклонной плоскости точка еще некоторое время движется по горизонтальной плоскости, после чего останавливается. Проекция траектории точки на горизонтальную плоскость равна S. Предполагая коэффициент трения наклонного и горизонтального участков одинаковым, найти зависимость S от угла наклона плоскости к горизонту. Найти максимальный угол наклона плоскости к горизонту, при котором скольжение точки отсутствует.

3.15. Найти область достижимости для электрона, влетающего в середину вертикальной грани между горизонтальными пластинами конденсатора, имеющего прямоугольную форму. Ширина

пластины конденсатора — a, длина — b, расстояние между пластинами — d, напряжение — u. Действует сила тяжести. Величина начальной скорости электрона — v_0, заряд — e. Сколько решений имеет задача?

3.16. Каким образом, зная полный набор первых интегралов, можно восстановить дифференциальные уравнения движения материальной точки?

3.17. Может ли первый интеграл вообще не зависеть от скоростей материальных точек? Как тогда найти его производную в силу уравнений движения?

3.18. Указать сетку координатных кривых для

a) декартовой,

b) цилиндрической,

c) сферической

систем координат.

3.19. Доказать взаимную перпендикулярность векторов локального репера цилиндрической системы координат.

3.20. Доказать взаимную перпендикулярность векторов локального репера сферической системы координат.

3.21. Найти локальный репер и координатные кривые для криволинейных координат x_1, x_2, x_3, заданных равенствами

$$r_1 = R\cos x_1 \operatorname{ch} x_2, \quad r_2 = R\sin x_1 \operatorname{sh} x_2, \quad r_3 = x_3,$$

где r_1, r_2, r_3 — декартовы координаты, R — постоянная. Проверить взаимную перпендикулярность векторов локального репера. Выписать выражение кинетической энергии материальной точки в координатах x_1, x_2, x_3.

3.22. В примере 3.6.7 по методу проектирования уравнений движения на естественные оси найти все составляющие реакции винтовой линии.

3.23. Какую размерность может иметь фазовое пространство материальной точки?

3.24. Найти выражение секторной скорости проекции точки на плоскость параллели сферической системы координат.

3.25. Дать геометрическую интерпретацию теоремы площадей для движения точки в поле параллельных сил тяжести, когда полюс не принадлежит плоскости движения.

3.26. С помощью теоремы об изменении кинетического момента сформулировать и доказать необходимый и достаточный признак того, что сила, действующая на материальную точку, — центральная.

3.27. Сформулировать правило вычисления реакции геометрической связи.

3.28. Пусть уравнение идеальной связи имеет вид

$$\Phi = \Phi_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \Phi_0(\mathbf{r}, t) = 0,$$

где Φ_k — однородная по скоростям функция степени $k \neq 0$. Показать, что в этом случае мощность реакции связи имеет вид $(-\lambda k \Phi_0)$, где λ — множитель Лагранжа, определяющий реакцию связи.

3.29. Уравнение связи имеет вид $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = R^2(t)$. Определить мощность реакции связи.

3.30. Пусть заданы две независимые идеальные неоднородные дифференциальные связи

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v} + B_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v} + B_2 = 0.$$

Найти геометрические места множества действительных перемещений и множества виртуальных перемещений, соответствующих некоторому моменту времени.

3.31. Материальная точка массы m вынуждена двигаться по кольцу, вращающемуся вокруг вертикального диаметра длины $2R$ с постоянной угловой скоростью ω. Действует сила тяжести. Выписать обобщенный интеграл энергии Якоби. Выписать выражение для полной механической энергии. Почему полная механическая энергия не сохраняется при движении точки?

3.32. Доказать, что общее решение уравнения гармонического осциллятора есть линейная комбинация функций $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, где t — время, а ω — циклическая частота.

3.33. Доказать, что уравнение гармонического осциллятора допускает интеграл энергии.

3.34. Как меняется фазовый портрет гармонического осциллятора при уменьшении циклической частоты ω. Каким будет предельное движение при $\omega \to 0$?

3.35. Для осциллятора с сухим трением найти число колебаний, если $x_0 = 3f/\omega^2$, $\dot{x}_0 = f/\omega$.

3.36. Пусть для осциллятора с вязким трением $k^2 > 4\omega^2$. Как меняется фазовый портрет осциллятора при $k \to 2\omega$? Какой получится фазовый портрет в предельном случае?

3.37. Написать уравнение движения и нарисовать фазовый портрет циклоидального маятника в переменных $(\varphi, \dot{\varphi})$ (см. определение 3.9.3).

3.38. По методу Лагранжа вариации произвольных постоянных найти общее решение уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = \exp(\nu t)$, где ω и ν — действительные постоянные, t — время.

3.39. Показать, что на рис. 3.10.1 прямая $\eta = 2/\text{æ}_1 + \text{æ}_2\xi/\text{æ}_1$ проходит через точку $(1;1)$, а прямая $\eta = -2/\text{æ}_1 + \text{æ}_2\xi/\text{æ}_1$ — через точку $(-1;-1)$ при любых значениях ω_1, ω_2.

3.40. В примере 3.10.2 для уравнения Хилла с двухступенчатым кусочно-постоянным коэффициентом $\omega(t)$ в случае $\xi = -1$, $\eta = 1$ найти собственные векторы матрицы монодромии, резонансные соотношения интервалов t_1, t_2, точки на фазовой плоскости, где происходят переключения функции $\omega(t)$.

3.41. Указать, как по заданному начальному радиусу-вектору $\mathbf{r}_0$ и начальной скорости $\mathbf{v}_0$ можно найти плоскость орбиты, линию апсид, перицентр и тип орбиты материальной точки, движущейся под действием центральной силы ньютонианского притяжения.

3.42. Указать, как по заданным начальным радиусам-векторам $\mathbf{r}_{10}$, $\mathbf{r}_{20}$ и начальным скоростям $\mathbf{v}_{10}$, $\mathbf{v}_{20}$ можно найти абсолютное движение двух материальных точек под действием взаимного ньютонианского притяжения.

3.43. Найти закон движения материальной точки по параболической орбите в поле центральной силы ньютонианского притяжения.

3.44. Найти закон движения материальной точки по гиперболической орбите в поле центральной силы ньютонианского притяжения.

3.45. Найти выражение для силы, действующей на материальную точку массы m со стороны однородного шара массы M и радиуса R, если расстояние r от точки до центра шара меньше радиуса шара.

3.46. Найти силу, действующую на электрический заряд, находящийся между разноименно заряженными бесконечными пластинами и вне пространства, заключенного между этими пластинами.

3.47. Для конического маятника (см. § 3.12) абсолютная величина скорости вращения равна $|\dot{\psi}| = \sqrt{g/|z_0|}$, где g — ускорение силы тяжести, z_0 — проекция маятника на вертикаль. Когда $|z_0| = R$ (R — длина маятника), конический маятник висит вертикально, и никакого движения не совершает. Вместе с тем в этом положении $|\dot{\psi}| = \sqrt{g/R} \neq 0$. Объяснить парадокс.

3.48. Найти максимальное и минимальное значения реакции сферического маятника в зависимости от начальных условий.

3.49. Материальная точка находится на дне сосуда, наполненного жидкостью. В некоторый момент времени точка начинает всплывать под действием архимедовой силы. В каком направлении она будет двигаться, если сосуд

a) движется поступательно с постоянным ускорением $\mathbf{a}$,

b) вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω?

3.50. Показать, что в примере 3.13.3 все устойчивые положения равновесия при любом Ω находятся ниже горизонтальной плоскости, проходящей через точку подвеса маятника.

3.51. Вычислить разность между астрономической и геоцентрической широтами на Земной параллели, соответствующей 60°.

3.52. Применить метод малого параметра не к системе первых интегралов, а непосредственно к уравнениям движения, описывающим падение без начальной скорости тяжелой точки в пустоте на Землю.

3.53. Какое движение будет совершать маятник Фуко, если ему в нижнем положении равновесия придать скорость $\mathbf{v}_0$, направленную вдоль параллели.

3.54. Под каким углом материальная точка отскочит от стенки, если коэффициент восстановления при ударе равен 1, коэффициент

мгновенного трения равен 0,6, а угол падения составляет 20°. Можно ли назвать такой удар абсолютно упругим?

3.55. В примере 3.15.2 найти выражение через v_{fz} для касательной составляющей скорости $\mathbf{v}_\tau^-$ в момент выхода точки на связь.

Глава 4

Аналитическая статика системы материальных точек

§ 4.1. Равновесие системы

Пусть задано множество, состоящее из N взаимодействующих друг с другом материальных точек. В этом случае скажем, что материальные точки образуют *систему*. Взаимодействие точек может быть обусловлено силами, влияющими на ускорения, а также связями, стесняющими положения и скорости точек. Могут быть приложены также внешние силы от воздействия объектов, не входящих в рассматриваемую систему. *Конфигурацией системы* назовем множество, занимаемое в пространстве в данный момент времени всеми материальными точками системы.

Определение 4.1.1. Пусть существует конфигурация системы такая, что в некотором репере S при отсутствии относительных скоростей всех точек системы эта конфигурация сохраняется неограниченно долго. Такая конфигурация называется *положением равновесия* системы относительно репера S. Состояние системы, попавшей в положение равновесия с нулевыми скоростями всех ее точек, называется *равновесием (относительным равновесием)*.

Теорема 4.1.1. *Необходимым условием равновесия служит одновременное равенство нулю в изучаемом положении системы как скоростей, так и ускорений всех ее точек. Если при этом окажется, что в любой момент времени равенство нулю скоростей всех точек влечет также равенство нулю их ускорений, то указанное условие будет и достаточным условием равновесия.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система находится в состоянии равновесия. Радиусы-векторы всех точек системы относительно репера S должны с течением времени оставаться постоянными. Значит, как первая, так и вторая их производные по времени должны быть равны нулю. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в данной конфигурации равенство нулю скоростей всех точек системы влечет равенство нулю их ускорений. Воспользуемся принципом освобождения от связей и представим

дифференциальные уравнения движения в виде

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t), \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

где m_ν, $\mathbf{w}_\nu$, $\mathbf{v}_\nu$, $\mathbf{r}_\nu$ — соответственно масса, ускорение, скорость, радиус-вектор ν-й точки в репере S, $\mathbf{F}_\nu$ — суммарная сила, N — число точек системы. Предположим, что для значений $\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_N$ выполнено условие теоремы. Тогда для любого t должно быть

$$\mathbf{F}_\nu(\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_N, 0, \ldots, 0, t) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Поэтому постоянные во времени функции

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, N$$

составляют решение системы дифференциальных уравнений движения. Единственность этого решения при нулевых начальных скоростях всех точек системы обеспечивается принципом детерминированности Ньютона (стр. 160).

Основная задача статики состоит в том, чтобы сформулировать условия, обеспечивающие равновесие системы материальных точек, а также найти все положения равновесия системы. Аналитическая статика предполагает такую форму условий равновесия, в которой не используются неизвестные реакции связей. При этом существенным оказывается понятие множества виртуальных перемещений точек системы, соответствующего связям. Тем самым учение о связях играет фундаментальную роль в теоретической механике.

§ 4.2. Классификация связей

Рассмотрим систему из N материальных точек. Выберем репер S с полюсом в точке O и обозначим через $\mathbf{r}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N$, радиусы-векторы этих точек, начинающиеся в полюсе O. Соответственно через $\dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{v}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N$, обозначим скорости точек.

Связь, заданная с помощью неравенства

$$\Phi(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) \geq 0,$$

называется *неудерживающей*, или *односторонней*. Если для неудерживающей связи достигается знак равенства, то говорят, что эта связь *напряжена*.

Пусть на систему наложено m связей, и пусть их можно выразить с помощью уравнений

$$\Phi_j(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad m \leq 3N.$$

Это так называемые *удерживающие (двусторонние)* связи.

Связи, уравнения которых содержат скорости материальных точек, называются *дифференциальными*. Если выполнено условие $\partial\Phi_j/\partial t = 0$, то соответствующие связи называются *стационарными*.

Предположим, что левые части всех уравнений связей линейно зависят от скоростей:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{i\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + B_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathbf{A}_{i\nu} = \mathbf{A}_{i\nu}(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — векторы, $B_i = B_i(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — скаляры, явно не зависящие от скоростей. Такие связи назовем *линейными по скоростям*. Это наиболее распространенный в практических приложениях тип связей.

Если какие-либо уравнения дифференциальных связей можно заменить эквивалентными им, но имеющими форму полного дифференциала

$$d\Phi_i(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0,$$

то такие уравнения называются *интегрируемыми*, а соответствующие связи — *голономными*.

Пример 4.2.1. Пусть задана дифференциальная связь

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu + b = 0,$$

где b — постоянная. Эту связь можно представить в эквивалентной дифференциальной форме

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu + b\,dt = 0,$$

откуда ясно, что она — голономная. Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить интегрирование:

$$d\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} r_\nu^2 + bt\right) = 0.\diamond$$

В том случае, когда никакую совокупность наложенных на систему связей нельзя заменить формами полных дифференциалов, уравнения связей называют *неинтегрируемыми*, а связи — *неголономными*.

Критерии, позволяющие установить, содержатся ли голономные связи в заданной системе дифференциальных связей, получим в § 4.4.

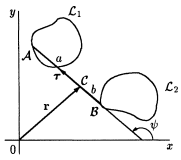
Если связи голономные, то их уравнения приводятся к виду

$$f_i(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0,$$

и тогда говорят, что связи заданы в *конечном виде*. Голономная связь, заданная в конечном виде, называется *склерономной*, если t не входит явно в уравнение связи, т.е. если $\partial f_i/\partial t = 0$. Такая связь, будучи записанной в дифференциальной форме, окажется стационарной.

§ 4.3. Интегрирующие механизмы

Рассмотрим примеры практического использования дифференциальных связей в приборах, предназначенных для измерения площадей, ограниченных замкнутыми контурами. Необходимость в таких измерениях часто возникает в картографии.



С помощью планиметра определяется разность площадей, ограниченных кривыми, описываемыми концевыми точками $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изображенного отрезка. Чтобы измерить указанную разность, точка $\mathcal{C}$ снабжается устройством в виде колесика, плоскость которого перпендикулярна стержню $\mathcal{AB}$, а угол поворота пропорционален измеряемой величине.

Рис. 4.3.1. Планиметр

Возьмем отрезок постоянной длины, и пусть его концы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ описывают замкнутые плоские кривые $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ (рис. 4.3.1). Зададим положение отрезка $\mathcal{AB}$ радиусом-вектором $\mathbf{r} = (x, y)$ какой-нибудь его точки $\mathcal{C}$ и углом ψ между этим отрезком и осью Ox, так что единичный вектор $\boldsymbol{\tau} = (\cos\psi, \sin\psi)$ задает направление отрезка. Радиусы-векторы точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут соответственно

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r} + a\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r} - b\boldsymbol{\tau},$$

где a и b — длины отрезков $\mathcal{AC}$ и $\mathcal{CB}$. Площадь, ограниченная замкнутой кривой $\mathcal{L}_1$, дается (теорема 3.7.4) криволинейным интегралом

$$S_1\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{r}_A \times d\mathbf{r}_A,$$

взятым вдоль контура $\mathcal{L}_1$ в положительном направлении. Здесь $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости Oxy. Подставив выражение для $\mathbf{r}_A$, найдем

$$S_1\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2}\oint(\mathbf{r} + a\boldsymbol{\tau}) \times (d\mathbf{r} + a\,d\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} + \frac{a}{2}\oint \boldsymbol{\tau} \times d\mathbf{r} +$$

$$+\frac{a}{2}\oint \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\tau} + \frac{a^2}{2}\oint \boldsymbol{\tau} \times d\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} + a\oint \boldsymbol{\tau} \times d\mathbf{r} +$$

$$+\frac{a}{2}\oint d(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\nu}\frac{a^2}{2}\oint d\psi,$$

где интегрирование ведется по контуру $\mathcal{L}$, описываемому точкой $\mathcal{C}$. Аналогично

$$S_2\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{2}\oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} + \boldsymbol{\nu}\frac{b^2}{2}\oint d\psi - b\oint \boldsymbol{\tau} \times d\mathbf{r} - \frac{b}{2}\oint d(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}).$$

Учтем, что интегралы по замкнутому контуру от выражений, представляющих собой полные дифференциалы, равны нулю. Следовательно,

$$\oint d(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) = 0.$$

Если к тому же отрезок $\mathcal{AB}$ не делает в плоскости Oxy полных оборотов, то

$$\oint d\psi = 0.$$

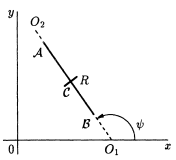
Поэтому

$$(S_2 - S_1)\boldsymbol{\nu} = l\oint (d\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\tau},$$

где $l = a + b$ есть длина отрезка. Далее

$$(d\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\tau} = (dx\sin\psi - dy\cos\psi)\,\boldsymbol{\nu}.$$

Коэффициент при $\boldsymbol{\nu}$ в правой части последнего равенства равен перпендикулярной к отрезку $\mathcal{AB}$ составляющей смещения точки $\mathcal{C}$. С помощью кинематической связи значение этого коэффициента может быть превращено в величину угла поворота вокруг оси, направленной вдоль стержня. С этой целью возьмем колесико с острым краем (режущее колесико) и заставим его катиться по плоскости Oxy. Колесико не будет проскальзывать ни в направлении касательной к своей окружности, ни в направлении, перпендикулярном к касательной



Перемещение точки соприкосновения режущего колесика с опорной плоскостью происходит в направлении, перпендикулярном стержню $\mathcal{AB}$. При этом скорость колесика в точке его соприкосновения с опорной плоскостью равна нулю. В результате суммарный угол поворота колесика при обводе точкой $\mathcal{A}$ контура $\mathcal{L}_1$, а точкой $\mathcal{B}$ контура $\mathcal{L}_2$ пропорционален разности площадей, ограничиваемых контурами $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_1$ соответственно.

Рис. 4.3.2. Режущее колесико

(рис. 4.3.2). Пусть ось O_1O_2 колесика удерживается в горизонтальном положении. Положение колесика можно задать углом φ поворота его вокруг оси O_1O_2, углом ψ между осью O_1O_2 и осью Ox и координатами x, y точки прикосновения, или, что то же, центра колесика. Дифференциал смещения точки прикосновения колесика к плоскости выразится через дифференциал φ следующим образом:

$$dx = R\sin\psi\,d\varphi, \quad dy = -R\cos\psi\,d\varphi.$$

Отсюда найдем

$$dx\sin\psi - dy\cos\psi = R\,d\varphi.$$

Значит, если в точку $\mathcal{C}$ стержня $\mathcal{AB}$, изображенного на рис. 4.3.1, поместить колесико радиуса R так, чтобы стержень AB проходил через центр перпендикулярно плоскости диска, то разность площадей внутри контуров $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, описываемых концами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ стержня, выразится формулой

$$S_2 - S_1 = lR\Delta\varphi,$$

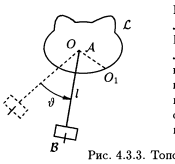
где $\Delta\varphi$ — полный угол поворота колесика при однократном обводе точками $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ контуров $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно.

Пусть теперь один конец отрезка описывает контур, охватывающий область, площадь которой желательно определить, а второй принужден оставаться все время на заданной разомкнутой кривой. Тогда, очевидно, искомая площадь равна

$$S = lR\Delta\varphi.$$

Приборы, в основу конструкции которых положен указанный принцип, называются *планиметрами*. Если разомкнутая кривая есть

дуга окружности, имеем *полярный планиметр*, а если прямая — *прямолинейный планиметр*.



В топориковом планиметре стержень $\mathcal{AB}$ параллелен плоскости колесика. Штифтом, расположенным в точке $\mathcal{A}$, обводят контур $\mathcal{L}$, ограничивающий измеряемую площадь. Величина измеряемой площади практически пропорциональна углу отклонения ϑ стержня от первоначального положения.

Рис. 4.3.3. Топориковый планиметр

Планиметры суть простейшие аналого-вычислительные приборы, широко и весьма эффективно используемые в практике вождения морских судов. Простая и целесообразная конструкция планиметра предложена А.Н. Крыловым. Это так называемый *топориковый планиметр* (рис. 4.3.3). Он состоит из стержня $\mathcal{AB}$ длины l, на конце $\mathcal{B}$ которого помещено режущее колесико с осью, перпендикулярной стержню. Плоскость колесика содержит стержень $\mathcal{AB}$. Колесико катится по плоскости Oxy. На конце $\mathcal{A}$ стержня имеется обводной штифт.

Поместим штифт в какую-нибудь внутреннюю точку O (рис. 4.3.3) области, ограниченной контуром $\mathcal{L}$, площадь S которой требуется измерить. Из точки O штифт переведем в точку O_1, расположенную на контуре $\mathcal{L}$, обведем контур $\mathcal{L}$ против хода часовой стрелки, вернемся в точку O_1 и из нее — вновь в точку O.

При таком движении штифта скорость точки соприкосновения колесика с плоскостью может быть направлена только вдоль стержня $\mathcal{AB}$. Поэтому в процессе обвода

$$(d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) = 0$$

или

$$dx\sin\psi - dy\cos\psi = 0.$$

Пусть стержень после возвращения штифта в точку O образует угол ϑ относительно своей первоначальной ориентации, выделенной пунктиром на рис. 4.3.3. Процесс измерения может быть закончен, только когда обе точки $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ возвращены в исходное положение. Точка $\mathcal{A}$ совпала с исходной точкой O, а точка $\mathcal{B}$ — нет. Чтобы

возвратить точку $\mathcal{B}$, достаточно повернуть стержень на угол ϑ вокруг точки O. При этом

$$(d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) = l^2\boldsymbol{\nu}\,d\vartheta.$$

Следовательно,

$$S - S_B = l^2\Delta\vartheta,$$

где S_B — площадь, описываемая точкой $\mathcal{B}$. Практически эта площадь оказывается небольшой, и ею пренебрегают, полагая

$$S \approx l^2\Delta\vartheta.$$

§ 4.4. Критерии голономности системы связей

Теорема 4.4.1. *Для того, чтобы систему дифференциальных связей можно было представить в конечном виде, необходимо, чтобы она была эквивалентна системе линейных связей.*

Доказательство. Предположим, что заданная система дифференциальных связей эквивалентна системе геометрических связей

$$f_j(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Эквивалентность означает, что множество скоростей точек системы, определенное системой геометрических связей, совпадает с множеством скоростей, определенным исходной системой дифференциальных связей. Но все множество скоростей, допускаемых системой геометрических связей, задается как множество решений системы линейных дифференциальных связей вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, \ldots, m.\square$$

Таким образом, чтобы получить достаточные условия интегрируемости системы связей, следует рассматривать дифференциальные связи, линейные по скоростям:

$$\sum_{\nu}^{N} \mathbf{A}_{i\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + B_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что все радиусы-векторы $\mathbf{r}_\nu$ материальных точек системы можно задать с помощью независимых скалярных координат $q_1, \ldots, q_n$, так что

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t), \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

В частности, в качестве $q_1, \ldots, q_n$ можно взять коэффициенты разложений $\mathbf{r}_\nu$ по базисным векторам пространства. Очевидно, что тогда $n = 3N$. Если материальные точки стеснены удерживающими геометрическими связями

$$f_j = f_j(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad j = 1, \ldots, m',$$

причем $m' < 3N$, то уравнения этих связей образуют незамкнутую систему алгебраических уравнений. По теореме о неявно заданных функциях решение ее неоднозначно. Множество решений можно описать с помощью набора свободных параметров $q_1, \ldots, q_n$, $n < 3N$, произвольное задание которых обеспечивает принадлежность материальных точек геометрическим связям.

Пример 4.4.1. В твердом теле расстояния между любыми двумя точками сохраняются. Положение твердого тела, вращающегося в пространстве вокруг неподвижной точки, однозначно определяется (см. стр. 91) тремя углами Эйлера. Их можно принять за независимые координаты

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi, \quad q_3 = \vartheta.\diamond$$

Итак, пусть координаты $q_1, \ldots, q_n$ тем или иным способом назначены. Очевидно, что

$$\mathbf{v}_\nu = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Подставив эти выражения в уравнения линейных дифференциальных связей, найдем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j + a_{i0} = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где коэффициенты выражаются формулами

$$a_{ij} = a_{ij}(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{i\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j},$$

$$a_{i0} = a_{i0}(q_1, \ldots, q_n, t) = B_i + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{i\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}.$$

Для симметрии записи обозначим $t = q_0$ и представим уравнения связей в виде равенств нулю дифференциальных линейных форм

$$\omega_i(d\mathbf{q}) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\,dq_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m < n,$$

где $\omega_i(d\mathbf{q})$ — сокращенное обозначение левой части соответствующего уравнения связи. Получили так называемую *систему уравнений Пфаффа* относительно дифференциалов координат. В дальнейшем будем предполагать, что уравнения этой системы линейно независимы.

В каждой точке $\mathbf{q}$ пространства R^{n+1} координат $q_0, q_1, \ldots, q_n$ система Пфаффа выделяет гиперплоскость $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ допустимых (удовлетворяющих системе) дифференциалов $(dq_0, dq_1, \ldots, dq_n)$. Эта гиперплоскость имеет размерность $n + 1 - m$.

В пространстве R^{n+1} рассмотрим p-мерную поверхность S^p, т.е. множество точек $M(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, выделяемых уравнениями

$$q_0 = q_0(u_1, \ldots, u_p), \ldots, q_n = q_n(u_1 \ldots, u_p),$$

где $u_1, \ldots, u_p$ — независимые параметры. Матрицу частных производных для этих уравнений будем считать имеющей максимально возможный ранг p.

Дифференциалы смещений по поверхности из данной ее точки определяются выражениями

$$dq_i = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\partial q_i}{\partial u_\nu}\,du_\nu, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Тем самым векторы дифференциалов $(dq_0, dq_1, \ldots, dq_n)$ суть линейные комбинации p линейно независимых векторов

$$\boldsymbol{\xi}_\nu = \left(\frac{\partial q_0}{\partial u_\nu}, \frac{\partial q_1}{\partial u_\nu}, \ldots, \frac{\partial q_n}{\partial u_\nu}\right), \quad \nu = 1, \ldots, p$$

с коэффициентами du_ν.

Другими словами, векторы дифференциалов смещений по p-мерной поверхности принадлежат p-мерному линейному пространству $\mathcal{L}^p$ с базисными векторами $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_p$. Пространство $\mathcal{L}^p$ назовем *касательным к поверхности* S^p.

Определение 4.4.1. Поверхность S^p называется *интегральной* для пфаффовой системы, если ее касательное пространство $\mathcal{L}^p$ в каждой точке принадлежит гиперплоскости $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ допустимых дифференциалов. Одномерная интегральная поверхность называется *интегральной кривой*.

Ясно, что число измерений касательного пространства для интегральной поверхности не превосходит $n + 1 - m$ (числа измерений гиперплоскости $\mathcal{L}(\mathbf{q})$).

Определение 4.4.2. Пфаффова система

$$\omega_i(d\mathbf{q}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

называется *вполне интегрируемой*, если через каждую точку пространства R^{n+1} проходит $(n + 1 - m)$-мерная интегральная поверхность.

Теорема 4.4.2. *Система связей голономна тогда и только тогда, когда соответствующая система уравнений Пфаффа вполне интегрируема.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система связей голономна. Тогда уравнения связей представляются в конечном виде

$$f_i(q_0, q_1, \ldots, q_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Каждое уравнение выделяет гиперповерхность размерности n, а когда левые части этих уравнений линейно независимы, то пересечение всех соответствующих гиперповерхностей образует интегральную поверхность размерности $n + 1 - m$. Необходимость доказана.

Достаточность. Не теряя общности, предположим, что пфаффову систему можно разрешить относительно $dq_0, dq_1, \ldots, dq_{m-1}$:

$$dq_0 = b_{0,m}dq_m + b_{0,m+1}dq_{m+1} + \ldots + b_{0,n}dq_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dq_{m-1} = b_{m-1,m}dq_m + b_{m-1,m+1}dq_{m+1} + \ldots + b_{m-1,n}dq_n.$$

Пусть $(n + 1 - m)$-мерная интегральная поверхность существует. Тогда для нее $q_m, \ldots, q_n$ должны быть независимыми, а $q_0, \ldots, q_{m-1}$ должны быть их функциями, так что уравнения этой поверхности можно записать в виде

$$q_0 = q_0(q_m, \ldots, q_n), \ldots, q_{m-1} = q_{m-1}(q_m, \ldots, q_n),$$

а это и означает голономность системы связей.$\square$

Перейдем к критериям голономности. Пусть σ — скалярный параметр. Укажем метод построения множества всех интегральных кривых пфаффовой системы

$$\mathbf{q}(\sigma) = (q_0(\sigma), \ldots, q_n(\sigma)),$$

проходящих через заданную точку M_0.

Метод 4.4.1. Касательный вектор к интегральной кривой удовлетворяет пфаффовой системе

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\frac{dq_j}{d\sigma} = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Выделив в матрице коэффициентов (a_{ij}) первый нулю минор и произведя необходимую перенумерацию индексов, представим эту систему в эквивалентном виде

$$\frac{dq_0}{d\sigma} = \sum_{j=m}^{n} b_{0j}\frac{dq_j}{d\sigma}, \ldots, \frac{dq_{m-1}}{d\sigma} = \sum_{j=m}^{n} b_{m-1,j}\frac{dq_j}{d\sigma}.$$

Пусть точка M_0 имеет координаты $q_0^*, q_1^*, \ldots, q_n^*$. Функции $q_m(\sigma), \ldots, q_n(\sigma)$ можно выбрать произвольно при условии, что

$$q_m(0) = q_m^*, \ldots, q_n(0) = q_n^*.$$

Тогда относительно функций $q_0(\sigma), \ldots, q_{m-1}(\sigma)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой коэффициенты b_{ij} зависят как от произвольно выбранных, так и от искомых функций. При начальных условиях

$$q_0(0) = q_0^*, \ldots, q_{m-1}(0) = q_{m-1}^*$$

решение этой системы определено однозначно, чем и завершается построение отдельной интегральной кривой искомого множества.

Теорема 4.4.3. *Пусть пфаффова система уравнений вполне интегрируема. Тогда интегральная поверхность размерности $n+1-m$, проходящая через фиксированную точку M_0 пространства R^{n+1}, единственна.*

Доказательство. Интегрируемость системы связей означает существование интегральной поверхности S^{n+1-m}, проходящей через точку M_0. Эту поверхность (см. доказательство теоремы 4.4.2) можно задать с помощью следующей системы функций:

$$q_0 = f_0(q_m, \ldots, q_n), \ldots, q_{m-1} = f_{m-1}(q_m, \ldots, q_n).$$

Проведем через M_0 кривую $\mathcal{Q} \in S^{n+1-m}$. Независимые координаты $q_m, \ldots, q_n$ можно взять произвольными функциями параметра σ, а функции $q_0(\sigma), \ldots, q_{m-1}(\sigma)$ тогда определятся из конечных уравнений связей. Вместе с тем кривая $\mathcal{Q}$, принадлежащая поверхности S^{n+1-m}, будет интегральной для пфаффовой системы и обязана удовлетворять связанной с ней системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. метод 4.4.1).

Пусть теперь через точку M_0 проведена произвольная интегральная кривая $\mathcal{Q}^*$ (не обязательно принадлежащая S^{n+1-m}). Ее координаты как функции параметра σ удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений и тем же начальным условиям,

что и координаты кривой $\mathcal{Q}$. Поскольку для кривой $\mathcal{Q}$ функции $q_m(\sigma), \dots, q_n(\sigma)$ выбираются произвольно, то их можно взять такими же, как и для кривой $\mathcal{Q}^*$. Но тогда по теореме о единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений кривая $\mathcal{Q}$ совпадет с кривой $\mathcal{Q}^*$. Значит, всякая интегральная кривая, проходящая через точку M_0, принадлежит интегральной поверхности S^{n+1-m}, содержащей эту точку.□

Построим линейный оператор $\mathbf{P}$, который обращает в нуль все векторы, лежащие в гиперплоскости $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ допустимых дифференциалов, и переводит в себя все векторы, ортогональные (в смысле евклидовой метрики) к $\mathcal{L}(\mathbf{q})$. Компоненты $P_j(d\mathbf{q})$ результата применения оператора $\mathbf{P}$ к вектору дифференциала смещения $d\mathbf{q}$ представим в виде

$$P_j(d\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} dq_k, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где λ_{ji} — неопределенные пока множители. Векторы, ортогональные к $\mathcal{L}(\mathbf{q})$, и, в частности, векторы $(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$, оператор $\mathbf{P}$ должен переводить в себя. Следовательно, коэффициенты λ_{ji} удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} a_{sk} = a_{sj}, \quad s = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Квадратная матрица

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_{ik} a_{sk} \right)$$

есть матрица Грама строк пфаффовой матрицы. Так как указанные строки линейно независимы, получим, что матрица Грама невырожденна, а значит, коэффициенты λ_{ji} определяются однозначно. Тем самым оператор $\mathbf{P}$ определен корректно. Рассмотрим матрицу Λ:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{01}, & \dots & \lambda_{0m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \lambda_{n1}, & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы можно представить как векторы $(\lambda_{0i}, \dots, \lambda_{ni})$. Из системы уравнений для λ_{ji} видим, что m линейно независимых векторов

$$(a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in})$$

суть линейные комбинации векторов $(\lambda_{0i}, \dots, \lambda_{ni})$. Поэтому ранг матрицы Λ равен m.

Введем независимые дифференциалы

$$d\mathbf{q} = (dq_0, dq_1, \dots, dq_n) \in \mathcal{L}(\mathbf{q}), \quad \delta\mathbf{q} = (\delta q_0, \delta q_1, \dots, \delta q_n) \in \mathcal{L}(\mathbf{q}).$$

Они не обязательно совпадают, но удовлетворяют системе пфаффовых уравнений и задают в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ допустимых дифференциалов смещения в различных направлениях. Соответственно обозначим

$$\mathbf{P}_\delta = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_i} \delta q_i, \quad \mathbf{P}_d = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_i} dq_i$$

приращения оператора $\mathbf{P}$ в направлениях $\delta\mathbf{q}$ и $d\mathbf{q}$.

Лемма 4.4.1 (Критерий голономности). *Система дифференциальных связей голономна тогда и только тогда, когда для любой точки $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_n)$ и любых $\delta\mathbf{q}, d\mathbf{q} \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$ имеет место равенство*

$$\mathbf{P}_\delta d\mathbf{q} - \mathbf{P}_d \delta\mathbf{q} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что система дифференциальных связей голономна. Это значит, что соответствующая пфаффова система вполне интегрируема, т.е. существует интегральная поверхность размерности $n+1-m$, заданная векторным равенством

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(u_1, \dots, u_{n+1-m}),$$

где $u_1, \dots, u_{n+1-m}$ — произвольные параметры. По определению оператора $\mathbf{P}$ будем иметь

$$\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n+1-m.$$

Откуда, дифференцируя по u_μ, найдем, что

$$\mathbf{P} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial u_\mu \partial u_\nu} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\nu} = 0.$$

Меняя местами индексы μ и ν, получим

$$\mathbf{P} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial u_\nu \partial u_\mu} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_\nu} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\mu} = 0.$$

Вычтем теперь из первого равенства второе:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_\nu} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\mu} = 0.$$

Дифференциалы смещений $d\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{q} \in \mathcal{L}(q)$ и приращения $\mathbf{P}_\delta$, $\mathbf{P}_d$ задаются очевидными соотношениями

$$d\mathbf{q} = \sum_{\mu=1}^{n+1-m} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\mu} du_\mu, \quad \delta\mathbf{q} = \sum_{\nu=1}^{n+1-m} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_\nu} \delta u_\nu,$$

$$\mathbf{P}_d = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_j} \sum_{\mu=1}^{n+1-m} \frac{\partial q_j}{\partial u_\mu} du_\mu = \sum_{\mu=1}^{n+1-m} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_\mu} du_\mu,$$

$$\mathbf{P}_\delta = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_j} \sum_{\nu=1}^{n+1-m} \frac{\partial q_j}{\partial u_\nu} \delta u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n+1-m} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_\nu} \delta u_\nu,$$

где du_μ, δu_ν — произвольные дифференциалы параметров. Умножив теперь на $du_\mu \delta u_\nu$ равенства, связывающие частные производные от $\mathbf{P}$ с касательными $\partial\mathbf{q}/\partial u_\mu$, $\partial\mathbf{q}/\partial u_\nu$ к интегральной поверхности, и просуммировав результаты по индексам μ и ν, получим утверждение леммы в качестве необходимого условия.

Достаточность. Пусть выполнено условие леммы. Возьмем произвольную точку $\mathbf{q} = (q_0^*, \dots, q_n^*)$ и определим интегральную кривую $\mathbf{q}(\sigma)$ (см. метод 4.4.1), проходящую через эту точку:

$$\frac{dq_0}{d\sigma} = \sum_{j=m}^{n} b_{0j} \frac{dq_j}{d\sigma}, \dots, \frac{dq_{m-1}}{d\sigma} = \sum_{j=m}^{n} b_{m-1,j} \frac{dq_j}{d\sigma},$$

$$\frac{dq_m}{d\sigma} = u_1 + f_m(\sigma), \dots, \frac{dq_n}{d\sigma} = u_{n+1-m} + f_n(\sigma),$$

$$q_0(0) = q_0^*, \dots, q_n(0) = q_n^*,$$

где $u_1, \dots, u_{n+1-m}$ — произвольные параметры, задающие направление касательного вектора к интегральной кривой в точке $\mathbf{q}^*$, $f_m(\sigma), \dots, f_n(\sigma)$ — произвольные функции, обеспечивающие существование и единственность решения системы уравнений интегральной кривой и удовлетворяющие условию

$$f_m(0) = \dots = f_n(0) = 0.$$

Пусть эти функции зафиксированы. Тогда, меняя параметры $u_1, \dots, u_{n+1-m}$, получим семейство интегральных кривых. Это семейство образует некоторую поверхность размерности $n+1-m$ (параметр σ всегда можно выбрать так, чтобы касательный вектор в точке $\mathbf{q}^*$ был единичным). Докажем, что при выполнении условия леммы полученная поверхность будет интегральной. Уравнение поверхности

представим в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(u_1, \dots, u_{n+1-m}, \sigma).$$

При изменении параметра σ точка перемещается вдоль интегральной кривой. Поэтому $\partial\mathbf{q}/\partial\sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$ и

$$\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma} = 0.$$

Покажем теперь, что и

$$\mathbf{a} = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n+1-m,$$

в любой точке поверхности. В самом деле, выполняя дифференцирование, найдем

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} = \mathbf{P} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \sigma \partial u_i} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_i},$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma} \right) = \mathbf{P} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial u_i \partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma}.$$

Учитывая определение оператора $\mathbf{P}$, разложим вектор $\partial\mathbf{q}/\partial u_i$ на две составляющие:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_i} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

так что вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$, вектор $\mathbf{a}$ ортогонален $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ в любой точке поверхности. С помощью этого разложения представим $\partial\mathbf{P}/\partial u_i$ в виде

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{b} = \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b.$$

Подставим теперь все найденные выражения в правую часть формулы для $\partial\mathbf{a}/\partial\sigma$:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma} \mathbf{a} - \mathbf{P}_a \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma} \mathbf{b} - \mathbf{P}_b \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma}.$$

Так как векторы $\mathbf{b}$ и $\partial\mathbf{q}/\partial\sigma$ принадлежат гиперплоскости $\mathcal{L}(\mathbf{q})$, то согласно условию леммы

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma} \mathbf{b} - \mathbf{P}_b \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma} = 0.$$

Значит, относительно вектора $\mathbf{a}$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \sigma} \mathbf{a} - \mathbf{P}_a \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \sigma}$$

при начальном условии $\mathbf{a}(0) = 0$, так как $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^*$ и от $u_1, \dots, u_{n+1-m}$ не зависит. Это уравнение есть линейное однородное уравнение относительно компонент вектора $\mathbf{a}$ с единственным нулевым решением. Поэтому $\mathbf{a} \equiv 0$ для любой точки рассматриваемой поверхности, и вектор $\partial\mathbf{q}/\partial u_i$ принадлежит гиперплоскости $\mathcal{L}(\mathbf{q})$. Следовательно, касательная плоскость к этой поверхности совпадает с гиперплоскостью $\mathcal{L}(\mathbf{q})$, и соответствующая пфаффова система вполне интегрируема.□

Определение 4.4.3. Выберем независимые дифференциалы

$$d\mathbf{q} = (dq_0, dq_1, \dots, dq_n), \quad \delta\mathbf{q} = (\delta q_0, \delta q_1, \dots, \delta q_n).$$

Приращения коэффициентов на этих дифференциалах обозначим соответственно

$$\delta a_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \delta q_k, \quad da_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} dq_k.$$

Внешней производной формы

$$\omega_i(d\mathbf{q}) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} dq_j$$

называется выражение

$$d\omega_i(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_i(d\mathbf{q}) = \sum_{j=0}^{n} (da_{ij} \delta q_j - \delta a_{ij} dq_j).$$

Теорема 4.4.4. (Фробéниус). *Система дифференциальных связей голономна тогда и только тогда, когда для любых дифференциалов $\delta\mathbf{q} \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$ и $d\mathbf{q} \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$ обращаются в нуль внешние производные левых частей всех уравнений соответствующей пфаффовой системы:*

$$\sum_{j=0}^{n} (da_{ij} \delta q_j - \delta a_{ij} dq_j) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Доказательство. В результате применения оператора $\mathbf{P}$ к вектору $d\mathbf{q}$ получится новый вектор, j-ю компоненту которого обозначим $P_j(d\mathbf{q})$. Тогда

$$P_j(d\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ji} a_{ik} dq_k, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Из леммы 4.4.1 следует, что система связей голономна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} [d(\lambda_{ji} a_{ik}) \delta q_k - \delta(\lambda_{ji} a_{ik}) dq_k] = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где независимые дифференциалы $(dq_0, dq_1, \dots, dq_n)$, $(\delta q_0, \delta q_1, \dots, \delta q_n)$ удовлетворяют системе связей. Учтем, что

$$d\lambda_{ji} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} \delta q_k - \delta\lambda_{ji} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} dq_k = 0,$$

и перепишем критерий голономности системы в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} \sum_{k=0}^{n} (da_{ik} \delta q_k - \delta a_{ik} dq_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

В связи с тем что матрица $\Lambda = (\lambda_{ji})$ имеет ранг, равный m, получаем утверждение теоремы.□

Пример 4.4.2. Рассмотрим дифференциальную связь

$$a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + a_3 dq_3 = 0,$$

заданную в трехмерном пространстве R^3. Условие ее голономности состоит в выполнении равенства

$$da_1 \delta q_1 + da_2 \delta q_2 + da_3 \delta q_3 - \delta a_1 dq_1 - \delta a_2 dq_2 - \delta a_3 dq_3 = 0$$

в любой точке пространства, или

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1} \right) \delta q_2 dq_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3}{\partial q_1} \right) \delta q_3 dq_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q_2} \right) \delta q_1 dq_2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3}{\partial q_2} \right) \delta q_3 dq_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q_3} \right) \delta q_1 dq_3 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_3} \right) \delta q_2 dq_3 =$$
$$= \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1} \right) (\delta q_2 dq_1 - \delta q_1 dq_2) + \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3}{\partial q_1} \right) (\delta q_3 dq_1 - \delta q_1 dq_3) +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3}{\partial q_2} \right) (\delta q_3 dq_2 - \delta q_2 dq_3) = 0.$$

Введем вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

получаемый путем формального раскрытия определителя правой части, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — базисные векторы пространства R^3. С учетом этих обозначений критерий голономности можно представить в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot (\delta\mathbf{q} \times d\mathbf{q}) = 0,$$

что должно выполняться для любых двух векторов, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot d\mathbf{q} = 0.$$

Следовательно, векторное произведение $(\delta\mathbf{q} \times d\mathbf{q})$ параллельно $\mathbf{a}$. Поэтому в рассматриваемом случае критерий голономности связи принимает окончательный вид

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0.$$

Пусть, в частности, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$, причем имеют место зависимости

$$a_1 = a_1(q_1, q_2, q_3), \quad a_2 = a_2(q_1, q_2, q_3).$$

Тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(-\frac{\partial a_2}{\partial q_3}, \ \frac{\partial a_1}{\partial q_3}, \ \frac{\partial a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q_2} \right),$$

а критерий голономности выражается равенством

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} = -\frac{\partial a_2}{\partial q_3} a_1 + \frac{\partial a_1}{\partial q_3} a_2 = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \equiv 0,$$

т.е. связь вида

$$a_1(q_1, q_2, q_3)\, dq_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\, dq_2 = 0$$

голономна тогда и только тогда, когда отношение a_1/a_2 не зависит от координаты q_3. Так будет, например, если коэффициенты a_1 и a_2 вообще не зависят от q_3. Видим, что связь

$$a_1\, dq_1 + a_2\, dq_2 = 0$$

голономна при любых коэффициентах a_1 и a_2, зависящих только от координат q_1 и q_2:

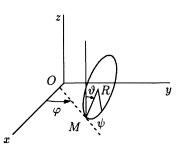
$$a_1 = a_1(q_1, q_2), \quad a_2 = a_2(q_1, q_2).$$

Этот факт может показаться удивительным. Однако в данном случае гиперплоскость $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ одномерна, а значит, интегральная поверхность есть интегральная кривая, которая всегда существует. Поясним это следующим примером.◇

Пример 4.4.3. Пусть число связей на единицу меньше размерности пространства R^{n+1}, т.е. $m = n$. Такая система связей голономна. Действительно, если $m = n$, то гиперплоскость $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ допустимых дифференциалов имеет размерность $n+1-m = 1$. Все допустимые дифференциалы оказываются коллинеарными: $\delta\mathbf{q} = \lambda d\mathbf{q}$. Значит,

$$d\omega_i(\delta\mathbf{q}) = \delta\omega_i(d\mathbf{q}) = \lambda\, d\omega_i(d\mathbf{q}), \quad i = 1, \dots, n,$$

и внешние производные тождественно обращаются в нуль. Интегральная поверхность имеет максимальную размерность, равную единице. Она представляет собой всегда существующую интегральную кривую.◇



Точка соприкосновения диска с плоскостью при движении диска может оказаться в любой точке плоскости, а диск может принять любую ориентацию относительно выбранного репера. Неголономные связи, стесняющие кинематические возможности диска, ограничивают лишь множество кривых в конфигурационном пространстве, соединяющих произвольные начальное и конечное положения диска.

Рис. 4.4.1. Качение диска по плоскости

Пример 4.4.4. Рассмотрим диск, катящийся по плоскости $\mathcal{P}$ без проскальзывания (рис. 4.4.1). Положение такого диска можно задать координатами x и y точки соприкосновения M диска с плоскостью, углом ψ между радиусом, проходящим через фиксированную точку обода диска, и диаметром, проходящим через M, углом φ между касательной в точке M к диску и осью Ox, а также углом ϑ между плоскостью диска и осью Oz. Качение диска по плоскости без проскальзывания означает, что в каждый момент времени скорость точки M диска, лежащей на плоскости $\mathcal{P}$, равна нулю. Произвольное малое перемещение

диска характеризуется дифференциалами

$$dx, \quad dy, \quad d\psi, \quad d\varphi, \quad d\vartheta.$$

Пусть радиус диска равен R. Тогда условие качения диска без проскальзывания относительно плоскости $\mathcal{P}$ запишется в виде двух уравнений дифференциальных связей

$$\omega_1(d\mathbf{q}) = dx - R\cos\varphi\, d\psi = 0,$$
$$\omega_2(d\mathbf{q}) = dy - R\sin\varphi\, d\psi = 0.$$

Составим внешние производные

$$d\omega_1(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_1(d\mathbf{q}) = \ R\sin\varphi\,(d\varphi\,\delta\psi - \delta\varphi\, d\psi),$$
$$d\omega_2(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_2(d\mathbf{q}) = -R\cos\varphi\,(d\varphi\,\delta\psi - \delta\varphi\, d\psi).$$

Дифференциалы $d\varphi$, $\delta\varphi$, $d\psi$, $\delta\psi$ можно выбрать произвольно. Значит, тождественное равенство нулю внешних производных невозможно. Для этого потребовалось бы одновременное равенство нулю $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Следовательно, система дифференциальных связей качения диска по плоскости неголономна.◇

§ 4.5. Выявление голономных связей

При исследовании свойств системы материальных точек, подверженных действию связей, часто оказывается желательным уменьшить размерность ее координатного пространства. Это возможно, когда в системе имеются голономные связи. Цель настоящего параграфа состоит в построении процедуры выделения голономных связей из заданного множества дифференциальных связей.

Пусть в координатном пространстве R^{n+1} задано $n+1$ линейно независимых пфаффовых форм

$$\omega_0(d\mathbf{q}), \quad \omega_1(d\mathbf{q}), \quad \dots, \quad \omega_n(d\mathbf{q}),$$

определенных невырожденной квадратной матрицей коэффициентов

$$(a_{i\mu}), \quad i, \mu = 0, 1, \dots, n.$$

Найдем для этих форм $n+1$ линейно независимых векторов

$$\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$$

так, чтобы

$$\omega_i(\boldsymbol{\alpha}_\nu) = \delta_{i\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq \nu, \\ 1, & \text{если } i = \nu. \end{cases}$$

Другими словами, матрица $(\alpha_{\mu\nu})$, составленная из компонент векторов $\boldsymbol{\alpha}_\nu$, должна быть обратной по отношению к матрице $(a_{i\mu})$. Подобранные таким образом $n+1$ векторов и $n+1$ форм называются *базисными*.

Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный вектор. Тогда его разложение по базисным векторам имеет вид

$$\boldsymbol{\xi} = \omega_0(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_0 + \omega_1(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + \omega_n(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_n.$$

Рассмотрим внешнюю производную

$$d\omega_i(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_i(d\mathbf{q}) = \sum_{\mu,\nu=0}^{n}\left(\frac{\partial a_{i\mu}}{\partial q_\nu}dq_\nu\delta q_\mu - \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial q_\mu}dq_\nu\delta q_\mu\right) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{n}\left(\frac{\partial a_{i\mu}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial q_\mu}\right)dq_\nu\delta q_\mu.$$

Коэффициенты dq_ν, δq_μ разложений векторов $d\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{q}$ по базисным векторам вычисляются следующим образом:

$$dq_\nu = \omega_\nu(d\mathbf{q}), \quad \delta q_\mu = \omega_\mu(\delta\mathbf{q}).$$

Обозначим

$$C^i_{\nu\mu} = \frac{\partial a_{i\mu}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial q_\mu} = -C^i_{\mu\nu}.$$

Тогда получим разложение внешней производной по базисным формам

$$d\omega_i(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_i(d\mathbf{q}) = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} C^i_{\nu\mu}\omega_\nu(d\mathbf{q})\,\omega_\mu(\delta\mathbf{q}).$$

Введем операторы

$$\mathbf{A}_\nu = \sum_{\mu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q_\mu},$$

отвечающие векторным полям $\boldsymbol{\alpha}_\nu$, так что

$$\mathbf{A}_\nu f = \sum_{\mu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial q_\mu},$$

где f — некоторая функция переменных $q_0, \ldots, q_n$.

Теорема 4.5.1. *Если полный дифференциал функции f разложить по базисным формам $\omega_0, \ldots, \omega_n$, то коэффициенты разложения совпадут с результатом применения операторов $\mathbf{A}_\nu$ к этой функции:*

$$df = \sum_{\nu=0}^{n}(\mathbf{A}_\nu f)\omega_\nu(d\mathbf{q}).$$

Доказательство. Используя определение операторов $\mathbf{A}_\nu$, базисных форм и векторов, найдем

$$\sum_{\nu=0}^{n}(\mathbf{A}_\nu f)\omega_\nu(d\mathbf{q}) = \sum_{i,\nu,\mu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial q_\mu}a_{\nu i}dq_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}dq_i = df.\square$$

Справедлива также формула

$$\delta f = \sum_{\mu=0}^{n}(\mathbf{A}_\mu f)\omega_\mu(\delta\mathbf{q}).$$

Повторно применим полученные разложения полного дифференциала

$$d(\delta f) = \sum_{\mu=0}^{n}[d(\mathbf{A}_\mu f)\omega_\mu(\delta\mathbf{q}) + (\mathbf{A}_\mu f)d(\omega_\mu(\delta\mathbf{q}))] =$$

$$\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\mathbf{A}_\nu(\mathbf{A}_\mu f)\omega_\nu(d\mathbf{q})\omega_\mu(\delta\mathbf{q}) + \sum_{i=0}^{n}(\mathbf{A}_i f)d(\omega_i(\delta\mathbf{q})).$$

Очевидно, что левая часть этого равенства не изменится при перестановке символов d и δ между собой (изменение порядка дифференцирования функции). Поэтому

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{n}[\mathbf{A}_\nu(\mathbf{A}_\mu f) - \mathbf{A}_\mu(\mathbf{A}_\nu f)]\omega_\nu(d\mathbf{q})\omega_\mu(\delta\mathbf{q}) + \sum_{i=0}^{n}(\mathbf{A}_i f)[d\omega_i(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_i(d\mathbf{q})] = 0.$$

Учтем разложение внешней производной по базисным формам:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{n}[(\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu) + \sum_{i=0}^{n}C^i_{\nu\mu}\mathbf{A}_i)f]\omega_\nu(d\mathbf{q})\omega_\mu(\delta\mathbf{q}) = 0.$$

В силу произвольности векторов $d\mathbf{q}$ и $\delta\mathbf{q}$, а также функции f получим

$$\mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu = -\sum_{i=0}^{n}C^i_{\nu\mu}\mathbf{A}_i.$$

Определение 4.5.1. Выражение

$$[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\mu] = \mathbf{A}_\nu\mathbf{A}_\mu - \mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_\nu$$

называется *коммутатором* (*скобкой Пуассона*) *двух линейных операторов* $\mathbf{A}_\nu$ *и* $\mathbf{A}_\mu$.

Теорема 4.5.2. *Коммутатор попарно взятых базисных операторов из множества $\{\mathbf{A}_\nu\}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, есть линейный оператор первого порядка. Он разлагается по базисным операторам с теми же коэффициентами, что и внешние производные базисных форм по самим этим формам:*

$$[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\mu] = -\sum_{i=0}^{n}C^i_{\nu\mu}\mathbf{A}_i.$$

Доказательство. Формула, выражающая коммутатор через операторы $\mathbf{A}_i$, следует из определения этой скобки. Правая часть есть линейная комбинация операторов $\mathbf{A}_i$ и не содержит вторых производных.$\square$

Обратимся вновь к произвольной пфаффовой системе уравнений

$$\omega_0(d\mathbf{q}) = \omega_1(d\mathbf{q}) = \ldots = \omega_{m-1}(d\mathbf{q}) = 0.$$

Дополним входящие в нее m линейно независимых форм еще какими-нибудь $n+1-m$ линейными дифференциальными формами

$$\omega_m, \ldots, \omega_n$$

так, чтобы все $n+1$ форм были линейно независимы и могли быть приняты за базисные формы. Этим формам сопоставим $n+1$ базисных векторов

$$\boldsymbol{\alpha}_0, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n.$$

Выделим особо векторы

$$\boldsymbol{\alpha}_m, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n.$$

Каждый из этих векторов согласно определению обращает в нуль все формы

$$\omega_0, \ldots, \omega_{m-1}.$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{\alpha}_m, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ определяют гиперплоскость $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ пфаффовой системы. В данной точке пространства пфаффову систему можно задавать либо m линейными дифференциальными формами $\omega_0, \ldots, \omega_{m-1}$, либо $n+1-m$ векторными полями $\boldsymbol{\alpha}_m, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$.

Теорема 4.5.3. *Для того чтобы система дифференциальных связей была голономной (вполне интегрируемой), необходимо и достаточно при разложении внешних производных по базисным формам*

$$d\omega_i(\delta\mathbf{q}) - \delta\omega_i(d\mathbf{q}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n}C^i_{\nu\mu}\omega_\nu(d\mathbf{q})\omega_\mu(\delta\mathbf{q})$$

иметь выполненным условие

$$C^i_{\nu\mu} = 0 \quad \textit{при} \quad i = 0, \ldots, m-1; \quad \nu = m, \ldots, n \quad \mu = m, \ldots, n.$$

Доказательство. Возьмем дифференциалы $d\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{q} \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$. Для них

$$\omega_i(d\mathbf{q}) = \omega_i(\delta\mathbf{q}) = 0, \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

Поэтому в разложении внешней производной останутся только члены с индексами $\nu, \mu = m, \ldots, n$:

$$d\omega_i(\delta q) - \delta\omega_i(dq) = \sum_{\nu,\mu=m}^{n}C^i_{\nu\mu}\omega_\nu(d\mathbf{q})\omega_\mu(\delta\mathbf{q}).$$

Требование полной интегрируемости эквивалентно обращению в нуль правой части этого равенства при любых dq, $\delta q \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$. Значения же форм $\omega_\nu(dq)$, $\omega_\mu(\delta q)$ $(\nu, \mu = m, \ldots, n)$ могут быть выбраны произвольно, лишь бы они дополняли совокупность форм пфаффовой системы до базисной.$\square$

Следствие 4.5.1. *Система дифференциальных связей голономна (вполне интегрируема) тогда и только тогда, когда коммутаторы операторов $\mathbf{A}_m, \ldots, \mathbf{A}_n$, соответствующих линейно независимым векторам $\boldsymbol{\alpha}_m, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \in \mathcal{L}(\mathbf{q})$, разлагаются по этим же операторам:*

$$[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\mu] = -\sum_{i=m}^{n}C^i_{\nu\mu}\mathbf{A}_i.$$

Доказательство получается применением теоремы 4.5.3 к разложению коммутаторов по базисным операторам.$\square$

Интегралом системы дифференциальных связей называется функция, сохраняющая постоянное значение на интегральных поверхностях системы.

Теорема 4.5.4. *Отыскание интегралов произвольной системы дифференциальных связей, содержащих m уравнений, равносильно решению $n+1-m$ уравнений в частных производных*

$$\mathbf{A}_i f = \alpha_{0i}\frac{\partial f}{\partial q_0} + \ldots + \alpha_{ni}\frac{\partial f}{\partial q_n} = 0, \quad i = m, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть f есть интеграл соответствующей пфаффовой системы. Это эквивалентно тому, что полный дифференциал df и формы пфаффовой системы

$$\omega_0, \ldots, \omega_{m-1}$$

одновременно обратятся в нуль. Значит,

$$df = \sum_{i=m}^{n}(\mathbf{A}_i f)\,\omega_i(d\mathbf{q}).$$

Но формы $\omega_i(d\mathbf{q})$ для $i = m, \ldots, n$ можно выбрать произвольно.$\square$

Следствие 4.5.2. *Если f есть интеграл системы дифференциальных связей, то f удовлетворяет уравнениям*

$$[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\mu]f = 0, \quad \nu, \mu = m, \ldots, n.$$

Доказательство. Если f есть интеграл системы связей, то имеем тождества

$$\mathbf{A}_i f \equiv 0, \quad i = m, \ldots, n.$$

Линейный же оператор, примененный к функции, тождественно равной нулю, снова дает нуль. Поэтому

$$\mathbf{A}_\nu(\mathbf{A}_\mu f) = 0, \quad \mathbf{A}_\mu(\mathbf{A}_\nu f) = 0, \quad \mu, \nu = m, \ldots, n.$$

В итоге

$$[\mathbf{A}_\nu, \mathbf{A}_\mu]f = \mathbf{A}_\nu(\mathbf{A}_\mu f) - \mathbf{A}_\mu(\mathbf{A}_\nu f) = 0.$$

Следствие 4.5.3. *Если к системе уравнений в частных производных*

$$\mathbf{A}_i f = 0, \quad i = m, \ldots, n,$$

присоединить уравнения того же вида, составленные из коммутаторов операторов, входящих в систему, то расширенная система имеет те же интегралы, что и исходная.

Сформулируем **алгоритм выявления интегралов системы дифференциальных связей.**

1. Находится какая-нибудь совокупность линейно независимых векторов $\boldsymbol{\alpha}_m, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$, задающих пространство $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ допустимых дифференциалов системы связей.

2. По векторам $\boldsymbol{\alpha}_m, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ составляются линейные операторы

$$\mathbf{A}_m, \ldots, \mathbf{A}_n.$$

3. Выполняется процедура расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$. А именно, вычисляется коммутатор каких-либо операторов набора п. 2. Если этот коммутатор линейно не зависит от исходного набора операторов, то он добавляется к этому набору, и над новым набором снова выполняется процедура расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$. Если составленный коммутатор линейно зависит от операторов набора, получившегося на очередном шаге процедуры расширения, то этот коммутатор не принимается во внимание и составляется коммутатор какой-либо иной пары операторов.

4. Процедура расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ продолжается до тех пор, пока число линейно независимых линейных операторов не перестанет увеличиваться от присоединения их коммутаторов.

Теорема 4.5.5. *Процедура расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ конечна. Если она заканчивается, когда число линейно независимых операторов равно $n+1$, то в системе дифференциальных связей голономные связи отсутствуют. Если число линейно независимых операторов, полученных процедурой расширения, меньше чем $n+1$, то соответствующая всем этим операторам пфаффова система вполне интегрируема, а ее уравнения образуют голономные связи рассматриваемой механической системы.*

Доказательство. Согласно следствию 4.5.3, применение процедуры расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ приводит к тому, что расширенная система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathbf{A}_k f = \ldots = \mathbf{A}_n f = 0, \quad k < m,$$

имеет те же интегралы, что и исходная. Число же линейно независимых операторов $\mathbf{A}_i$ возрастает, а число уравнений соответствующей им пфаффовой системы уменьшается. Число линейно независимых векторов $\boldsymbol{\alpha}_i$ не может превосходить размерности пространства R^{n+1}. Значит, процедура расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ конечна. Возникновение ситуации, когда число линейно независимых операторов $\mathbf{A}_i$ не увеличивается от добавления коммутаторов, означает, что все коммутаторы линейно разлагаются по операторам системы. Согласно следствию 4.5.1, такое множество операторов определяет некоторую вполне интегрируемую пфаффову систему.

При расширении пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ число уравнений Пфаффа уменьшается, причем согласно следствию 4.5.3 ни одного интеграла не пропадает. Пусть расширенная система дифференциальных уравнений в частных производных имеет $n+1-k$ линейно независимых уравнений, причем $k < m$. Тогда вновь полученная пфаффова

система состоит из k уравнений. Вполне интегрируемая система k уравнений Пфаффа имеет ровно k интегралов

$$f_0, \ldots, f_{k-1}.$$

Присоединяя к k уравнениям

$$df_0 = \ldots = df_{k-1} = 0$$

линейно независимые уравнения исходной системы, приведем ее к виду

$$df_0 = \ldots = df_{k-1} = 0,$$
$$\omega'_k = \ldots = \omega'_{m-1} = 0.$$

Таким образом, заданная система связей оказывается эквивалентной k голономным связям

$$f_0 = c_0, \ldots, f_{k-1} = c_{k-1}$$

и $m-k$ неголономным связям

$$\omega'_k = \ldots = \omega'_{m-1} = 0.$$

Пример 4.5.1. Пусть в пространстве R^4 задана система двух дифференциальных связей:

$$\omega_0 = q_0\,dq_0 + q_1\,dq_1 + q_2\,dq_2 = 0,$$
$$\omega_1 = dq_0 + q_3\,dq_1 = 0.$$

Очевидно, что связь ω_0 — голономна, а связь ω_1 — неголономна. Получим этот результат с помощью процедуры расширения.

1. Легко проверить, что пространство допустимых дифференциалов $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ рассматриваемой системы натянуто на линейно независимые векторы

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (q_2q_3, -q_2, (q_1 - q_0q_3), 0).$$

2. Векторам α_2, α_3 соответствуют линейные дифференциальные операторы

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad \mathbf{A}_3 = q_2q_3\frac{\partial}{\partial q_0} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + (q_1 - q_0q_3)\frac{\partial}{\partial q_2}.$$

3. Составим коммутатор

$$[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = q_2\frac{\partial}{\partial q_0} - q_0\frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Он линейно не зависит от операторов $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$. Рассмотрим расширенный набор линейных операторов:

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3], \quad \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_3.$$

Образуем из них всевозможные коммутаторы:

$$[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] = 0, \quad [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = -q_1\frac{\partial}{\partial q_0} + q_0\frac{\partial}{\partial q_1}, \quad [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = \mathbf{A}_1.$$

Видим, что существует линейная комбинация

$$q_0\mathbf{A}_3 + (q_1 - q_0q_3)\mathbf{A}_1 + q_2[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = 0.$$

Поэтому все коммутаторы операторов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ линейно выражаются через сами эти операторы. Процесс расширения допустимого пространства закончен. Расширенное пространство натянуто на векторы

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (q_2, 0, -q_0, 0),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 0, 0, 1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = (q_2q_3, -q_2, q_1 - q_0q_3, 0).$$

Подстановкой можно убедиться, что все эти векторы удовлетворяют вполне интегрируемому пфаффову уравнению $\omega_0 = 0$, которое тем самым оказалось выявленным с помощью процедуры расширения. Исходная система эквивалентна одной голономной связи

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 = c$$

и одной дифференциальной неголономной связи

$$dq_0 + q_3dq_1 = 0,$$

где c — произвольная постоянная, определяемая начальными значениями координат системы.$\diamond$

§ 4.6. Идеальные связи. Виртуальные перемещения

Предположим, что механическая система состоит из N материальных точек в пространстве E^3, движения которых стеснены как геометрическими, так и дифференциальными двусторонними связями. Всякая геометрическая связь

$$f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0,$$

где $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$ — радиусы-векторы точек, t — время, приводится к дифференциальной связи вида

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_\nu}\cdot\mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

где обозначено $\dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{v}_\nu$. В дальнейшем изложении будем предполагать, что эта операция выполнена над всеми геометрическими связями, так что полная совокупность связей учитывается следующей системой независимых уравнений:

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Связи оказывают на материальные точки системы пассивное воздействие (реакции связей — пассивные силы). Они влияют на характер движения, заставляя его параметры в каждый момент времени удовлетворять уравнениям связей. Структура связей влияет и на положение равновесия, запрещая точкам смещаться в одних направлениях и не препятствуя смещению в других. Воздействие со стороны связей на ν-ю материальную точку системы будем выражать реакцией связей $\mathbf{R}_\nu$ (определение 3.8.1).

Необходимым и достаточным условием того, что уравнения связей выполняются в каждый момент времени в силу уравнений движения отдельных материальных точек, служит существование реакций, удовлетворяющих следующей системе линейных уравнений (см. § 3.8):

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}\cdot\frac{\mathbf{R}_\nu}{m_\nu} = b_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad m \le 3N,$$

где

$$b_j = -\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}\cdot\frac{\mathbf{F}_\nu}{m_\nu} - \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{r}_\nu}\cdot\mathbf{v}_\nu - \frac{\partial\Phi_j}{\partial t}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

При $m \le 3N$ решение этой системы неоднозначно.

В пространстве E^3 выберем декартов ортонормированный репер $Oe_1e_2e_3$. Чтобы в E^3 задать положения всех материальных точек системы (задать ее конфигурацию), достаточно назначить $3N$ скалярных величин — координат радиусов-векторов $\mathbf{r}_\nu$ точек. Каждая из этих координат может быть отложена на отдельной оси $3N$-мерного координатного пространства. Такое пространство назовем *конфигурационным пространством* системы. Отдельная конфигурация системы изображается одной точкой конфигурационного пространства.

Чтобы выявить структуру множества решений системы уравнений относительно реакций, в пространстве конфигураций определим следующие векторы

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{3N}), \quad \boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{3N}), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{j\,3N})$$

с компонентами

$$x_i = \frac{\mathbf{R}_\nu \cdot \mathbf{e}_k}{\sqrt{m_\nu}}, \quad \delta_i = \sqrt{m_\nu}\,\delta\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{e}_k, \quad a_{ji} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$i = k + 3(\nu - 1), \quad k = 1, 2, 3, \quad \nu = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, m,$$

и евклидово скалярное произведение

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3N} a_{ji} x_i.$$

Исследуемая система уравнений будет содержать неизвестный вектор $\mathbf{x}$ и перепишется следующим образом:

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}) = b_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

В силу независимости исходной совокупности связей матрица этой системы имеет ранг, равный m.

Решение $\mathbf{x}$ можно искать в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}_j + \mathbf{x}_\tau,$$

где вектор $\mathbf{x}_\tau$ ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_j$. Постоянные λ_j определяются однозначно, так как матрица системы уравнений для λ_j есть матрица Грама совокупности линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Вектор $\mathbf{x}_\tau$ из уравнений системы связей определить невозможно. Это означает, что система связей будет удовлетворена при любом векторе $\mathbf{x}_\tau$.

Определение 4.6.1. *Нормальным пространством* системы дифференциальных связей назовем множество $\mathcal{R}$, состоящее из наборов $\{\mathbf{R}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}$ векторов реакций таких, что соответствующий каждому набору $3N$ мерный вектор $\mathbf{x}$ принадлежит линейной оболочке $\mathrm{lin}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Определение 4.6.2. Пространством $\mathcal{T}$ *виртуальных перемещений* назовем множество наборов $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}$ векторов перемещений, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Векторы набора $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}$, удовлетворяющего этой системе однородных линейных уравнений, называются *виртуальными перемещениями* системы материальных точек.

Пространство $\mathcal{T}$ имеет размерность $3N - m$. Другими словами, $3N - m$ дифференциалов координат точек могут быть выбраны произвольно, а остальные m будут их линейными комбинациями.

Вектор $\boldsymbol{\delta}$, соответствующий набору $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}$ виртуальных перемещений, ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\delta}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Условие того, что набор действительных перемещений $\{d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu\, dt, \nu = 1, \ldots, N\}$ принадлежит пространству виртуальных перемещений $\mathcal{T}$, записывается в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Пусть связи линейно зависят от скоростей

$$\Phi_j = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{j\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + A_{j0} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где векторы $\mathbf{A}_{j\nu}$ и скаляр A_{j0} зависят только от координат и времени. Имеем $\partial\Phi_j/\partial\mathbf{v}_\nu = \mathbf{A}_{j\nu}$. Отсюда получается система уравнений (определение 4.6.2), выделяющая виртуальные перемещения материальных точек для линейных по скоростям связей:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{j\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Учтем, что

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}.$$

Тогда уравнения линейных связей можно представить в дифференциальной форме:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{j\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu + A_{j0}\, dt = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Видим, что система уравнений для дифференциалов действительных перемещений $d\mathbf{r}_\nu$ отличается от системы уравнений для виртуальных перемещений $\delta\mathbf{r}_\nu$ наличием в ней слагаемых вида $A_{j0}\, dt$. Поэтому виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$ можно трактовать как дифференциалы радиусов-векторов точек, допускаемые связями, когда время принято за фиксированный параметр: $dt = 0$. Если для всех j имеем $A_{j0} = 0$, то дифференциал действительного перемещения системы принадлежит пространству $\mathcal{T}$ виртуальных перемещений. При $A_{j0} = 0$, $j = 1, ..., m$, система уравнений, определяющая дифференциалы действительных перемещений, совпадает с системой уравнений, определяющей виртуальные перемещения.

Пусть задана система геометрических связей

$$f_j(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Приведем ее к дифференциальной форме

$$\Phi_j = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, $\partial\Phi_j/\partial\mathbf{v}_\nu = \partial f_j/\partial\mathbf{r}_\nu$, и система уравнений, определяющая виртуальные перемещения, примет вид:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Равенства $\partial f_i/\partial t = 0$, $i = 1, \ldots, m$, для голономных связей необходимы и достаточны, чтобы дифференциалы действительных перемещений принадлежали множеству виртуальных.

Если все связи, наложенные на систему материальных точек, голономны, то в каждый фиксированный момент времени уравнения связей выделяют в конфигурационном пространстве соответствующие им гиперповерхности. Виртуальные перемещения в этом случае суть векторы сдвигов изображающей точки из исследуемого положения в другое, принадлежащие касательному пространству к пересечению указанных гиперповерхностей.

Для неголономных связей подобная геометрическая интерпретация виртуальных перемещений не будет справедливой. В частности, наличие неголономных линейных связей не накладывает никаких ограничений на начальное и конечное положения точки в конфигурационном пространстве, стесняя лишь множество траекторий, которыми эти точки допускается соединять. Отметим еще, что для

неголономных линейных по скоростям связей дифференциалы действительных перемещений принадлежат множеству виртуальных тогда и только тогда, когда эти связи однородны. Они не обязаны быть стационарными.

Теорема 4.6.1. *Набор реакций $\{\mathbf{R}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}$ принадлежит нормальному пространству $\mathcal{R}$ системы дифференциальных связей тогда и только тогда, когда для любого набора $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\} \in \mathcal{T}$ виртуальных перемещений точек системы выполнено условие*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\mathbf{R}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\} \in \mathcal{R}$. Согласно определению 4.6.1 существуют скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что для соответствующего этому набору реакций $3N$-мерного вектора $\mathbf{x}$ будет выполнено $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{a}_m$. Возьмем виртуальное перемещение $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\} \in \mathcal{T}$ системы точек и построим соответствующий ему $3N$-мерный вектор $\boldsymbol{\delta}$. По определению 4.6.2 виртуальных перемещений имеем $(\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\delta}) = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Достаточность. Предположим, что выполнено

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \quad \forall\, \{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\} \in \mathcal{T}.$$

Тогда для соответствующих векторов $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\delta}$ это условие можно переписать следующим образом

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\delta} : (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\delta}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a}_j + \mathbf{x}_\tau$$

и найдем коэффициенты λ_j так, чтобы было $(\mathbf{a}_j, \mathbf{x}_\tau) = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Соответствующая система линейных уравнений однозначно разрешима, поскольку ее определитель есть определитель Грама для линейно независимых векторов $\mathbf{a}_j$. Пусть после этого оказалось, что вектор

$\mathbf{x}_\tau \neq 0$. Тогда $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) = \|\mathbf{x}_\tau\|^2 \neq 0$. Получили противоречие, так как можно принять $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}_\tau$.□

Определение 4.6.3. Связи, наложенные на систему N материальных точек, называются *идеальными*, если

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

для произвольных виртуальных перемещений $(\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N) \in \mathcal{T}$ (ср. с определением 3.8.3).

Чтобы определить реакции идеальных связей, можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа. Умножим каждое уравнение системы, определяющей виртуальные перемещения $\delta\mathbf{r}_\nu$, $\nu = 1, ..., N$, на некоторый скалярный множитель λ_j и результаты вычтем почленно из равенства, выражающего свойство идеальности связей:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\mathbf{R}_\nu - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \right) \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Виртуальные перемещения могут быть получены путем произвольного задания $3N - m$ независимых дифференциалов координат. Остальные m зависимых дифференциалов получаются из уравнений для виртуальных перемещений.

Произвольными множителями λ_j, $j = 1, \ldots, m$, распорядимся так, чтобы коэффициенты при зависимых дифференциалах (их число равно m) в последнем равенстве обратились в нули. Тогда в нем останутся лишь члены с независимыми произвольными дифференциалами. Из-за того что равенство нулю элементарной работы реакций связей на любых виртуальных перемещениях системы должно быть тождественным, заключаем, что в нуль обязаны обратиться все коэффициенты при независимых дифференциалах координат. Таким путем находим следующие выражения для реакций идеальных связей:

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu}.$$

В сумме правой части каждое слагаемое, очевидно, можно интерпретировать как реакцию j-й связи, действующую на ν-ю материальную точку. Эта реакция, следовательно, равна

$$\mathbf{R}_{j\nu} = \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu}.$$

Множители λ_j могут быть найдены с помощью уравнений связей.

Теорема 4.6.2. *Реакции m идеальных связей однозначно определяются при заданных активных силах, действующих на систему N материальных точек, если $m \leq 3N$.*

Доказательство. По теореме 4.6.1 реакции идеальных связей принадлежат нормальному пространству $\mathcal{R}$ (см. определение 4.6.1). Векторы этого пространства при заданных активных силах $\mathbf{F}_\nu$ определяются уравнениями связей однозначно.□

Механика, конечно, не ограничивается изучением только систем с идеальными связями. Однако подчеркнем, что лишь для определения реакций идеальных связей достаточно задать уравнения этих связей. При исследовании систем с неидеальными связями кроме ограничений на значения координат и скоростей материальных точек необходимо сформулировать некоторые дополнительные сведения о реакциях. Примером могут служить задачи о движении или равновесии систем с трением.

Для дифференциальных связей, линейных по скоростям (см. § 4.2), получим

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} = \mathbf{A}_{j\nu}, \quad \mathbf{R}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{A}_{j\nu}, \quad \mathbf{R}_{j\nu} = \lambda_j \mathbf{A}_{j\nu}.$$

В случае голономных связей $f_j(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ коэффициенты $\partial\Phi_j/\partial\mathbf{v}_\nu$ принимают вид

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} = \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_\nu}$$

и составляют градиенты поверхностей уровня $f_j = 0$. Реакции идеальных голономных связей

$$\mathbf{R}_{j\nu} = \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_\nu}$$

направлены вдоль частных градиентов к указанным поверхностям.

Замечание 4.6.1. В некоторых задачах требование идеальности связей (предположение о том, что $\mathbf{x}_\tau = 0$) может оказаться слишком сильным. Тогда необходимо добавить соответствующие ненулевые составляющие реакций $\{\mathbf{R}^\tau_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}$, для которых вектор $\mathbf{x}_\tau$ ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Чтобы этого добиться, следует в соответствии с особенностями конкретной задачи выбрать подходящий вектор $\bar{\boldsymbol{\delta}} \in \mathrm{lin}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ и принять $\mathbf{x}_\tau = \beta\bar{\boldsymbol{\delta}}$ или

$$\mathbf{R}^\tau_\nu = \beta m_\nu \overline{\delta\mathbf{r}}_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

где $\{\overline{\delta\mathbf{r}}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\} \in \mathcal{T}$ представляет собой подходящее виртуальное перемещение системы, а β — размерный скалярный коэффициент, определяемый условиями задачи и зависящий, вообще говоря, от параметров состояния системы и времени. В дальнейшем, говоря о системах с идеальными связями, мы будем иметь ввиду, что указанные дополнительные силы могут быть учтены во всех последующих соотношениях таким же способом, как и произвольные активные силы.

Замечание 4.6.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа есть математическая формулировка принципа освобождения от идеальных связей (определение 3.8.1). В такой форме этот принцип механики можно успешно использовать в произвольных задачах на условный экстремум. В частности, пусть требуется найти экстремум скалярной функции (функционала, см. § 8.11) $F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$ (или $\mathbf{x} \in (L_2)^n$, если $F(\mathbf{x})$ — функционал) при выполнении ограничений

$$\phi_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где ϕ_i — скалярные функции (функционалы). Обозначим Φ множество всех значений $\mathbf{x}$, удовлетворяющих ограничениям. В искомой точке экстремума градиент $F(\mathbf{x})$ по переменным $\mathbf{x} \in \Phi$ должен обращаться в нуль. Пусть $\mathcal{T}$ — касательное пространство к множеству Φ в произвольной точке $\mathbf{x}$ (множество виртуальных перемещений). Оно определено соотношением

$$\mathcal{T} = \left(\delta\mathbf{x} : \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \ldots, m \right).$$

Пусть $\mathcal{N}$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{T}$. Если вектор $\mathbf{R} \in \mathcal{N}$, то по определению $\mathcal{N}$ должно быть

$$\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{x} = 0$$

для любого $\delta\mathbf{x} \in \mathcal{T}$. Вектор $\mathbf{R}$ аналогичен реакции идеальных связей $\phi_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. По методу множителей Лагранжа найдем

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}}.$$

Точка экстремума определена условием, что проекция градиента $\partial F/\partial\mathbf{x}$ на касательное пространство $\mathcal{T}$ обращается в нуль. С помощью вектора $\mathbf{R}$ эту проекцию можем выразить следующим образом:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathcal{T}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|} \right) \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|}.$$

Примем во внимание выражение для $\mathbf{R}$ через градиенты функций ϕ_i, $i = 1, \ldots, m$, и то, что множители Лагранжа пока не определены. Условие экстремальности можно представить в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}} = 0.$$

Множители μ_i находятся из уравнений связей. Вектор $\mathbf{R}$ позволяет учесть запрет на смещение точки $\mathbf{x}$ в направлении, перпендикулярном касательному пространству $\mathcal{T}$, и тем самым дает возможность освободиться от связей при формулировании условия экстремальности.

Рассмотрим некоторые примеры идеальных связей.

Пример 4.6.1. Примем, что связи, обеспечивающие постоянство расстояний между N материальными точками, идеальны. Пусть $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ — радиусы-векторы двух произвольных точек множества. Связи имеют вид

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = l_{ij}^2, \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

где l_{ij} — постоянные. Воздействие i-й точки на j-ю из-за наличия между ними связи обозначим $\mathbf{R}_{ij}$. Аналогичное воздействие j-й точки на i-ю обозначим $\mathbf{R}_{ji}$. Согласно методу множителей Лагранжа будем иметь

$$\mathbf{R}_{ji} = -\mathbf{R}_{ij} = \lambda_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где λ_{ij} — скалярные коэффициенты.

Таким образом предположение об идеальности связей системы точек, образующих твердое тело, означает, что взаимодействие между ними подчиняется третьему закону Ньютона (равенство действия и противодействия см. стр. 161).

Наоборот, если предположить, что взаимодействие между точками твердого тела подчиняется третьему закону Ньютона, то получим

$$\mathbf{R}_{ij} = -\mathbf{R}_{ji} = \gamma_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Суммарные реакции связей, приложенные к i-й и j-й материальным точкам, будут соответственно равны

$$\mathbf{R}_i = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{R}_{ji} = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{R}_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{R}_j \cdot \delta\mathbf{r}_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \gamma_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\delta\mathbf{r}_j - \delta\mathbf{r}_i) = 0.$$

Это и означает идеальность рассматриваемой системы связей.◇

Пример 4.6.2. Движение точки или множества N точек по идеальной геометрической связи, заданной уравнением $f(\mathbf{r}) = 0$. В этом случае имеем N уравнений связей

$$f(\mathbf{r}_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, N,$$

а виртуальные перемещения удовлетворяют условиям

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \cdot \delta\mathbf{r}_1 = 0, \ldots, \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_N} \cdot \delta\mathbf{r}_N = 0.$$

Реакция идеальной геометрической связи в любой точке перпендикулярна к поверхности связи:

$$\mathbf{R}_j = \lambda_j \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Таким образом, рассматриваемая связь не оказывает влияния на движение точек вдоль ее поверхности (силы трения отсутствуют). Справедливо и обратное утверждение: если силы трения отсутствуют, то рассматриваемая связь будет идеальной, так как отсутствие сил трения означает перпендикулярность реакции к поверхности связи и

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{R}_j \cdot \delta\mathbf{r}_j = 0.◇$$

Пример 4.6.3. Качение одной поверхности по другой без взаимного проскальзывания, когда взаимодействие между ними приводится только к силам реакций, приложенным в точке контакта.

Пусть в точке контакта G реакция первой поверхности равна $\mathbf{R}_1$, а второй — $\mathbf{R}_2$. Так как проскальзывание отсутствует, то

$$\delta\mathbf{r}_1^G = \delta\mathbf{r}_2^G = \delta\mathbf{r}_G,$$

где $\delta\mathbf{r}_1^G$ — виртуальное перемещение точки контакта, принадлежащей первой поверхности, $\delta\mathbf{r}_2^G$ — виртуальное перемещение аналогичной точки второй поверхности. Условие идеальности связи

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1^G + \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2^G = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \cdot \delta\mathbf{r}_G = 0,$$

выполняющееся при любом векторе $\delta\mathbf{r}_G$, означает справедливость третьего закона Ньютона: $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2$. Очевидно верно и обратное: если взаимодействующие связи в рассматриваемом примере подчиняются третьему закону Ньютона, то они идеальны.◇

Пример 4.6.4. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой, когда существует только равнодействующая сила реакции, приложенная к этой точке. Пусть система связей твердого тела (сохраняются расстояния между точками) идеальна. Неподвижная точка имеет нулевое виртуальное перемещение. Отсюда и следует идеальность всей системы связей в целом.◇

§ 4.7. Принцип виртуальных перемещений

Равновесие предполагает отсутствие ускорений всех материальных точек системы в любой момент времени. Задачи о равновесии могут быть изучены с помощью системы уравнений, выражающей равенство нулю суммы всех сил, действующих на каждую точку системы. Эта сумма должна включать как активные силы, так и неизвестные силы реакций связей.

Практическое применение указанного подхода затруднено, когда число точек в системе оказывается большим (например, все точки абсолютно твердого тела). К тому же число точек, к которым приложены активные силы, обычно сравнительно невелико, и, как правило, нет необходимости вычислять буквально все реакции связей.

Принцип виртуальных перемещений служит наиболее общим методом решения задач статики. Он возник в результате обобщения "золотого правила" механики: "проигрыш в расстоянии пропорционален выигрышу в силе". Использование принципа виртуальных перемещений позволяет наиболее экономно сформулировать условия равновесия систем материальных точек на основе геометрических свойств связей и информации об активных силах без введения неизвестных реакций связей.

Теорема 4.7.1. (Принцип виртуальных перемещений). *(И. Бернулли, Лагранж). Конфигурация системы N материальных точек, на которые наложены идеальные двусторонние стационарные связи, допускающие в этой конфигурации тождественное равенство нулю скоростей всех точек системы, будет положением равновесия (определение 4.1.1) тогда и только тогда, когда в любой момент времени равна нулю сумма элементарных работ всех активных сил $\mathbf{F}_\nu$, действующих на систему, на любом виртуальном перемещении $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1,\dots,N\}$ точек их приложения:*

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0, \quad \forall\,\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1,\dots,N\} \in \mathcal{T}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть под действием активных сил $\mathbf{F}_\nu$ система материальных точек, на которую наложены указанные в условии теоремы связи, находится в равновесии. Тогда для каждой точки системы в любой момент времени будет выполняться равенство

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu = 0, \quad \nu = 1,\dots,N.$$

Умножив эти равенства на соответствующие виртуальные перемещения и сложив результаты, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Поскольку связи идеальны, второе слагаемое здесь равно нулю. Необходимость доказана.

Достаточность. По условию любое виртуальное перемещение системы обеспечивает тождество

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0, \quad \forall\,\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1,\dots,N\} \in \mathcal{T}.$$

Представим все связи в дифференциальной форме

$$\mathbf{\Phi}_j(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_N,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_N,t) = 0, \quad j = 1,\dots,m.$$

Они стационарны и допускают в рассматриваемом положении равенство нулю скоростей всех точек системы. Значит,

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}_j}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{\Phi}_j(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_N,0,\dots,0) = 0, \quad j = 1,\dots,N.$$

Примем противоположное: пусть скорости всех точек системы отсутствуют, но положение, в котором находится система, не есть положение равновесия. А именно, не все ускорения точек равны нулю. Тогда в этом положении

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu, \quad j = 1,\dots,m$$

и, следовательно, ускорения обязаны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu = 0, \quad j = 1,\dots,m,$$

совпадающим, очевидно, с уравнениями для виртуальных перемещений (ср. определение 4.6.2). Таким образом, в качестве виртуальных перемещений допустимо принять

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \alpha_\nu \mathbf{w}_\nu, \quad \nu = 1,\dots,N,$$

где α_ν — отличные от нуля положительные скалярные множители. Уравнения Ньютона для каждой точки имеют вид

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \quad \nu = 1,\dots,N,$$

где $\mathbf{R}_\nu$ — реакция связей. Умножив каждое уравнение скалярно на $\delta\mathbf{r}_\nu$ и сложив результаты, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \alpha_\nu \mathbf{w}_\nu^2 > 0.$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu > 0.$$

Это противоречит предположению об идеальности связей. Видим, что в любой момент времени равенство нулю ускорений всех точек системы есть следствие равенства нулю их скоростей, и мы можем воспользоваться теоремой 4.1.1.□

Следствие 4.7.1. *Если силы, действующие на систему, потенциальны, то при выполнении условий теоремы 4.7.1 необходимое и достаточное условие равновесия принимает вид*

$$\delta U = 0,$$

где U — силовая функция, т. е. положение равновесия доставляет для силовой функции потенциальной системы стационарное значение по отношению ко всем соседним конфигурациям, переход к которым принадлежит множеству виртуальных перемещений.

Доказательство. Поскольку силы потенциальны, то существует силовая функция $U = U(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_N)$ такая, что

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\nu}, \quad \nu = 1,\dots,N.$$

Условие равновесия системы состоит в том, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \delta U = 0.\square$$

Следствие 4.7.2. (Принцип Торричелли). *Равновесие системы под действием силы тяжести достигается в тех и только в тех конфигурациях, для которых центр масс системы занимает наивысшее, наинизшее или какое-либо другое стационарное положение по вертикали относительно соседних положений, переход к которым реализуем в пространстве виртуальных перемещений.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{k}$ — единичный вектор вертикали, $z_\nu = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\nu$ — вертикальные проекции радиусов-векторов точек системы, m_ν — их массы, M — сумма масс всех точек системы, g — ускорение силы тяжести. Тогда принцип виртуальных перемещений примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = g\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{k}\cdot\delta\mathbf{r}_\nu) = g\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\,\delta z_\nu = Mg\,\delta z_c = 0,$$

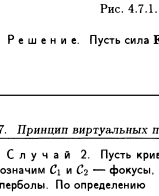
где

$$z_c = M^{-1}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu$$

— вертикальная проекция радиуса-вектора центра масс.□

Пример 4.7.1. Рассмотрим однородный прямоугольный параллелепипед. Очевидно, что его центр масс находится в точке пересечения диагоналей. Когда параллелепипед под действием силы тяжести стоит на столе на какой-нибудь своей грани, то это — положение равновесия, так как при вращении параллелепипеда вокруг какого-либо ребра или вершины, лежащей на столе, центр масс может только подниматься.◇

Пример 4.7.2. Пусть какие-либо две точки плоской неизменной фигуры могут перемещаться только вдоль заданных гладких неподвижных кривых, лежащих в той же плоскости (рис. 4.7.1). Указать, под действием какой силы $\mathbf{F}$ фигура может находиться в равновесии.



Плоская фигура, вынужденная касаться двух гладких направляющих, будет оставаться в равновесии под действием силы $\mathbf{F}$, проходящей через мгновенный центр вращения фигуры. Только в этом случае виртуальное перемещение точки A оказывается перпендикулярным направлению действия силы $\mathbf{F}$.

Рис. 4.7.1. Равновесие фигуры

Решение. Пусть сила $\mathbf{F}$ приложена к точке A фигуры. Принцип

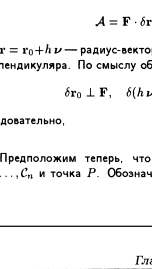
виртуальных перемещений запишется в виде

$$\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_A = 0.$$

Значит, $\mathbf{F} \perp \delta\mathbf{r}_A$. Мгновенный центр вращения фигуры (см. определение 2.14.1) лежит в пересечении нормалей к неподвижным кривым в точках касания с ними фигуры. По теореме 2.14.1 виртуальное перемещение любой точки фигуры должно быть перпендикулярным радиусу, проведенному к этой точке из мгновенного центра вращения O. Следовательно, для равновесия фигуры необходимо и достаточно, чтобы линия действия силы F проходила через мгновенный центр вращения.◇

Принцип виртуальных перемещений можно использовать для решения геометрических задач. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 4.7.3. Пусть в плоскости даны некоторая кривая $\mathcal{C}$ и точка P вне ее (рис. 4.7.2). Проведем через точку P единичную нормаль $\boldsymbol{\nu}$ к кривой $\mathcal{C}$ и обозначим через h расстояние по нормали от кривой $\mathcal{C}$ до точки P. Приложим к точке P некоторую силу $\mathbf{F} = F\boldsymbol{\nu}$, направленную вдоль нормали $\boldsymbol{\nu}$. Элементарная работа силы $\mathbf{F}$ есть



Элементарная работа силы $\mathbf{F}$, перпендикулярной к кривой, выражается как произведение величины силы (со знаком) на дифференциал расстояния от точки P приложения силы до кривой. Дифференциал смещения точки P параллельно касательной к кривой, взятой в основании перпендикуляра из точки P на кривую, не влияет на величину элементарной работы.

Рис. 4.7.2. Работа силы, перпендикулярной к кривой

$$\mathcal{A} = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot[\delta\mathbf{r}_0 + \delta(h\boldsymbol{\nu})],$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + h\boldsymbol{\nu}$ — радиус-вектор точки P, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор основания перпендикуляра. По смыслу обозначений имеем

$$\delta\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{F}, \quad \delta(h\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}\,\delta h + h\,\delta\boldsymbol{\nu}, \quad \delta\boldsymbol{\nu} \perp \boldsymbol{\nu}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} = F\,\delta h.$$

Предположим теперь, что на плоскости расположены n кривых $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_n$ и точка P. Обозначим $h_1,\dots,h_n$ расстояния от точки P до

каждой из этих кривых соответственно. На той же плоскости зададим кривую $\mathcal{D}$ уравнением

$$f(h_1,\dots,h_n) = 0.$$

Дифференциалы координат $h_1,\dots,h_n$ при смещении точки вдоль кривой $\mathcal{D}$ удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial h_i}\,\delta h_i = 0.$$

Приложим теперь к точке P силы $\mathbf{F}_i = \nu_i\,\partial f/\partial h_i$, направленные вдоль единичных нормалей $\boldsymbol{\nu}_i$ к кривым $\mathcal{C}_i$. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки P можно представить с помощью любого из соотношений

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0i} + h_i\boldsymbol{\nu}_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $\mathbf{r}_{0i}$ — радиусы-векторы оснований перпендикуляров из точки P на кривые $\mathcal{C}_i$. Вычислим элементарную работу сил $\mathbf{F}_i$ на виртуальном перемещении точки P вдоль кривой $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i\cdot\delta(\mathbf{r}_{0i} + h_i\boldsymbol{\nu}_i) = \sum_{i=1}^{n} F_i\,\delta h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial h_i}\,\delta h_i = 0.$$

Из принципа виртуальных перемещений следует, что точка P, расположенная на гладкой кривой $\mathcal{D}$, под действием выбранных сил $\mathbf{F}_i$ будет находиться в равновесии. Значит, равнодействующая сил $\mathbf{F}_i$ направлена по нормали к кривой $\mathcal{D}$.

Таким образом, получен простой способ геометрического построения нормали к кривой, заданной указанным способом. Специально отметим, что все рассуждения этого примера справедливы, когда некоторые из кривых $\mathcal{C}_i$ или все они представляют собой точки (докажите!). В этом случае роль нормали $\boldsymbol{\nu}_i$ будет играть единичный вектор направления из точки $\mathcal{C}_i$ в точку P. Рассмотрим несколько конкретных случаев.

Случай 1. Пусть кривая $\mathcal{D}$ есть эллипс. Фокусы эллипса обозначим $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, расстояния от точки P эллипса до фокусов — h_1 и h_2 соответственно. Тогда

$$f(h_1,h_2) = h_1 + h_2 - 2a = 0,$$

где a — большая полуось эллипса. Очевидно, что

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1.$$

Поэтому нормаль к эллипсу есть биссектриса угла между фокальными радиусами-векторами.

Случай 2. Пусть кривая $\mathcal{D}$ есть гипербола. Как и в случае 1, обозначим $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — фокусы, h_1 и h_2 — расстояния от них до точки P гиперболы. По определению

$$f(h_1,h_2) = h_1 - h_2 - 2a = 0.$$

Откуда

$$F_1 = 1, \quad F_2 = -1.$$

Поэтому касательная к гиперболе есть биссектриса угла между фокальными радиусами-векторами (нормаль есть биссектриса смежного угла).

Случай 3. Пусть $\mathcal{D}$ есть парабола, $\mathcal{C}_1$ — директриса (прямая), $\mathcal{C}_2$ — фокус (точка). Уравнение параболы имеет вид

$$f(h_1,h_2) = h_1 - h_2 = 0.$$

Откуда

$$F_1 = 1, \quad F_2 = -1.$$

Следовательно, касательная к параболе служит биссектрисой угла между фокальным радиусом-вектором и перпендикуляром, опущенным из точки параболы на директрису.◇

Докажем два основных необходимых признака равновесия.

Теорема 4.7.2. *Пусть связи, наложенные на систему материальных точек, допускают в некоторой ее конфигурации поступательное виртуальное перемещение всех ее точек вдоль некоторой неподвижной оси $\mathbf{e}$. Тогда для равновесия системы в этой конфигурации необходимо, чтобы сумма проекций всех активных сил на указанную ось равнялась нулю:*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{e} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор направления оси поступательного виртуального перемещения. Для всех точек системы можно принять

$$\delta\mathbf{r}_\nu = a\,\mathbf{e},$$

где a — скалярный множитель, отличный от нуля. Применяя принцип виртуальных перемещений, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot a\,\mathbf{e} = a\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{e} = 0.$$

Но $a \neq 0$.□

Теорема 4.7.3. *Пусть связи, наложенные на систему материальных точек, допускают в некоторой ее конфигурации виртуальные перемещения, соответствующие повороту всей системы как твердого тела вокруг неподвижной оси $\mathbf{e}$. Тогда для равновесия системы в этой конфигурации необходимо, чтобы сумма моментов всех активных сил относительно этой оси равнялась нулю:*

$$\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = 0.$$

Доказательство. Применяя формулу дифференциала вращения системы вокруг оси $\mathbf{e}$ на угол $\delta\varphi$ (§ 2.10), получим следующее выражение для виртуальных перемещений:

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\varphi\,\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1,\dots,N,$$

где $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек системы, имеющие начало на оси вращения. Из принципа виртуальных перемещений следует

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\varphi\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu) = \delta\varphi\,\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = 0.$$

Но $\delta\varphi$ произвольно.□

Перейдем к анализу условий равновесия голономных систем. Допустим, что на систему N материальных точек наложены удерживающие геометрические связи

$$f_j(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_N) = 0, \quad j = 1,\dots,m.$$

Функции f_j будем считать независимыми, т.е. матрица Якоби

$$J = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i}\right)$$

имеет ранг, равный m. Это значит, что из уравнений связей мы можем m координат радиусов-векторов точек выразить как функции остальных $3N-m$ координат и рассматривать эти $3N-m$ координат как совершенно независимые, полностью определяющие положение системы.

Определение 4.7.1. *Лагранжевы координаты* системы материальных точек суть скалярные величины, произвольно задав конкретные значения которых, можно однозначно рассчитать координаты всех точек системы, удовлетворяющие всем заданным голономным связям. Число лагранжевых координат должно быть минимальным.

Когда заданы голономные связи, то лагранжевы координаты могут быть найдены с помощью описанной выше процедуры. Однако это не единственно возможный способ. В частности, чтобы задать голономную систему, бывает достаточно, не выписывая уравнений связей, выбрать лагранжевы координаты $q_1,\dots,q_n$ и указать соответствие

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1,\dots,q_n), \quad i = 1,\dots,N.$$

Пример 4.7.4. Пусть система представляет собой жесткий материальный стержень, могущий вращаться в плоскости вокруг одного из своих концов. Очевидно, что задание угла поворота полностью определяет положение такой системы, и этот угол может служить ее лагранжевой координатой.◇

Определение 4.7.2. Число лагранжевых координат называется *числом степеней свободы* системы материальных точек, на которую наложены голономные связи.

В частности, в примере 4.7.4 имеем систему с одной степенью свободы.

Пусть значения лагранжевых координат $q_1,\dots,q_n$ определяют некоторую конфигурацию голономной системы. Другую конфигурацию этой системы зададим с помощью координат

$$q_1 + \delta q_1,\dots,q_n + \delta q_n.$$

Пространство виртуальных перемещений $\mathcal{T}$ совпадает с касательным пространством поверхности, выделяемой связями. Поэтому виртуальные перемещения материальных точек можно выразить как линейные комбинации касательных векторов:

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i, \quad \nu = 1,\dots,N.$$

Необходимое и достаточное условие равновесия под действием активных сил $\mathbf{F}_\nu$ принимает вид

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0.$$

Определение 4.7.3. Величины

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$$

носят название *обобщенных сил*.

Теорема 4.7.4. *Для равновесия системы материальных точек с голономными связями необходимо и достаточно, чтобы*

$$Q_1 = 0, \ldots, Q_n = 0,$$

т.е. в положении равновесия должны быть равны нулю все обобщенные силы системы.

Доказательство. В рассматриваемом случае принцип виртуальных перемещений представляется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i = 0.$$

При этом δq_i могут быть выбраны произвольно.□

§ 4.8. Уравнения равновесия абсолютно твердого тела. Геометрическая статика

Структура множества виртуальных перемещений точек абсолютно твердого тела определена теоремой 2.10.1 о дифференциале вращения и теоремой 2.3.1. Из них следует, что все виртуальные перемещения точек тела даются формулой

$$\delta\mathbf{r}'_\nu = \delta\mathbf{r}_o + \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{r}_\nu,$$

где $\delta\mathbf{r}_o$ — произвольный вектор смещения полюса O, совпадающего с некоторой точкой тела, $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек тела, имеющие начало в полюсе O, $\mathbf{r}'_\nu$ — радиусы-векторы точек тела в неподвижном пространстве, $\boldsymbol{\Phi}$ — произвольный вектор дифференциала вращения.

Теорема 4.8.1. *Абсолютно твердое тело под действием активных сил $\mathbf{F}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N$, будет находиться в равновесии тогда и только тогда, когда равны нулю главный (суммарный) вектор и главный (суммарный) момент этих сил относительно какого-нибудь полюса O:*

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся принципом виртуальных перемещений, согласно которому для равновесия твердого тела необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}'_\nu = 0$$

для любого виртуального перемещения точек тела. Подставив выражение для $\delta\mathbf{r}'_\nu$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_o + \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot(\boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{r}_\nu) = 0,$$

или, воспользовавшись свойствами смешанного умножения,

$$\delta\mathbf{r}_o\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu + \boldsymbol{\Phi}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = 0.$$

Так как это равенство должно быть справедливым при любых векторах $\delta\mathbf{r}_o$ и $\boldsymbol{\Phi}$, приходим к выводу, что множители при них равны нулю.□

Следствие 4.8.1. *В качестве полюса при составлении условий равновесия можно принять произвольную точку твердого тела.*

Доказательство. Сделаем переход от полюса O к произвольной точке A:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_A + \tilde{\mathbf{r}}_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

где все $\tilde{\mathbf{r}}_\nu$ начинаются в точке A. Составим условие равновесия, как того требует теорема 4.8.1:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu = 0, \ \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{r}_A+\tilde{\mathbf{r}}_\nu)\times\mathbf{F}_\nu = \mathbf{r}_A\times\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\tilde{\mathbf{r}}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = 0.$$

Учитывая равенство нулю главного вектора сил, видим, что при равновесии имеет место тождество

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}\tilde{\mathbf{r}}_\nu\times\mathbf{F}_\nu = 0.\square$$

Следствие 4.8.2. *В задачах о равновесии твердого тела допустимо заменять исходную систему активных сил другой системой, имеющей тот же главный вектор и тот же главный момент относительно выбранного полюса, что и исходная. В этом смысле сила, приложенная к абсолютно твердому телу, может интерпретироваться как скользящий вектор, а статика твердого тела вполне исчерпывается теорией скользящих векторов (см. § 1.2).*

Методы решения задач о равновесии с применением теории скользящих векторов составляют раздел механики, называемый *геометрической статикой*.

Исходным пунктом геометрической статики служат условия равновесия свободного твердого тела: главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{L}_o$ сил этой системы должны обращаться в нуль для любого полюса O. На основе этого условия можно ввести понятие об эквивалентных системах сил.

Определение 4.8.1. В данной совокупности сил S заменим все силы равными им по модулю и противоположными по направлению. Полученную совокупность обозначим $\bar{S}$. Две совокупности сил S_1 и S_2 называются *эквивалентными*, если составная совокупность $S_1\bigcup S_2$ или $S_1\bigcup\bar{S}_2$, будучи приложенной к твердому телу, оставляет его в равновесии.

Тем самым эквивалентные совокупности сил представляют собой эквивалентные системы скользящих векторов. Любая теорема в теории скользящих векторов находит свое отражение в статике твердого тела.

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.8.2. *При инвариантах (см. § 1.5), отличных от нуля, система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной результирующей силе (главному вектору) и одной результирующей паре (главному моменту). При специальном выборе полюса (если он взят на оси винта) результирующая сила и плоскость результирующей пары перпендикулярны друг другу.*

Лемма 4.8.1. *Наложение новой связи не нарушает равновесия системы материальных точек.*

Доказательство. Наложение новой связи лишь стесняет простор для выбора виртуальных перемещений. Множество виртуальных перемещений T_1 для системы с добавочной связью принадлежит множеству T для системы без добавочной связи. Если принцип виртуальных перемещений будет выполнен для любого $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \nu = 1, \ldots, N\}\in T$, то он будет выполнен и для любого $\{\delta\mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, N\}\in T_1$.□

Теорема 4.8.3. *Любая система материальных точек (деформирующаяся или нет) обязана в своем положении равновесия подчиняться всем условиям, найденным для твердого тела.*

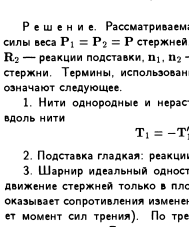
Доказательство. В соответствии с леммой 4.8.1 равновесие рассматриваемой системы материальных точек не нарушается, если к ней добавить столько и таких связей, чтобы она превратилась в абсолютно твердое тело.□

Следствие 4.8.3. *Применяя условия равновесия абсолютно твердого тела сначала ко всей системе в целом, а затем к специально*

выбранным ее частям, можно получить соотношения, полностью определяющие равновесие системы.

Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 4.8.1. Два одинаковых весомых стержня AB и AC соединены идеальным одностепенным шарниром в точке A (рис. 4.8.1) и помещены в вертикальной плоскости. Концами B и C стержни упираются в гладкую горизонтальную подставку. Чтобы удержать стержни от падения, концы B и C привязаны одинаковыми однородными нерастяжимыми нитями к серединам D и E противоположных стержней. Найти отношение натяжения нити к весу одного стержня.



При выписывании уравнений равновесия сначала вся система рассматривается как твердое тело, и соответствующие уравнения позволяют найти внешние силы, обеспечивающие равновесие. Изучение равновесия отдельных фрагментов системы позволяет определить внутренние силы в положении равновесия. Если силы заданы, то те же уравнения позволяют найти другие неизвестные.

Рис. 4.8.1. Равновесие стержней

Решение. Рассматриваемая система плоская. К ней приложены силы веса $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$ стержней, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}'_1$, $\mathbf{T}'_2$ — реакции нитей, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ — реакции подставки, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — реакции шарнира на правый и левый стержни. Термины, использованные в условии задачи, математически означают следующее.

1. Нити однородные и нерастяжимые: натяжение нити постоянно вдоль нити

$$\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}'_1, \quad \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}'_2.$$

2. Подставка гладкая: реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ направлены вертикально.

3. Шарнир идеальный одностепенной: он допускает относительное движение стержней только в плоскости чертежа. При этом шарнир не оказывает сопротивления изменению угла между стержнями (отсутствует момент сил трения). По третьему закону Ньютона силы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ противоположны. По симметрии примем их горизонтальными.

Для равновесия механической системы совокупность скользящих векторов сил должна быть эквивалентна нулю. При этом не важно, деформируема система или нет. Сначала примем, что вся система стержней

есть твердое тело, и запишем, что главный вектор и главный момент всех сил равен нулю:

$$R_1 + R_2 - 2P = 0, \quad 2R_2\,l\cos\vartheta - P\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{2}+l\right)\cos\vartheta = 0,$$

где l — длина одного стержня. Первое соотношение означает равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось Oy. Второе соотношение означает равенство нулю главного момента всех сил относительно точки B. Исключены взаимно уничтожающиеся силы $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}'_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}'_2$; $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$. Соотношение, выражающее равенство нулю проекции главного вектора сил на горизонтальную ось, не содержит неизвестных и потому здесь не выписано.

Из уравнений равновесия всей системы как абсолютно твердого тела следует

$$R_1 = R_2 = P.$$

Рассмотрим теперь часть системы, а именно стержень AC. На него действуют силы $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}'_2$. Система этих сил должна быть эквивалентна нулю. За полюс выберем точку A:

$$n_2 - T'_2\cos\varphi - T_2\cos\varphi = 0,$$

$$R_2 - T'_2\sin\varphi - P + T_2\sin\varphi = 0,$$

$$R_2 l\cos\theta - P\frac{l}{2}\cos\theta - T'_2 l\sin(\theta-\varphi) - T_2 l\sin(\theta-\varphi) = 0.$$

Первые два равенства выражают проекции главного вектора сил на оси Ox и Oy соответственно. Третье равенство задает главный момент всех сил относительно точки A. Из второго уравнения заключаем, что $T'_2 = T_2$. Следовательно,

$$T_1 = T'_1 = T_2 = T'_2 = T.$$

Из уравнения моментов получим

$$\frac{T}{P} = \frac{\cos\theta}{4\sin(\theta-\varphi)}.$$

Из треугольника DCM найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{DM}{CM} = \frac{\frac{l}{2}\sin\theta}{\left(l+\frac{l}{2}\right)\cos\theta} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\theta.$$

Отсюда получаем искомое отношение

$$\frac{T}{P} = \frac{\sqrt{1+9\operatorname{ctg}^2\theta}}{8}.\diamond$$

§ 4.9. Статически неопределимые системы

В предыдущем параграфе было установлено, что абсолютно твердое тело будет находиться в равновесии тогда и только тогда, когда главные вектор и момент сил, приложенных к телу, равны нулю. Эти условия в проекциях, например, на декартовы оси координат эквивалентны шести скалярным уравнениям, из которых можно определить не более шести неизвестных величин. Вместе с тем, так как никаких ограничений на систему сил в общем случае не накладывается, число сил, подлежащих определению, может оказаться значительно больше. Когда возникает такая ситуация, модель абсолютно твердого тела недостаточна для решения задачи. Эту модель следует считать вспомогательной в смысле теоремы 4.8.3.

Определение 4.9.1. Совокупность сил (включая реакции связей), приложенных к механической системе, называется *статически неопределимой*, если число неизвестных составляющих сил превышает предельное число уравнений, определяющих равновесие системы.

Теорема 4.9.1. *Система с идеальными удерживающими связями будет статически неопределимой, если после удаления какой-либо связи множество виртуальных перемещений содержит только нулевой вектор.*

Доказательство. Если при удалении какой-либо связи множество виртуальных перемещений содержит только нулевой вектор, то оно и подавно будет содержать только нулевой вектор, когда эта связь восстановлена. Принцип виртуальных перемещений тождественно удовлетворяется из-за того, что $\delta\mathbf{r}_i = 0$ есть единственное решение уравнений для виртуальных перемещений. Но тогда система уравнений для ускорений

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\mathbf{v}_j}\cdot\mathbf{w}_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

тоже имеет единственное решение $\mathbf{w}_j = 0$. Значит, $m > 3N$. Для определения неизвестных множителей Лагранжа, задающих реакции связей (§ 4.6)

$$\mathbf{R}_j = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial\mathbf{v}_j},$$

имеем систему уравнений Ньютона при $\mathbf{w}_j = 0$:

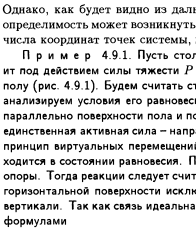
$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial\mathbf{v}_j} = -\mathbf{F}_j, \quad j = 1, \ldots, N,$$

в которой число неизвестных больше числа уравнений.□

Следствие 4.9.1. *Случай статически неопределимой системы сил будет иметь место, когда число независимых идеальных удерживающих связей превышает число координат точек системы.*

Однако, как будет видно из дальнейших примеров, статическая неопределимость может возникнуть и тогда, когда число связей меньше числа координат точек системы, но неизвестна часть активных сил.

Пример 4.9.1. Пусть стол, опираясь четырьмя ножками, стоит под действием силы тяжести P на гладком плоском горизонтальном полу (рис. 4.9.1). Будем считать стол абсолютно твердым телом и проанализируем условия его равновесия. Любое виртуальное перемещение параллельно поверхности пола и потому горизонтально. Сила тяжести – единственная активная сила – направлена по вертикали. Следовательно, принцип виртуальных перемещений тождественно выполнен, и стол находится в состоянии равновесия. Поставим задачу определения реакций опоры. Тогда реакции следует считать активными силами, а связь в виде горизонтальной поверхности исключить. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор вертикали. Так как связь идеальна, то искомые реакции R_i выражаются формулами



Стол остается в равновесии на гладком горизонтальном полу под действием силы тяжести и четырех неизвестных вертикальных реакций опоры. Для определения этих реакций имеется лишь три условия равновесия твердого тела, что делает задачу нахождения реакций статически неопределимой.

Рис. 4.9.1. Стол на гладком горизонтальном полу

$$\mathbf{R}_i = R_i\,\boldsymbol{\nu}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Выберем полюс O на опорной поверхности, а точки опоры зададим радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$, начинающимися в точке O: $\mathbf{r}_i \perp \boldsymbol{\nu}$. Уравнения

равновесия примут вид

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = P,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\mathbf{r}_i\times\boldsymbol{\nu}R_i = \mathbf{r}_c\times\boldsymbol{\nu}P,$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор проекции центра масс стола на опорную плоскость.

Второе уравнение можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\nu}\times\left(\sum_{i=1}^{4}\mathbf{r}_i R_i - P\mathbf{r}_c\right) = 0.$$

Так как сомножители в векторном произведении не коллинеарны, то должно быть выполнено уравнение

$$\sum_{i=1}^{4}\mathbf{r}_i R_i = P\mathbf{r}_c.$$

Это уравнение вместе с первым условием равновесия образует систему из трех скалярных уравнений с четырьмя неизвестными. Рассматриваемая механическая система оказалась статически неопределимой.

Заметим, что стол с тремя ножками, стоящий на горизонтальном гладком полу, представляет собой статически определимую систему.◇

Пример 4.9.2. Задана проволочная конструкция $ABCD$, образованная горизонтальной перекладиной BC, жестко соединенной под прямым углом с двумя параллельными стержнями AB и CD (рис. 4.9.2). Стержни в свою очередь опираются о горизонтальную шероховатую плоскость в точках A и D соответственно. Эту конструкцию будем считать абсолютно твердой и предположим, что единственной активной силой служит сила тяжести P. Шероховатая плоскость представляет собой неидеальную связь. Чтобы найти неизвестные силы реакции R_1 и R_2, их следует добавить в число активных сил. Уравнения равновесия примут вид

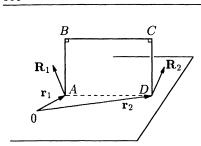
$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{r}_1\times\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_2\times\mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_c\times\mathbf{P} = 0,$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс конструкции. После скалярного умножения второго уравнения на разность $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ будем иметь

$$\mathbf{R}_1\cdot[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{r}_1] + \mathbf{R}_2\cdot[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{r}_2] + \mathbf{P}\cdot[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{r}_c] = 0.$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ представим суммой $\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1$. Тогда получим равенство

$$(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{P})\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_1) + \mathbf{P}\cdot[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{r}] = 0.$$



Реакции пола, возникающие в опорах проволочной конструкции, не создают момента относительно прямой AD, соединяющей точки опоры. Это означает, что шесть уравнений равновесия такой конструкции будут линейно зависимыми. Тем самым задача расчета всех шести компонент опорных реакций оказывается статически неопределимой.

Рис. 4.9.2. Проволочная конструкция на шероховатом полу

Учитывая первое уравнение условий равновесия, отсюда найдем

$$\mathbf{P}\cdot[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{r}] = 0.$$

Так как векторы $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ и $\mathbf{r}$ принадлежат плоскости конструкции $ABCD$ и не коллинеарны, то их векторное произведение перпендикулярно указанной плоскости. Значит, в положении равновесия плоскость конструкции должна быть вертикальной. Отсюда ясно, что число уравнений, из которых можно найти неизвестные компоненты реакций связей, оказывается равным пяти, т.е. на единицу меньше числа неизвестных. Система оказалась, как и в предыдущем примере, статически неопределимой.◇

§ 4.10. Равновесие систем с трением

Сначала рассмотрим задачу о равновесии материальной точки на шероховатой поверхности. В этом случае (рис. 4.10.1) нормальная реакция $R\boldsymbol{\nu}$ поверхности уравновешивает нормальную составляющую $F_\nu\boldsymbol{\nu}$ от равнодействующей активных сил, а сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ уравновешивает составляющую $(F_\tau\boldsymbol{\tau})$ активных сил в касательной плоскости. Здесь по-прежнему $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к поверхности, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль проекции активной силы на касательную плоскость. При этом сила трения по модулю не может быть больше, чем $k|R|$, где k — коэффициент трения (пример 3.4.3). Таким образом, в случае равновесия мы имеем

$$\frac{|\mathbf{F}_{\text{тр}}|}{|R|} \le k = \operatorname{tg}\mu.$$

Для равновесия точки на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы активная сила, действующая на точку, принадлежала конусу трения. При этом реакция поверхности выражается в виде суммы нормальной составляющей и силы трения, направленной по касательной к поверхности в плоскости, образованной активной силой и нормалью $\boldsymbol{\nu}$.

Рис. 4.10.1. Точка на шероховатой поверхности

Если взять угол φ между активной силой и ее нормальной составляющей, то получим $\operatorname{tg}\varphi \le \operatorname{tg}\mu$, или

$$\varphi \le \mu.$$

Другими словами, при равновесии материальной точки на поверхности с трением угол между активной силой и ее нормальной составляющей не должен превышать угла трения.

Построим конус трения, приняв материальную точку за его вершину. Угол раствора конуса равен μ, а ось конуса направлена по нормали к поверхности. Для равновесия материальной точки необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая $\mathbf{F}$ активных сил принадлежала конусу трения. Если поверхность удерживающая, то безразлично, внутри какой полости конуса расположена сила F. Если же поверхность неудерживающая, то от конуса трения надо взять лишь ту полость, которая направлена в сторону, запрещенную для схода точки.

Пусть уравнение шероховатой поверхности есть

$$f(\mathbf{r}) = 0.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\left|\mathbf{F}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|}{|\mathbf{F}|\left|\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|}.$$

С другой стороны,

$$\cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Условие равновесия можно представить в виде

$$\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right)^2}{F^2\left(\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right)^2} \ge \frac{1}{1+k^2}.$$

Ясно, что положений равновесия материальной точки, находящейся под действием силы на шероховатой поверхности, может оказаться бесконечно много. Они могут заполнять некоторую область. Если в полученном условии сохранить только знак равенства, то это условие вместе с уравнением поверхности выделит кривую, служащую границей положений равновесия.

Пример 4.10.1. Найти положения равновесия весомой материальной точки на шероховатом эллипсоиде, заданном каноническим уравнением в декартовой системе координат $Oxyz$:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

где ось Oz направлена вертикально вверх. Вес $\mathbf{P} = -mg\mathbf{e}_z$, причем $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси Oz. Обозначим $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ соответственно единичные векторы осей Ox и Oy. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 2\left(\frac{x}{a^2}\mathbf{e}_x + \frac{y}{b^2}\mathbf{e}_y + \frac{z}{c^2}\mathbf{e}_z\right),$$

и условие равновесия принимает вид

$$\frac{m^2g^2\dfrac{z^2}{c^4}}{m^2g^2\left(\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}\right)} \ge \frac{1}{1+k^2},$$

или

$$\frac{z^2}{c^4}k^2 \ge \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}.$$

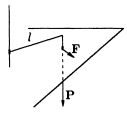
Таким образом, все положения равновесия на эллипсоиде расположены внутри цилиндра, поверхность которого задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1+\frac{c^2}{k^2a^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1+\frac{c^2}{k^2b^2}\right) = 1,$$

а ось параллельна оси Oz. Если шероховатый эллипсоид — поверхность удерживающая, то положения равновесия заполняют две области, образованные пересечением эллипсоида с цилиндром. Если поверхность эллипсоида неудерживающая, то только одну: либо верхнюю, либо нижнюю.◇

Перейдем к проблеме равновесия динамической системы с трением. В такой системе помимо неизвестных значений абсолютных величин сил трения возникает дополнительная неопределенность из-за того, что во многих случаях направление сил трения неизвестно и должно быть найдено. Здесь следует принять во внимание, что направление трения скольжения вполне определено скоростями точек системы. Следовательно, для решения статических задач полезной будет информация о том, каким движением система дошла до положения равновесия. Чтобы исключить неопределенность, можно также искать силы трения, при которых система не переходит из покоя в определенное движение.

Пример 4.10.2. Найти условие равновесия материальной точки, расположенной на конце невесомого абсолютно твердого горизонтального стержня длины l. Другим концом стержень прикреплен к вертикальной оси так, что может вращаться, оставаясь параллельным шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 4.10.2). При этом материальная точка прижимается к плоскости силой P. В соединении стержня с вертикальной осью возникают силы трения.



В системе с трением может возникнуть статическая неопределимость сил трения, и тогда важной становится информация о том, каким движением система пришла в положение равновесия. В частности, если известно, что стержень остановился после вращения, то этой информации иногда может оказаться достаточно для однозначного определения сил трения.

Рис. 4.10.2. Система с трением

Пусть на точку перпендикулярно стержню действует горизонтальная активная сила $\mathbf{F}$. Тогда имеем единственное скалярное уравнение равновесия

$$F_{\text{тр}} + F + M/l = 0,$$

где M — момент сил трения в точке присоединения стержня к вертикальной оси, $F_{\text{тр}}$ — сила трения материальной точки об опорную поверхность. Получили статически неопределимую систему, так как в обусловленных законами трения пределах

$$-\tilde{M} \le M \le \tilde{M}, \quad -kP \le F_{\text{тр}} \le kP$$

величины M и $F_{\text{тр}}$ могут принять любое значение, лишь бы в сумме они уравновешивали силу F. Пусть теперь сила F зависит от угла поворота стержня: $F = F(\varphi)$, и известно, что материальная точка пришла в положение равновесия, двигаясь по окружности против хода часовой стрелки. Тогда угол φ, соответствующий положению равновесия, должен удовлетворять уравнению

$$\tilde{M} + kP = F(\varphi),$$

если, конечно, его решение существует. Если же оно отсутствует из-за того, например, что

$$\tilde{M} + kP > |F(\varphi)|$$

при любом φ, то положением равновесия будет любое положение материальной точки на описываемой ею окружности, причем для однозначного определения величин M и $F_{\text{тр}}$ потребуются дополнительные данные.◇

§ 4.11. Уравнение равновесия нити

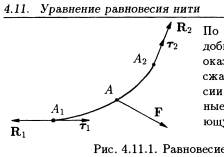
Определение 4.11.1. В теоретической механике *нитью* называется кривая, вдоль которой по некоторому закону распределена масса. Нить не оказывает сопротивления изгибу. Любой элемент нити имеет постоянные длину и массу.

По смыслу понятие нити наиболее близко к такому физическому объекту, как цепочка, общая длина которой значительно больше длины ее отдельного звена. Возьмем какой-либо отрезок нити A_1A_2 (рис. 4.11.1). Длина отрезка A_1A_2 равна Δs. Пусть к отрезку A_1A_2 приложены силы, равнодействующая которых проходит через некоторую точку A, расположенную внутри или на границе отрезка, и равна $\mathbf{F}$. Предположим, что при уменьшении Δs так, что точки A_1 и A_2 стягиваются к точке A, величина $|\mathbf{F}|$ убывает, но существует предел

$$\boldsymbol{\Phi} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{F}}{\Delta s}.$$

Вектор $\boldsymbol{\Phi}$ называется *удельной силой*, приложенной к точке A. Сила, приложенная к элементу ds, включающему A, будет иметь значение $\boldsymbol{\Phi}\,ds$.

Чтобы найти условия равновесия гибкой нерастяжимой нити, рассмотрим отрезок Δs и примем его за абсолютно твердое тело (см. теорему 4.8.3). К отрезку Δs приложены активная сила $\mathbf{F}$ и две силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, обусловленные воздействием на элемент Δs соседних участков нити. Пусть в точке A_1 (рис. 4.11.1) нить имеет единичный



По физическому смыслу нить подобна длинной цепочке. Она не оказывает сопротивления изгибу и сжатию. Поэтому при равновесии нити силы, к ней приложенные, должны иметь равнодействующую, равную нулю.

Рис. 4.11.1. Равновесие элемента нити

вектор касательной $\boldsymbol{\tau}_1$, а в точке A_2 — единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}_2$. Из-за отсутствия сопротивления изгибу система сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ должна приводиться к равнодействующей, а силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ могут быть направлены только по касательной к нити. В результате единственным уравнением равновесия будет

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{F} = 0$$

или

$$-R_1\boldsymbol{\tau}_1 + R_2\boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\Phi}\,\Delta s = 0.$$

Определим вектор-функцию $R\boldsymbol{\tau}$, где R — *натяжение нити* , а $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной в точке A.

Обозначим $A_{\text{н}}$ — начальную точку, $A_{\text{к}}$ — конечную точку нити. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ направим от точки $A_{\text{н}}$ к точке $A_{\text{к}}$. Величина $R\boldsymbol{\tau}$ представляет собой силу, которую надо приложить вдоль касательной в любой точке A нити, если нить в этой точке разрезать и потребовать, чтобы часть $A_{\text{н}}A$ находилась в равновесии. Устремляя Δs к нулю, получим *дифференциальное уравнение равновесия нити*

$$\boldsymbol{\Phi} + \frac{d}{ds}(R\boldsymbol{\tau}) = 0.$$

Рассмотрим возможные варианты задания *краевых (граничных) условий*.

1. Пусть к концам нити приложены силы $\mathbf{F}_{\text{н}}$, $\mathbf{F}_{\text{к}}$. Тогда, очевидно, должно быть

$$\mathbf{F}_{\text{н}} = -R_{\text{н}}\boldsymbol{\tau}_{\text{н}}, \quad \mathbf{F}_{\text{к}} = R_{\text{к}}\boldsymbol{\tau}_{\text{к}},$$

$R_{\text{н}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\text{н}}$; $R_{\text{к}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\text{к}}$ — соответственно натяжение нити и векторы касательной к ней в начальной и конечной точках.

2. Предположим, что один из концов нити, например $A_{\text{н}}$, должен принадлежать заданной гладкой поверхности. Тогда реакция $\mathbf{N}_{\text{н}}$ поверхности направлена по единичной нормали $\boldsymbol{\nu}_{\text{н}}$ к ней: $\mathbf{N}_{\text{н}} = N_{\text{н}}\boldsymbol{\nu}_{\text{н}}$. Соответствующее краевое условие примет вид

$$\mathbf{F}_{\text{н}} + R_{\text{н}}\boldsymbol{\tau}_{\text{н}} + N_{\text{н}}\boldsymbol{\nu}_{\text{н}} = 0.$$

В частности, если к концу нити не приложена активная сила: $\mathbf{F}_{\text{н}} = 0$, то либо $R_{\text{н}} = N_{\text{н}} = 0$, либо вектор $\boldsymbol{\tau}_{\text{н}}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{\nu}_{\text{н}}$, и $R_{\text{н}} = \pm N_{\text{н}}$.

3. Пусть конец нити, например $A_{\text{н}}$, обязан принадлежать данной гладкой кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma),$$

где σ — длина дуги этой кривой. Тогда сумма проекций активной силы и силы натяжения нити на касательную к кривой в точке $A_{\text{н}}$ будет равна нулю:

$$\mathbf{F}_{\text{н}}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\right)_{\text{н}} + (R_{\text{н}}\boldsymbol{\tau}_{\text{н}})\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\right)_{\text{н}} = 0.$$

Если $\mathbf{F}_{\text{н}} = 0$, то тогда либо $R_{\text{н}} = 0$, либо начальная касательная нити $\boldsymbol{\tau}_{\text{н}}$ перпендикулярна касательной к заданной кривой.

4. Если точка $A_{\text{н}}$ неподвижно закреплена, то граничное условие в этой точке отсутствует.

Подобно только что рассмотренным вариантам можно проанализировать граничные условия, заданные в точке $A_{\text{к}}$ или сразу в обеих точках.

Уравнение равновесия нити представим в виде

$$\boldsymbol{\Phi} + \frac{dR}{ds}\boldsymbol{\tau} + \frac{R}{\rho}\boldsymbol{\nu} = 0,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор главной нормали кривой, по которой расположена нить, а ρ — ее радиус кривизны (см. § 2.2). Спроектируем это равенство на касательную, главную нормаль и бинормаль к кривой, обозначив соответственно Φ_τ, Φ_ν, Φ_β проекции $\boldsymbol{\Phi}$ на указанные направления. Мы получим

$$\Phi_\tau + \frac{dR}{ds} = 0, \quad \Phi_\nu + \frac{R}{\rho} = 0, \quad \Phi_\beta = 0.$$

Последнее из этих уравнений означает, что соприкасающаяся плоскость, найденная для любой точки кривой равновесия нити, содержит активную удельную силу.

Обратимся к вопросу об интегрировании уравнений равновесия нити. Пусть вектор $\mathbf{r}$ точки нити в некотором ортогональном реперe имеет координаты $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Имеем четыре неизвестные функции

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad R.$$

По определению $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$. Тот факт, что s есть длина дуги, выражается условием

$$\boldsymbol{\tau}^2 = \left(\frac{dr_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{ds}\right)^2 = 1.$$

Примем, что удельная сила $\boldsymbol{\Phi}$ зависит от радиуса-вектора точки нити:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}).$$

Тогда скалярные уравнения равновесия нити

$$\Phi_i + \frac{d}{ds}\left(R\frac{dr_i}{ds}\right) = 0, \quad i = 1,2,3$$

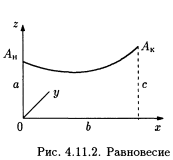
суть уравнения второго порядка относительно r_1, r_2, r_3 и первого порядка относительно R. Если к этим уравнениям добавить условие

$$\left(\frac{dr_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{ds}\right)^2 = 1,$$

то в общем случае число постоянных интегрирования, которое необходимо задать, чтобы однозначно определить форму нити, равно семи. В частности, решение задачи о форме равновесия нити будет однозначным, если задать длину нити и положения двух ее концов

$$\mathbf{r}_{\text{н}} = (r_1^{\text{н}}, r_2^{\text{н}}, r_3^{\text{н}}), \quad \mathbf{r}_{\text{к}} = (r_1^{\text{к}}, r_2^{\text{к}}, r_3^{\text{к}}).$$

Пример 4.11.1. Определим форму равновесия нити длины l, закрепленной концами неподвижно в двух точках $A_{\text{н}}$ и $A_{\text{к}}$ и находящейся под действием силы тяжести. Выберем оси координат. Ось Oz проведем через точку $A_{\text{н}}$ и направим вертикально вверх (рис. 4.11.2). Перпендикулярную ей ось Ox выберем так, чтобы правая полуплоскость Oxz содержала точку $A_{\text{к}}$. Ось Oy перпендикулярна плоскости Oxz. Краевые



Нить с закрепленными концами принимает под действием силы тяжести форму цепной линии. Эта линия расположена в вертикальной плоскости, содержащей концы нити. Глубина прогиба увеличивается при увеличении длины нити по сравнению с расстоянием между точками ее закрепления.

Рис. 4.11.2. Равновесие нити с закрепленными концами

условия примут вид

$$\mathbf{r}_{\text{н}} = (0,0,a), \quad \mathbf{r}_{\text{к}} = (b,0,c), \quad b > 0,$$

где a, b, c — некоторые заданные постоянные. Выпишем систему уравнений равновесия тяжелой нити:

$$\frac{d}{ds}\left(R\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(R\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(R\frac{dz}{ds}\right) - \gamma = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

где γ — удельный вес нити.

Второму уравнению и краевым условиям удовлетворяет функция $y(s) = 0$. Значит, нить целиком принадлежит плоскости Oxz. Далее из первого уравнения заключаем, что

$$R\frac{dx}{ds} = c_1,$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Примем x за независимую переменную и учтем, что справедливо операторное равенство

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d}{dx}.$$

Поэтому третье уравнение равновесия приводится к виду

$$\frac{dx}{ds}\frac{d}{dx}\left(R\frac{dx}{ds}\frac{dz}{dx}\right) = \gamma.$$

Четвертое уравнение равновесия представим следующим образом:

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Следовательно, зависимость $z(x)$ удовлетворяет уравнению

$$c_1\frac{d^2z}{dx^2} = +\gamma\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

в котором знак выбран положительным, так как в начальной точке $ds/dx > 0$, и эта величина нигде в нуль не обращается.

Дифференциальное уравнение для функции $z(x)$ можно представить в виде

$$\frac{\dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{\gamma}{c_1}\frac{dz}{dx}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\gamma}{c_1}z + c_2.$$

Это равенство разрешим относительно dz/dx:

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\left(c_2 + \frac{\gamma}{c_1}z\right)^2 - 1}.$$

Введем переменную

$$\zeta = c_2 + \frac{\gamma}{c_1}z.$$

Относительно нее будем иметь

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} = \pm\frac{\gamma}{c_1}dx.$$

Рассмотрим два случая.

1. Правая часть положительна. Тогда

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{\gamma}{c_1}dx.$$

Слева стоит табличное выражение производной. Значит,

$$\ln\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right) = \frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha).$$

Перейдем к показательным функциям

$$\zeta + \sqrt{\zeta^2-1} = \exp\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right].$$

Справедливо тождество

$$\frac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}} = \zeta - \sqrt{\zeta^2-1} = \exp\left[-\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right].$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{2}\left\{\exp\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right] + \exp\left[-\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right]\right\}.$$

2. Правая часть отрицательна. Тогда

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} = -\frac{\gamma}{c_1}dx.$$

Легко убедиться в том, что решение этого уравнения будет таким же, как и в первом случае.

В итоге имеем зависимость

$$\zeta = \operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right].$$

Перейдем к переменной z:

$$z = \frac{c_1}{\gamma}\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right] - c_2\right\}.$$

Получили форму равновесия тяжелой нити. Такая кривая называется *цепной линией*. Учтем краевые условия

$$\operatorname{ch}\left(-\frac{\gamma}{c_1}\alpha\right) - c_2 = \frac{\gamma a}{c_1},$$

$$\operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}(b-\alpha)\right] - c_2 = \frac{\gamma c}{c_1},$$

из которых можно найти α и c_2 в зависимости от единственного параметра c_1. Например, вычитая из первого условия второе, получим

$$\operatorname{ch}\left(-\frac{\gamma}{c_1}\alpha\right) - \operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}(b-\alpha)\right] = \frac{\gamma}{c_1}(a-c),$$

или

$$2\operatorname{sh}\left[\frac{\gamma}{c_1}\left(\frac{b}{2}-\alpha\right)\right]\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma b}{2c_1}\right) = \frac{\gamma}{c_1}(a-c).$$

Постоянная c_2 определена выражением

$$c_2 = \operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}\left(\frac{b}{2}-\alpha\right)\right]\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma b}{2c_1}\right) - \frac{\gamma}{2c_1}(a+c).$$

Оставшийся неопределенным параметр c_1 вычисляется из условия, что длина нити равна l. Имеем

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\gamma}{c_1}z + c_2.$$

Следовательно,

$$\frac{ds}{dx} = \operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right]$$

или

$$s = \frac{c_1}{\gamma}\left\{\operatorname{sh}\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\gamma}{c_1}\alpha\right]\right\}.$$

Когда $x = b$, то должно быть $s = l$, т.е.

$$\operatorname{sh}\left[\frac{\gamma}{c_1}(b-\alpha)\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\gamma}{c_1}\alpha\right] = \frac{\gamma l}{c_1},$$

что дает возможность однозначно найти параметр c_1 и тем самым закончить определение формы равновесия нити. Отметим еще формулу для расчета натяжения R вдоль цепной линии

$$R = c_1\frac{ds}{dx} = \gamma z + c_1 c_2 = c_1\operatorname{ch}\left[\frac{\gamma}{c_1}(x-\alpha)\right].\diamond$$

В заключение параграфа укажем на **аналогию между задачей о форме равновесия нити и задачей о движении материальной точки.**

Пусть силы, приложенные к нити, имеют силовую функцию

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Тогда уравнение равновесия принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{ds}(R\boldsymbol{\tau}) = 0.$$

Его можно спроектировать на касательную к нити:

$$\frac{dR}{ds} + \frac{dU}{ds} = 0.$$

Имеем первый интеграл

$$R = \beta - U,$$

где β не зависит от s.

Умножим теперь уравнение равновесия нити на натяжение R:

$$R\frac{d}{ds}(R\boldsymbol{\tau}) = -R\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = (U-\beta)\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}},$$

где

$$P = \frac{1}{2}(U-\beta)^2.$$

Преобразуем к такому же виду уравнение движения материальной точки в силовом потенциальном поле:

$$m\mathbf{w} = \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}}.$$

Ускорение $\mathbf{w}$ точки можно вычислить по формуле (см. § 2.2)

$$\mathbf{w} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}\right) = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}\right) = v\frac{d}{ds}(v\boldsymbol{\tau}).$$

Следовательно,

$$v\frac{d}{ds}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{m}\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}}.$$

Полученное равенство представляет собой дифференциальное уравнение траектории точки. Имеем четыре неизвестных r_1, r_2, r_3, v. В силу свойства $|\boldsymbol{\tau}| = 1$ должно быть справедливо тождество

$$\left(\frac{dr_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{ds}\right)^2 = 1.$$

Сравнение уравнений формы равновесия нити в потенциальном поле и уравнений траектории движения материальной точки показывает, что задача о форме равновесия нити аналогична задаче об определении траектории материальной точки. Поясним аналогию.

Система дифференциальных уравнений, описывающая форму нити в равновесии, совпадает с системой дифференциальных уравнений для траектории точки, если формально отождествить

$$P = \frac{1}{m}U_1, \quad v = R.$$

Когда начальные условия для соответствующей задачи Коши совпадут, то совпадут и решения. Другими словами, если удельная сила, действующая на элемент материальной нити, выражается как градиент функции U, то кривая, по которой располагается нить, тождественна с траекторией движения свободной материальной точки в поле силы, имеющей силовую функцию

$$U_1 = \frac{m}{2}(U-\beta)^2,$$

где m — масса точки. При этом начальное положение точки должно совпадать с началом $A_н$ нити, а ее начальная скорость должна иметь величину, численно равную $R_н$, т.е.

$$v_н = \beta - U_н,$$

где $U_н$ есть начальное значение функции U. Начальная скорость должна быть направлена по касательной к нити.

С помощью отмеченной аналогии многие свойства движения материальной точки можно перенести на свойства форм равновесия нитей. Например, пусть нить находится под действием центральных сил

$$U = U(r),$$

где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от элемента нити до некоторого неподвижного центра. Тогда задача о равновесии нити сводится к задаче о центральной орбите под действием силы с силовой функцией

$$U_1 = \frac{m}{2}[U(r)-\beta]^2.$$

Следовательно, априори можно утверждать, что задача о равновесии нити в центральном поле всегда решается квадратурами, форма равновесия нити есть плоская кривая, плоскость которой проходит через центр силы. Теорема 3.7.6 о постоянстве секторной скорости (интеграл площадей) аналогична утверждению, что момент натяжения нити относительно центра есть величина постоянная.

Контрольные вопросы к главе 4

4.1. Что такое равновесие системы материальных точек? Пусть в некоторой конфигурации в некоторый момент времени ускорения всех точек системы обратились в нуль. Можно ли такую конфигурацию считать положением равновесия?

4.2. Может ли стационарная линейная дифференциальная связь быть неоднородной?

4.3. Зачем в интегрирующих кинематических механизмах берут колесико с острым краем?

4.4. Какой результат получится, если при измерении площади топориковым планиметром начальную точку обвода взять не внутри, а вне обводимого контура?

4.5. Сформулируйте критерий того, что заданная дифференциальная связь нелинейна по скоростям.

4.6. Почему для пфаффовой системы нельзя построить интегральную поверхность размерности большей, чем $n-m$, где n — размерность пространства, m — число уравнений?

4.7. Для произвольной пфаффовой системы указать метод построения двумерной интегральной поверхности.

4.8. С помощью теоремы Фробениуса показать, что связь

$$a_1dq_1 + a_2dq_2 + a_3dq_3 = 0, \quad a_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}q_j, \quad \det(a_{ij}) \neq 0,$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} голономна тогда и только тогда, когда матрица (a_{ij}) симметрична. Найти соответствующую геометрическую связь.

4.9. С помощью теоремы Фробениуса проанализировать, голономна или неголономна система связей, возникающая при описании качения без проскальзывания абсолютно твердого шара по абсолютно твердой абсолютно шероховатой плоскости.

4.10. Доказать, что разложение произвольного вектора $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ по базисным векторам $\boldsymbol{\alpha}_i$ имеет вид $\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_i$, где ω_i — соответствующие базисные формы (см. § 4.5).

4.11. С помощью процедуры расширения пространства $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ найти голономную связь в системе

$$\omega_1 = q_1dq_0 - q_0dq_1 + q_1^2q_2dq_2 = 0,$$
$$\omega_2 = dq_0 + q_3dq_1 = 0.$$

4.12. Предположим, что геометрические связи учтены с помощью выражений $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1,\ldots,q_n,t)$, и кроме того система стеснена неголономными связями $\Phi_j(\mathbf{r}_\nu,\mathbf{v}_\nu,t) = 0$, $j = 1,\ldots,m < n$. Выразить множество виртуальных перемещений через вариации $\delta q_1,\ldots,\delta q_n$.

4.13. Две материальные точки соединены стержнем постоянной длины и могут двигаться по плоскости так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Как будет направлена реакция плоскости, если связь предположить идеальной?

4.14. Привести примеры, показывающие, что формулировку теоремы 4.7.1 ослабить невозможно.

4.15. Показать, что равенство уровней жидкости в сообщающихся сосудах есть следствие принципа Торричелли.

4.16. Доказать, что способ построения нормали к кривой, полученный в примере 4.7.3, справеллив, когда некоторые из заданных кривых C_i или все из них суть геометрические точки.

4.17. Как будет работать способ построения нормали к кривой, полученный в примере 4.7.3, если в качестве кривых C_1 и C_2 взять

a) прямоугольные декартовы оси координат,

b) произвольные аффинные оси координат.

4.18. Указать механический смысл обобщенной силы, соответствующей координате q, в случае, когда

a) координата q означает поступательное перемещение всей системы в направлении единичного вектора $\mathbf{e}$,

b) координата q означает вращение всей системы на угол q вокруг единичного вектора $\mathbf{e}$.

4.19. Необходимо ли выполнение условий равновесия твердого тела в положениях равновесия сосуда, наполовину наполненного водой?

4.20. Пусть условия равновесия твердого тела выполнены для сосуда, наполненного водой частично. Можно ли на этом основании утверждать, что такая система находится в равновесии?

4.21. Что можно сказать о равновесии системы, если для нее условия равновесия твердого тела не выполнены?

4.22. Сколько независимых скалярных уравнений равновесия можно получить в том случае, когда все силы, приложенные к твердому телу, вместе с точками их приложения принадлежат некоторой плоскости? Какие варианты составления уравнений равновесия при этом возможны?

4.23. Найти положения равновесия весомой материальной точки на шероховатом шаре; цилиндре с коэффициентом сухого трения k.

4.24. Пусть нить находится в равновесии под действием удельной силы $\boldsymbol{\Phi}(s)$. В некоторой точке нити касательная к ней задается единичным вектором $\boldsymbol{\tau}$. Найти соприкасающуюся плоскость к нити в этой точке.

4.25. Пусть нить закреплена в точках A и B, расположенных вместе с нитью на гладком горизонтальном столе. Стол вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через середину отрезка AB. Найти натяжение в зависимости от координат точек нити. Найти формы равновесия нити, соответствующие постоянному натяжению. Как эти формы соотносятся с длиной отрезка AB.

Глава 5

Динамика системы материальных точек

Сначала, следуя Даламбéру, дадим эвристические соображения, приводящие к основному уравнению динамики системы материальных точек (материальной системы). Пусть, например, задана материальная система, на которую наложены стационарные связи, и пусть A — одна из ее точек. На эту точку будут действовать как активные силы, так и реакции связей. Обозначим $\mathbf{F}$ равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке A. Пусть $\mathbf{w}$ есть ускорение точки. Если сравнить вектор силы $m\mathbf{w} = \mathbf{F}'$ и вектор $\mathbf{F}$, то, вообще говоря, эти векторы не совпадут. Разложим активную силу на составляющие $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}''.$$

Ясно, что лишь составляющая $\mathbf{F}'$ силы $\mathbf{F}$ влияет на движение точки A, вызывая ускорение $\mathbf{w}$. Составляющая $\mathbf{F}''$ никакого влияния на движение не оказывает и как бы теряется при движении точки A. Даламбер назвал силу $\mathbf{F}'$ движущей силой, а силу $\mathbf{F}''$ — потерянной силой. Из сказанного следует, что

$$\mathbf{F}'' = \mathbf{F} - \mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{w}.$$

Величину $(-m\mathbf{w})$ назовем *даламберовой силой инерции*. Для всякой точки материальной системы потерянная сила есть векторная сумма активной силы и силы инерции. Так как сила $\mathbf{F}''$ не оказывает влияния на движение, то она должна уравновешиваться какой-то другой силой (реакцией связей), приложенной к той же точке. Поэтому должно быть

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}'' = 0$$

или

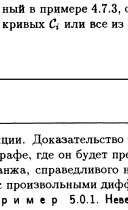
$$\mathbf{R} + \mathbf{F} + (-m\mathbf{w}) = 0.$$

Принцип Даламбéра состоит в следующем. Если к каждой точке материальной системы в некотором ее положении приложить имевшие место активные силы, реакции связей и силу инерции, то это положение системы будет положением равновесия.

Приведенное выше обоснование принципа Даламбера нельзя признать вполне строгим. Оно правдоподобно с точки зрения физической

интуиции. Доказательство этого принципа будет дано в следующем параграфе, где он будет представлен в форме принципа Даламбера-Лагранжа, справедливого не только для систем со стационарными, но и с произвольными дифференциальными связями.

Пример 5.0.1. Невесомый стержень OAB (рис. 5.0.1) может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг гладкого неподвижного шарнира O. В точках A и B помещены массы m и m' соответственно, которые колеблются вместе с ним под действием силы тяжести. Требуется составить уравнение движения.



Две материальные точки A и B, подвешенные на невесомом стержне, вращающемся вокруг неподвижной точки O, совершают синхронное движение по дугам окружностей разного радиуса. Каждую позицию стержня можно рассматривать как положение равновесия под действием силы тяжести и даламберовых сил инерции. Результирующее движение такой системы представляется как движение математического маятника со специально подобранной длиной l: $a < l < b$.

Рис. 5.0.1. Применение принципа Даламбера

Решение. Колебание отдельной материальной точки под действием силы тяжести (математический маятник) было изучено выше (см. определение 3.9.1). В рассматриваемом примере имеются две материальные точки, описывающие дуги различных радиусов за одно и то же время. Следовательно, каждая точка должна влиять на движение другой. Применив принцип Даламбера, эту динамическую задачу можно свести к обычной задаче статики, которая, будучи решенной, дает дифференциальные уравнения движения. Пусть $OA = a$, $OB = b$ и угол, образованный стержнем с вертикалью Oz, равен ϑ. Точка A описывает дугу окружности. Компоненты ее ускорения имеют вид

$$w_\tau = a\ddot{\vartheta}, \quad w_n = a\dot{\vartheta}^2.$$

Аналогично для точки B получим

$$w_\tau = b\ddot{\vartheta}, \quad w_n = b\dot{\vartheta}^2.$$

Согласно принципу Даламбера, необходимым и в данном случае достаточным условием равновесия сил инерции и активных сил служит равен-

ство нулю моментов этих сил относительно точки O. Подсчет моментов дает

$$(ma^2 + m'b^2)\ddot{\vartheta} + (ma + m'b)g\sin\vartheta = 0.$$

Следовательно, стержень с двумя массами будет двигаться так же, как стержень с одной массой, смещенной от точки O на расстояние

$$l = \frac{ma^2 + m'b^2}{ma + m'b}.\diamond$$

Как видим, принцип Даламбера эффективен. Однако в его формулировке участвуют неизвестные реакции связей. Объединим принцип Даламбера с принципом виртуальных перемещений.

§ 5.1. Общее уравнение динамики системы материальных точек. Основные теоремы

Будем рассматривать систему материальных точек с массами m_ν, $\nu = 1,\ldots,N$, стесненную двусторонними линейными дифференциальными связями. Связи могут быть как неголономными, так и голономными.

Теорема 5.1.1. (Принцип Даламбера-Лагранжа). *Для того чтобы ускорения $\ddot{\mathbf{r}}_\nu$ материальных точек $(m_\nu,\mathbf{r}_\nu)$, $\nu = 1,\ldots,N$, удовлетворяли второму закону Ньютона в инерциальной системе отсчета под действием активных сил $\mathbf{F}_\nu$ и идеальных двусторонних связей (см. § 3.8), необходимо и достаточно выполнение общего уравнения динамики*

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

для любого набора дифференциалов $\{\delta\mathbf{r}_\nu,\ \nu = 1,\ldots,N\}$, принадлежащих множеству виртуальных перемещений $\mathcal{T}$.

Доказательство. Необходимость. Действие связей на точки системы эквивалентно действию сил реакций связей $\mathbf{R}_\nu$. Уравнение движения отдельной материальной точки можно записать в виде

$$m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,N.$$

Условие идеальности связей состоит в том, что сумма работ реакций на любом виртуальном перемещении равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{R}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Умножив уравнение движения каждой точки на соответствующий дифференциал $\delta\mathbf{r}_\nu$ и сложив результаты, найдем

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть на систему точек наложено k независимых связей

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N,t) = 0, \quad j = 1,\ldots,k.$$

Им соответствует следующая система уравнений для виртуальных перемещений:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0, \quad j = 1,\ldots,k.$$

Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Умножим каждое уравнение системы для виртуальных перемещений на скалярный множитель λ_j, и все результаты вычтем из общего уравнения динамики, которое предполагаем выполненным для любого виртуального перемещения. Получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0.$$

Подберем λ_j так, чтобы коэффициенты при зависимых дифференциалах обратились в нуль. Тогда в нуль должны обратиться и коэффициенты при независимых дифференциалах. В результате находим систему уравнений движения

$$m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,N.$$

Взятые отсюда выражения для $\ddot{\mathbf{r}}_\nu$ подставим в уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}\cdot\ddot{\mathbf{r}}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{r}_\nu}\cdot\mathbf{v}_\nu - \frac{\partial\Phi_j}{\partial t}, \quad j = 1,\ldots,k,$$

которые возникают после дифференцирования по времени уравнений связей. Получим систему из k уравнений относительно k неизвестных множителей λ_j. Эта система имеет единственное решение, так как связи независимы. Поэтому ускорения материальных точек, определенные принципом Даламбера-Лагранжа, единственны, что и доказывает достаточность.□

Следствие 5.1.1. *Движение системы материальных точек определяется системой дифференциальных уравнений*

$$m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,N.$$

которые называются уравнениями Лагранжа первого рода. Их надо решать, учитывая связи, наложенные на систему. Выражения

$$\mathbf{R}_\nu = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{v}_\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

задают реакции связей, действующие на точки системы. Неизвестные множители λ_j однозначно определяются с помощью теоремы 5.1.1.

Определение 5.1.1. Основные динамические характеристики.

Вектор

$$\mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{v}_\nu$$

называется *количеством движения* системы материальных точек.

Вектор

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{r}_\nu\times\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{r}_\nu\times\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{v}_\nu$$

называется *кинетическим моментом* (моментом количеств движения) системы материальных точек относительно начала отсчета.

Скаляр

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\left(\frac{d\mathbf{r}_\nu}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{v}_\nu^2$$

называется *кинетической энергией* (живой силой) системы материальных точек.

Понятие количества движения допускает кинематическое толкование. Напомним (см. определение 1.7.1), что центр масс задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{r}_\nu, \quad M = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu.$$

Поэтому

$$\mathbf{Q} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{r}_\nu\right) = M\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = M\mathbf{v}_c.$$

Другими словами, количество движения есть произведение массы всей системы и скорости ее центра масс.

Определение 5.1.2. *Внутренними силами* $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ называются активные силы взаимодействия между точками системы. *Внешними силами* $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ называются активные силы, вызванные действием на точки системы объектов, не входящих в рассматриваемую систему.

Внутренние силы подчиняются закону Ньютона о действии и противодействии (см. стр. 161). Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu^{(i)} = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu^{(i)} = 0.$$

Перейдем к теоремам об изменении основных динамических характеристик.

Теорема 5.1.2. (Об изменении количества движения). *Если связи идеальны и в каждый момент времени допускают поступательное виртуальное перемещение всей системы параллельно неподвижной оси с единичным направляющим вектором* $\mathbf{e}$*, то производная по времени от проекции Q_e количества движения на эту ось равна сумме проекций внешних активных сил на ту же ось:*

$$\dot{Q}_e = \frac{dQ_e}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot\mathbf{e}.$$

Доказательство. Пусть в соответствии с условием теоремы существует виртуальное перемещение, выражаемое формулами

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \alpha\,\mathbf{e}, \quad \nu = 1,\ldots,N.$$

Тогда с помощью принципа Даламбера-Лагранжа получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot\mathbf{e}\,\alpha = 0.$$

Но $\alpha \neq 0$. Значит,

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\mathbf{e} = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\mathbf{e} = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\mathbf{e} = \frac{dQ_e}{dt}.$$

Представим активные силы, действующие на точки системы, как сумму внутренних и внешних сил:

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(i)} + \mathbf{F}_\nu^{(e)}.$$

Тогда

$$\frac{dQ_e}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(i)} + \mathbf{F}_\nu^{(e)})\cdot\mathbf{e} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu^{(e)}\cdot\mathbf{e}.$$□

Следствие 5.1.2. (Интеграл количества движения). *Если сумма проекций всех внешних активных сил на направление* $\mathbf{e}$ *в условии теоремы 5.1.2 тождественно равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на это направление постоянна, а проекция центра масс на это направление либо не движется, либо смещается равномерно.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt}Q_e = M\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_c\cdot\mathbf{e}).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_c\cdot\mathbf{e}) = \mathbf{v}_c\cdot\mathbf{e} = c_1 = const.$$

Отсюда

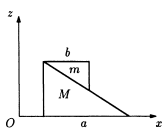
$$\mathbf{r}_c\cdot\mathbf{e} = (t - t_0)c_1 + c_2,$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Если $c_1 = 0$, т.е. проекция начальной скорости центра масс на направление $\mathbf{e}$ отсутствует, то проекция центра масс на это направление остается неподвижной.□

Пример 5.1.1. Пусть человек стоит на абсолютно гладком льду, и в начальный момент скорость его центра масс отсутствует. Так как внешними активными силами будут только силы тяжести, и они направлены вертикально, то что бы человек ни делал, он не сможет сместить в горизонтальном направлении свой центр масс.◇

Пример 5.1.2. Пусть на абсолютно гладкую горизонтальную плоскость положены две абсолютно гладкие тяжелые призмы так, как показано на рис. 5.1.1. Указать, насколько переместится нижняя призма массы M, когда верхняя призма массы m под действием силы тяжести перейдет без отделения от нижней в такое положение, что она коснется горизонтальной плоскости. Основание нижней призмы примем равным a, верхней — b.

Решение. Движение призм будем считать плоскопараллельным в вертикальной плоскости Oxz. Пусть ось Ox будет горизонтальной.



Абсолютно гладкие призмы, положенные на абсолютно гладкую горизонтальную плоскость, движутся под действием силы тяжести так, что их общий центр масс не перемещается в горизонтальном направлении. Используя это свойство можно найти смещение одной из призм, зная смещение другой.

Рис. 5.1.1. Призмы на гладкой плоскости

Обозначим $x_н$ горизонтальную координату центра масс нижней призмы в начальный момент движения, а $x_в$ — горизонтальную координату центра масс верхней призмы в тот же момент. Тогда горизонтальную координату x_c центра масс всей системы можно найти по формуле

$$x_c = \frac{Mx_н + mx_в}{M + m}.$$

К моменту окончания движения нижняя призма сместится в горизонтальном направлении на x, а верхняя — на $x + (a - b)$. Соответственно центры масс будут иметь горизонтальные координаты

$$x'_н = x_н + x, \quad x'_в = x_в + x + (a - b).$$

Так как проекция силы тяжести на горизонтальное направление равна нулю, а в начальный момент времени скорость центра масс отсутствует, то центр масс не должен смещаться в горизонтальном направлении. Отсюда

$$\frac{Mx_н + mx_в}{M + m} = \frac{M(x_н + x) + m[x_в + x + (a - b)]}{M + m}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{m(a - b)}{M + m}.$$◇

Активные силы — понятие, связанное со вторым и третьим законами Ньютона. Пользуясь принципом освобождения от связей, вместо связей можно ввести их реакции и включить реакции в число внешних сил. Этим открывается возможность для обобщений теоремы об изменении количества движения.

Теорема 5.1.3. *Пусть после освобождения от некоторых связей оставшиеся связи идеальны и допускают поступательное виртуальное перемещение системы материальных точек вдоль любого*

направления в пространстве. Тогда производная по времени от количества движения системы равна сумме всех внешних сил, включая и реакции удаленных связей:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{R}_\nu^{(e)}.$$

Доказательство. По условию теоремы виртуальное перемещение можно принять одинаковым для всех точек системы, если отбросить некоторые связи, а их реакции включить в разряд внешних сил. Следовательно,

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \mathbf{a}, \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

а принцип Даламбера-Лагранжа примет вид

$$\mathbf{a}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu - \mathbf{R}_\nu) = 0.$$

Так как вектор $\mathbf{a}$ произволен, то

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu - \mathbf{R}_\nu) = 0.$$

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны доказательству теоремы 5.1.2.□

Теорема 5.1.2 есть частный случай теоремы 5.1.3, когда реакции связей не влияют на соответствующую компоненту вектора количества движения.

Скажем, что *связи допускают дифференциал вращения* (см. § 2.10) вокруг оси $\mathbf{e}$, если величины

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\varphi\,\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

где $\delta\varphi$ — произвольный скалярный множитель, принадлежат множеству виртуальных перемещений $\mathcal{T}$.

Теорема 5.1.4. (Об изменении кинетического момента системы). *Пусть связи идеальны и допускают в каждый момент времени дифференциал вращения вокруг неподвижной оси с направляющим единичным вектором* $\mathbf{e}$*. Тогда производная по времени от проекции K_e кинетического момента на эту ось равна моменту внешних активных сил относительно той же оси:*

$$\frac{dK_e}{dt} = \mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu^{(e)}.$$

Доказательство. По условию теоремы виртуальное перемещение можно задать с помощью формулы

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\varphi\,\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

где $\delta\varphi$ — произвольный скалярный множитель. Подставляя это выражение в уравнение принципа Даламбера-Лагранжа и пользуясь свойствами смешанного произведения, найдем

$$\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\mathbf{r}_\nu\times\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu)\,\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi$ произвольно и

$$\mathbf{r}_\nu\times\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_\nu\times\dot{\mathbf{r}}_\nu),$$

то

$$\mathbf{e}\cdot\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu.$$

Вектор $\mathbf{e}$ — постоянный, и его можно внести под знак дифференцирования по времени. Далее

$$K_e = \mathbf{e}\cdot\mathbf{K}.$$

Кроме того, силы действия и противодействия попарно принадлежат одной прямой и противоположны. Поэтому их моменты взаимно уничтожаются.□

Следствие 5.1.3. (Теорема площадей). *Если в условиях теоремы 5.1.4 сумма моментов внешних активных сил относительно оси* $\mathbf{e}$ *равна тождественно нулю, то проекция K_e кинетического момента системы на ось* $\mathbf{e}$ *остается постоянной в процессе движения.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $\dot{K}_e = 0$. Поэтому $K_e = const$ есть первый интеграл системы уравнений движения.□

Геометрический смысл величины K_e виден из выражения

$$K_e = \sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{v}_\nu)\cdot\mathbf{e}.$$

Таким образом, кинетический момент K_e относительно оси $\mathbf{e}$ есть сумма произведений масс точек системы на секторные скорости их проекций на плоскость, перпендикулярную к оси $\mathbf{e}$. Сказанное оправдывает исторически сложившееся название следствия 5.1.3.

Пример 5.1.3. Фигурист, стоя на льду и отталкиваясь от него для вращения вокруг собственной вертикальной оси, в начальный момент широко расставляет руки. Подтягивая постепенно их к корпусу, он увеличивает угловую скорость вращения. Следствие 5.1.3 объясняет этот эффект.◇

Теорема 5.1.5. *Пусть после освобождения от некоторых связей оставшиеся связи идеальны и допускают дифференциал вращения вокруг произвольной оси. Тогда производная по времени от вектора кинетического момента равна сумме моментов внешних активных сил, включая моменты реакций удаленных связей:*

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{R}_\nu^{(e)}.$$

Доказательство. По условию теоремы, после исключения соответствующих связей и отнесения их реакций к внешним силам виртуальное перемещение можно взять в виде

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\varphi\,\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

а принцип Даламбера-Лагранжа обеспечивает выполнение равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu - \mathbf{R}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

для любого виртуального перемещения, совместимого с оставшимися связями. Здесь $\mathbf{R}_\nu$ — реакции удаленных связей. Дальнейшее рассуждение аналогично доказательству теоремы 5.1.4. Подставив выражения для виртуальных перемещений в уравнение принципа и выполнив преобразования, найдем

$$\mathbf{e}\cdot\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt} - \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}\times\mathbf{F}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}\times\mathbf{R}_\nu\right)\delta\varphi = 0.$$

Но, в отличие от теоремы 5.1.4, произвольное значение здесь может принимать не только $\delta\varphi$, но и вектор $\mathbf{e}$.□

Следствие 5.1.4. (Интеграл кинетического момента). *Если сумма моментов внешних сил (активных и реакций связей) относительно какой-либо точки пространства тождественно равна нулю в некотором интервале времени, то вектор кинетического момента системы, взятый относительно этой точки, остается в этом интервале постоянным:*

$$\mathbf{K} = \mathbf{c},$$

что в проекциях на оси координат эквивалентно трем скалярным первым интегралам.

Когда имеет место интеграл кинетического момента, то плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{K}$ и проходящая через неподвижный центр приведения моментов, называется *неизменяемой плоскостью Лапласа*.

Построим из какого-либо полюса, например начала координат, годограф переменного, вообще говоря, с течением времени вектора $\mathbf{K}$. Если главный момент внешних сил относительно оси $\mathbf{e}$ обращается в нуль, то мы будем иметь интеграл площадей $K_e = c_e$, и рассматриваемый годограф будет кривой в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$. Когда суммарный момент внешних сил обращается в нуль относительно двух неколлинеарных осей $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то мы будем иметь два интеграла площадей:

$$K_1 = \mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_1 = c_1, \quad K_2 = \mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_2 = c_2.$$

Тогда вектор кинетического момента проектируется в фиксированную точку плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, и годограф представляет собой прямую, перпендикулярную этой плоскости.

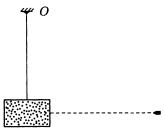
С помощью понятия годографа теореме 5.1.5 можно придать геометрическую формулировку.

Следствие 5.1.5. (Формулировка Резáля). *Скорость конца вектора кинетического момента равна главному (суммарному) моменту внешних сил, приложенных к системе материальных точек.*

Такая формулировка указывает на возможность использования методов кинематики для составления уравнения кинетического момента.

Пример 5.1.4. На невесомой нити подвешен контейнер массы M с песком (рис. 5.1.2). Расстояние от центра масс контейнера до точки подвеса O равно l, и в начальный момент он неподвижен. В контейнер со скоростью v по прямой, перпендикулярной нити и отстоящей от точки O на расстояние l, выстреливается пуля массы m. После попадания в песок пуля застревает в контейнере. Найти скорость контейнера вместе с пулей непосредственно после остановки пули в контейнере, считая пренебрежимо малым смещение контейнера за время движения пули внутри него.

Решение. Отвлечемся от влияния силы тяжести, приложенной к пуле. Тогда внешние силы, действующие на систему пуля-контейнер, суть реакция нити и вес контейнера. Обе силы до попадания пули не создают момента относительно точки O. Примем, что временем от момента попадания пули в контейнер до полной относительной остановки



Пуля, попадая в контейнер баллистического маятника, движется затем вместе с контейнером как единое целое. Количество движения и кинетический момент относительно точки подвеса маятника, которые имела пуля до попадания в контейнер, сохраняются. Им соответствуют первые интегралы уравнений движения. Кинетическая энергия системы уменьшается за счет тепловых потерь.

Рис. 5.1.2. Баллистический маятник

пули можно пренебречь, так что за это время контейнер практически останется в исходном положении. Тогда справедлива теорема площадей в вертикальной плоскости (следствие 5.1.3): кинетический момент системы пуля-контейнер до попадания пули должен быть равен кинетическому моменту этой системы непосредственно после остановки пули в контейнере. Следовательно,

$$lmv = l(M+m)V,$$

где V — искомая скорость. Решение задачи дается формулой

$$V = \frac{m}{M+m}\,v.\diamond$$

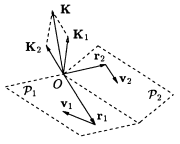
Пример 5.1.5. Рассмотрим задачу двух тел массы m_1 и m_2 соответственно, притягивающихся друг к другу по закону всемирного тяготения. В этой системе сила всемирного тяготения — внутренняя. Пусть внешние силы отсутствуют. Тогда имеет место интеграл кинетического момента

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{c}.$$

Видим, что кинетический момент (рис.5.1.3) представляется диагональю параллелограмма, построенного на векторах

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2.$$

Плоскости, проходящие через начало координат O и через скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, обозначим $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ соответственно. Очевидно, что $\mathcal{P}_1 \perp \mathbf{K}_1$ и $\mathcal{P}_2 \perp \mathbf{K}_2$. Следовательно, линия пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ перпендикулярна плоскости параллелограмма, а значит, и вектору $\mathbf{K}$. Другими словами, плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ пересекаются по прямой, принадлежащей плоскости Лапласа.$\diamond$



Плоскость Лапласа перпендикулярна вектору кинетического момента системы и не меняется при движении материальных точек. Сами точки не обязаны перемещаться в плоскости Лапласа. В случае задачи двух тел эта плоскость может быть построена как геометрическое место линий пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, образованных радиусами-векторами и векторами скорости соответственно каждого из тел.

Рис. 5.1.3. Построение плоскости Лапласа

Теорема 5.1.6. (Об изменении кинетической энергии). *Допустим, что связи, наложенные на систему материальных точек, идеальны и таковы, что дифференциалы действительных перемещений принадлежат множеству T виртуальных перемещений. Тогда дифференциал кинетической энергии равен сумме работ всех активных сил на дифференциалах действительных перемещений точек системы:*

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu.$$

Доказательство. По условию теоремы, можно принять виртуальное перемещение равным

$$\delta\mathbf{r}_\nu = d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu\,dt, \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

где $\mathbf{v}_\nu$ — действительная скорость ν-й материальной точки. По принципу Даламбера-Лагранжа

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu - \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu) = 0.$$

Но

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_\nu) \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu\,dt = d\left(\frac{1}{2}\,\mathbf{v}_\nu^2\right).$$

Теперь осталось воспользоваться определением 5.1.1.$\square$

Заметим, что для линейных по скоростям дифференциальных связей вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{A}_{j\nu} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + B_j = 0, \quad j = 1,\ldots,k,$$

дифференциал действительного перемещения принадлежит множеству T виртуальных в любой момент времени тогда и только тогда, когда $B_j \equiv 0$. При этом неголономные связи могут оказаться нестационарными (векторы $\mathbf{A}_{j\nu}$ могут зависеть явно от времени). Если связи голономны:

$$f_j(t,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = 0,$$

то требование, чтобы дифференциалы действительных перемещений принадлежали множеству T, эквивалентно требованию $\partial f_j/\partial t = 0$. Другими словами, если голономные связи допускают в качестве виртуального дифференциал действительного перемещения, то такие связи не зависят явно от времени (склерономны).

Заметим также, что в правую часть утверждения теоремы 5.1.6 входит работа всех активных сил, как внутренних, так и внешних.

Пример 5.1.6. Рассмотрим движение человека, поднимающегося по лестнице. Внешними силами, действующими на него, будут сила тяжести и сила реакции опоры. Пусть человек начинает движение по лестнице вверх в момент времени t_0 из состояния покоя: $T_0 = 0$, а поднявшись наверх, останавливается: $T_к = 0$ в момент времени $t_к$. По теореме 5.1.6 работа всех сил на действительных траекториях точек их приложения будет тогда равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\int_{t_0}^{t_к} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = T_к - T_0 = 0.$$

Но работа сил реакций отсутствует, так как точка опоры каждой ноги о лестницу остается неподвижной. Точка опоры лишь скачком меняется при смене опорных ног. Следовательно, работа силы тяжести компенсируется работой внутренних сил. Вместе с тем, как это следует из теоремы 5.1.2, подъем центра масс человека происходит именно благодаря действию внешней силы реакции лестницы.$\diamond$

Пример 5.1.7. В задаче примера 5.1.4 подсчитаем изменение кинетической энергии системы до и после попадания пули в песок:

$$T_к - T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2v^2}{M+m} - mv^2\right) = -\frac{Mmv^2}{2(M+m)}.$$

Таким образом, вследствие удара кинетическая энергия уменьшилась, и это произошло в результате работы именно внутренних сил. По разнице значений кинетической энергии можно рассчитать выделившееся при этом количество тепла.$\diamond$

Теореме 5.1.6 можно придать несколько иную формулировку.

Теорема 5.1.7. *В условиях теоремы 5.1.6 производная по времени от кинетической энергии системы равна суммарной мощности всех активных сил (см. определение 3.7.5):*

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu.$$

Доказательство получается, если дифференциал энергии и правую часть, выражающую его значение, разделить на дифференциал времени dt.$\square$

Заметим, что область применения теорем 5.1.6 и 5.1.7 может быть существенно расширена также и на тот случай, когда из-за некоторых связей действительное перемещение не попадает в множество виртуальных. Чтобы применить указанные теоремы, достаточно такие связи исключить, заменив их реакциями. По изменению кинетической энергии тогда можно судить о работе реакций связей на действительном перемещении.

Теорема 5.1.8. (Интеграл энергии). *Пусть активные силы потенциальны с силовой функцией $U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$, связи идеальны, и дифференциал действительного перемещения принадлежит множеству виртуальных в любой момент времени. Тогда имеет место первый интеграл (интеграл энергии):*

$$T - U = h,$$

где h — постоянная интегрирования.

Доказательство. Наличие силовой функции $U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$ означает, что активные силы выражаются формулами

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,N.$$

Поскольку условия теоремы 5.1.6 выполнены, то

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = dU.$$

Следовательно, при действительном движении

$$d(T-U) = 0.\square$$

Введя понятие *потенциальной энергии*

$$\Pi = -U,$$

выражение $T - U = h$ можно представить в виде

$$T + \Pi = h = T_0 + \Pi_0,$$

где T_0 и Π_0 — начальные значения кинетической и потенциальной энергий соответственно. Имеем *закон сохранения механической энергии*. Далее

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Другими словами, приращение кинетической энергии равно разности значений потенциальной энергии в начальной и конечной точках движения. Следовательно, разность между начальным и минимальным значениями потенциальной энергии показывает предельно реализуемое положительное приращение кинетической энергии. В этом смысле указанная разность характеризует *собственный энергетический ресурс системы*.

Задача 5.1.1. Подсчитать собственный энергетический ресурс тела, состоящего из материальных точек, притягивающихся друг к другу по закону всемирного тяготения.

Решение. Пусть точки тела попадают из бесконечности, где, очевидно, достигается максимум потенциальной энергии всемирного тяготения (см. пример 3.4.2), на свои места последовательно одна за другой. Обозначим $m_1,\ldots,m_N$ массы всех точек, а $r_{12}, r_{23},\ldots$ — расстояния соответственно между точками m_1 и m_2, m_2 и m_3 и т.д. в их заданном положении. Предположим, что точки $m_1,\ldots,m_{n-1}$ уже помещены на свои места. Работа, совершаемая при перемещении массы m_n из бесконечности на свое место под действием точек $m_1,\ldots,m_{n-1}$, равна

$$A_n = fm_n\left(\frac{m_1}{r_{1n}} + \frac{m_2}{r_{2n}} + \ldots + \frac{m_{n-1}}{r_{n-1,n}}\right),$$

где f — гравитационная постоянная. В правую часть этого выражения масса m_n входит по одному разу в произведении с каждой из масс $m_1,\ldots,m_{n-1}$. В каждое из аналогичных выражений для работ, совершаемых при перемещениях точек m_{n+1}, $m_{n+2},\ldots$, масса m_n входит в произведение только с одной массой. Следовательно, в выражение полной работы

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots + A_N$$

масса m_n будет входить по одному разу в произведении со всеми другими массами, кроме нее самой.

С другой стороны, потенциал в точке пространства, где находится масса m_i, выражается формулой

$$V_i = f\left(\frac{m_1}{r_{i1}} + \frac{m_2}{r_{i2}} + \ldots + \frac{m_{i-1}}{r_{i,i-1}} + \frac{m_{i+1}}{r_{i,i+1}} + \ldots\right).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{N} m_i V_i.$$

Масса m_n входит здесь в каждое слагаемое, для которого $i \neq n$, по одному разу в комбинации с другой массой. В член m_nV_n она входит в комбинации с каждой массой, кроме нее самой. В целом m_n входит в рассматриваемую сумму по два раза в комбинации с каждой массой, кроме нее самой. Поэтому работа сил всемирного тяготения при образовании системы из бесконечно удаленных точек равна

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_iV_i.$$

В частности, для системы из двух точек m_1 и m_2 это правило дает

$$A = \frac{1}{2}f\left(\frac{m_1m_2}{r} + \frac{m_2m_1}{r}\right) = f\frac{m_1m_2}{r},$$

где r — расстояние между точками. Для системы из трех точек m_1, m_2, m_3 найдем

$$A = \frac{1}{2}f\left[m_1\left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}}\right) + m_2\left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}}\right) + m_3\left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}}\right)\right] =$$

$$= f\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}}\right).$$

В случае сплошного тела, имеющего плотность ρ, расчет ресурса A производится по интегральной формуле

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Omega} V\rho\,d\Omega,$$

где Ω — объем, занимаемый телом, V — потенциал точки тела.

Найдем, например, энергетический ресурс однородного шара массы M и радиуса R. С этой целью воспользуемся теоремой 3.11.4. При движении элемента массы dm из бесконечности до поверхности шара силы тяготения совершают работу

$$dA_1 = \frac{fM}{R}\,dm.$$

При движении элемента dm внутри шара работа есть

$$dA_2 = -\frac{fMr^2}{2R^3}\,dm + \frac{fM}{2R}\,dm.$$

Суммарная работа сил тяготения при перемещении элемента dm равна

$$A_1 + A_2 = \frac{3}{2}\frac{fM^2}{R} - \frac{fM}{2R^3}\int_{\Omega} r^2\rho\,d\Omega.$$

Интеграл в правой части последнего равенства есть момент инерции шара относительно его центра. Для шара (см. пример 1.14.10)

$$\int_{\Omega} r^2\rho\,d\Omega = \frac{3MR^2}{5}.$$

Следовательно, энергетический ресурс шара выражается формулой

$$A = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \frac{3}{5}f\frac{M^2}{R}.\diamond$$

Возьмем скалярную функцию

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\mathbf{v}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu.$$

Ее полная производная по времени имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\mathbf{v}}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\mathbf{v}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu = 2T + \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \mathbf{r}_\nu.$$

Определение 5.1.3. Пусть задана некоторая функция $\varphi(t)$. Ее средним значением на интервале $(t_0, t_0+\tau)$ называется величина

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} \varphi(t)\,dt.$$

Процедура вычисления среднего называется *усреднением*.

Усредним равенство, выражающее $d\Phi/dt$, т.е. проинтегрируем его правую и левую части по времени t в пределах от t_0 до $t_0+\tau$ и разделим на τ. Получим

$$\frac{1}{\tau}[\Phi(t_0+\tau) - \Phi(t_0)] = 2\bar{T} + \sum_{\nu=1}^{N}\overline{(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \mathbf{r}_\nu}.$$

Левая часть этого равенства на конечном интервале времени может обратиться в нуль, когда

$$\Phi(t_0+\tau) = \Phi(t_0).$$

В частности, таким свойством будет обладать периодическое движение с периодом τ.

Определение 5.1.4. Движение называется *финитным*, если

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}[\Phi(t_0+\tau) - \Phi(t_0)] = 0.$$

Финитным, например, будет движение, при котором $\mathbf{r}_\nu(t)$, $\mathbf{v}_\nu(t)$, $\nu = 1,\ldots,N$, ограничены. Для финитного движения будем предполагать существование средних

$$\bar{T} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} T\,dt, \quad \overline{\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \mathbf{r}_\nu} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \mathbf{r}_\nu\,dt.$$

Определение 5.1.5. Выражение

$$Vr = -\sum_{\nu=1}^{N}\overline{(\mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu) \cdot \mathbf{r}_\nu}$$

называется *вириа́лом Кла́узиуса*.

Пример 5.1.8. Пусть сосуд объема Ω наполнен газом, молекулы которого не взаимодействуют друг с другом. Стенки сосуда непроницаемы для молекул. Найдем вириал этой системы. Удар молекулы о стенку будем считать абсолютно упругим. Ударная реакция стенки будет направлена по нормали к поверхности сосуда, и она будет единственной силой, действующей на молекулы. Среднее по времени от ударных реакций, отнесенное к элементу площади поверхности, есть давление p газа на стенки. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к поверхности, $d\sigma$ — ей соответствующий элемент площади. Тогда средняя сила $\mathbf{p}$ воздействия стенок на газ в точке поверхности, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}$, имеет вид $\mathbf{p} = -p\boldsymbol{\nu}\,d\sigma$. Следовательно,

$$Vr = p\iint_S \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu}\,d\sigma = p\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{r}\,d\Omega = 3p\Omega.$$

Здесь S — поверхность сосуда, а переход от поверхностного интеграла к объемному осуществлен по формуле Остроградского.$\diamond$

Теорема 5.1.9. (О вириале). *Для финитного движения материальной системы справедлива формула*

$$\bar{T} = \frac{1}{2}Vr.$$

Доказательство получается переходом к пределу при $\tau\to\infty$ в правой и левой частях равенства

$$\frac{1}{\tau}[\Phi(t_0+\tau) - \Phi(t_0)] = 2\bar{T} - Vr.\square$$

Пример 5.1.9. Найти связь между средней кинетической энергией и давлением для газа, находящегося в условиях примера 5.1.8.

Решение. Применяя теорему о вириале, получим

$$\bar{T} = \frac{3}{2}\,p\Omega.$$

Напомним, что отношение кинетической энергии к числу молекул пропорционально абсолютной температуре. Если кинетическая энергия постоянна, то полученная формула устанавливает связь между температурой, давлением и объемом газа.$\diamond$

Пример 5.1.10. Пусть реакции связей отсутствуют, но силы потенциальны, причем потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$ есть однородная функция степени s:

$$\Pi(\lambda\mathbf{r}_1,\ldots,\lambda\mathbf{r}_N) = \lambda^s\Pi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N).$$

Для такой системы вириал принимает вид

$$Vr = -\sum_{\nu=1}^{N}\overline{\mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu} = \sum_{\nu=1}^{N}\overline{\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{r}_\nu} = s\bar{\Pi}.$$

Следовательно, если для нее выполнены условия теоремы о вириале, то

$$2\bar{T} - s\bar{\Pi} = 0.$$

Вместе с тем справедлив интеграл энергии

$$T + \Pi = h,$$

который после усреднения примет вид

$$\bar{T} + \bar{\Pi} = h.$$

Отсюда

$$\bar{T} = \frac{s}{s+2}\,h, \quad \bar{\Pi} = \frac{2}{s+2}\,h.$$

Тем самым установлено, как начальная энергия системы делится между средними значениями кинетической и потенциальной энергий на бесконечно большом интервале времени. При $s = -2$ полученные формулы

не работают. Если $s = -2$ и $h \neq 0$, имеем противоречие, из которого следует, что в этом случае движение не может быть финитным.

В остальных случаях найденные формулы дают возможность сделать приближенные оценки состояния системы. Например, пусть газопылевое протопланетное облако в начальный момент обладало энергией h. Отвлечемся от всех сил взаимодействия частиц, кроме гравитации. Потенциальная энергия такой системы будет однородной функцией степени $s = -1$. Будем считать протопланетное облако сплошным однородным шаром массы M. Воспользовавшись решением задачи 5.1.1, получим

$$\bar{R} = -\frac{3}{10}\frac{fM^2}{h},$$

где $\bar{R}$ — средний радиус по времени эволюции системы, а в качестве Π принята работа, необходимая для переноса всех частиц системы из данной точки облака в бесконечность, где они не взаимодействуют. Формула имеет смысл, когда h отрицательно, т.е. когда движение финитно.◇

§ 5.2. Теоремы Кёнига

Расчет кинетической энергии и кинетического момента системы материальных точек не всегда легко выполняется. Чтобы его облегчить, удобно использовать специальную систему координат, носящую название осей Кёнига.

Определение 5.2.1. *Осями Кёнига* называется система координат, движущаяся поступательно. Начало ее совпадает с центром масс изучаемой системы материальных точек.

Если C — начало осей Кёнига, то его абсолютный радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ дается формулой

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}_\nu, \quad M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu.$$

Для расчета абсолютной скорости по теореме сложения скоростей получаем выражение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}_c$ — абсолютная скорость движения центра масс, а $\mathbf{v}_r$ — скорость движения относительно осей Кёнига.

Теорема 5.2.1. *Кинетический момент абсолютного движения системы дается выражением*

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}_c + \mathbf{K}^*,$$

где $\mathbf{K}^*$ — кинетический момент движения в осях Кёнига, когда за полюс взят центр масс C:

$$\mathbf{K}^* = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_{r\nu}, \quad \mathbf{r}'_\nu = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_c.$$

Доказательство. Из определения кинетического момента следует

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{r}'_\nu + \mathbf{r}_c) \times m_\nu (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{r\nu}) = \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu +$$

$$+ \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu\right) \times \mathbf{v}_c + \mathbf{r}_c \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_{r\nu} + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_{r\nu}.$$

Так как $\mathbf{r}'_\nu = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_c$, то

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_c \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_{r\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{v}_c \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = 0.\square$$

Теорема 5.2.2. *Кинетическая энергия абсолютного движения системы материальных точек дается выражением*

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T^*,$$

где T^* — кинетическая энергия движения относительно осей Кёнига:

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{r\nu}^2.$$

Доказательство. Из определения кинетической энергии следует

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{v_\nu^2}{2} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{(\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{r\nu})^2}{2} = \frac{M v_c^2}{2} + \mathbf{v}_c \cdot \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_{r\nu} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{r\nu}^2.$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_{r\nu} = 0.\square$$

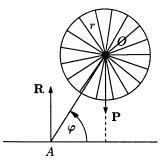
Пример 5.2.1. Вычислить кинетическую энергию однородного обруча массы M, катящегося без проскальзывания в вертикальной плоскости по горизонтальной прямой. Скорость центра обруча равна v.

Решение. Воспользуемся теоремой 5.2.2 Кёнига. Точка касания обруча с опорной прямой есть его мгновенный центр вращения (§ 2.14). Пусть радиус обруча равен R. Центр обруча имеет скорость v. Эта скорость, будучи горизонтально направленной, перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Поэтому относительно своего центра обруч вращается с угловой скоростью $\omega = v/R$, а в таком движении все его точки описывают окружность и имеют линейную скорость v. Относительно осей Кёнига получим кинетическую энергию $T^* = Mv^2/2$. Значит, кинетическая энергия обруча равна

$$T = \frac{Mv^2}{2} + T^* = Mv^2.$$

Видим, что значение кинетической энергии от радиуса не зависит и, каким бы малым ни был радиус, катящийся обруч не может считаться материальной точкой.◇

Пример 5.2.2. Пусть велосипедное колесо массы m с невесомыми спицами и радиусом r может вращаться вокруг своего центра O, закрепленного на одном конце невесомого стержня длины l. Другим своим концом стержень опирается в точке A о горизонтальную плоскость. Стержень не может скользить относительно плоскости (рис. 5.2.1). Доказать, что за счет действия внутренних сил можно добиться равновесия стержня AO.



Велосипедное колесо при опоре на наклонный стержень остается в равновесии, если специально придать колесу постоянное угловое ускорение относительно точки O за счет действия внутреннего момента сил между колесом и опорным стержнем. Положение равновесия, однако, не будет устойчивым, и для его поддержания потребуется соответствующее управление указанным угловым ускорением.

Рис. 5.2.1. Динамическое равновесие

Решение. Обозначим φ угол между стержнем и горизонтальной плоскостью. Очевидно, что $K^* = mr^2\omega$, где ω — угловая скорость вращения колеса вокруг точки O. По теореме 5.2.1 кинетический момент

колеса относительно точки A выразится формулой

$$K = mr^2\omega + l^2 m\dot{\varphi}.$$

Внешние силы, приложенные к системе, — это вес колеса и реакция опоры в точке A. По теореме 5.1.4 получим

$$\frac{dK}{dt} = -mgl\cos\varphi$$

или

$$mr^2\dot{\omega} + l^2 m\ddot{\varphi} = -mgl\cos\varphi.$$

Следовательно, если в данном положении стержня обеспечить $\dot{\varphi} = 0$ и принять

$$\dot{\omega} = -\frac{mgl\cos\varphi}{mr^2},$$

то это положение окажется положением равновесия. Заметим, что когда стержень принадлежит верхней полуплоскости, это равновесие будет неустойчивым.◇

Теорема 5.2.3. (Об изменении кинетического момента в осях Кёнига). *Если связи, наложенные на систему материальных точек, идеальны, допускают дифференциал вращения вокруг неподвижной оси l, кроме того, допускают поступательное смещение системы по любому направлению в плоскости, перпендикулярной L, то в осях Кёнига производная по времени от кинетического момента относительно оси l, параллельной L и проходящей через центр масс системы, равна сумме моментов внешних активных сил относительно оси l, т.е.*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)},$$

где $\mathbf{e}$ — направляющий вектор осей L и l.

Доказательство. Представим силы, действующие на систему, и скорость ее центра масс в виде

$$\mathbf{F}_\nu^{(e)} = (\mathbf{F}_\nu^{(e)} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \mathbf{F}_{\nu p}, \quad \mathbf{F}_{\nu p}^{(e)} \perp \mathbf{e},$$

$$\mathbf{v}_\nu = (\mathbf{v}_\nu \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \mathbf{v}_{\nu p}, \quad \mathbf{v}_{\nu p} \perp \mathbf{e},$$

разложив эти векторы на сумму составляющих, одна из которых параллельна $\mathbf{e}$, а другая лежит в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{e}$. Из условия теоремы следует, что

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)},$$

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_{cp}) = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_{\nu p}^{(e)}.$$

Применяя теорему 5.2.1, найдем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}^*) + \mathbf{e} \cdot \left[\mathbf{r}_c \times \frac{d(M\mathbf{v}_c)}{dt}\right] = \mathbf{e} \cdot \left(\mathbf{r}_c \times \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{(e)}\right) + \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}.$$

Но

$$\mathbf{e} \cdot \left[\mathbf{r}_c \times \frac{d(M\mathbf{v}_c)}{dt}\right] = \mathbf{r}_c \cdot \left[\frac{d(M\mathbf{v}_c)}{dt} \times \mathbf{e}\right] = \mathbf{r}_c \cdot \left[\frac{d(M\mathbf{v}_{cp})}{dt} \times \mathbf{e}\right],$$

$$\mathbf{e} \cdot \left(\mathbf{r}_c \times \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{(e)}\right) = \mathbf{r}_c \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{(e)} \times \mathbf{e}\right) = \mathbf{r}_c \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_{\nu p}^{(e)} \times \mathbf{e}\right).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{K}^*) = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}.\square$$

Следствие 5.2.1. *Если связи, наложенные на систему материальных точек, допускают дифференциал вращения вокруг произвольной оси u, кроме того, поступательное виртуальное перемещение всей системы вдоль любого направления, то*

$$\frac{d\mathbf{K}^*}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}.$$

Другими словами, скорость конца вектора кинетического момента в осях Кёнига равна сумме моментов всех активных сил относительно центра масс системы.

Замечание 5.2.1. Пусть связи, наложенные на систему материальных точек, допускают дифференциал вращения вокруг оси с постоянным направляющим единичным вектором $\mathbf{e}$, проходящей через центр масс системы. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}.$$

Доказательство. В данном случае виртуальные перемещения будут

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta\varphi\,\mathbf{e} \times \mathbf{r}'_\nu.$$

Из принципа Даламбера-Лагранжа, следуя доказательству теоремы 5.1.4, найдем

$$\delta\varphi\,\mathbf{e} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu\right) = 0.$$

Но $\delta\varphi$ произвольно и

$$\mathbf{r}'_\nu \times \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{r}'_\nu \times (\ddot{\mathbf{r}}_c + \ddot{\mathbf{r}}'_\nu) = \mathbf{r}'_\nu \times \ddot{\mathbf{r}}_c + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'_\nu \times \dot{\mathbf{r}}'_\nu).$$

Осталось учесть, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu = 0,$$

и применить определение 5.1.2.□

Следствие 5.2.2. *Если связи, наложенные на систему, допускают дифференциал вращения вокруг произвольной оси, проходящей через центр масс, то*

$$\frac{d\mathbf{K}^*}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu^{(e)}.$$

Рассмотрим теперь теорему об изменении кинетической энергии T^*.

Следствие 5.2.3. (Изменение кинетической энергии в осях Кёнига). *Пусть связи, наложенные на систему, идеальны и таковы, что дифференциалы действительных перемещений принадлежат множеству виртуальных и среди виртуальных содержатся поступательные смещения системы вдоль любого направления. Тогда дифференциал кинетической энергии в осях Кёнига равен работе всех активных сил на дифференциале действительного относительного перемещения системы:*

$$dT^* = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}'_\nu.$$

Доказательство. В связи с тем что выполнено условие теоремы 5.1.6, будем иметь

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu.$$

Кроме того, можно применить теорему 5.1.3 о движении центра масс:

$$M\ddot{\mathbf{r}}_c = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu.$$

По теореме 5.2.2 получим

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T^*.$$

Кроме того, учтем, что $d\mathbf{r}_\nu = d\mathbf{r}_c + d\mathbf{r}'_\nu$. Следовательно, формулу для дифференциала кинетической энергии можно представить в виде

$$dT^* + M\mathbf{v}_c \cdot \ddot{\mathbf{r}}_c dt = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_c + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}'_\nu.$$

Поскольку $d\mathbf{r}_c = \mathbf{v}_c dt$, то после учета теоремы о движении центра масс найдем

$$dT^* = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}'_\nu.$$

В приложениях при расчете кинетического момента не всегда бывает удобно принимать центр масс системы за полюс. Тогда может оказаться полезной теорема о кинетическом моменте относительно подвижного полюса. Пусть некоторая точка A в инерциальной системе отсчета имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_A$ и скорость $\mathbf{v}_A$. Обозначим

$$\mathbf{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu,$$

где $\mathbf{r}'_\nu = \mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_A$, а $\mathbf{v}_\nu$ — абсолютная скорость точки системы. Величина $\mathbf{K}_A$ есть кинетический момент системы относительно подвижной точки A.

Теорема 5.2.4. *Закон изменения $\mathbf{K}_A$ дается уравнением*

$$\frac{d\mathbf{K}_A}{dt} + \mathbf{v}_A \times \mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times (\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}).$$

где $\mathbf{Q}$ — количество движения системы, $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ — внешние активные силы, $\mathbf{R}_\nu^{(e)}$ — реакции тех связей, удаление которых обеспечивает идеальность связей, существование дифференциала вращения вокруг любой оси, проходящей через точку A, и произвольного поступательного виртуального перемещения системы.

Доказательство. Учтем, что $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \mathbf{r}_A$. Тогда по определению 5.1.1 будем иметь

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{r}'_\nu + \mathbf{r}_A) \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{K}_A + \mathbf{r}_A \times \mathbf{Q}.$$

Воспользуемся теоремой 5.1.5:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \dot{\mathbf{K}}_A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{r}_A \times \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}) + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times (\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}).$$

Но в принятых предположениях справедлива теорема 5.1.3:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}).\square$$

Закон изменения вектора $\mathbf{K}_A$, в частности, показывает, что существует множество подвижных точек, относительно которых кинетический момент изменяется так же, как и относительно неподвижной точки. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

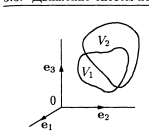
$$\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_c = 0.$$

Например, это условие выполняется, если точка A совпадает с центром масс.

§ 5.3. Движение систем переменного состава

Рассмотрим в инерциальном репере систему $\mathcal{M}$ материальных точек, которые в некоторый момент времени $t = t_0$ заполняют объем V_1 (рис. 5.3.1). Пусть система ограничена проницаемой оболочкой, сквозь которую материальные точки могут проходить как внутрь, так и наружу объема V_1.

В момент $t_1 = t_0 + \Delta t$ материальные точки, занимавшие в момент t_0 объем V_1, займут некоторый другой объем V_2 и образуют систему $\mathcal{N}$. Система $\mathcal{N}$ есть система постоянного состава. Движению подобных систем посвящены § 5.1, 5.2. Объем системы $\mathcal{N}$ может изменяться. К моменту t_1 объем системы $\mathcal{M}$ будет частично заполнен теми материальными точками, которые были в нем ранее, а частично — новыми точками, проникшими сквозь ограничивающую этот объем оболочку за время Δt. Тем самым система $\mathcal{M}$ будет системой переменного состава. К изучению законов движения таких систем мы сейчас и переходим.



Объем V_2 содержит те же материальные точки, что и объем V_1. Через время Δt часть из этих точек осталась в объеме V_1, а другая часть покинула его. Кроме того, в объем V_1 могли проникнуть и иные частицы, ранее в объеме V_1 не содержавшиеся. Таким образом, состав материальных точек объема V_1 оказывается переменным.

Рис. 5.3.1. Система переменного состава

В каждый момент времени можно вычислить количества движения $\mathbf{Q}$ и $\tilde{\mathbf{Q}}$ для систем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно. Пусть при $t = t_0$ система $\mathcal{N}$ совпадает с системой $\mathcal{M}$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{Q}}\Big|_{t_0} = \mathbf{Q}|_{t_0}.$$

В момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$ величины $\tilde{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{Q}$ уже могут различаться. Количество движения системы $\mathcal{M}$ можно выразить так:

$$\mathbf{Q}|_{t_1} = \tilde{\mathbf{Q}}\Big|_{t_1} + \Delta\mathbf{Q}_\text{п} - \Delta\mathbf{Q}_\text{у},$$

где $\Delta\mathbf{Q}_\text{п}$ — количество движения материальных точек, поступивших в систему $\mathcal{M}$ за время Δt, $\Delta\mathbf{Q}_\text{у}$ — количество движения точек, удалившихся из нее за то же время. Вычислим производную

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{Q}|_{t_1} - \mathbf{Q}|_{t_0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\tilde{\mathbf{Q}}\Big|_{t_1} + \Delta\mathbf{Q}_\text{п} - \Delta\mathbf{Q}_\text{у}\right) - \tilde{\mathbf{Q}}\Big|_{t_0}}{\Delta t}.$$

Отсюда находим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}}{dt} + \mathbf{F}_\text{п} - \mathbf{F}_\text{у},$$

где $\mathbf{F}_\text{п}$, $\mathbf{F}_\text{у}$ обозначают пределы

$$\mathbf{F}_\text{п} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{Q}_\text{п}}{\Delta t}, \quad \mathbf{F}_\text{у} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{Q}_\text{у}}{\Delta t}.$$

Тем самым векторы $\mathbf{F}_\text{п}$, $\mathbf{F}_\text{у}$ имеют размерность силы. Назовем

$$\mathbf{F}_\text{д} = \mathbf{F}_\text{п} - \mathbf{F}_\text{у}$$

дополнительной силой.

Теорема 5.3.1. *Количество движения системы переменного состава изменяется в соответствии с уравнением*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(e)} - \mathbf{R}_\nu^{(e)}) + \mathbf{F}_\text{д},$$

где $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$ — активные внешние силы, а $\mathbf{R}_\nu^{(e)}$ — реакции связей, удаление которых позволяет включить в множество T виртуальных перемещений поступательное смещение системы в любом направлении.

Доказательство. К системе постоянного состава $\mathcal{N}$ применим теорему 5.1.3 об изменении количества движения. Системы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в момент t_0 совпадают. Следовательно, для них совпадут множества виртуальных перемещений: $T = \tilde{T}$. Одинаковыми будут и связи, которые следует удалить, чтобы поступательные смещения системы по любому направлению вошли в множество T. Теперь для окончания доказательства теоремы достаточно в формуле, выражающей $d\mathbf{Q}/dt$, учесть зависимость $d\mathbf{Q}/dt$ от сил и реакций.□

Таким образом, скорость конца вектора количества движения равна сумме дополнительной силы и внешних сил, включая реакции связей.

Определение 5.3.1. Поток материальных точек через объем V называется *стационарным*, если количество движения точек, заключенных в любом элементарном объеме внутри V, зависит только от положения этого объема внутри V и не меняется со временем.

Заметим, что условие стационарности потока относится не только к внутренним точкам объема, но и к его оболочке. Другими словами, одинаковые материальные точки, выходя из объема или входя в него, приобретают в одних и тех же местах неподвижной оболочки одинаковые скорости.

Рассмотрим составляющие главного вектора внешних сил. Выделим главный вектор объемных сил $\mathbf{F}_\text{м}$, т.е. сил, действующих на материальные точки, находящиеся внутри объема V, и обусловленных воздействием объектов, расположенных вне объема (гравитационные, электрические, магнитные силы, силы инерции и т.п.). Обозначим $\mathbf{R}_\text{об}$ — главный вектор сил, обусловленных действием ограничивающей объем V оболочки на материальные точки, находящиеся внутри объема и непосредственно примыкающие к этой оболочке, в тех случаях, когда оболочка не будет абсолютно проницаемой. Примем, что другие силы отсутствуют. Тогда, очевидно,

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}) = \mathbf{F}_\text{м} + \mathbf{R}_\text{об}.$$

Обозначим также $\mathbf{R}_\text{но}$ суммарный вектор сил, действующих со стороны материальных точек, находящихся внутри объема V, на его оболочку. По третьему закону Ньютона имеем $\mathbf{R}_\text{но} = -\mathbf{R}_\text{об}$.

Теорема 5.3.2. (Формула Эйлера). *Пусть поток материальных точек через объем V стационарен. Тогда суммарная сила воздействия точек, расположенных внутри объема V, на его оболочку равна сумме главного вектора объемных сил и дополнительной силы:*

$$\mathbf{R}_\text{но} = \mathbf{F}_\text{м} + \mathbf{F}_\text{д}.$$

Доказательство. Так как поток материальных точек через объем V стационарен, то количество движения системы переменного состава $\mathcal{M}$ сохраняется во времени: $d\mathbf{Q}/dt = 0$. Воспользовавшись теоремой 5.3.1, можно написать в соответствии со смыслом векторов $\mathbf{F}_\text{м}$ и $\mathbf{R}_\text{об}$:

$$\mathbf{F}_\text{м} + \mathbf{R}_\text{об} + \mathbf{F}_\text{д} = 0.□$$

Формула Эйлера определяет усилие, действующее на оболочку, ограничивающую некоторый объем, через который осуществляется стационарный поток вещества.

Предположим теперь, что объем V произвольной формы имеет два отверстия сечений $S_\text{п}$ и $S_\text{у}$. Через отверстие $S_\text{п}$ вещество (жидкость, рассматриваемая как совокупность материальных точек) может втекать в объем, а через отверстие $S_\text{у}$ вытекать. При этом скорости $\mathbf{v}_\text{п}$ втекания точек и $\mathbf{v}_\text{у}$ вытекания будем считать одинаковыми по всей площади соответствующих сечений. Найдем

$$\mathbf{F}_\text{п} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{Q}_\text{п}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(M\mathbf{v})_\text{п}}{\Delta t}.$$

Из-за стационарности потока скорость $\mathbf{v}_\text{п}$ может быть вынесена за знак предела:

$$\mathbf{F}_\text{п} = \mathbf{v}_\text{п}\frac{dM_\text{п}}{dt} = \mu_\text{п}\mathbf{v}_\text{п}.$$

Аналогично

$$\mathbf{F}_\text{у} = \mu_\text{у}\mathbf{v}_\text{у}.$$

Коэффициенты $\mu_\text{п}$ и $\mu_\text{у}$ называются *приходом* и *расходом* массы.

Для стационарного потока суммарный расход массы (разница между поступающей в объем массой и уходящей из него) должен быть равен нулю. В противоположном случае менялась бы масса внутри объема. Следовательно, $\mu_\text{п} = \mu_\text{у} = \mu$, и дополнительная сила выразится формулой

$$\mathbf{F}_\text{д} = \mu(\mathbf{v}_\text{п} - \mathbf{v}_\text{у}).$$

Приход μ массы рассчитывается по формуле

$$\mu = \rho\iint_{S_\text{п}}\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{v}_\text{п}\,dS,$$

где ρ — плотность вещества, а $\boldsymbol{\nu}$ — внутренняя нормаль элемента сечения. Если сечение, через которое поступает вещество, плоское, то

$$\mu = S_\text{п}\rho\nu\cdot\mathbf{v}_\text{п}.$$

Пример 5.3.1. Пусть через поперечное сечение S изображенных на рис. 5.3.2 труб протекает вода в направлении, указанном стрелками. Скорость потока равна v. Найти силу, действующую со стороны жидкости на эти трубы.

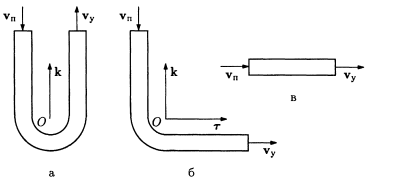


Рис. 5.3.2. Воздействие вещества на оболочку

Решение. Случай а. Пусть U-образная труба ориентирована в вертикальном направлении по единичному вектору $\mathbf{k}$ (рис. 5.3.2,а). Имеем $\mathbf{v}_\text{п} = -\mathbf{k}v$, $\mathbf{v}_\text{у} = \mathbf{k}v$, приход массы $\mu = S\rho v$. Следовательно,

$$\mathbf{R}_\text{но} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_\text{д} = -\mathbf{k}(Mg + 2S\rho v^2),$$

где $\mathbf{P}$ — вес трубы и воды, находящейся в трубе в фиксированный момент времени. Другими словами, если такую трубу поставить на весы и пропускать через нее воду, то их показания будут на величину добавочной силы больше, чем вес трубы с водой.

Случай б. Пусть одно звено L-образной трубы ориентировано в вертикальном направлении $\mathbf{k}$ (рис. 5.3.2,б). Единичный вектор горизонтального направления обозначим $\boldsymbol{\tau}$. Тогда $\mathbf{v}_\text{п} = -\mathbf{k}v$, $\mathbf{v}_\text{у} = \boldsymbol{\tau}v$, приход массы $\mu = S\rho v$. Поэтому

$$\mathbf{R}_\text{но} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_\text{д} = -\mathbf{k}(Mg + S\rho v^2) - \boldsymbol{\tau}S\rho v^2.$$

На такую трубу действует горизонтальная составляющая силы, противоположная направлению вытекающей струи. Вертикальная составляющая оказывается больше веса.

Случай в. Труба ориентирована в горизонтальном направлении $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 5.3.2,в). Очевидно, что $\mathbf{v}_\text{п} = \boldsymbol{\tau}v$, $\mathbf{v}_\text{у} = \boldsymbol{\tau}v$, $\mu = S\rho v$, и дополнительная сила отсутствует.◇

Обратимся вновь к общему случаю движения системы переменного состава и рассмотрим разность

$$\Delta\mathbf{Q}_\text{п} - \Delta\mathbf{Q}_\text{у} = m_\text{п}\mathbf{v}_\text{п} - m_\text{у}\mathbf{v}_\text{у},$$

где $m_\text{п}$ — масса, $\mathbf{v}_\text{п}$ — скорость центра масс прибывающих в систему материальных точек, $m_\text{у}$ — масса, $\mathbf{v}_\text{у}$ — скорость центра масс точек, удаляемых из системы.

Определение 5.3.2. Пусть $\Delta m = m_\text{п} - m_\text{у} \neq 0$. Тогда *средней скоростью переменной части системы* назовем вектор $\mathbf{u}$, удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{u}\Delta m = m_\text{п}\mathbf{v}_\text{п} - m_\text{у}\mathbf{v}_\text{у}.$$

Следствие 5.3.1. *Если существует*

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t} \neq 0,$$

то дополнительная сила $\mathbf{F}_\text{д}$ выражается формулой

$$\mathbf{F}_\text{д} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt},$$

где $\mathbf{u}$ — средняя скорость переменной части системы.

Теорема 5.3.3. (Уравнение Мещёрского). *Пусть скорость изменения массы $dm/dt \neq 0$. Тогда изменение скорости $\mathbf{v}$ центра масс системы переменного состава описывается уравнением*

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})\frac{dm}{dt},$$

где $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$, $\mathbf{R}_\nu^{(e)}$ — внешние активные силы и реакции связей, m — масса системы, $\mathbf{u}$ — абсолютная средняя скорость переменной части системы.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5.3.1:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}) + \mathbf{F}_\text{д}.$$

Количество движения $\mathbf{Q}$ представим в виде $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость центра масс. Тогда

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Осталось теперь учесть следствие 5.3.1.□

Определение 5.3.3. Вектор

$$\mathbf{F}_R = (\mathbf{u} - \mathbf{v})\frac{dm}{dt}$$

называется *реактивной силой*. Разность $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ называется *относительной средней скоростью* переменной части системы.

Следствие 5.3.2. (Уравнение Лéви-Чивитá). *Если абсолютная средняя скорость переменной части системы равна нулю, то изменение скорости $\mathbf{v}$ центра масс описывается уравнением*

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}).$$

Следствие 5.3.3. (Формула Циолковского). *Если относительная средняя скорость переменной части системы $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u}_0$ постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную скорости движения центра масс системы, а внешние силы отсутствуют, то*

$$v = u_0\ln\frac{m_0}{m} + v_0,$$

где m_0 — начальное значение массы, v_0 — начальное значение модуля скорости.

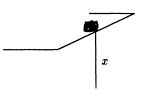
Доказательство. В условиях следствия уравнение Мещерского принимает вид

$$m\frac{dv}{dt} = -u_0\frac{dm}{dt}.$$

После интегрирования получим требуемую формулу.□

Формула Циолковского показывает, что при сделанных предположениях конечная скорость системы (ракеты) не зависит от режима расхода массы.

Пример 5.3.2. Определить движение тяжелой гладкой цепочки (рис. 5.3.3), свободный конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепочки сложена в комок у самого края стола.



При движении системы к части цепочки, свешивающейся со стола, добавляются новые фрагменты, имеющие в момент присоединения по условию задачи нулевую скорость. Имеем систему переменного состава, к которой применимы уравнения Леви-Чивита.

Рис. 5.3.3. Гладкая цепочка — система переменного состава

Решение. Свешивающуюся часть цепочки рассмотрим как систему переменного состава. Пусть x — ее длина. Присоединяющаяся масса есть $dm = \rho\,dx$, где ρ — плотность. До вступления в движение эта масса покоилась на столе. Следовательно, абсолютная средняя скорость переменной части системы равна нулю, и мы можем воспользоваться уравнением Леви-Чивита. Из внешних сил на изучаемую систему действует только сила тяжести, направленная вдоль оси x. Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = gx.$$

Умножим это уравнение на $(x\,dx/dt)$ и проинтегрируем. Тогда

$$x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}gx^3 + c.$$

Пусть в начальный момент времени t_0 нить покоится, и длина ее свешивающейся части равна x_0. Тогда

$$c = -\frac{2}{3}gx_0^3.$$

Рассмотрим предельное решение при $x_0 \to 0$. Для него примем $c = 0$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}g}\sqrt{x},$$

или

$$x = \frac{1}{6}g(t - t_0)^2,$$

т.е. длина нити будет увеличиваться с ускорением, равным $g/3$, втрое меньшим ускорения свободного падения.◇

Подчеркнем, что уравнение Мещерского имеет смысл, когда $\dot{m} \neq 0$, т.е. суммарная масса системы изменяется. Если суммарная масса

системы постоянна, но существует предел

$$\mu = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_\text{п}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_\text{у}}{\Delta t} \neq 0,$$

то дополнительную силу следует выражать формулой

$$\mathbf{F}_\text{д} = \mu(\mathbf{v}_\text{п} - \mathbf{v}_\text{у}),$$

где $\mathbf{v}_\text{п}$ — предел при $\Delta t \to 0$ абсолютной скорости центра масс точек, поступающих в систему, а $\mathbf{v}_\text{у}$ — аналогичный предел для точек, удаляемых из системы. Уравнение движения примет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \mathbf{R}_\nu^{(e)}) + \mu(\mathbf{v}_\text{п} - \mathbf{v}_\text{у}).$$

При желании разность $\mathbf{v}_\text{п} - \mathbf{v}_\text{у}$ можно вычислять как разность скоростей, взятых относительно репера, связанного с системой переменного состава.

Пример 5.3.3. Пусть L-образная трубка массы m, объема V и сечения S расположена так, что одно ее звено может поступательно скользить вдоль гладкой горизонтальной направляющей (как на рис. 5.3.2,б). В другое звено подается воздух с постоянной скоростью u относительно трубки перпендикулярно ее сечению. Считая, что внешние активные силы отсутствуют, найти закон движения центра масс трубки.

Решение. Имеем систему переменного состава, масса которой остается постоянной. Направляющий вектор вдоль звена к отверстию трубки, куда подается воздух, обозначим $\mathbf{k}$. Вдоль другого звена направим вектор $\boldsymbol{\tau}$. Пусть ρ — плотность воздуха. Очевидно,

$$\mu = S\rho u, \quad \mathbf{v}_\text{п} = -u\mathbf{k} + v\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{v}_\text{у} = u\boldsymbol{\tau} + v\boldsymbol{\tau},$$

где v — скорость движения трубки. Следовательно,

$$\mathbf{F}_\text{д} = -S\rho u^2(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}).$$

По условию задачи движение в направлении $\mathbf{k}$ отсутствует. Значит, составляющая силы $\mathbf{F}_\text{д}$ в этом направлении уравновешивается реакцией опоры. Проекция уравнения движения на направление $\boldsymbol{\tau}$ имеет вид

$$(m + V\rho)\frac{dv}{dt} = -S\rho u^2.$$

Член $V\rho$ учитывает массу воздуха, заключенного в объеме трубки. Движение трубки оказывается равноускоренным.◇

Перейдем к закону изменения кинетического момента системы переменного состава. Кинетический момент будем вычислять относительно неподвижного полюса O.

Теорема 5.3.4. *Кинетический момент $\mathbf{K}$ системы переменного состава изменяется в соответствии с уравнением*

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{R}_\nu^{(e)} + \mathbf{M}_\text{д},$$

где дополнительный момент $\mathbf{M}_\text{д} = \mathbf{M}_\text{п} - \mathbf{M}_\text{у}$, а

$$\mathbf{M}_\text{п} = \frac{d\mathbf{K}_\text{п}}{dt}, \quad \mathbf{M}_\text{у} = \frac{d\mathbf{K}_\text{у}}{dt}$$

суть скорости изменения суммарных кинетических моментов точек, прибывающих в систему и соответственно удаляемых из нее.

Доказательство. Повторим дословно рассуждения, которые служили для доказательства теоремы об изменении количества движения, но для систем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ будем брать не векторы количества движения, а векторы кинетического момента, подсчитанного относительно неподвижного полюса O. Тогда получим

$$\frac{d\tilde{\mathbf{K}}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{K}}}{dt} + \mathbf{M}_\text{д}.$$

Теперь осталось к системе $\mathcal{N}$ постоянного состава с кинетическим моментом $\tilde{\mathbf{K}}$ применить теорему 5.1.5.□

Следствие 5.3.4. *В случае стационарного потока материальных точек через систему $\mathcal{M}$ получим $d\mathbf{K}/dt = 0$. Поэтому момент сил, действующих на оболочку объема V, выражается формулой*

$$\mathbf{M}_\text{но} = \mathbf{M}_\text{м} + \mathbf{M}_\text{д}.$$

Смысл индексов такой же, как в теореме 5.3.2.

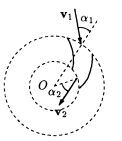
Пример 5.3.4. Рассмотрим ротор турбины (рис. 5.3.4). При равномерном вращении поток вещества через межлопаточные пространства будет стационарным. Изменение кинетического момента будет отсутствовать, что приведет к выполнению равенства

$$\mathbf{M}_\text{д} = \mathbf{M}^{(e)},$$

которое определяет момент $\mathbf{M}^{(e)}$ внешних сил, приложенных к ротору.

Вычислить дополнительный момент $\mathbf{M}_\text{д}$, возникающий за счет протока вещества через внутренний объем турбины.

Решение. Предположим, что относительные скорости $\mathbf{v}_1$ потока материальных точек на входе в объем между лопатками и скорости $\mathbf{v}_2$



При стационарном течении сквозь турбину векторы относительной скорости поступающего и убывающего вещества, проходящего через межлопаточные пространства системы, имеют постоянные, но различные величину, направление и начало. За счет этого возникает дополнительный момент, обеспечивающий требуемый режим вращения турбины.

Рис. 5.3.4. Течение сквозь турбину

на выходе из объема одинаковы каждая в любой точке всего входного и выходного сечений и составляют углы α_1 и α_2 с радиусами-векторами, проведенными из центра рабочего диска турбины к серединам входного и выходного сечений.

Векторы всех моментов направлены по одной и той же прямой, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку O. Поэтому будем принимать во внимание лишь скалярные величины моментов с учетом знаков. Очевидно, в соответствии с рисунком будем иметь

$$M_\text{п} = \mu_1(-v_1\sin\alpha_1 + \omega r_1)r_1, \quad M_\text{у} = \mu_2(-v_2\sin\alpha_2 + \omega r_2)r_2,$$

где ω — угловая скорость вращения турбины, μ_1 и μ_2 — приход и расход массы. Для стационарного потока $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Значит, дополнительный момент, действующий на одну секцию турбины, составит

$$\tilde{M}_\text{д} = [-v_1r_1\sin\alpha_1 + v_2r_2\sin\alpha_2 + \omega(r_1^2 - r_2^2)].$$

Пусть теперь ротор с числом лопаток n заторможен. Если поток стационарен и одинаков во всех секциях турбины, то формула

$$M_\text{д} = n\mu(-v_1r_1\sin\alpha_1 + v_2r_2\sin\alpha_2)$$

выражает суммарный момент, который задает начальное угловое ускорение ротора. Получили турбинную формулу Эйлера. Из нее видно, что наибольшая отдача турбины достигается при углах α_1 и α_2, противоположных по знаку.

Отметим, что в условиях задачи существует значение ω^* угловой скорости, при котором дополнительный момент обращается в нуль:

$$\omega^* = \frac{v_1r_1\sin\alpha_1 - v_2r_2\sin\alpha_2}{r_1^2 - r_2^2}.◇$$

Теорема 5.3.5. (Изменение кинетической энергии системы переменного состава). *Пусть связи идеальны, а дифференциалы действительных перемещений всех материальных точек, образующих в данный момент времени рассматриваемую систему переменного состава, принадлежат множеству виртуальных перемещений. Тогда кинетическая энергия T системы переменного состава удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu + W_д,$$

где $\mathbf{F}_\nu$ — все силы, приложенные к системе (как внутренние, так и внешние), $\mathbf{v}_\nu$ — скорости точек их приложения, $W_д$ — дополнительная мощность:

$$W_д = W_п - W_у,$$

возникающая в связи с изменением кинетической энергии из-за того, что некоторые материальные точки, суммарно имеющие кинетическую энергию $T_п$, прибывают в систему:

$$W_п = \frac{dT_п}{dt},$$

а некоторые с суммарной кинетической энергией $T_у$ удаляются из нее:

$$W_у = \frac{dT_у}{dt}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — система переменного состава с кинетической энергией T, а $\mathcal{N}$ — система постоянного состава с кинетической энергией $\tilde{T}$, совпадающая в рассматриваемый момент времени t с системой $\mathcal{M}$, так что

$$T|_t = \tilde{T}|_t.$$

На момент $t_1 = t + \Delta t$ величины T и $\tilde{T}$ можно связать соотношением

$$T|_{t_1} = \tilde{T}|_{t_1} + \Delta T_п - \Delta T_у,$$

где $\Delta T_п$ — кинетическая энергия материальных точек, поступивших в систему $\mathcal{M}$ за время δt, а $\Delta T_у$ — кинетическая энергия точек, удалившихся из нее за это же время. Ясно, что должно быть

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\tilde{T}}{dt} + W_п - W_у,$$

где

$$W_п = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T_п}{\Delta t}, \quad W_у = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T_у}{\Delta t}.$$

Но система $\mathcal{N}$ есть система постоянного состава, и для нее выполнены условия теоремы 5.1.7.□

Следствие 5.3.5. *Если скорости всех попадающих в систему $\mathcal{M}$ материальных точек одинаковы по величине и равны $\mathbf{v}_п$, а скорости удаляющихся из объема точек также одинаковы по величине и равны $\mathbf{v}_у$, то дополнительная мощность в такой системе переменного состава будет выражаться формулой*

$$W_д = \mu_п \frac{v_п^2}{2} - \mu_у \frac{v_у^2}{2},$$

где $\mu_п$ — приход, $\mu_у$ — расход массы. Если поток стационарен: $\mu_п = \mu_у = \mu$, то дополнительная мощность принимает вид

$$W_д = \frac{\mu}{2}(v_п^2 - v_у^2).$$

Пример 5.3.5. Рассмотрим систему переменного состава, совпадающую с изученной в примере 5.3.3. В ней, очевидно, $\mu = S\rho u$, и дополнительная мощность дается формулой

$$W_д = \frac{\mu}{2}(v_п^2 - v_у^2) = -S\rho u^2 v.$$

Этот же результат в данном случае можно получить и непосредственно, умножив обе части уравнения, полученного в примере 5.3.3, на скорость v системы. Такое совпадение подтверждает принятую при подсчете дополнительной энергии гипотезу об идеальности связей.◇

Пример 5.3.6. Тележка может двигаться горизонтально. На ней укреплена труба в форме прямого усеченного конуса, ось которого ориентирована вдоль направления движения тележки. Пусть в наибольшее сечение $S_п$ трубы с постоянной горизонтальной скоростью u относительно тележки перпендикулярно сечению подается вода. Вытекает вода через другое сечение $S_у$ трубы. Считая воду несжимаемой жидкостью, найти уравнение движения тележки и мощность, необходимую для реализации такого движения.

Решение. Имеем систему переменного состава, масса которой остается постоянной. Направляющий вектор относительной скорости воды обозначим τ. Пусть ρ — плотность воды. Очевидно, что $\mu_п = S_п\rho u$ и $\mu_у = S_у\rho u_у$. Так как вода несжимаема, то $S_п u = S_у u_у$. Далее

$$v_п = u + v, \quad v_у = u_у + v,$$

где v — скорость движения тележки. Следовательно, уравнение движения тележки в направлении τ принимает вид

$$(m + V\rho)\frac{dv}{dt} = -S_п\rho u^2 \left(\frac{S_п}{S_у} - 1\right),$$

где m — масса тележки с трубой, а $V\rho$ — масса воды, заключенная в объеме трубы. Подведем теперь энергетический баланс. Слагаемые дополнительной мощности из-за поступления и расхода массы принимают вид

$$W_п = \frac{1}{2}S_п\rho u(u+v)^2, \quad W_у = \frac{1}{2}S_п\rho u(v + S_п u/S_у)^2.$$

Дополнительная мощность вычисляется как разность

$$W_д = W_п - W_у = \frac{1}{2}S_п\rho u^2 \left\{\left[1 - \left(\frac{S_п}{S_у}\right)^2\right]u - 2\left(\frac{S_п}{S_у} - 1\right)v\right\}.$$

Если правую и левую части уравнения движения тележки умножить на v, то получим

$$\frac{dT}{dt} = W_п = -S_п\rho u^2 \left(\frac{S_п}{S_у} - 1\right)v.$$

Из дополнительной мощности вычтем слагаемое, выражающее затраты на ускорение тележки:

$$W_р = W_д - W_п = -\frac{1}{2}S_п\rho u^3 \left[\left(\frac{S_п}{S_у}\right)^2 - 1\right].$$

Величина $W_р$ определяет затраты энергии, необходимые для разгона частиц воды до скорости, при которой они покидают систему. Следовательно, для реализации рассматриваемого движения нужен источник энергии, не указанный в условии задачи.◇

§ 5.4. Принцип Га́усса наименьшего принуждения

Координаты и скорости точек системы в действительном движении тождественно удовлетворяют уравнениям связей

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_1, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Продифференцируем по времени эти уравнения:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Когда в данном состоянии системы изменяются действующие на нее силы, то меняются ускорения материальных точек, а их координаты и скорости остаются фиксированными.

Определение 5.4.1. *Допустимыми* называются такие ускорения, которые могут быть реализованы материальными точками системы в ее фиксированном состоянии при наложенных на нее связях,

если произвольно задавать действующие на систему активные силы. *Действительными* называются такие ускорения, которые возникают в системе при конкретных активных силах, вызывающих ее движение.

Действительное ускорение всегда будет одним из допустимых.

Определение 5.4.2. Выражение

$$A = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{m_\nu}(m_\nu \mathbf{w}_\nu^* - \mathbf{F}_\nu)^2,$$

где $\mathbf{w}_\nu^*$ — допустимые ускорения системы, $\mathbf{F}_\nu$ — активные силы, m_ν — массы материальных точек, называется *принуждением по Гауссу.*

Теорема 5.4.1. (Принцип Гаусса наименьшего принуждения). *Действительные ускорения $\mathbf{w}_\nu$, $\nu = 1, \dots, N$, системы материальных точек с идеальными связями доставляют минимум принуждению по Гауссу:*

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{m_\nu}(m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu)^2 = \min_{\mathbf{w}_\nu^*} \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{m_\nu}(m_\nu \mathbf{w}_\nu^* - \mathbf{F}_\nu)^2.$$

Доказательство. Действительные $\mathbf{w}_\nu$ и допустимые $\mathbf{w}_\nu^*$ ускорения точек удовлетворяют одной и той же системе уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu^* + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Разности $(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*)$ удовлетворяют системе уравнений, определяющей виртуальные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu} \cdot (\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Значит, среди виртуальных перемещений найдутся пропорциональные разностям ускорений

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \varepsilon(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*), \quad \nu = 1, \dots, N.$$

Применим принцип Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu) \cdot (\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*) = 0.$$

Обозначим $\mathbf{w}_\nu^F = \mathbf{F}_\nu/m_\nu$ ускорения, которые возникли бы у точек, если их освободить от всех связей. Тогда получим

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^F) \cdot (\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*) = 0.$$

Выполним тождественное преобразование

$$(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^F) \cdot (\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*) = \frac{1}{2}[(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^F)^2 + (\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*)^2 - (\mathbf{w}_\nu^* - \mathbf{w}_\nu^F)^2].$$

Обозначим

$$A_д = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^F)^2, \quad A = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{w}_\nu^* - \mathbf{w}_\nu^F)^2.$$

Из принципа Даламбера-Лагранжа следует

$$A_д = A - A_р, \quad A_р = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_\nu^*)^2.$$

Так как $A_р$ — положительная величина, обращающаяся в нуль, лишь когда $\mathbf{w}_\nu^* = \mathbf{w}_\nu$, то $A_д = \min A$.□

Принцип наименьшего принуждения допускает простое геометрическое истолкование. Он означает, что действительные ускорения системы минимально отклоняются от тех, которые имели бы место при полном отсутствии связей. Метрика, оценивающая отклонение, определена коэффициентами квадратичной формы принуждения по Гауссу.

Пример 5.4.1. В пространстве R^3 задана неподвижная абсолютно гладкая кривая

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

где s — длина ее дуги. На эту кривую положена тяжелая нить длины l и массы M. Направление вертикали задано единичным вектором $\mathbf{k}$, так что ускорение силы тяжести выражается равенством

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k}.$$

Требуется найти ускорение нити при условии, что нить не отделяется от кривой ни одной своей точкой.

Решение. Пусть $s = s^*$ — значение параметра в начальной точке нити, а $s = s^* + \lambda$ определяет положение некоторой ее внутренней точки. Обозначим $\boldsymbol{\tau}$ касательную и $\boldsymbol{\nu}$ главную нормаль к опорной кривой

в точке, соответствующей значению параметра $s = s^* + \lambda$. Ускорение точки нити с тем же значением параметра имеет вид

$$\mathbf{w} = w_\tau \boldsymbol{\tau} + w_n \boldsymbol{\nu}.$$

Причем из-за нерастяжимости нити касательное ускорение всех ее точек одинаково:

$$w_\tau(s^*) = w_\tau(s^* + \lambda)$$

при любом $0 \le \lambda \le l$. Обозначим ρ — плотность нити. Масса элемента нити будет

$$dm = \rho\, d\lambda.$$

К этому элементу приложена сила тяжести

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}\rho g\, d\lambda.$$

Запишем принуждение по Гауссу:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^l (w_\tau \boldsymbol{\tau} + w_n \boldsymbol{\nu} + \mathbf{k}g)^2 \rho\, d\lambda$$

или

$$A = \frac{1}{2}w_\tau^2 M + w_\tau g\rho \int_0^l \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\lambda + \dots$$

Многоточием обозначены члены, не содержащие ускорений, ибо $w_n = v^2/R$, где R — радиус кривизны. Обозначим $z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ вертикальную координату точки кривой. Тогда

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{d\lambda} = \frac{dz}{d\lambda}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{2}w_\tau^2 M + w_\tau g\rho[z(s^* + l) - z(s^*)] + \dots$$

Минимум A достигается при

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = -g\rho\frac{z(s^* + l) - z(s^*)}{M}.$$

Это и есть искомое уравнение движения. Оно показывает, что касательное ускорение нити пропорционально разности вертикальных координат ее концов. Следовательно, при любой форме опорной кривой положение равновесия нити достигается тогда, когда концы нити находятся на одном и том же вертикальном уровне. Здесь мы имеем аналогию с законом одинакового уровня жидкости при равновесии в сообщающихся сосудах.◇

§ 5.5. Квазикоординаты

Пусть в пространстве R^3 конфигурация системы N материальных точек однозначно определена координатами

$$q_1, \dots, q_n, \quad n \le 3N,$$

так что радиусы-векторы всех точек системы выражаются функциями

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \dots, q_n, t), \quad \nu = 1, \dots, N.$$

Предположим, что на систему наложены дифференциальные связи

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m \le n.$$

Учтем, что

$$\mathbf{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

и подставим эти выражения в уравнения связей. Тогда связи примут вид

$$\phi_j(q_1, \dots, q_1, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Будем считать, что ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}$$

равен m. Это означает, что система связей выделяет в пространстве скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ поверхность размерности $n - m$. Представим ее в параметрической форме:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q_1, \dots, q_n, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_{n-m}), \quad i = 1, \dots, n$$

таким образом, что при произвольном задании скалярных параметров $\dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_{n-m}$ уравнения связей автоматически удовлетворяются.

Если параметры $\dot{\pi}_k$ заданы, то они выделяют единственный набор $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \dots, \dot{q}_n)$, удовлетворяющий уравнениям связей. Когда $\dot{\pi}_k = \dot{\pi}_k(t)$ заданы как функции времени, зависимость $\dot{\mathbf{q}}$ от $\dot{\pi}_k$ составляет систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую, например, численным методом, можно найти функции $q_1(t), \dots, q_n(t)$ и узнать тем самым, как меняется конфигурация системы в пространстве.

При желании зависимости $\dot{\pi}_k(t)$ можно рассматривать как производные от некоторых функций $\pi_k(t)$.

Определение 5.5.1. Первообразные

$$\pi_k(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{\pi}_k(t)\, dt + c_k, \quad k = 1, \dots, n - m$$

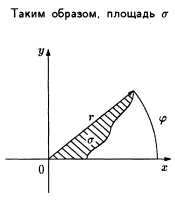
называются *квазикоординатами* системы материальных точек. Постоянные c_k могут быть выбраны произвольно и равны значениям квазикоординат в начальный момент времени t_0. Величины $\dot{\pi}_k$ называются *квазискоростями*, а $\ddot{\pi}_k$ — *квазиускорениями.*

Приставка "квази" подчеркивает принципиальное отличие между квазикоординатами и координатами, которое проиллюстрируем следующим примером.

Пример 5.5.1. Положение точки на плоскости можно задавать полярными координатами r и φ (рис. 5.5.1), а траекторию точки — функциями $r(t)$ и $\varphi(t)$. Обозначим $\sigma(t)$ площадь, заметаемую радиусом-вектором при его движении по заданному закону. Между радиусом-вектором, полярным углом и площадью σ имеется следующее кинематическое соотношение:

$$\dot{\varphi} = 2\dot{\sigma}/r^2.$$

Таким образом, площадь σ есть квазикоордината, а $\dot{\sigma}$ — квазискорость. Но положение точки нельзя однозначно задать значениями полярного радиуса и квазикоординаты σ. Площадь, заметаемая радиусом-вектором, существенно зависит от движения, которым точка пришла в то или иное положение. Между координатой φ и квазикоординатой σ не существует никакого конечного соотношения, позволяющего однозначно вычислить одно по значению другого.◇



Значение площади σ, заметаемой радиусом-вектором, не дает однозначного представления о направлении радиуса, хотя значение секторной скорости $\dot{\sigma}$ и радиальная скорость $\dot{r}$ однозначно определяют вектор скорости. Положение точки на плоскости можно задавать полярными, декартовыми или иными координатами с добавлением при необходимости кинематических уравнений.

Рис. 5.5.1. Координаты и квазикоординаты

Еще один пример использования квазикоординат встречается в кинематике абсолютно твердого тела (см. § 2.15), где компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости суть квазискорости, связанные с производными, например, угловых координат φ, ψ, ϑ, кинематическими уравнениями Эйлера.

Ответ на вопрос о том, в каком случае квазикоординаты могут служить полноправными координатами системы материальных точек, дается следующей теоремой.

Теорема 5.5.1. *Квазикоординаты π_k могут служить координатами, однозначно определяющими конфигурацию системы с учетом дифференциальных связей, тогда и только тогда, когда зависимость $\dot{\mathbf{q}}$ от квазискоростей эквивалентна линейной зависимости:*

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0 + \sum_{k=1}^{n-m} \boldsymbol{\alpha}_k \dot{\pi}_k$$

и соответствующая Пфаффова система

$$d\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}}_0 dt + \sum_{k=1}^{n-m} \boldsymbol{\alpha}_k\, d\pi_k$$

вполне интегрируема (определение 4.4.2).

Доказательство. Необходимость. Пусть квазикоординаты π_k можно взять в качестве координат, значения которых однозначно определяют конфигурацию системы с учетом связей. Это значит, что существуют конечные соотношения

$$q_i = q_i(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

задающие поверхность размерности $n - m$ в пространстве R^n. По смыслу квазикоординат касательное пространство к этой поверхности совпадает с пространством $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ эквивалентной пфаффовой системы при произвольном задании дифференциалов $d\pi_k$. Наличие такой поверхности означает линейную зависимость скоростей от квазискоростей и полную интегрируемость соответствующей пфаффовой системы. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть указанная в условии теоремы пфаффова система вполне интегрируема. Дифференциалы $dq_1, \dots, dq_n$, $d\pi_1, \dots, d\pi_{n-m}$ принадлежат пространству R^{2n-m}. Полная интегрируемость означает, что существуют формы $df_1, \dots, df_n$, которые, будучи линейными комбинациями форм

$$\omega_i = dq_i - \dot{q}_{i0}dt - \sum_{k=1}^{n-m} \alpha_{ik} d\pi_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

служат полными дифференциалами по переменным t, $q_1,\dots,q_n$, $\pi_1,\dots,\pi_{n-m}$. Значит, существуют независимые функции f_i такие, что система уравнений

$$f_i(q_1,\dots,q_n,\pi_1,\dots,\pi_{n-m},t)=c_i,\quad i=1,\dots,m,$$

где c_i — некоторые постоянные, выделяет в пространстве R^{2n-m} гиперповерхность. При этом касательное пространство к ней совпадает с подпространством, на котором все формы пфаффовой системы обращаются в нуль. Поскольку дифференциалы dq_i выражаются через дифференциалы $d\pi_k$, из полученных конечных уравнений можно выразить

$$q_i=q_i(\pi_1,\dots,\pi_{n-m},t),\quad i=1,\dots,n,$$

что и дает искомую однозначную замену переменных.□

Следствие 5.5.1. *Квазикоординаты, введенные для системы материальных точек с дифференциальными связями, могут оказаться координатами только в том случае, если эти связи голономны.*

Однако голономность связей еще не означает, что любые квазикоординаты можно применять в качестве координат системы (см. пример 5.5.1).

Удобство использования квазикоординат обусловлено простотой введения независимых параметров, задающих пространство допустимых скоростей системы.

Определение 5.5.2. *Частной производной от координаты q_i по квазикоординате π_k* называется выражение:

$$\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}=\frac{\partial\dot q_i}{\partial\dot\pi_k}.$$

Аналогично для произвольной функции $f(q_1,\dots,q_n)$ получим

$$\frac{\partial f}{\partial\pi_k}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial\dot q_i}\,\frac{\partial\dot q_i}{\partial\dot\pi_k}.$$

Таким образом, операция частного дифференцирования по квазикоординатам всегда имеет смысл и вполне аналогична операции частного дифференцирования по координатам.

Определим пространство виртуальных перемещений при использовании квазикоординат. Если подставить зависимость скоростей от квазискоростей в уравнения связей, то по определению этих зависимостей уравнения связей автоматически удовлетворяются. Следовательно будут тождественно выполнены равенства

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\dot\pi_k}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf v_\nu}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf v_\nu}{\partial\dot q_i}\,\frac{\partial\dot q_i}{\partial\dot\pi_k}\equiv 0,\quad j=1,\dots,m,\quad k=1,\dots,n-m.$$

Умножим полученные тождества на произвольные параметры $\delta\pi_k$ и проведем суммирование по индексу k. Тогда получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf v_\nu}\cdot\delta\mathbf r_\nu=0,\quad j=1,\dots,m,$$

где

$$\delta\mathbf r_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf v_\nu}{\partial\dot q_i}\,\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf r_\nu}{\partial q_i}\,\delta q_i,\quad \delta q_i=\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial\dot q_i}{\partial\dot\pi_k}\,\delta\pi_k=\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}\,\delta\pi_k.$$

Пространство виртуальных перемещений определено этими формулами. Любой набор векторов $\{\delta\mathbf r_\nu,\nu=1,\dots,N\}$, полученный указанным способом, удовлетворяет системе уравнений, задающей виртуальные перемещения. Размерность $n-m$ множества таких наборов совпадает с размерностью пространства виртуальных перемещений.

Пусть координатам $q_1,\dots,q_n$ соответствуют обобщенные силы $Q_1,\dots,Q_n$ (определение 4.7.3). Тогда выражение для элементарной работы сил примет вид

$$A=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i=\sum_{k=1}^{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}\right)\delta\pi_k.$$

Определение 5.5.3. Скалярная величина

$$Q_k^*=\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}$$

называется *обобщенной силой, работающей на изменении квазикоординаты π_k*.

Видим, что закон перехода от обобщенных сил Q_i к обобщенным силам Q_k^* вполне аналогичен закону, имеющему место при замене координат.

Пример 5.5.2. Пусть положение материальной точки на плоскости с ортами $\mathbf e_1$, $\mathbf e_2$ определено полярными координатами r и φ, причем угол φ отсчитывается от вектора $\mathbf e_1$. К точке приложена сила

$$\mathbf F=F_1\mathbf e_1+F_2\mathbf e_2.$$

Тогда координатам r и φ соответствуют обобщенные силы

$$Q_r=F_1\cos\varphi+F_2\sin\varphi,\quad Q_\varphi=r(-F_1\sin\varphi+F_2\cos\varphi).$$

Первая из них есть проекция силы на радиус-вектор точки, а вторая есть момент силы $\mathbf F$ относительно начала координат. Если вместо координат (r,φ) ввести квазикоординаты (r,σ), где σ — площадь, заметаемая

радиусом-вектором при движении точки, то (см. пример 5.5.1) будем иметь

$$\frac{\partial r}{\partial\sigma}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}=\frac{2}{r^2}.$$

Следовательно, Q_r не изменится, а обобщенная сила Q_σ примет вид

$$Q_\sigma=\frac{2}{r}(-F_1\sin\varphi+F_2\cos\varphi).$$

Исключить угол φ с помощью σ здесь принципиально нельзя, так как между ними не существует конечного соотношения.◇

§ 5.6. Уравнения Аппéля

Пусть положения материальных точек динамической системы определены радиусами-векторами

$$\mathbf r_\nu=\mathbf r_\nu(\mathbf q,t),\quad \nu=1,\dots,N,$$

где $\mathbf q=(q_1,\dots,q_n)$ — набор координат, однозначно выделяющих конфигурацию системы, причем $n<3N$. Дифференциальные связи учтем с помощью соотношений (см. § 5.5):

$$\dot{\mathbf q}=\dot{\mathbf q}(q_1,\dots,q_n,\dot\pi_1,\dots,\dot\pi_{n-m},t).$$

Когда квазискорости $\dot\pi_k$ задаются как произвольные скалярные величины, то мы получим значения скоростей $\dot q_1,\dots,\dot q_n$, совместимые со связями. Если же квазискорости заданы как произвольные функции времени $\dot\pi_k=\dot\pi_k(t)$, то для определения движения системы, соответствующего этим функциям, следует проинтегрировать получающуюся из приведенных соотношений систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение 5.6.1. Уравнения

$$\dot{\mathbf q}=\dot{\mathbf q}(q_1,\dots,q_n,\dot\pi_1,\dots,\dot\pi_{n-m},t)$$

называются *кинематическими уравнениями системы материальных точек*.

Эти уравнения обобщают кинематические уравнения (см. § 2.15) в теории движения абсолютно твердого тела. Функции $\dot\pi_k(t)$ определяются приложенными к системе активными силами. Соответствующие дифференциальные уравнения могут быть получены с помощью принципа Гаусса.

Определение 5.6.2. Пусть $\mathbf w_\nu$ суть ускорения точек системы. Функция

$$S=\frac12\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf w_\nu^2$$

называется *энергией ускорений*.

Энергия ускорений структурно аналогична кинетической энергии системы.

Теорема 5.6.1. (Уравнения Аппеля). *Квазиускорения $\ddot\pi_k$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot\pi_k}=Q_k^*,\quad k=1,\dots,n-m,$$

где Q_k^* — обобщенная сила, работающая на изменении квазикоординаты π_k.

Доказательство. Скорости и ускорения точек системы, удовлетворяющие связям, выражаются равенствами

$$\mathbf v_\nu=\frac{d\mathbf r_\nu}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf r_\nu}{\partial q_i}\,\dot q_i+\frac{\partial\mathbf r_\nu}{\partial t},$$

$$\mathbf w_\nu^*=\frac{d\mathbf v_\nu}{dt}=\sum_{k=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf r_\nu}{\partial q_i}\,\frac{\partial\dot q_i}{\partial\dot\pi_k}\,\ddot\pi_k+\ldots=\sum_{k=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf r_\nu}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}\,\ddot\pi_k+\ldots,$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие квазиускорений $\ddot\pi_k$. Эти члены одинаковы для любого допустимого ускорения. Множество допустимых ускорений получается, когда коэффициенты $\ddot\pi_k$ выбираются произвольным образом.

Принуждение по Гауссу (определение 5.4.2) есть положительно определенный многочлен $\mathcal A$ второй степени по переменным $\ddot\pi_k$. Его минимум существует, единствен и может быть найден из условия

$$\frac{\partial\mathcal A}{\partial\ddot\pi_k}=0,\quad k=1,\dots,n-m.$$

Функцию $\mathcal A$ представим в виде

$$\mathcal A=\frac12\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\mathbf w_\nu^*)^2-\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf w_\nu^*\cdot\mathbf F_\nu+\ldots$$

По-прежнему многоточием обозначены члены, не зависящие от квазиускорений и пропадающие при частном дифференцировании по ним.

Первый член принуждения по Гауссу есть энергия ускорений. Продифференцируем по $\ddot\pi_k$ второй член:

$$\frac{\partial}{\partial\ddot\pi_k}\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf w_\nu^*\cdot\mathbf F_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf F_\nu\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf r_\nu}{\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}=\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial\pi_k}=Q_k^*.$$□

Следствие 5.6.1. *Для того чтобы получить полный набор уравнений движения системы материальных точек, достаточно разрешить уравнения Аппеля относительно квазиускорений и к полученным обыкновенным дифференциальным уравнениям добавить кинематические уравнения системы. При этом число уравнений составит $2n-m$ и будет равно сумме числа координат и квазискоростей.*

Расчет энергии ускорений не всегда просто выполняется. Часто оказывается полезной теорема, аналогичная теореме Кёнига для расчета кинетической энергии.

Теорема 5.6.2. *Энергия абсолютных ускорений системы связана с энергией ускорений относительно осей Кёнига (определение 5.2.1) посредством соотношения*

$$S=\frac12 M\mathbf w_c^2+S^*,$$

где $\mathbf w_c$ — ускорение центра масс системы, S^* — энергия ускорений в осях Кёнига.

Доказательство. Радиусы-векторы точек системы имеют вид $\mathbf r_\nu=\mathbf r_c+\mathbf r'$. Следовательно,

$$\mathbf w_\nu=\mathbf w_c+\ddot{\mathbf r}'_\nu,\quad \mathbf w_\nu^2=\mathbf w_c^2+2\mathbf w_c\cdot\ddot{\mathbf r}'_\nu+(\ddot{\mathbf r}'_\nu)^2.$$

Подставив эти выражения в формулу для S и приняв во внимание, что

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\mathbf r}'_\nu=0,$$

убеждаемся в справедливости теоремы.□

Пример 5.6.1. Составить уравнения движения точки массы m под действием активной силы $\mathbf F$. Движение точки стеснено дифференциальной связью

$$\dot r_1=r_3\dot r_2,$$

где $\mathbf r=r_1\mathbf e_1+r_2\mathbf e_2+r_3\mathbf e_3$ — радиус-вектор точки, а $\mathbf e_1$, $\mathbf e_2$, $\mathbf e_3$ — линейно независимые ортонормированные векторы.

Р е ш е н и е. Воспользуемся уравнениями Аппеля. Энергия ускорений имеет вид

$$S=\frac{m}{2}\ddot{\mathbf r}^2=\frac{m}{2}(\ddot r_1^2+\ddot r_2^2+\ddot r_3^2).$$

Ускорения $\ddot r_1$ и $\ddot r_2$ удовлетворяют условию

$$\ddot r_1=\dot r_3\dot r_2+r_3\ddot r_2.$$

Следовательно,

$$S=\frac{m}{2}[(\dot r_3\dot r_2+r_3\ddot r_2)^2+\ddot r_2^2+\ddot r_3^2].$$

Ускорения $\ddot r_2$ и $\ddot r_3$ кинематически никак не связаны. Выпишем уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot r_2}=m[r_3(\dot r_3\dot r_2+r_3\ddot r_2)+\ddot r_2]=Q_2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot r_3}=m\ddot r_3=Q_3.$$

Работа активной силы $\mathbf F$ на произвольном виртуальном перемещении выражается равенством

$$A=\mathbf F\cdot\delta\mathbf r=F_1\delta r_1+F_2\delta r_2+F_3\delta r_3.$$

Виртуальные перемещения удовлетворяют уравнению

$$\delta r_1=r_3\,\delta r_2.$$

Отсюда

$$A=(F_1r_3+F_2)\,\delta r_2+F_3\delta r_3.$$

Видим, что обобщенные силы Q_2 и Q_3 выражаются формулами

$$Q_2=F_1r_3+F_2,\quad Q_3=F_3.$$

Полная система уравнений движения, состоящая из уравнений Аппеля и кинематического уравнения, запишется следующим образом:

$$(1+r_3^2)\,\ddot r_2+r_3\dot r_3\dot r_2=\frac{1}{m}(F_1r_3+F_2),\quad \ddot r_3=\frac{1}{m}F_3,\quad \dot r_1=r_3\dot r_2.$$

Первые два уравнения позволяют найти $\dot r_2$, r_3. Третье уравнение определяет r_1.◇

Пример 5.6.2. Две материальные точки M_1 и M_2 (рис. 5.6.1) одинаковой массы m соединены стержнем длины l и пренебрежимо малой массы. Система может двигаться под действием силы тяжести только в

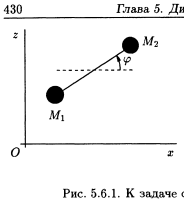


Рис. 5.6.1. К задаче о вертикальном скольжении

Если начальная угловая скорость $\dot\varphi\neq0$, то система не падает вниз под действием силы тяжести. Наличие конька в середине стержня заставляет ее, совершая вращательное движение около некоторого постоянного среднего уровня высоты, горизонтально дрейфовать в положительном направлении, если $\dot\varphi>0$, и в отрицательном, если $\dot\varphi<0$.

вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Определить движение точек M_1 и M_2.

Р е ш е н и е. Указанную в условии систему материальных точек опишем координатами x, z середины стержня и углом φ, образованным отрезком M_1M_2 с горизонтальной осью Ox. Тогда координаты материальных точек M_1 и M_2 выразятся формулами

$$x_1=x-\frac12 l\cos\varphi,\quad x_2=x+\frac12 l\cos\varphi,$$

$$z_1=z-\frac12 l\sin\varphi,\quad z_2=z+\frac12 l\sin\varphi.$$

Запишем уравнение дифференциальной связи:

$$\frac{\dot x}{\cos\varphi}=\frac{\dot z}{\sin\varphi}.$$

По теореме 5.6.2 энергия ускорений S представляется следующим образом

$$S=\frac{2m(\ddot x^2+\ddot z^2)}{2}+\frac{2ml^2}{2\cdot4}\,\ddot\varphi^2+\frac{2ml^2}{2\cdot4}\,\dot\varphi^4.$$

Введем квазискорость $\dot\pi$, положив

$$\dot x=\dot\pi\cos\varphi,\quad \dot z=\dot\pi\sin\varphi.$$

Тогда

$$S=m\ddot\pi^2+\frac{ml^2}{4}\,\ddot\varphi^2+\ldots,$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие ускорений. Определим обобщенные силы. С этой целью выпишем выражение для элементарной работы:

$$A=-2mg\,\delta z=-2mg\sin\varphi\,\delta\pi.$$

Поэтому $Q_\pi=-2mg\sin\varphi$, $Q_\varphi=0$. Уравнения Аппеля принимают вид

$$\ddot\pi=-g\sin\varphi,\quad \ddot\varphi=0.$$

Интегрируя, найдем

$$\varphi=\alpha t+\beta,$$

где α и β — постоянные интегрирования. Следовательно,

$$\frac{d\dot\pi}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\ddot\pi=-\frac{g}{\alpha}\sin\varphi.$$

Поэтому

$$\dot\pi=\frac{g}{\alpha}\cos\varphi+\gamma.$$

Теперь можно найти координаты x и z:

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot x=\frac{1}{\alpha}\dot\pi\cos\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\cos\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot z=\frac{1}{\alpha}\dot\pi\sin\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\gamma}{\alpha}\sin\varphi.$$

Отсюда

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}\varphi+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\sin\varphi+\delta,$$

$$z=\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\cos\varphi+\varepsilon.$$

Учитывая, что $\varphi=\alpha t+\beta$, получаем закон движения, зависящий от пяти произвольных постоянных α, β, γ, δ, ε.

Формулы, выражающие закон $x(t)$, $z(t)$, справедливы, когда $\alpha\neq0$, т.е. когда система имеет ненулевую начальную скорость $\dot\varphi$. В этом случае зависимость $x(\varphi)$ содержит член, линейный по φ. Из-за него центр масс "дрейфует" вдоль оси Ox. По вертикали центр масс колеблется около некоторого постоянного среднего значения координаты z. Вся система, не теряя среднего уровня высоты, смещается в горизонтальном направлении вправо или влево в зависимости от знака угловой скорости α.

Если $\alpha=0$, то угол φ сохраняет постоянное значение, и система скользит вдоль наклонной прямой с угловым коэффициентом $dz/dx=\operatorname{tg}\beta$. При этом можно воспользоваться теорией движения вдоль наклонной плоскости. Квазискорость $\dot\pi$ имеет смысл модуля скорости центра масс.◇

§ 5.7. Общее уравнение теории удара

Рассмотрим систему материальных точек с массами m_ν и радиусами-векторами $\mathbf r_\nu$. Движения точек стеснены связями. По аксиоме об освобождении от связей последние можно заменить реакциями, действующими на точки системы. Пусть $\mathbf R$ означает вектор удара, получающегося как предел импульса реакции (см. § 3.15). Уравнения удара для каждой точки можно записать в виде

$$\Delta(m_\nu\mathbf v_\nu)=\mathbf P_\nu+\mathbf R_\nu,$$

где $\mathbf P_\nu$ — удары активных сил. Следуя Лагранжу, введем понятие связей, идеальных при ударе.

Определение 5.7.1. Связи называются *идеальными при ударе*, если сумма работ ударов реакций связей на любом виртуальном перемещении системы, обусловленном связями, существующими во время удара, равна нулю, то есть

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf R_\nu\cdot\delta\mathbf r_\nu=0.$$

Теорема 5.7.1. *Приращения $\Delta(m_\nu\mathbf v_\nu)$ количеств движения материальных точек системы, подчиненных идеальным при ударе связям, отвечают ударам $\mathbf P_\nu$ тогда и только тогда, когда выполнено общее уравнение теории удара*

$$\sum_{\nu=1}^{N}[\Delta(m_\nu\mathbf v_\nu)-\mathbf P_\nu]\cdot\delta\mathbf r_\nu=0$$

для любого виртуального перемещения системы, определенного связями, существующими во время удара.

Доказательство. Необходимость. Пусть приращения количеств движения точек системы вызваны активными ударами $\mathbf P_\nu$. Это значит, что для каждой точки справедливо уравнение

$$\Delta(m_\nu\mathbf v_\nu)=\mathbf P_\nu+\mathbf R_\nu.$$

Выразив отсюда удары реакций связей и подставив их значения в условие идеальности связей, получим, что для реальных приращений количеств движения справедливо общее уравнение теории удара.

Достаточность. Пусть общее уравнение теории удара выполнено. Тогда оно выделяет единственные значения приращений количеств движения точек системы. Это доказывается аналогично теореме 5.1.1 по методу неопределенных множителей Лагранжа.□

Отметим, что при ударе связи могут как сохраняться, так и не сохраняться. Связь называется сохраняющейся, если она существует во время удара и сохраняется после удара. Связь называется несохраняющейся, если она существует во время удара, но исчезает сразу после удара. Тогда множество виртуальных перемещений, имеющее место после удара, будет отличаться от множества виртуальных перемещений, которое существовало во время удара.

Основные теоремы теории удара касаются изменения количества движения системы, ее кинетического момента и кинетической энергии.

Теорема 5.7.2. *Если среди виртуальных перемещений системы с идеальными связями, существующими во время удара, имеется поступательное перемещение вдоль некоторого направления* $\mathbf{e}$*, то приращение проекции количества движения на это направление равно сумме проекций на то же направление активных ударов, приложенных к точкам системы:*

$$\mathbf{e}\cdot\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{P}_\nu,\quad \mathbf{Q}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\mathbf{v}_\nu.$$

Доказательство. По условию теоремы к множеству виртуальных относится перемещение

$$\delta\mathbf{r}_\nu=\alpha\mathbf{e},\quad \alpha\neq 0,\quad \nu=1,\ldots,N.$$

Подставив его в общее уравнение теории удара, найдем

$$\alpha\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}[\Delta(m_\nu\mathbf{v}_\nu)-\mathbf{P}_\nu]=0.$$

Так как $\alpha\neq 0$, то после очевидных преобразований получаем требуемое утверждение.□

Следствие 5.7.1. *Если связи допускают поступательное виртуальное перемещение системы вдоль любого направления, то приращение из-за удара ее количества движения равно сумме ударов активных сил:*

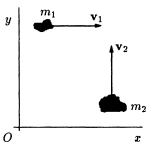
$$\Delta\mathbf{Q}=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{P}_\nu.$$

Приращение количества движения можно интерпретировать как произведение суммарной массы и приращения скорости центра масс системы:

$$\Delta\mathbf{Q}=M\Delta\mathbf{v}_c,\quad M=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu.$$

Следствие 5.7.2. *Если активные удары отсутствуют, то приращение скорости центра масс системы равно нулю.*

Пример 5.7.1. Пусть кусок глины массы m_1, двигаясь горизонтально и поступательно со скоростью $\mathbf{v}_1$, сталкивается и слипается с куском глины массы m_2, движущимся вертикально и поступательно со скоростью $\mathbf{v}_2$ (рис. 5.7.1). Найти скорость центра масс куска глины, получившегося в результате слипания.



При отсутствии внешних ударов скорости центра масс кусков глины до столкновения и после столкновения совпадают. Скорость центра масс как до, так и после удара, равна отношению суммы количеств движения этих кусков к сумме их масс. В результате удара кинетическая энергия системы уменьшится за счет работы внутренних сил.

Рис. 5.7.1. Сохранение скорости центра масс при ударе

Решение. Внешние удары отсутствуют. Скорости центра масс системы $\mathbf{v}_c$ до удара и после удара совпадают. Следовательно, искомая скорость равна

$$\mathbf{v}_c=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2},$$

а ее модуль выражается формулой

$$v_c=\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2}.$$

Получившийся после удара кусок глины не обязательно должен двигаться поступательно.◇

Теорема 5.7.3. *Если среди виртуальных перемещений системы с идеальными существующими во время удара связями имеется дифференциал вращения вокруг некоторого направления* $\mathbf{e}$*, то приращение кинетического момента системы относительно оси с направлением* $\mathbf{e}$ *равно сумме моментов активных ударов относительно этой оси:*

$$\mathbf{e}\cdot\Delta\mathbf{K}=\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{P}_\nu.$$

Доказательство. Виртуальные перемещения, соответствующие дифференциалу вращения вокруг направления $\mathbf{e}$, выражаются формулой

$$\delta\mathbf{r}_\nu=\alpha\,\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu,\quad \alpha\neq 0,\quad \nu=1,\ldots,N.$$

Подставляя эти значения в общее уравнение теории удара, найдем

$$\sum_{\nu=1}^{N}[\Delta(m_\nu\mathbf{v}_\nu)-\mathbf{P}_\nu]\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{r}_\nu)=0.$$

Пользуясь свойствами смешанного произведения, получим

$$\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}[\mathbf{r}_\nu\times\Delta(m_\nu\mathbf{v}_\nu)-\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{P}_\nu]=0.$$

Так как при ударе радиусы-векторы точек системы не изменяются, то $\mathbf{r}_\nu$ можно ввести под знак приращения Δ.□

Следствие 5.7.3. *Если связи допускают дифференциал вращения вокруг любого направления, то приращение вектора кинетического момента из-за удара равно сумме моментов активных ударов:*

$$\Delta\mathbf{K}=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{P}_\nu.$$

Перейдем к теоремам об изменении кинетической энергии при ударе. Пусть помимо активных ударов $\mathbf{P}_\nu$ к системе внезапно приложены дополнительные идеальные связи. Эти связи могут быть как дифференциальными, так и геометрическими, приведенными к дифференциальной форме.

Обозначим $\mathcal{C}'$ множество допустимых скоростей системы с дополнительными связями, а $\mathcal{C}$ — множество допустимых скоростей до удара. Так как при ударе исходная система связей сохраняется и к ней только добавляются новые связи, то $\mathcal{C}'\subset\mathcal{C}$. Обозначим $\mathbf{v}_\nu\in\mathcal{C}$ скорость ν-й точки до удара. Разложим $\mathbf{v}_\nu$ на две составляющие:

$$\mathbf{v}_\nu=\mathbf{a}_\nu+\mathbf{b}_\nu,$$

потребовав, чтобы $\mathbf{b}_\nu\in\mathcal{C}'$, $\mathbf{a}_\nu\perp\mathcal{C}'$. Таким образом, $\mathbf{b}_\nu$ — составляющая скорости, принадлежащая множеству допустимых скоростей $\mathcal{C}'$ системы с дополнительными связями, $\mathbf{a}_\nu$ — ортогональная составляющая к этому множеству (в евклидовой метрике). Аналогично обозначим

$$\mathbf{v}'_\nu=\mathbf{a}'_\nu+\mathbf{b}'_\nu$$

скорость той же точки после удара, причем $\mathbf{b}'_\nu\in\mathcal{C}'$, $\mathbf{a}'_\nu\perp\mathcal{C}'$.

Вновь наложенные связи могут быть как упругими, так и абсолютно неупругими. Если они абсолютно неупругие, то $\mathbf{a}'_\nu=0$. Такие связи могут быть удерживающими и сохраняться после удара. Если же они упругие, то для них будем предполагать выполненной гипотезу Ньютона, которая в рассматриваемом случае приводит к равенствам

$$\mathbf{a}'_\nu=-\varkappa\mathbf{a}_\nu,\quad \mathbf{b}'_\nu=\mathbf{b}_\nu,$$

где $\varkappa$ — коэффициент восстановления (см. § 3.15). Примем его одинаковым для всех точек системы. Другими словами, будучи идеальными, вновь наложенные связи не изменяют составляющую скорости, принадлежащую множеству $\mathcal{C}'$. Изменяется только ортогональная к $\mathcal{C}'$ составляющая скорости.

В соответствии с гипотезой Ньютона будем иметь

$$\mathbf{v}'_\nu+\varkappa\mathbf{v}_\nu=(1+\varkappa)\mathbf{b}\in\mathcal{C}'.$$

Тем самым сумма скорости $\mathbf{v}'_\nu$ произвольной точки системы после удара и скорости той же точки до удара, умноженной на коэффициент восстановления, принадлежит множеству допустимых скоростей с дополнительными связями.

Теорема 5.7.4 (Карно). *Пусть к системе материальных точек с идеальными связями внезапно приложены активные удары* $\mathbf{P}_\nu$ *и идеальные при ударе упругие связи, так что вновь полученная система связей сохраняется при ударе, включает действительное перемещение в множество виртуальных и обладает коэффициентом восстановления* $\varkappa$*. Тогда изменение кинетической энергии системы из-за удара выражается формулой*

$$T-T'=\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu(\Delta\mathbf{v}_\nu)^2}{2}-\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{P}_\nu\cdot\mathbf{b}_\nu,$$

где T, T' *— кинетическая энергия системы соответственно до и после удара,* $\Delta\mathbf{v}_\nu=\mathbf{v}'_\nu-\mathbf{v}_\nu$ *— скорость, потерянная* ν*-й точкой при ударе.*

Доказательство. Так как исходная система связей вместе с добавившимися позволяет включить действительное перемещение в множество виртуальных (определение 4.6.2), то мы можем принять

$$\delta\mathbf{r}_\nu=\alpha(\mathbf{v}'_\nu+\varkappa\mathbf{v}_\nu),\quad \alpha\neq 0.$$

Из общего уравнения теории удара получим

$$\sum_{\nu=1}^{N}[\Delta(m_\nu\mathbf{v}_\nu)-\mathbf{P}_\nu]\cdot(\mathbf{v}'_\nu+\varkappa\mathbf{v}_\nu)=0$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\mathbf{v}'_\nu-\mathbf{v}_\nu)\cdot(\mathbf{v}'_\nu+\varkappa\mathbf{v}_\nu)=\sum_{\nu=1}^{N}(1+\varkappa)\mathbf{P}_\nu\cdot\mathbf{b}_\nu.$$

Сделаем преобразование

$$\mathbf{v}'_\nu=\frac{1}{2}(\mathbf{v}'_\nu-\mathbf{v}_\nu)+\frac{1}{2}\mathbf{v}'_\nu+\frac{1}{2}\mathbf{v}_\nu,\quad \mathbf{v}_\nu=\frac{1}{2}(\mathbf{v}_\nu-\mathbf{v}'_\nu)+\frac{1}{2}\mathbf{v}'_\nu+\frac{1}{2}\mathbf{v}_\nu.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\mathbf{v}'_\nu-\mathbf{v}_\nu)\cdot\mathbf{v}'_\nu=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\Delta\mathbf{v}_\nu)^2+T'-T,$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\mathbf{v}'_\nu-\mathbf{v}_\nu)\cdot\mathbf{v}_\nu=-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\Delta\mathbf{v}_\nu)^2+T'-T.$$

Отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\mathbf{v}'_\nu-\mathbf{v}_\nu)\cdot(\mathbf{v}'_\nu+\varkappa\mathbf{v}_\nu)=(1+\varkappa)(T'-T)+(1-\varkappa)\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu(\Delta\mathbf{v}_\nu)^2.$$□

Следствие 5.7.4. *Пусть активные удары не действуют:* $\mathbf{P}_\nu=0$*. Тогда разность между кинетической энергией системы до удара и после него выражается равенством*

$$T-T'=\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu(\Delta\mathbf{v}_\nu)^2}{2}.$$

Напомним (см. § 3.15), что коэффициент восстановления удовлетворяет неравенству $0\leq\varkappa\leq 1$. Поэтому при ударе, возникающем вследствие наложения на систему новых связей, кинетическая энергия не может возрастать. Когда удар абсолютно упругий: $\varkappa=1$, кинетическая энергия сохраняется.

Следствие 5.7.5. *Пусть на систему внезапно накладываются дополнительные связи так, что вновь полученная совокупность связей оказывается удерживающей, идеальной и в момент удара включает действительное перемещение в множество виртуальных. То-*

гда потеря кинетической энергии системы из-за удара равна кинетической энергии потерянных скоростей:

$$T-T'=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu(\Delta\mathbf{v}_\nu)^2}{2}.$$

Доказательство. Если связи после удара удерживающие, то тогда составляющая $\mathbf{a}_\nu$ скорости после удара, перпендикулярная множеству $\mathcal{C}'$ допустимых скоростей, должна быть равна нулю. Значит, для всех точек системы следует принять $\varkappa=0$ (удар абсолютно неупругий). Теперь доказываемое утверждение есть прямое следствие теоремы 5.7.4 при отсутствии активных ударов.□

Пример 5.7.2. При попадании пули в баллистический маятник (см. пример 5.1.4) возникает удар из-за внезапного наложения удерживающих связей. В результате пуля остается в маятнике, и ее скорость вместе с маятником составляет

$$v'=\frac{m}{M+m}v,$$

где m — масса пули, M — масса контейнера с песком, v — скорость пули до удара. Все скорости (см. рис. 5.1.2) ориентированы горизонтально. Потерянные скорости контейнера $\Delta v_\text{к}$ и пули $\Delta v_\text{п}$ выражаются формулами

$$\Delta v_\text{к}=\frac{m}{M+m}v,\quad \Delta v_\text{п}=\frac{m}{M+m}v-v=-\frac{M}{M+m}v.$$

Применим следствие 5.7.5:

$$T-T'=\frac{1}{2}[M(\Delta v_\text{к})^2+m(\Delta v_\text{п})^2]=\frac{1}{2}\,\frac{mMv^2}{M+m}.$$

С другой стороны, непосредственный подсчет значений кинетической энергии до и после удара показывает (см. пример 5.1.4)

$$T-T'=\frac{mv^2}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{m^2v^2}{M+m}=\frac{1}{2}\,\frac{mMv^2}{M+m}.$$

Совпадение результатов свидетельствует, что даже в такой достаточно сложной динамической системе, как баллистический маятник, связи можно считать идеальными при ударе.◇

Контрольные вопросы к главе 5

5.1. Указать различие между даламберовыми силами инерции и силами инерции, возникающими из-за движения системы отсчета.

5.2. Решить пример 5.0.1 с помощью принципа Даламбера-Лагранжа.

5.3. Составить для системы примера 5.0.1 уравнения Лапранжа 1-го рода. Как из них получить уравнение, найденное в решении примера 5.0.1?

5.4. Доказать, что для внутренних сил выполнены равенства

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu^{(i)}=0,\quad \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu^{(i)}=0.$$

5.5. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит треугольная призма массы M и высоты h. С верхней точки призмы по прямой длины l без скольжения по призме скатывается круговой обруч массы m и радиуса R. На сколько сместится призма, когда обруч достигнет горизонтальной плоскости?

5.6. Что можно сказать о движении центра масс системы в задаче двух тел (см. § 3.11)? Тот же вопрос для задачи n тел.

5.7. Граната была брошена под углом к горизонту с некоторой начальной скоростью. Во время полета она взорвалась. Как будет двигаться после этого центр масс образовавшейся системы материальных точек?

5.8. Что можно сказать о кинетическом моменте системы в задаче двух тел? Тот же вопрос для задачи n тел. Какие геометрические особенности движения следуют из свойств кинетического момента в этих задачах?

5.9. Человек сидит на табуретке, способной вращаться без трения вокруг вертикали, и держит в руках велосипедное колесо. В начальный момент времени система покоится. Затем человек раскручивает колесо и держит его так, что плоскость вращающегося колеса горизонтальна. Как будет двигаться система в целом и отдельные ее составляющие, включая человека и табуретку?

5.10. Подсчитать работу внутренних сил при подъеме человека по лестнице в условиях примера 5.1.6.

5.11. Какие силы (активные, пассивные, внутренние, внешние) способны изменить

a) количество движения,

b) кинетический момент,

c) кинетическую энергию

механической системы?

5.12. Какие силы должны иметь силовую функцию, чтобы мог существовать интеграл энергии?

5.13. Доказать, что для однородной функции степени s:

$$f(\lambda\mathbf{r}_1,\ldots,\lambda\mathbf{r}_N)=\lambda^s f(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$$

справедлива формула

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}_\nu}\cdot\mathbf{r}_\nu=sf.$$

5.14. Найти вириал Клаузиуса для газа, заключенного в сферический сосуд. Молекулы газа взаимодействуют друг с другом по закону всемирного тяготения и испытывают абсолютно упругие удары при столкновении со стенками сосуда.

5.15. Обруч радиуса R скатывается без начальной скорости с наклонной плоскости. Центр обруча в начальный момент времени имеет высоту H над горизонтальной плоскостью. Какую скорость приобретет центр обруча при достижении обручем горизонтальной плоскости?

5.16. В примере 5.2.2 исследовать возможность создания равновесия в наклонном положении стержня ниже точки опоры. Будет ли тогда искусственное равновесие устойчивым?

5.17. Доказать, что если действительное перемещение относительно осей Кёнига принадлежит множеству виртуальных, то справедливо равенство

$$dT^*=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot d\mathbf{r}'_\nu,$$

где T^* — кинетическая энергия относительно осей Кёнига, а $d\mathbf{r}'_\nu=\mathbf{v}'_\nu dt$ — действительные перемещения точек относительно осей Кёнига.

5.18. Пусть подвижная точка A теоремы 5.2.4 совпадает с центром масс системы. Показать, что тогда $\mathbf{K}_A=\mathbf{K}^*$, так что теорема 5.2.4 по смыслу совпадает со следствием 5.2.2.

5.19. Пусть труба имеет по всей длине круговое поперечное сечение площади S, а осевая линия трубы образует произвольную плоскую кривую без самопересечений. Входное и выходное отверстия параллельны. Скорости входящего и выходящего потоков плотности ρ перпендикулярны сечению трубы и по величине равны v. Течение стационарное. Найти дополнительную силу, действующую на трубу со стороны потока. Указать все решения задачи.

5.20. Относительная скорость струи газов двигателя ракеты есть постоянный вектор $\mathbf{u}_0$. Запас топлива составляет 10% первоначальной массы ракеты. Начальная скорость центра масс ракеты $\mathbf{v}_0$. Внешние силы отсутствуют. Как следует направить $\mathbf{u}_0$, чтобы получить максимальный угол поворота вектора скорости центра масс при выгорании топлива?

5.21. По наклонной плоскости призмы, находящейся на гладкой горизонтальной опорной плоскости, соскальзывают без трения n материальных точек массы m каждая через равные интервалы времени Δt из состояния относительного покоя. Первоначально все точки находились на призме на высоте h над опорой и вся система имела массу M. Найти скорость призмы в тот момент, когда последняя материальная точка покинет призму.

5.22. Для системы примера 5.3.2 вывести уравнение изменения кинетической энергии из уравнения изменения количества движения. С помощью теоремы 5.3.5 объяснить происхождение слагаемых, отличных от мощности силы тяжести.

5.23. Пусть материальная точка массы m вынуждена двигаться по абсолютно гладкой плоскости. С помощью принципа Гаусса найти ускорение точки под действием силы $\mathbf{F}$ не параллельной плоскости. Дать геометрическую интерпретацию решения.

5.24. Получить все соотношения, связанные с процедурой введения квазикоординат, для случая линейных дифференциальных связей.

5.25. Составить полную систему уравнений движения, включающую уравнения Аппеля и кинематические уравнения, для материальной точки, движущейся под действием активной силы $\mathbf{F}$ и дифференциальной связи

$$\dot r_1^2+\dot r_2^2+\dot r_3^2=v^2,$$

где v — постоянная величина, r_1, r_2, r_3 — декартовы координаты точки.

5.26. Получить закон движения системы примера 5.6.2 для случая, когда начальное значение угловой скорости стержня равно нулю.

5.27. Указать, какое множество виртуальных перемещений следует учитывать в основном уравнении теории удара:

a) множество виртуальных перемещений до удара,

b) множество виртуальных перемещений после удара,

c) множество виртуальных перемещений во время удара.

5.28. В примере 5.7.1 убедиться в сохранении кинетического момента системы до и после удара.

5.29. В примере 5.7.1 подсчитать разность кинетических энергий системы до и после удара. Сопоставить результат со следствием 5.7.4.

Глава 6

Динамика твердого тела

Абсолютно твердое тело представляет собой множество точек, расстояния между которыми не изменяются. В силу специфики связей движение такой системы полностью описывается теоремами об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии. Поэтому свойства движения, выделяемые этими теоремами, проявляются в динамике твердого тела особенно выпукло.

Потребность в изучении свойств движений твердых тел зародилась в глубокой древности. Практически любая техническая конструкция включает элементы, которые в нормальных условиях их работы близки по своим свойствам к абсолютно твердому телу. Задачи баллистики пушечных ядер, снарядов, ракет, спутников планет на определенных этапах исследования могут рассматриваться как задачи о движении абсолютно твердого тела. Такие же задачи возникают при создании высокоточных измерительных приборов, механизмов и машин. Из сказанного ясно, что теория движения абсолютно твердого тела весьма обширна и имеет многочисленные практические приложения. Здесь мы ограничимся лишь основами этой теории, включающими общую математическую постановку проблемы и традиционные методы решения типичных задач.

§ 6.1. Динамические характеристики твердого тела

Пусть $Oe_1e_2e_3$ — абсолютный репер, $Ae'_1e'_2e'_3$ — репер, имеющий начало в произвольной точке A абсолютно твердого тела и жестко с ним связанный, $Ae_1e_2e_3$ — репер, имеющий начало в точке A и сохраняющий ориентацию абсолютных базисных векторов.

Аксиома 6.1.1. *Количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела могут быть получены интегрированием по объему твердого тела в предположении, что каждый элемент объема движется как материальная точка.*

Эвристическое основание для принятия такой аксиомы образуют следующие положения.

1. Поле скоростей точек твердого тела имеет винтовую структуру (см. § 2.13).

2. Когда размеры элемента материального объема малы по сравнению с его расстоянием до оси мгновенного винта, то скорости всех точек этого элемента мало отличаются друг от друга, и движение этого элемента близко к поступательному (теорема 2.14.2).

3. Исключение из правила п.2 составляют лишь элементы, пересечение которых с осью винта не пусто. Но при уменьшении размеров всех элементов сумма масс элементов, расположенных на оси винта, стремится к нулю и в пределе не влияет на результат суммирования.

Рассмотрим некоторый элемент твердого тела, имеющий массу m_ν. Обозначим его радиус-вектор в абсолютном репере $\mathbf{r}_\nu$, а в репере, жестко связанном с телом, — $\mathbf{r}'_\nu$. Радиус-вектор начала A подвижного репера, проведенный из точки O, обозначим $\mathbf{r}_A$. Все указанные векторы связаны равенством

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}'_\nu.$$

По теореме 2.12.1 Эйлера о поле скоростей твердого тела заключаем, что скорость $\mathbf{v}_\nu$ любого элемента, не пересекающегося с осью вращения, может быть найдена, если даны поступательная скорость $\mathbf{v}_A$ тела вместе с точкой A и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_\nu.$$

Векторы $\mathbf{v}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ можно задать по отношению как к абсолютному, так и к подвижному реперам. Соответственно этому и основные динамические величины (количество движения $\mathbf{Q}$, кинетический момент $\mathbf{K}$, кинетическая энергия T) можно отнести и к абсолютному, и к подвижному реперам.

Теорема 6.1.1. *Количество движения $\mathbf{Q}$ абсолютно твердого тела выражается формулой*

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_c = M(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c),$$

где

$$\mathbf{r}'_c = \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r}'\,dm$$

есть радиус-вектор центра масс тела относительно точки A, M — масса тела, V — его объем.

Доказательство. Скорость центра масс системы материальных точек, составленной из элементов m_ν, выражается формулой

$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \frac{1}{M}\left[\mathbf{v}_A \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu\right].$$

Для завершения доказательства достаточно перейти к пределу при $\max\limits_\nu m_\nu \to 0$.□

Теорема 6.1.2. *Кинетический момент $\mathbf{K}_A$ твердого тела, взятый относительно начала A подвижного репера, выражается формулой*

$$\mathbf{K}_A = M\mathbf{r}'_c \times \mathbf{v}_A + \mathbf{J}_A\,\boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{J}_A$ — оператор инерции тела, взятый в точке A.

Доказательство. Рассмотрим систему материальных точек, составленную из интегральных элементов m_ν. Ее кинетический момент выразится равенством

$$\mathbf{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu.$$

Подставив сюда значение скорости $\mathbf{v}_\nu$, найдем

$$\mathbf{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_\nu) = M\mathbf{r}'_c \times \mathbf{v}_A + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_\nu).$$

Но согласно определению § 1.8 последнее слагаемое есть оператор инерции системы материальных точек из элементов m_ν, взятый в точке A и примененный к вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Переходя к пределу при $\max\limits_\nu m_\nu \to 0$, получаем требуемое утверждение.□

Замечание 6.1.1. В случае сплошного абсолютно твердого тела компоненты тензора инерции определяются интегральными формулами

$$J_{ii} = \int_V [(\mathbf{r}')^2 - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_i)^2]\,dm,\ J_{ij} = -\int_V (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_i)(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_j)\,dm,\ i,j = 1,2,3,\ i \neq j.$$

Или более подробно

$$J_{11} = \int_V [(r'_2)^2 + (r'_3)^2]\,dm, \qquad J_{22} = \int_V [(r'_1)^2 + (r'_3)^2]\,dm,$$

$$J_{33} = \int_V [(r'_1)^2 + (r'_2)^2]\,dm, \qquad J_{12} = -\int_V r'_1 r'_2\,dm,$$

$$J_{13} = -\int_V r'_1 r'_3\,dm, \qquad J_{23} = -\int_V r'_2 r'_3\,dm,$$

где V — объем, занимаемый телом.

Замечание 6.1.2. Обратившись к доказательству теоремы 5.2.4, найдем формулу, связывающую кинетический момент $\mathbf{K}_O$, взятый относительно точки O, с кинетическим моментом $\mathbf{K}_A$:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}_A.$$

Теорема 6.1.3. *Кинетическая энергия T абсолютно твердого тела выражается формулой*

$$T = \frac{1}{2}Mv_A^2 + M\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) + \frac{1}{2}I_\omega\,\omega^2,$$

где I_ω — момент инерции относительно оси, параллельной вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и проходящей через точку A.

Доказательство. Для системы материальных точек, состоящей из элементов m_ν, будем иметь

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2.$$

Подставив сюда значение скорости $\mathbf{v}_\nu$, получим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_A^2 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_\nu) + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_\nu)^2.$$

Согласно § 1.8 последнее слагаемое есть момент инерции рассматриваемой системы материальных точек относительно оси, параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$ и проходящей через точку A, умноженный на квадрат угловой скорости. Переходя к пределу при $\max\limits_\nu m_\nu \to 0$, получим требуемое утверждение.□

Замечание 6.1.3. Если точка A совпадает с центром масс C тела, то формула для расчета кинетической энергии упрощается:

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_\omega\,\omega^2.$$

Следствие 6.1.1. *С использованием оператора инерции формула для расчета кинетической энергии принимает вид*

$$T = \frac{1}{2}Mv_A^2 + M\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_A\,\boldsymbol{\omega}.$$

Доказательство. Возьмем единичный вектор $\mathbf{e}_\omega$, параллельный вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. По определению оператора инерции $\mathbf{J}_A$ (см. § 1.8) момент инерции I_ω относительно оси, проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор $\mathbf{e}_\omega$, выражается формулой

$$I_\omega = \mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{J}_A\,\mathbf{e}_\omega.$$

Осталось подставить это выражение в формулу теоремы 6.1.3. □

Следствие 6.1.2. *Справедливы соотношения*

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}_A} T = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A} = \mathbf{Q}, \quad \operatorname{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{K}_A.$$

Другими словами, градиент кинетической энергии по вектору $\mathbf{v}_A$ скорости точки A равен количеству движения твердого тела, а градиент кинетической энергии по вектору $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости равен кинетическому моменту тела относительно точки A.

Доказательство получается дифференцированием выражения для кинетической энергии в следствии 6.1.1. Действительно,

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A} = M\mathbf{v}_A + M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_c) = M\mathbf{v}_c = \mathbf{Q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = M(\mathbf{r}'_c \times \mathbf{v}_A) + \mathbf{J}_A\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K}_A.$$□

Следствие 6.1.3. *Так как по переменным $\mathbf{v}_A$ и $\boldsymbol{\omega}$ кинетическая энергия представляет собой квадратичную форму, то*

$$2T = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_A.$$

Компоненты угловой скорости в общем случае могут не быть производными по времени от каких-либо координат, определяющих угловое положение твердого тела относительно репера $Ae_1e_2e_3$. Тогда эти компоненты следует рассматривать как квазискорости и указать их связь с производными по времени от выбранных угловых координат. Пусть, например, это будут углы Эйлера (см. § 2.15). Кинематические уравнения Эйлера можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_\varphi\,\dot{\varphi} + \mathbf{e}_\psi\,\dot{\psi} + \mathbf{e}_\vartheta\,\dot{\vartheta},$$

где $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_\vartheta$ — единичные векторы осей, вдоль которых направлены угловые скорости собственного вращения, прецессии и нутации.

Следствие 6.1.4. *Частные производные от кинетической энергии по угловым скоростям собственного вращения, прецессии и нутации равны проекциям кинетического момента на соответствующие направления:*

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{e}_\psi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{e}_\vartheta.$$

Доказательство.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\psi}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\vartheta}}.$$

Осталось воспользоваться следствием 6.1.2 и разложением угловой скорости по направлениям элементарных поворотов.□

§ 6.2. Уравнения движения твердого тела

Абсолютно твердое тело, не стесненное связями, имеет шесть степеней свободы, поскольку возможны поступательные перемещения тела вместе с точкой A по любым трем независимым направлениям в пространстве и, кроме того, возможны произвольные вращения твердого тела вокруг точки A, принадлежащие группе SO(3) (см. § 2.4). Таким образом, имеется ровно шесть независимых параметров, определяющих пространство допустимых скоростей точек тела. Для этих параметров (квазискоростей) можно составить шесть уравнений динамики в форме уравнений Аппеля (см. § 5.6). Вместе с тем отметим, что и общие теоремы динамики об изменении количества движения (теорема 5.1.3) и об изменении кинетического момента (теорема 5.1.5) также дают шесть дифференциальных уравнений движения. Для простоты изложения воспользуемся этими теоремами.

В системе уравнений движения выделяются две группы: три уравнения поступательного движения тела вместе с точкой A и три уравнения движения тела вокруг точки A. Если рассматривать кинетический момент тела относительно неподвижной точки O, то указанные группы уравнений движения примут вид

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{K}}_O = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu, \quad \mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu,$$

где $\mathbf{F}$ — сумма всех сил, действующих на тело, исключая реакции внутренних связей самого тела.

Первое векторное уравнение выражает изменение количества движения $\mathbf{Q}$ тела и определяет поступательное движение тела вместе с

точкой A. Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям в проекциях на направления базисных векторов.

Часто бывает удобнее рассматривать кинетический момент относительно подвижной точки A, и тогда по теореме 5.2.4 имеем уравнения движения

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{K}}_A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu.$$

Если в качестве базисного принять репер $Ae'_1e'_2e'_3$, жестко связанный с телом, то по теореме 2.16.1 об относительной производной найдем

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{Q}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} = \mathbf{F}, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{K}_A}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu.$$

Мы можем воспользоваться также следствием 6.1.2 и представить уравнения движения в следующем виде:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A} = \mathbf{F}, \quad \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{v}_A \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu.$$

Чтобы определить закон движения, систему уравнений, составленную с помощью теорем об изменении количества движения и кинетического момента, необходимо дополнить кинематическими уравнениями. Например, это могут быть уравнения, связывающие радиус-вектор точки A и ее скорость, и уравнения Эйлера:

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{v}_A, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_\varphi\,\dot{\varphi} + \mathbf{e}_\psi\,\dot{\psi} + \mathbf{e}_\vartheta\,\dot{\vartheta},$$

где векторы $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_\vartheta$ даются выражениями (см. § 2.15)

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}'_3,$$
$$\mathbf{e}_\psi = \mathbf{e}'_1 \sin\vartheta \sin\varphi + \mathbf{e}'_2 \sin\vartheta \cos\varphi + \mathbf{e}'_3 \cos\vartheta,$$
$$\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}'_1 \cos\varphi - \mathbf{e}'_2 \sin\varphi.$$

Кинематические уравнения Эйлера следует разрешить относительно производных от угловых координат. Выполнив это, получим

$$\dot{\vartheta} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_\vartheta,$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin\vartheta}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}'_1 \sin\varphi + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}'_2 \cos\varphi),$$

$$\dot{\varphi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}'_3 - \dot{\psi}\cos\varphi.$$

Такие уравнения не всегда удобны из-за их вырождения при $\vartheta = 0$. Свободны от вырождения кинематические уравнения Пуассона, выражающие неподвижность направляющих векторов абсолютного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (см. § 2.15):

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{e}_i}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3.$$

Имеем девять дифференциальных уравнений в проекциях на оси репера, связанного с телом, т.е. значительно больше, чем это было необходимо для получения закона движения при использовании углов Эйлера. Уравнения Пуассона структурно просты, единообразны и включают только операции типа умножения и сложения[1].

Другая группа свободных от вырождения кинематических уравнений получается с помощью кватернионов (см. § 2.15):

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h}_\Omega \circ \mathbf{h}/2 = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_\omega/2.$$

Отсюда находим четыре скалярных действительных уравнения. Эти уравнения столь же просты, как и уравнения Пуассона[2].

Каждый тип системы кинематических уравнений имеет свои достоинства и недостатки. Удобство использования того или иного типа зависит от специфики конкретной задачи. Соответствующие примеры будут рассмотрены в дальнейшем.

В некоторых случаях удобно выражать кинетическую энергию не с помощью квазикоординат, а непосредственно через производные от координат по времени. Тогда уравнения движения можно привести к специальной стандартной форме. Для конкретности обратимся к угловым координатам Эйлера φ, ψ, ϑ. В этом случае имеем шесть координат, задающих положение тела в пространстве (лагранжевых координат, однозначно определяющих конфигурацию системы):

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = (r_{A1}, r_{A2}, r_{A3}, \varphi, \psi, \vartheta),$$

где первые три координаты суть коэффициенты разложения радиуса-вектора точки A по векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ абсолютного репера.

Сначала умножим уравнение изменения количества движения на единичные векторы $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A}\right) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}, \quad i = 1,2,3.$$

[1] При численном интегрировании уравнений Пуассона накопление вычислительных погрешностей нарушает взаимную ортогональность базисных векторов, и они перестают быть единичными.

[2] В уравнениях для кватернионов из-за численных ошибок может нарушаться лишь обязательное требование единичной нормы кватерниона.

Символ d/dt означает вычисление абсолютной скорости конца вектора. Так как векторы $\mathbf{e}_i$ постоянны, то их можно внести под знак дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_A}\right)=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{F},\quad i=1,2,3.$$

В итоге получаем следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{Ai}}\right)=\mathbf{F}_i,\quad i=1,2,3.$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение уравнения изменения кинетического момента на вектор $\mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\mathbf{e}_\varphi\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\mathbf{e}_\varphi\cdot\left(\mathbf{v}_A\times\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\right)=M_\varphi,$$

где для краткости обозначено

$$M_\varphi=\mathbf{e}_\varphi\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu.$$

Вектор $\mathbf{e}_\varphi$ совпадает с $\mathbf{e}'_3$. Поэтому

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{e}_\varphi=0.$$

Учтем это и, кроме того, воспользуемся свойствами смешанного произведения:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{e}_\varphi\right)-\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\varphi)-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\cdot(\mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\varphi)=M_\varphi.$$

Можно проверить, что в репере, связанном с телом, справедливы выражения

$$\mathbf{e}_\varphi=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\varphi},\quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\varphi=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\varphi},\quad \mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\varphi=\frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\varphi}.$$

Следовательно, будет верным соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\varphi}-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\varphi}=M_\varphi,$$

или более кратко

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=M_\varphi.$$

Аналогично рассмотрим уравнение

$$\mathbf{e}_\psi\cdot\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\mathbf{e}_\psi\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\mathbf{e}_\psi\cdot\left(\mathbf{v}_A\times\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\right)=M_\psi,$$

где

$$M_\psi=\mathbf{e}_\psi\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu.$$

Или

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{e}_\psi\right)-\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{e}_\psi+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\psi\right)-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\cdot(\mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\psi)=M_\psi.$$

Справедливы формулы

$$\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{e}_\psi=\frac{\partial T}{\partial\dot\psi},\quad \frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{e}_\psi+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\psi=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\psi}=0,\quad \mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\psi=\frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\dot\psi},$$

с учетом которых проекция уравнения изменения кинетического момента на направление $\mathbf{e}_\psi$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right)-\frac{\partial T}{\partial\psi}=M_\psi.$$

Спроектируем теперь уравнение изменения кинетического момента на направление $\mathbf{e}_\vartheta$:

$$\mathbf{e}_\vartheta\cdot\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\mathbf{e}_\vartheta\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)+\mathbf{e}_\vartheta\cdot\left(\mathbf{v}_A\times\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\right)=M_\vartheta,$$

где

$$M_\vartheta=\mathbf{e}_\vartheta\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu.$$

Отсюда

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{e}_\vartheta\right)-\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{e}_\vartheta+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\vartheta\right)-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{v}_A}\cdot(\mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\vartheta)=M_\vartheta.$$

Можно убедиться, что

$$\frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{e}_\vartheta=\frac{\partial T}{\partial\dot\vartheta},\quad \frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{e}_\vartheta+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\vartheta=\mathbf{e}_\psi\times\mathbf{e}_\vartheta\,\dot\psi=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\vartheta},\quad \mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\vartheta=\frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\dot\vartheta}.$$

Поэтому проекция уравнения изменения кинетического момента на направление $\mathbf{e}_\vartheta$ представляется в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\vartheta}\right)-\frac{\partial T}{\partial\vartheta}=M_\vartheta.$$

Таким образом, мы нашли шесть уравнений движения, которые имеют совершенно одинаковую запись:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,\dots,6.$$

Обобщенные силы Q_i (определение 4.7.3) выражаются формулами

$$Q_i=\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_A}{\partial q_i}=\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_A}{\partial r_{Ai}},\quad i=1,2,3,$$

$$Q_4=M_\varphi=\mathbf{e}_\varphi\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot(\mathbf{e}_\varphi\times\mathbf{r}'_\nu)=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial\varphi},$$

$$Q_5=M_\psi=\mathbf{e}_\psi\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial\psi},$$

$$Q_6=M_\vartheta=\mathbf{e}_\vartheta\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial\vartheta}.$$

Полученная система уравнений движения носит название *системы уравнений Лагранжа второго рода*. В дальнейшем будет показано, что к такой форме приводятся дифференциальные уравнения для лагранжевых координат произвольной голономной системы материальных точек. В случае движения абсолютно твердого тела первые три обобщенные силы имеют смысл проекций суммарной силы на оси абсолютного репера, а последние три — моментов сил относительно осей $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_\vartheta$ соответственно.

§ 6.3. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Пусть две точки A и A' твердого тела закреплены неподвижно в абсолютном пространстве. Прямая AA', определенная единичным вектором $\mathbf{e}'_3$, остается неподвижной во все время движения по отношению как к самому твердому телу, так и к абсолютному реперу.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси AA', так что $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{e}'_3$. В точке A назначим два других связанных с телом единичных базисных вектора $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ так, чтобы они были перпендикулярны друг к другу, к вектору $\mathbf{e}'_3$ и образовывали правую тройку. Оператор инерции $\mathbf{J}_A$ в репере $Ae'_1e'_2e'_3$ представим постоянной матрицей

$$J_A=\begin{pmatrix}J_{11}&J_{12}&J_{13}\\J_{21}&J_{22}&J_{23}\\J_{31}&J_{32}&J_{33}\end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться уравнениями движения, полученными в § 6.2, освободим твердое тело от связей, введя реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ неподвижной оси в точках A и A' соответственно, препятствующие смещению этих точек. Радиус-вектор точки A' обозначим

$$\mathbf{r}'=a\mathbf{e}'_3,$$

где a — расстояние между точками A и A'.

В соответствии с определением 5.1.1 количество движения тела запишем в виде

$$\mathbf{Q}=M\mathbf{v}_c,$$

где $\mathbf{v}_c$ — скорость центра масс C, выражаемая равенством

$$\mathbf{v}_c=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_c=\omega(\mathbf{e}'_3\times\mathbf{r}'_c).$$

Центр масс совпадает с некоторой точкой, фиксированной в твердом теле и имеющей радиус-вектор $\mathbf{r}'_c$ с началом в точке A. Поэтому для вычисления абсолютного ускорения центра масс можно воспользоваться теоремой 2.16.3 Ривальса:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_c=\dot\omega(\mathbf{e}'_3\times\mathbf{r}'_c)+\omega^2[\mathbf{e}'_3\times(\mathbf{e}'_3\times\mathbf{r}'_c)]=\dot\omega(\mathbf{e}'_3\times\mathbf{r}'_c)+\omega^2[\mathbf{e}'_3(\mathbf{e}'_3\cdot\mathbf{r}'_c)-\mathbf{r}'_c].$$

Чтобы найти кинетический момент тела, применим оператор инерции $\mathbf{J}_A$ к вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Тогда получим

$$\mathbf{K}_A=\mathbf{J}_A\boldsymbol{\omega}=\omega(J_{13}\mathbf{e}'_1+J_{23}\mathbf{e}'_2+J_{33}\mathbf{e}'_3).$$

Векторное произведение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_A$ примет вид

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_A=\omega^2(J_{13}\mathbf{e}'_3\times\mathbf{e}'_1+J_{23}\mathbf{e}'_3\times\mathbf{e}'_2)=\omega^2(J_{13}\mathbf{e}'_2-J_{23}\mathbf{e}'_1).$$

Рассмотрим проекции уравнений количества движения и кинетического момента на базисные векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{e}'_i\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\mathbf{e}'_i\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{R}+\mathbf{R}'),\quad i=1,2,3,$$

$$\mathbf{e}'_i\cdot\left(\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{K}_A+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_A\right)=\mathbf{e}'_i\cdot(\mathbf{M}+\mathbf{r}'\times\mathbf{R}'),\quad i=1,2,3,$$

где

$$\mathbf{M}=\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}'_\nu\times\mathbf{F}_\nu$$

есть суммарный момент относительно точки A всех активных сил, приложенных к телу. Воспользовавшись разложением

$$\mathbf{r}'_c=r_{c1}\mathbf{e}'_1+r_{c2}\mathbf{e}'_2+r_{c3}\mathbf{e}'_3$$

и выполнив необходимые операции, получим шесть уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$\begin{aligned}
-(\dot\omega r'_{c2}+\omega^2r'_{c1})M&=F_1+R_1+R'_1,\\
(\dot\omega r'_{c1}-\omega^2r'_{c2})M&=F_2+R_2+R'_2,\\
0&=F_3+R_3+R'_3,\\
\dot\omega J_{13}-\omega^2J_{23}&=M_1-aR'_2,\\
\dot\omega J_{23}+\omega^2J_{13}&=M_2+aR'_1,\\
\dot\omega J_{33}&=M_3.
\end{aligned}$$

Чтобы определить закон движения, к этим уравнениям следует добавить кинематическое уравнение (см. § 2.12)

$$\frac{d\alpha}{dt}=\omega,$$

выражающее связь между углом α поворота тела вокруг оси и величиной его угловой скорости.

Проанализируем полученную систему дифференциальных уравнений. В ней два уравнения

$$\frac{d\alpha}{dt}=\omega,\quad \dot\omega J_{33}=M_3$$

при заданных начальных условиях полностью определяют закон $\alpha(t)$ движения твердого тела. Уравнение, выражающее угловое ускорение, есть следствие теоремы 5.1.4 и потому не содержит неизвестных реакций в точках A и A' закрепления оси. Остальные пять уравнений служат для вычисления реакций $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$. Однако видно, что полный набор всех составляющих реакций найти невозможно. Составляющие R_3 и R'_3 вместе препятствуют поступательному перемещению тела вдоль направления $\mathbf{e}'_3$, и их нельзя определить по отдельности, а можно найти лишь их сумму. Относительно поиска этих реакций имеем статически неопределимую задачу. Остальные составляющие

$$R_1,\quad R_2,\quad R'_1,\quad R'_2$$

вычисляются однозначно, так как левые части соответствующих уравнений движения представляют собой известные функции времени, когда найдена зависимость $\omega=\omega(t)$.

Теорема 6.3.1. *Если ось вращения служит главной и центральной осью инерции тела, то уравнения для определения реакций R_1, R_2, R'_1, R'_2 совпадают с уравнениями, получающимися из условий равновесия твердого тела.*

Доказательство. Поскольку ось вращения есть главная ось инерции, то вектор $\mathbf{e}'_3$ (см. § 1.9) должен быть собственным для оператора инерции $\mathbf{J}_A$, а значит, должно быть $J_{13}=J_{23}=0$. Так как ось центральная, то $r'_{c1}=r'_{c2}=0$. Система, составленная из первых двух, четвертого и пятого уравнений движения, примет вид

$$\begin{aligned}
F_1+R_1+R'_1&=0,\quad M_1-aR'_2=0,\\
F_2+R_2+R'_2&=0,\quad M_2+aR'_1=0.
\end{aligned}$$

Выпишем уравнения равновесия твердого тела (см. теорему 4.8.1):

$$\mathbf{F}+\mathbf{R}+\mathbf{R}'=0,\quad \mathbf{M}+\mathbf{r}'\times\mathbf{R}'=0.$$

Осталось умножить скалярно эти уравнения на векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$.□

Следствие 6.3.1. *Если неподвижная ось тела служит главной и центральной осью инерции, а внешние силы отсутствуют, то при вращении тела реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ в точках закрепления оси не возникают.*

Такие оси называются *свободными* (*естественными*) осями вращения. Следствие 6.3.1 дает необходимый и достаточный признак свободной оси.

Следствие 6.3.2. *Если неподвижная ось тела служит главной осью инерции, а внешние силы отсутствуют, то при вращении тела вокруг этой оси не возникает реакция $\mathbf{R}'$ в точке A'.*

Оси, вращение вокруг которых при отсутствии внешних сил не вызывает появления реакции одной из закрепленных точек, называются *постоянными* (*перманентными*) осями вращения. Очевидно, что свободные оси будут также и постоянными осями.

§ 6.4. Физический маятник

Физическим маятником называют тяжелое твердое тело, которое может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Действие параллельного поля тяжести приводится к равнодействующей, проходящей через центр масс тела (см. § 1.7) и равной весу тела. Положение физического маятника будем определять углом α между вертикалью и плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс. Момент инерции тела относительно оси вращения обозначим J_{33}, массу тела — буквой M.

Определение 6.4.1. *Радиусом инерции* тела относительно оси, заданной направлением $\mathbf{e}$, называется неотрицательная скалярная величина k, удовлетворяющая равенству

$$I_e=Mk^2,$$

где I_e — момент инерции тела относительно этой оси.

Как и в § 6.3, начало отсчета A подвижного репера расположим на оси вращения. Базисные векторы примем следующими: $\mathbf{e}'_3$ направим вдоль оси вращения, $\mathbf{e}'_1$ — так, чтобы плоскость векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_3$ содержала центр масс тела, $\mathbf{e}'_2$ — так, чтобы она дополняла базисные векторы до правой тройки (рис. 6.4.1).

Рис. 6.4.1. Физический маятник

Физический маятник совершает плоскопараллельное движение вокруг неподвижной горизонтальной оси AA'. На рисунке показан срез маятника плоскостью, проходящей через центр масс C перпендикулярно к оси вращения. Движение маятника определяется углом α, образованным прямой OC с вертикальной плоскостью.

Радиус-вектор центра масс будет иметь следующее разложение по ортам подвижного репера:

$$\mathbf{r}'_c=l\mathbf{e}'_1+z\mathbf{e}'_3,$$

где l — расстояние от центра масс до оси вращения, z — смещение центра масс вдоль оси вращения относительно точки A.

Вектор силы тяжести $\mathbf{P}$, будучи направлен по вертикали, сохраняет неизменную ориентацию в пространстве. Когда оси репера, связанного с телом, повернуты относительно вертикали на угол α, то

$$\mathbf{P}=Mg(\mathbf{e}'_1\cos\alpha-\mathbf{e}'_2\sin\alpha).$$

Следовательно, момент силы тяжести относительно оси $\mathbf{e}'_3$ дается выражением

$$M_3=\mathbf{e}'_3\cdot(\mathbf{r}'_c\times\mathbf{P})=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{e}'_3\times\mathbf{r}'_c)=\mathbf{P}\cdot(l\mathbf{e}'_3\times\mathbf{e}'_1)=l\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}'_2=-Mgl\sin\alpha.$$

Учтем, что $\omega=\dot\alpha$, и выберем радиус инерции тела так, чтобы $J_{33}=Mk^2$. Изменение кинетического момента относительно оси $\mathbf{e}'_3$ описывается соотношением

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\frac{gl}{k^2}\sin\alpha.$$

Это и есть *уравнение движения физического маятника*.

Определение 6.4.2. Величина

$$l'=k^2/l$$

называется *приведенной длиной физического маятника*. Точка O', расположенная на перпендикуляре к оси вращения, проходящем через центр масс, на расстоянии l' по ту же сторону от оси, что и центр масс, называется *центром качания*. Точка O пересечения перпендикуляра с осью вращения называется *точкой подвеса*.

Следствие 6.4.1. *Уравнение колебаний физического маятника совпадает с уравнением колебаний математического маятника (определение 3.9.1), вся масса которого сосредоточена в центре качания. Теория движения математического маятника может быть полностью применена к анализу движения физического маятника.*

Следствие 6.4.2. *Точка подвеса и центр качания расположены по разные стороны от центра масс твердого тела, причем*

$$l'=l+\rho^2/l,$$

где ρ есть центральный радиус инерции.

Доказательство. Пусть момент инерции тела относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс, равен $M\rho^2$. По теореме 1.10.2 Гюйгенса-Штейнера найдем

$$Mk^2=M\rho^2+Ml^2.$$

Подставив найденное значение k в формулу для l', получим

$$l'=l+\rho^2/l>l.$$□

Следствие 6.4.3. *Как видно из формулы*

$$l'=l+\rho^2/l,$$

при уменьшении l до значения ρ период τ малых колебаний маятника уменьшается вместе с l:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(l+\frac{\rho^2}{l}\right)},$$

а при дальнейшем уменьшении ($l<\rho$) период начинает увеличиваться.

Теорема 6.4.1. (Гюйгенс). *Точка подвеса физического маятника и центр качания суть точки взаимные. Если центр качания принять за точку подвеса, то прежняя точка подвеса будет центром качания. Период колебаний маятника при этом не изменится.*

Доказательство. Если центр качания принять за новую точку подвеса, то расстояние от этой точки до центра масс станет равным $l'-l$, а приведенная длина l^* тогда вычислится по формуле

$$l^*=\frac{\rho^2}{l'-l}+(l'-l)=l+\frac{\rho^2}{l}=l'.$$□

Рассмотрим задачу об определении реакций в точках A и A' закрепления физического маятника. Сначала вычислим составляющие момента силы тяжести в репере $Ae'_1e'_2e'_3$:

$$\begin{aligned}
M_1&=\mathbf{e}'_1\cdot(\mathbf{r}'_c\times\mathbf{P})=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{e}'_1\times\mathbf{r}'_c)=z\mathbf{P}\cdot(\mathbf{e}'_1\times\mathbf{e}'_3)=-z\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}'_2=zMg\sin\alpha,\\
M_2&=\mathbf{e}'_2\cdot(\mathbf{r}'_c\times\mathbf{P})=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{e}'_2\times\mathbf{r}'_c)=\mathbf{P}\cdot(-l\mathbf{e}'_3+z\mathbf{e}'_1)=zMg\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Отметим, что уравнение колебаний физического маятника допускает интеграл энергии

$$\frac{\dot\alpha^2}{2}-\frac{g\cos\alpha}{l'}=\frac{\dot\alpha^2}{2}-\frac{gl\cos\alpha}{k^2}=h.$$

где h — постоянная, зависящая от начальных условий. Этот интеграл позволяет вычислить значение угловой скорости по известному углу α поворота маятника.

Выпишем теперь уравнения движения, содержащие искомые реакции (см. § 6.3):

$$R_1 + R_1' = -lM\left[2h + \left(\frac{2}{l'} + \frac{1}{l}\right) g\cos\alpha\right],$$

$$R_2 + R_2' = lMg\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l'}\right)\sin\alpha,$$

$$R_2' = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{J_{13}}{l'} + zM\right) g\sin\alpha + 2\left(h + \frac{g\cos\alpha}{l'}\right) J_{23}\right],$$

$$R_1' = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{2J_{13}}{l'} - zM\right) g\cos\alpha + 2hJ_{13} - \frac{g\sin\alpha}{l'} J_{23}\right],$$

$$R_3' + R_3 = 0.$$

В частности, если плоскость $Ae_1'e_2'$ есть плоскость симметрии маятника, то ось вращения будет главной осью инерции. Значит, тогда $J_{13} = J_{23} = 0$, а кроме того, $z = 0$. В итоге

$$R_2' = R_1' = 0,$$

и ось вращения маятника будет перманентной осью.

Приведем несколько примеров практического применения физического маятника.

Пример 6.4.1. Маятниковые часы. Как уже отмечалось выше, период малых колебаний маятника выражается формулой

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(l + \frac{\rho^2}{l}\right)}.$$

Регулировка хода часов с таким маятником посредством изменения расстояния l между центром масс и точкой подвеса имеет ограниченные возможности, так как справедливо неравенство

$$\tau \geq \sqrt{\frac{2\rho}{g}}.$$

Видим, что при необходимости диапазон регулировки периода колебаний маятника (а следовательно, точности хода часов) может быть расширен посредством уменьшения центрального радиуса инерции ρ маятника. ◇

Пример 6.4.2. Определение ускорения g свободного падения. Ускорение свободного падения можно определить, зная период τ колебаний. Мы будем предполагать, что измерение времени производится с требуемой точностью. Для малых колебаний маятника найдем

$$g = \frac{4\pi^2 J_{33}}{Ml\tau^2}.$$

В этой формуле момент инерции J_{33} и расстояние от точки подвеса маятника до его центра масс с трудом поддаются непосредственному измерению. Чтобы обойти эту трудность, применяют оборотный маятник. Оборотный маятник имеет две призмы, острые ребра которых обращены друг к другу, а прямая, их соединяющая, есть ось симметрии и, следовательно, содержит центр масс. Маятник заставляют поочередно качаться на этих ребрах, а перемещением дополнительных грузов достигают того, чтобы периоды малых колебаний маятника совпали. Тогда по теореме Гюйгенса расстояние между ребрами, которое можно очень точно измерить, и будет равно длине l' эквивалентного математического маятника. Отсюда

$$g = \frac{4\pi^2 l'}{\tau^2}.\diamond$$

Пример 6.4.3. Определение момента инерции тела относительно какой-либо оси. Заставляя качаться тело вокруг горизонтальной оси и наблюдая период его колебаний, можно найти момент инерции J_{33} по формуле

$$J_{33} = \frac{Mgl\tau^2}{4\pi^2},$$

где расстояние l известно не вполне надежно. Чтобы обойти эту трудность, возьмем какое-нибудь другое тело с массой M', которое поместим так, чтобы его центр масс находился точно на оси вращения тела M. Пусть J_{33}' — момент инерции тела M'. Величину J_{33}' можно весьма точно вычислить, если телу M' придать простую геометрическую форму. Например, можно взять две равные цилиндрические гири, поместив их на одинаковых расстояниях от оси вращения. Обозначим a' расстояние от центра масс составного тела $M + M'$ до оси вращения. Тогда

$$a' = \frac{Ml}{M + M'}.$$

Откуда $(M + M')a' = Ml$. Предположим, что, закрепив тело M' вместе с телом M на оси вращения, мы получим период колебаний τ'. Так как момент инерции массы $M + M'$ относительно неподвижной оси равен $J_{33} + J_{33}'$, то должно быть

$$J_{33} + J_{33}' = \frac{(M + M')a'g(\tau')^2}{4\pi^2} = \frac{Mlg(\tau')^2}{4\pi^2}.$$

Следовательно, справедлива пропорция

$$\frac{J_{33} + J_{33}'}{J_{33}} = \frac{(\tau')^2}{\tau^2}$$

или

$$J_{33} = J_{33}'\frac{\tau^2}{(\tau')^2 - \tau^2}.$$

В итоге в правой части полученной формулы остались только известные величины и величины, поддающиеся точному измерению.◇

§ 6.5. Задача о центре удара

Рассмотрим твердое тело, которое может свободно вращаться вокруг неподвижной оси с направляющим вектором $\mathbf{e}_3'$, закрепленной в точках A и A', расстояние между которыми равно a. Предположим, что в начальный момент времени тело находится в покое. Пусть к точке B тела, имеющей радиус-вектор $\mathbf{r_B}$ по отношению к точке A, приложен удар $\mathbf{P}$, направленный по касательной к окружности, которую может описывать точка B при вращении тела вокруг оси, так что $\mathbf{P} \parallel \mathbf{e}_3' \times \mathbf{r_B}$. Для простоты изучим случай, когда центр масс тела, определенный радиусом-вектором $\mathbf{r}_c$, принадлежит плоскости, проходящей через точку B и ось вращения. В этой же плоскости выберем базисный вектор $\mathbf{e}_1'$ перпендикулярно вектору $\mathbf{e}_3'$. Вектор $\mathbf{e}_2'$ должен образовывать с ними правую тройку.

При ударе положение твердого тела не изменится, но тело приобретет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения вокруг оси $\mathbf{e}_3'$. Разложим векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{r_B}$, $\mathbf{r}_c$ по базисным векторам:

$$\mathbf{P} = P\mathbf{e}_2', \quad \mathbf{r_B} = b\mathbf{e}_1' + z_b\mathbf{e}_3', \quad \mathbf{r}_c = l\mathbf{e}_1' + z\mathbf{e}_3'.$$

Тогда разложение момента удара по тем же векторам запишется в виде

$$\mathbf{r_B} \times \mathbf{P} = -z_bP\mathbf{e}_1' + bP\mathbf{e}_3'.$$

Воспользовавшись теоремами об изменении скорости центра масс и кинетического момента при ударе, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &R_1 + R_1' = 0, && -z_bP - aR_2' = \omega J_{13},\\ &P + R_2 + R_2' = \omega lM, && aR_1' = \omega J_{23},\\ &R_3 + R_3' = 0, && bP = \omega J_{33}. \end{aligned}$$

Первая группа из трех уравнений выражает теорему об изменении скорости центра масс, вторая группа — теорему об изменении кинетического момента. Последнее уравнение второй группы описывает

изменение кинетического момента относительно оси вращения и позволяет найти угловую скорость после удара. Остальные уравнения дают возможность определить ударные реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ точек закрепления оси вращения.

Полученная система уравнений удара в рассматриваемой задаче может быть выведена и непосредственно из уравнений движения тела вокруг оси (§ 6.3). Для этого достаточно каждое уравнение движения умножить на Δt и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$.

Определение 6.5.1. *Центром удара* называется точка твердого тела, удар по которой не вызывает ударных реакций в местах закрепления неподвижной оси.

Теорема 6.5.1. *Центр удара в рассматриваемой задаче имеет радиус-вектор*

$$\mathbf{r_ц} = b_ц\mathbf{e}_1' + z_ц\mathbf{e}_3',$$

где $b_ц = J_{33}/(lM)$, а координата $z_ц$ определяет на оси вращения такую точку, для которой эта ось служит главной осью инерции.

Доказательство. В системе уравнений удара примем

$$R_1 = R_1' = R_2 = R_2' = 0.$$

С учетом того, что $\omega = bP/J_{33}$, из второго уравнения этой системы получим

$$b_ц = \frac{J_{33}}{lM}.$$

Подставим в четвертое уравнение системы значение удара P, выраженного из второго уравнения:

$$\omega(J_{13} + z_ц lM) = 0.$$

Напомним (см. § 1.8), что

$$J_{13} = -\int_V r_1r_3\,dm, \quad Ml = \int_V r_1\,dm.$$

Следовательно, должно быть

$$J_{13} + z_ц lM = -\int_V r_1(r_3 - z_ц)\,dm = 0,$$

так как $\omega \neq 0$. Отсюда ясно, что $(J_{13} + z_ц lM)$ есть компонента J_{13}' тензора инерции относительно точки, лежащей на оси вращения и смещенной от точки A на расстояние $z_ц$, и эта компонента должна быть равна нулю. Кроме того, имеем $J_{23} = J_{23}' = 0$.□

§ 6.6. Движение твердого тела около неподвижной точки

Пусть в абсолютном пространстве закреплена только одна точка твердого тела. Обозначим ее O. С твердым телом жестко свяжем правый репер $Oe_1'e_2'e_3'$. Пусть $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\mathbf{K}$ — кинетический момент, $\mathbf{M}$ — суммарный момент внешних активных сил, приложенных к телу, взятые относительно точки O и разложенные по базису $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1' + \omega_2\mathbf{e}_2' + \omega_3\mathbf{e}_3',\\ &\mathbf{K} = K_1\mathbf{e}_1' + K_2\mathbf{e}_2' + K_3\mathbf{e}_3',\\ &\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1' + M_2\mathbf{e}_2' + M_3\mathbf{e}_3'. \end{aligned}$$

Оператор инерции, связывающий векторы $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$, представляется в репере $Oe_1'e_2'e_3'$ постоянной матрицей

$$J = (J_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Чтобы воспользоваться уравнениями движения, выведенными в § 6.2, освободим твердое тело от связи в точке O, введя реакцию R, приложенную к этой точке.

Уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения (см. § 6.2), имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R},$$

где m — масса тела, $\mathbf{F}$ — суммарная активная сила. Так как скорость и ускорение точки O равны нулю, то по теореме 2.16.3 Ривальса ускорение центра масс определено формулой

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c).$$

Поэтому реакция, заставляющая точку O оставаться неподвижной, дается равенством

$$\mathbf{R} = m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)] - \mathbf{F}.$$

Пусть $f(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение эллипсоида инерции твердого тела относительно точки O (см. § 1.8):

$$f(\mathbf{r}) = \mathcal{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - 1 = \sum_{i,j=1}^{3} J_{ij}r_ir_j - 1 = 0.$$

Теорема 6.6.1. *Вектор $\mathbf{K}$ кинетического момента перпендикулярен к плоскости, касающейся эллипсоида инерции в точке G пересечения эллипсоида с лучом, выходящим из неподвижной точки O параллельно вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки G: $\mathbf{r} = æ\boldsymbol{\omega}$. Нормаль к эллипсоиду параллельна градиенту от функции $\mathrm{f}(\mathbf{r})$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}[\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] = 2æ\,\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}) = 2æ\,\mathbf{K}.$$

Обратимся теперь к уравнению кинетического момента (теорема 5.1.5, § 6.2):

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}.$$

Предположим, что базисные векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ суть собственные векторы тензора инерции (§ 1.9). Координатные оси, связанные с телом, тогда будут главными, а кинетическая энергия тела запишется в виде (§ 6.2)

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

где A, B, C — главные моменты инерции относительно соответствующих координатных осей, p, q, r — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на главные направления. Для расчета компонент вектора кинетического момента имеем формулу $\mathbf{K} = \partial T/\partial\boldsymbol{\omega}$ или

$$K_1 = \frac{\partial T}{\partial p} = Ap, \quad K_2 = \frac{\partial T}{\partial q} = Bq, \quad K_3 = \frac{\partial T}{\partial r} = Cr.$$

Подставив эти значения в уравнение изменения кинетического момента, найдем

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_1,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M_2,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_3.$$

Эти уравнения называются *динамическими уравнениями Эйлера*.

Замечание 6.6.1. Если оси репера $Oe_1'e_2'e_3'$ не будут главными осями инерции, то динамические уравнения станут существенно более сложными:

$$\frac{dK_1}{dt} + \omega_2K_3 - \omega_3K_2 = M_1,$$

$$\frac{dK_2}{dt} + \omega_3K_1 - \omega_1K_3 = M_2,$$

$$\frac{dK_3}{dt} + \omega_1K_2 - \omega_2K_1 = M_3.$$

где компоненты

$$K_i = \sum_{j=1}^{3} J_{ij}\omega_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

получаются посредством частного дифференцирования по ω_1, ω_2, ω_1 выражения для кинетической энергии.

Замечание 6.6.2. Репер $Oe_1'e_2'e_3'$, вообще говоря, не обязательно жестко связывать с твердым телом. Но тогда моменты инерции уже могут не быть постоянными, хотя вид уравнений движения, приведенных в замечании 6.6.1, не изменится.

Для того чтобы полностью определить закон движения твердого тела, системы динамических уравнений Эйлера недостаточно. Эту систему следует дополнить кинематическими соотношениями (§ 6.2). В целом получается система дифференциальных уравнений, исследование свойств решения которой часто сопряжено со значительными трудностями. Ниже будут рассмотрены три случая, когда для этой системы аналитически может быть построено общее решение. Это — случай Эйлера, когда момент внешних сил отсутствует, а также случаи Лагранжа-Пуассона и Ковалевской, когда движение вокруг неподвижной точки происходит под действием параллельного поля силы тяжести.

§ 6.7. Случай Эйлера

Пусть абсолютно твердое тело закреплено в неподвижной точке O, а момент внешних сил отсутствует: $\mathbf{M} = 0$. Тогда динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0.$$

Для этих уравнений справедлив интеграл энергии (см. теорему 5.1.8):

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Кроме того, имеет место интеграл кинетического момента (см. следствие 5.1.4):

$$\mathbf{K} = \mathbf{const},$$

означающий, что вектор кинетического момента не изменяется в абсолютном пространстве. В частности, остается постоянным его модуль:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \sigma^2.$$

Лемма 6.7.1. *В случае Эйлера постоянна проекция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на неподвижное направление $\mathbf{K}$ кинетического момента.*

Доказательство. Найдем скалярное произведение

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}/\sigma = (p\,Ap + q\,Bq + r\,Cr)/\sigma = h/\sigma.$$□

Следуя Пуансо, изучим движение эллипсоида инерции $\mathcal{Э}$ тела относительно неподвижной точки O. Дело в том, что этот эллипсоид жестко связан с самим телом. Положение эллипсоида инерции в пространстве однозначно определяет положение твердого тела.

Назовем *апексом* точку, в которой луч, выходящий из неподвижной точки O коллинеарно вектору $\boldsymbol{\omega}$, пересекает эллипсоид инерции. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор апекса.

Теорема 6.7.1. *Расстояние от неподвижной точки O до плоскости, касательной к эллипсоиду инерции в апексе, не меняется при движении твердого тела.*

Доказательство. По теореме 6.6.1 вектор кинетического момента задает нормаль к эллипсоиду инерции, взятую в апексе. Расстояние от точки O до касательной плоскости есть

$$\delta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{K}/\sigma.$$

Но согласно определению эллипсоида инерции (см. § 1.8)

$$\mathbf{r}^2 = 1/I_\omega,$$

где I_ω — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения. Поэтому

$$\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|\sqrt{I_\omega}}.$$

По лемме 6.7.1 будем иметь (см. теорему 6.1.3)

$$\delta = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}\left(|\boldsymbol{\omega}||\mathbf{K}|\sqrt{I_\omega}\right)^{-1} = \frac{2T}{\sqrt{2T}\sigma} = \frac{\sqrt{h}}{\sigma}.$$□

Следствие 6.7.1. (Геометрическая интерпретация Пуансо). *Плоскость $\mathcal{P}$, касательная к эллипсоиду инерции в апексе, неподвижна в абсолютном пространстве. Движение твердого тела в случае Эйлера можно представить качением эллипсоида инерции по неподвижной плоскости $\mathcal{P}$ без проскальзывания.*

Доказательство. Плоскость $\mathcal{P}$ имеет фиксированное расстояние до неподвижной точки O, а ее ориентация, определяемая вектором кинетического момента, остается постоянной во все время движения. Точка касания принадлежит оси угловой скорости, и, значит, скорость точки эллипсоида, совпадающей с апексом, равна нулю.□

Определение 6.7.1. *Полодия* — это кривая, описываемая апексом на поверхности эллипсоида инерции. *Герполодия* — это кривая, вычерчиваемая апексом на неподвижной плоскости $\mathcal{P}$, касающейся эллипсоида инерции в каждый момент времени.

Подвижный аксоид (см. § 2.13) имеет вершину в точке O и в качестве основания — полодию. Неподвижный аксоид имеет вершину в точке O и в качестве основания — герполодию.

Радиус-вектор $\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1' + r_2\mathbf{e}_2' + r_3\mathbf{e}_3'$ точки на полодии должен удовлетворять как уравнению эллипсоида инерции

$$Ar_1^2 + Br_2^2 + Cr_3^2 = 1,$$

так и уравнению, получаемому из условия сохранения модуля кинетического момента:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \frac{\omega^2}{\mathbf{r}^2}(A^2r_1^2 + B^2r_2^2 + C^2r_3^2) = \sigma^2.$$

Откуда

$$(A^2r_1^2 + B^2r_2^2 + C^2r_3^2) = \frac{\sigma^2}{h} = D.$$

Из этого уравнения и уравнения эллипсоида инерции следует уравнение подвижного аксоида:

$$A(A - D)r_1^2 + B(B - D)r_2^2 + C(C - D)r_3^2 = 0.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$A \geq B \geq C.$$

Тогда для того чтобы этот конус был вещественным (движение было реализуемым), необходимо и достаточно выполнение неравенства

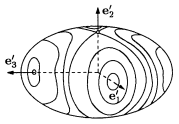
$$A \geq D \geq C.$$

Оно — очевидное условие того, что расстояние $\delta = D^{-1/2}$ от касательной плоскости $\mathcal{P}$ до точки O будет меньше, чем наибольшая полуось $C^{-1/2}$, и больше, чем наименьшая полуось $A^{-1/2}$. Аксоид вырождается в прямую, параллельную вектору $\mathbf{e}'_1$ или $\mathbf{e}'_3$, когда $D = A$ или $D = C$. В этих случаях полодия будет состоять из двух точек пересечения большой или соответственно двух точек пересечения малой оси с эллипсоидом инерции.

При $D = B$ аксоид превращается в две вещественные плоскости, проходящие через среднюю ось:

$$r_1 = \pm r_3 \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}.$$

Полодия в этом случае состоит из двух эллипсов, пересекающихся по средней оси эллипсоида инерции и симметричных относительно координатных плоскостей.



Вблизи точек пересечения большой и малой осей инерции с эллипсоидом картина полодий напоминает окрестность особой точки типа "центр" (рис. 3.9.1). В малой окрестности средней оси $\mathbf{e}'_2$ имеем картину полодий, характерную для седловой точки (рис. 3.9.8).

Рис. 6.7.1. Схема полодий на эллипсоиде инерции

В общем случае полодия служит пересечением эллипсоида инерции и конуса второго порядка, имеющего те же плоскости симметрии, что и эллипсоид. Она состоит из двух различных замкнутых ветвей, симметричных друг к другу относительно неподвижной точки и одной из главных плоскостей эллипсоида, и обладает четырьмя вершинами, для которых радиус-вектор $\mathbf{r}$, выходящий из неподвижной точки, имеет максимум или минимум модуля. При движении одна из ветвей полодии катится по неподвижной плоскости $\mathcal{P}$. Вторая ветвь катится по плоскости, симметричной $\mathcal{P}$ относительно неподвижной точки. Общий вид расположения полодий на эллипсоиде инерции представлен на рис. 6.7.1. Имеем однопараметрическое по D семейство кривых.

Пусть в начальный момент апекс находится в окрестности наименьшей оси эллипсоида инерции:

$$A \geq D > B \geq C.$$

Из уравнения подвижного аксоида получим

$$r_2^2 + r_3^2 \leq \frac{A(A-D)}{C(D-B)} r_1^2.$$

Так как апекс принадлежит эллипсоиду инерции, то r_1 ограничено по величине. Следовательно, когда $D \to A$, полодии стягиваются к точке пересечения эллипсоида с его наименьшей главной осью.

Аналогично, пусть в начальный момент апекс находится в окрестности наибольшей оси эллипсоида инерции:

$$A \geq B > D \geq C.$$

Тогда справедливо неравенство

$$r_1^2 + r_2^2 \leq \frac{C(D-C)}{B(B-D)} r_3^2,$$

которое показывает, что при $D \to C$ полодии стягиваются к точке пересечения эллипсоида с его наибольшей главной осью.

Чтобы изучить структуру герполодий, опустим из неподвижной точки O перпендикуляр на плоскость $\mathcal{P}$. Пусть этот перпендикуляр попал в точку E. Его длина δ выражается равенством

$$\delta = 1/\sqrt{D}.$$

Из точки E проведем радиус ρ в точку на герполодии. По теореме Пифагора

$$\rho = \sqrt{r^2 - 1/D},$$

где r — расстояние от точки O до апекса. При движении апекса по полодии это расстояние изменяется в ограниченных пределах:

$$r_m \leq r \leq r_M.$$

В ограниченных пределах будет изменяться и ρ:

$$\rho_m = \sqrt{r_m^2 - 1/D} \leq \rho \leq \sqrt{r_M^2 - 1/D} = \rho_M.$$

Поэтому герполодия заключена между двумя концентрическими окружностями. В зависимости от длины дуги полодии герполодия может оказаться как замкнутой, так и незамкнутой кривой. В последнем случае она заметет всюду плотно кольцо между окружностями максимального ρ_M и минимального ρ_m радиуса. В частных случаях $D = A$ или $D = C$ полодия и герполодия обращаются в точку. Эллипсоид инерции будет вращаться, оставаясь в соприкосновении

с плоскостью $\mathcal{P}$ своей вершиной, расположенной соответственно на малой или большой полуоси. При $D = B$ полодия обращается в два эллипса, проходящих через среднюю ось, и тогда минимальный радиус герполодии $\rho_m = 0$.

Теорема 6.7.2. *В случае Эйлера ось угловой скорости неподвижна в твердом теле тогда и только тогда, когда она совпадает с одной из главных осей инерции.*

Доказательство. Необходимость. Пусть ось $\mathbf{b}$ угловой скорости неподвижна в твердом теле. Это значит, что коэффициенты b_1, b_2, b_3 ее разложения по базисным векторам, связанным с телом:

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}'_1 + b_2\mathbf{e}'_2 + b_3\mathbf{e}'_3,$$

остаются постоянными во времени. Так как $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{b}$, то, очевидно,

$$p = \omega b_1, \quad q = \omega b_2, \quad r = \omega b_3.$$

Кинетическая энергия не изменяется. Следовательно, и модуль ω угловой скорости тоже будет постоянным. Уравнения Эйлера примут вид

$$(C-B)qr = 0, \quad (A-C)rp = 0, \quad (B-A)pq = 0.$$

Если эллипсоид инерции не есть эллипсоид вращения, то по крайней мере две из величин p, q, r должны быть равны нулю. Но это и означает, что тело вращается вокруг одной из главных осей инерции. Если эллипсоид инерции представляет собой эллипсоид вращения, например $A = B \neq C$, то тогда любая ось в плоскости, перпендикулярной оси, соответствующей моменту инерции C, будет главной. Величины p и q могут быть тогда любыми, и если хотя бы одна из них отлична от нуля, то тогда должно быть $r = 0$. Если $A = B = C$, то тогда любая ось тела будет главной, а p, q, r могут при этом быть произвольными.

Достаточность. Пусть, например, начальные условия выбраны так, что $p = q = 0$, $r = r_0 \neq 0$. Динамические уравнения допускают в этом случае единственное решение: $p \equiv q \equiv 0$, $r \equiv r_0$. Это означает, что вектор угловой скорости сохраняет свое положение относительно твердого тела, а кроме того он совпадает по направлению с вектором кинетического момента, который остается неподвижным в абсолютном пространстве. Аналогично можно рассмотреть случаи закрутки вокруг других главных осей.□

Следствие 6.7.2. *Главные оси инерции служат перманентными (постоянными) осями вращения твердого тела вокруг неподвижной точки* (см. § 6.3).

Теорема 6.7.3. *Движение оси угловой скорости устойчиво в окрестности большой или малой полуосей инерции и неустойчиво в окрестности средней полуоси.*

Доказательство. По смыслу устойчивость движения означает, что в любой момент времени координаты объекта мало изменятся при малом изменении начальных условий. Пусть в начальный момент направление угловой скорости близко к направлению малой полуоси (D мало отличается от A). Тогда координаты апекса удовлетворяют неравенству

$$r_2^2 + r_3^2 \leq \frac{A(A-D)}{C(D-B)} r_1^2 < \frac{A(A-D)}{C^2(D-B)},$$

которое означает, что если параметр D, определенный начальными условиями, по величине близок к A, то координаты r_2 и r_3 будут малыми в любой момент времени. Тем самым движение оси угловой скорости в окрестности наименьшей полуоси эллипсоида инерции устойчиво.

Аналогично пусть в начальный момент времени направление угловой скорости близко к направлению большой полуоси (D мало отличается от C). Тогда координаты апекса удовлетворяют неравенству

$$r_1^2 + r_2^2 \leq \frac{C(D-C)}{B(B-D)} r_3^2 < \frac{D-C}{B(B-D)}.$$

Следовательно, при D, по величине близком к C, малыми в любой момент времени будут координаты r_1 и r_2. Это означает устойчивость движения оси угловой скорости в окрестности большой полуоси эллипсоида инерции.

В окрестности средней полуоси все полодии разделяются на два семейства эллипсами, служащими полодиями при $D = B$. Будучи мало отклонен от точки пересечения средней полуоси с эллипсоидом, апекс движется по полодии, близкой к соответствующему эллипсу и, следовательно, значительно отклоняется от начального положения, сколь бы близким оно ни оказалось к точке средней полуоси. Отсюда — неустойчивость такого движения.□

Заметим, что в теореме 6.7.3 имеется в виду лишь устойчивость движения оси угловой скорости. Сами вращения твердого тела при этом неустойчивы, так как даже небольшие изменения величин угловых скоростей могут приводить к значительным изменениям угловых координат.

Определение 6.7.2. *Регулярной прецессией* называется движение твердого тела около неподвижной точки, при котором тело участвует в сложном вращении с постоянной переносной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\text{п}$ и с постоянной по величине относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_r$ при сохранении угла между векторами $\boldsymbol{\omega}_\text{п}$ и $\boldsymbol{\omega}_r$.

Теорема 6.7.4. *Пусть $A = B > C$. Тогда в случае Эйлера возникает регулярная прецессия с переносной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\text{п}$, направленной по вектору кинетического момента:*

$$\boldsymbol{\omega}_\text{п} = \mathbf{K}/A,$$

и относительной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_r$, направленной вдоль наибольшей оси инерции:

$$\boldsymbol{\omega}_r = r\left(1 - \frac{C}{A}\right)\mathbf{e}'_3,$$

где r — проекция угловой скорости тела на эту ось.

Доказательство. Если $A = B$, то третье уравнение Эйлера дает

$$C\frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда $r = r_0$ и, следовательно, постоянно. Векторы кинетического момента $\mathbf{K}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ имеют следующие разложения:

$$\mathbf{K} = Ap\mathbf{e}'_1 + Aq\mathbf{e}'_2 + Cr\mathbf{e}'_3,$$
$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}'_1 + q\mathbf{e}'_2 + r\mathbf{e}'_3.$$

Поэтому

$$\frac{A}{A-C}\boldsymbol{\omega} - \frac{\mathbf{K}}{A-C} = r\mathbf{e}'_3,$$

а значит, векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{K}$ и ось тела $\mathbf{e}'_3$ принадлежат одной плоскости. Кроме того, справедлив интеграл энергии

$$A(p^2+q^2) + Cr^2 = A(p^2+q^2+r^2) + (C-A)r^2 = h.$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{h + (A-C)r^2}{A}$$

сохраняет значение. Поскольку r не меняется, то угол, образованный вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью $\mathbf{e}'_3$, а также угол, образованный неподвижным в пространстве вектором $\mathbf{K}$ и осью $\mathbf{e}'_3$, будут постоянными. Такое движение тела есть сложное вращение. Уравнение, связывающее векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{e}'_3$, можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{K}}{A} + r\left(1 - \frac{C}{A}\right)\mathbf{e}'_3.$$

Отсюда ясно, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_\text{п}$ прецессии вокруг вектора кинетического момента и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_r$ собственного вращения даются формулами

$$\boldsymbol{\omega}_\text{п} = \frac{\mathbf{K}}{A}, \quad \boldsymbol{\omega}_r = r\left(1 - \frac{C}{A}\right)\mathbf{e}'_3.\square$$

При регулярной прецессии плоскость, содержащая векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{e}'_3$, вращается вокруг вектора $\mathbf{K}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\text{п}$. Если ввести углы Эйлера так, что вдоль вектора $\mathbf{K}$ будет направлен неподвижный базисный вектор $\mathbf{e}_3$, то для регулярной прецессии угловые скорости собственного вращения и прецессии (см. § 2.5), а также угол нутации будут постоянными:

$$\dot\varphi = \dot\varphi_0, \quad \dot\psi = \dot\psi_0, \quad \dot\vartheta = \dot\vartheta_0.$$

Полодия станет окружностью с центром на наибольшей оси инерции. Герполодия также окажется окружностью.

Замечание 6.7.1. Если между главными моментами инерции справедливо соотношение

$$A > B = C,$$

то тогда возникает регулярная прецессия, при которой относительная угловая скорость направлена по наименьшей оси эллипсоида инерции.

Перейдем к задаче определения закона движения. С этой целью исключим r из интегралов энергии и модуля кинетического момента:

$$Ap^2(A-C) + Bq^2(B-C) = \sigma^2 - hC.$$

Аналогично после исключения p

$$Bq^2(A-B) + Cr^2(A-C) = hA - \sigma^2.$$

Пусть $A > B > C$, тогда

$$\sigma^2 - hC > 0, \quad hA - \sigma^2 > 0.$$

С помощью полученных соотношений выразим величины p и r через q:

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)}(a_p^2 - q^2), \quad r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)}(a_r^2 - q^2),$$

где

$$a_p^2 = \frac{\sigma^2 - hC}{B(B-C)}, \quad a_r^2 = \frac{hA - \sigma^2}{B(A-B)}.$$

Для определенности предположим, что $a_p^2 > a_r^2$. Тогда должно быть $-a_r \leq q \leq a_r$. При этом условии величина p никогда не обращается в нуль и, будучи непрерывной, не меняет знака. Пусть в начальный момент $p > 0$. При этом условии p будет положительным в течение всего времени движения. Величина r обращается в нуль, когда $q = \pm a_r$. Из второго уравнения Эйлера

$$B\frac{dq}{dt} = -(A-C)pr$$

видим, что $\dot q$ меняет знак вместе с r. При $r > 0$ будет $\dot q < 0$. При $q = -a_r$ величина r обращается в нуль, и происходит смена знака q. При $r < 0$ будет $\dot q > 0$, и q возрастает до тех пор, пока не достигнет значения $q = a_r$. Подставив найденные значения p и r во второе уравнение Эйлера, получим

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}\sqrt{(a_p^2 - q^2)(a_r^2 - q^2)},$$

где правило выбора знаков оговорено выше. Обозначим

$$q = a_r x, \quad k^2 = \frac{a_r^2}{a_p^2}, \quad n^2 = a_p\sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}.$$

Тогда

$$\dot x = \pm n^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

После разделения переменных время t выразится с помощью эллиптического интеграла первого рода:

$$n^2(t - t_0) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Величины p, q, r будут периодическими по времени с периодом

$$\tau = \frac{4}{n^2}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Когда функции $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ известны, можно определить закон движения твердого тела. Учтем, что вектор $\mathbf{K}$ кинетического момента неподвижен в абсолютном пространстве, и направим вдоль него единичный базисный вектор $\mathbf{e}_3$. Разложим $\mathbf{e}_3$ по базису репера $Oe'_1e'_2e'_3$, жестко связанного с телом:

$$\mathbf{e}_3 = a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sigma}(Ap\mathbf{e}'_1 + Bq\mathbf{e}'_2 + Cr\mathbf{e}'_3).$$

Коэффициенты разложения суть известные функции времени.

Пусть $\mathbf{h} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ — кватернион, характеризующий угловое положение тела. По теореме 2.6.2 найдем

$$bd - ac = \frac{Ap}{2\sigma}, \quad ab + cd = \frac{Bq}{2\sigma}, \quad a^2 + d^2 = \frac{Cr}{2\sigma} + \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$c = \frac{Bqd - Apa}{\sigma + Cr}, \quad b = \frac{Apd + Bqa}{\sigma + Cr}.$$

Остаются неизвестными лишь две функции $a(t)$ и $d(t)$.

Чтобы получить кинематические уравнения для $a(t)$ и $d(t)$, введем кватернион (см. § 2.15)

$$\mathbf{h}_\omega = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k},$$

составленный с помощью координат вектора угловой скорости в репере, жестко связанном с телом. Тогда

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \circ \mathbf{h}_\omega/2.$$

Воспользуемся правилом умножения для кватернионов:

$$\dot a = -\frac{1}{2}(bp + cq + dr),$$
$$\dot b = \frac{1}{2}(ap - dq + cr),$$
$$\dot c = \frac{1}{2}(dp + aq - br),$$
$$\dot d = \frac{1}{2}(-cp + bq + ar).$$

Из этой группы выберем первое и последнее уравнения и подставим в них коэффициенты c и b, выраженные через a и d. Получим

$$\dot a = \frac{1}{2(\sigma + Cr)}[(A-B)pqa - (h + \sigma r)d],$$
$$\dot d = \frac{1}{2(\sigma + Cr)}[(h + \sigma r)a + (A-B)pqd],$$

где h — постоянная энергии. Имеем систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В общем случае можно определить a и d каким-либо численным методом.

Отметим также, что эта система, как следовало ожидать, имеет первый интеграл

$$a^2 + d^2 = \frac{Cr}{2\sigma} + \frac{1}{2}.$$

На плоскости с декартовыми координатами a — абсцисса и d — ордината мы можем ввести полярные координаты: радиус $\rho = \sqrt{a^2 + d^2}$ и полярный угол β, так что

$$a = \rho\cos\beta, \quad d = \rho\sin\beta.$$

Очевидно, что в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений для a и d справедливо равенство

$$\dot\beta = \frac{h + Cr}{2(\sigma + Cr)}$$

с известной правой частью. Поэтому зависимость $\beta(t)$ выражается квадратурой.

Если $A = B$, то r и, следовательно, ρ будут постоянными, и уравнение для β легко интегрируется:

$$\beta = \Omega(t - t_0) + \beta_0, \quad \Omega = \frac{h + Cr}{2(\sigma + Cr)}$$

Видим, что при $A = B$ изображающая точка на плоскости коэффициентов a, d описывает окружность постоянного радиуса

$$\left(\frac{Cr}{2\sigma} + \frac{1}{2}\right) > 0$$

с центром в начале координат. Если $\Omega > 0$, то вращение выполняется против хода часовой стрелки, а если $\Omega < 0$, то — по ходу часовой стрелки.

Примем снова $A \neq B$ и определим теперь закон движения твердого тела, применив для этого углы Эйлера φ, ψ, ϑ. По-прежнему неподвижную ось $\mathbf{e}_3$ выберем совпадающей по направлению с вектором кинетического момента $\mathbf{K}$. Тогда

$$\mathbf{K} = Ap\mathbf{e}'_1 + Bq\mathbf{e}'_2 + Cr\mathbf{e}'_3 = \sigma\mathbf{e}_3.$$

Отсюда получаем систему тригонометрических уравнений

$$Ap = \sigma\sin\vartheta\sin\varphi, \quad Bq = \sigma\sin\vartheta\cos\varphi, \quad Cr = \sigma\cos\vartheta.$$

Из третьего уравнения следует

$$\cos\vartheta = \frac{Cr}{\sigma},$$

а из первого —

$$\sin\varphi = \frac{Ap}{\sigma\sin\vartheta}.$$

Первые два кинематических уравнения Эйлера имеют вид

$$p = \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi,$$

$$q = \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi.$$

Исключив $\dot\vartheta$, получим

$$\dot\psi = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta}.$$

Из выражений для Ap и Bq через углы Эйлера можно усмотреть, что

$$\sigma\sin\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = Ap^2 + Bq^2.$$

Поэтому

$$\dot\psi = \frac{Ap^2 + Bq^2}{\sigma\sin^2\vartheta} > 0.$$

Следовательно, в процессе движения угол прецессии вокруг вектора кинетического момента может только возрастать.

Тем самым и задача об определении закона движения с помощью углов Эйлера также сведена к квадратурам.

§ 6.8. Случай Лагранжа-Пуассона

Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле силы тяжести. С помощью ортонормированных векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, жестко связанных с телом, зададим направления главных осей инерции относительно неподвижной точки O. Соответственно A, B, C суть главные моменты инерции. Потребуем, чтобы тело было динамически симметричным (эллипсоид инерции был эллипсоидом вращения). Например, пусть

$$A = B.$$

Центр масс тела расположим на положительном направлении полуоси симметрии (*волчок Лагранжа*):

$$\mathbf{r}_c = \zeta\mathbf{e}_3', \quad \zeta > 0.$$

В качестве независимых лагранжевых координат примем углы Эйлера φ, ψ, ϑ. Ось прецессии направим вертикально вверх, а ось

собственного вращения зададим единичным вектором $\mathbf{e}_3'$ (см. § 2.5). Кинематические уравнения Эйлера (§ 2.15) имеют вид

$$p = \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi,$$

$$q = \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi,$$

$$r = \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac12(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

выражается через угловые скорости следующим образом:

$$T = \frac12[A(\dot\psi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + C(\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi)^2].$$

Сила тяжести приложена к центру масс. Силовая функция определена формулой

$$U = -mg\zeta\cos\vartheta.$$

Выпишем уравнения Лагранжа для координат φ и ψ (§ 6.2):

$$\frac{d}{dt}(\partial T/\partial\dot\varphi) = 0, \quad \frac{d}{dt}(\partial T/\partial\dot\psi) = 0.$$

Здесь ни кинетическая энергия, ни силовая функция от φ и ψ не зависят. Этим уравнениям соответствуют первые интегралы

$$\dot\psi(A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta) + C\dot\varphi\cos\vartheta = \beta A,$$

$$C(\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi) = Cr_0,$$

где β, r_0 — постоянные интегрирования. Отсюда

$$\dot\psi\sin^2\vartheta = \beta - br_0\cos\vartheta,$$

$$\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi = r_0,$$

причем $b = C/A$. Кроме того, имеет место интеграл энергии

$$A(\dot\psi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + Cr_0^2 = -2mg\zeta\cos\vartheta + h,$$

который можно переписать более удобно:

$$\dot\psi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2 = \alpha - a\cos\vartheta.$$

Постоянные α и a даются равенствами

$$\alpha = \frac1A(h - Cr_0^2), \quad a = 2mg\zeta/A.$$

Указанные первые интегралы образуют полную систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно углов Эйлера:

$$\dot\psi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2 = \alpha - a\cos\vartheta,$$

$$\dot\psi\sin^2\vartheta = \beta - br_0\cos\vartheta,$$

$$\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi = r_0.$$

Подставив в первое уравнение значение $\dot\psi$, найденное из второго уравнения, получим

$$(\beta - br_0\cos\vartheta)^2 + \dot\vartheta^2\sin^2\vartheta = (\alpha - a\cos\vartheta)\sin^2\vartheta.$$

Чтобы упростить это уравнение, введем новую переменную $u = \cos\vartheta$. Тогда

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1-u^2) - (\beta - br_0u)^2 = f(u),$$

$$\dot\psi = \frac{\beta - br_0u}{1-u^2},$$

$$\dot\varphi = r_0 - u\dot\psi = r_0 - u\frac{\beta - br_0u}{1-u^2}.$$

Первое уравнение преобразованной системы полезно сопоставить с аналогичным уравнением в теории сферического маятника (§ 3.12). Сходство этих уравнений обусловливает сходство методов исследования движения. Закон $u(t)$ определяется свойствами функции $f(u)$.

Лемма 6.8.1. *Пусть в начальный момент t_0 движения задано $u(t_0) = u_0$, причем $f(u_0) > 0$. Тогда многочлен $f(u)$ имеет три действительных корня u_1, u_2, u', удовлетворяющих неравенствам*

$$-1 \le u_1 < u_0 < u_2 \le 1 < u' < +\infty.$$

Доказательство. Многочлен $f(u)$ — третьей степени, причем

$f(u) < 0$ при $u \to -\infty$, $\quad f(u) \le 0$ при $u = \pm1$,

$f(u) > 0$ при $u \to +\infty$, $\quad f(u_0) > 0$.

Кроме того, $|u_0| < 1$.□

Следствие 6.8.1. *Многочлен $f(u)$ можно представить в виде*

$$f(u) = a(u-u_1)(u_2-u)(u'-u).$$

Величина u вместе с u_0 должна во все время движения оставаться в интервале

$$u_1 \le u \le u_2,$$

так как по смыслу задачи $f(u)$ не может стать отрицательным. Угол нутации ϑ колеблется между двумя предельными углами

$$\vartheta_2 \le \vartheta \le \vartheta_1,$$

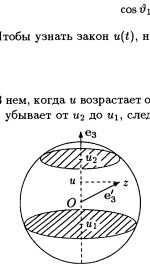
удовлетворяющими равенствам

$$\cos\vartheta_1 = u_1, \quad \cos\vartheta_2 = u_2.$$

Чтобы узнать закон $u(t)$, надо проинтегрировать уравнение

$$\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{f(u)}.$$

В нем, когда u возрастает от u_1 до u_2, следует брать знак "+". Когда u убывает от u_2 до u_1, следует брать знак "–".



В случае Лагранжа движения твердого тела точка z пересечения оси $\mathbf{e}_3'$ с единичной сферой принадлежит полосе между параллелями, соответствующими $\cos\vartheta_1 = u_1$ и $\cos\vartheta_2 = u_2$. Эти параллели получаются в результате сечения сферы заштрихованными горизонтальными плоскостями.

Рис. 6.8.1. Область допустимых положений точки z

Выполним качественное исследование движения. Возьмем единичную сферу с центром в неподвижной точке O и через O проведем вертикальную ось $\mathbf{c}$ с направляющим вектором $\mathbf{e}_3$ (рис. 6.8.1). На этой оси отметим точки, соответствующие значениям u_1 и u_2. Через них проведем горизонтальные плоскости, которые пересекут сферу по двум параллелям. Выделим точку z, в которой ось $\mathbf{e}_3'$ пересекает сферу. Параллель точки z задается величиной u. Точка z всегда заключена между параллелями, соответствующими u_1 и u_2, и описывает кривую, идущую от одной из них к другой. Когда эти две параллели близки между собой, ось тела $\mathbf{e}_3'$ приближенно описывает

круговой конус вокруг оси $\mathbf{e}_3$. Параллели могут совпадать, и тогда ось $\mathbf{e}_3'$ скользит по поверхности соответствующего кругового конуса. Во всех вариантах кривая, описываемая точкой z на сфере, достигает обеих параллелей.

Теорема 6.8.1. *При $-1 < u_1 < u_2 < 1$ в случае Лагранжа-Пуассона существуют только три типа кривых, описываемых точкой z на единичной сфере между ограничивающими параллелями ϑ_2 и ϑ_1.*

1. $|\beta/(br_0)| \ge 1$ или $|\beta/(br_0)| < 1$ и $\alpha < a\beta/(br_0)$. Тогда угол прецессии изменяется строго монотонно. Угловая скорость прецессии никогда не обращается в нуль. Кривая, описываемая точкой z, гладко касается обеих параллелей ϑ_2, ϑ_1 (рис. 6.8.2,а).

2. $\beta/(br_0) = u_2$. Тогда угол прецессии изменяется монотонно. Угловая скорость прецессии обращается в нуль на параллели ϑ_2. Кривая, описываемая концом z вектора $\mathbf{e}_3'$, имеет точки возврата на параллели ϑ_2 и гладко касается параллели ϑ_1 (рис. 6.8.2,б).

3. $|\beta/(br_0)| < 1$, $\alpha > a\beta/(br_0)$. Тогда угол прецессии меняется не монотонно. Угловые скорости прецессии имеют разные знаки на параллелях ϑ_1 и ϑ_2. Кривая, описываемая точкой z, имеет петлеобразный характер с точками самопересечения (рис. 6.8.2,в) и гладко касается обеих параллелей.

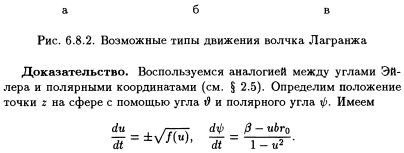


Рис. 6.8.2. Возможные типы движения волчка Лагранжа

Доказательство. Воспользуемся аналогией между углами Эйлера и полярными координатами (см. § 2.5). Определим положение точки z на сфере с помощью угла ϑ и полярного угла ψ. Имеем

$$\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{f(u)}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - ubr_0}{1-u^2}.$$

1. Обозначим $u_\psi = \beta/(br_0)$. Если u_ψ не принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, то $\dot\psi$ никогда не обращается в нуль. Так будет, если $|u_\psi| > 1$

или $f(u_\psi) < 0$. Из определения функции $f(u)$ получим, что

$$f(u_\psi) = \left(\alpha - \frac{a\beta}{br_0}\right)(1-u_\psi^2).$$

Когда $|u_\psi| < 1$, то $f(u_\psi)$ имеет тот же знак, что и выражение

$$\alpha - \frac{a\beta}{br_0}.$$

Если условие первого пункта теоремы выполнено, то $f(u_\psi) < 0$, и u_ψ не попадает в интервал между корнями u_1 и u_2. Угловая скорость прецессии сохраняет знак. На параллелях ϑ_1 и ϑ_2 производная $\dot u$ обращается в нуль. Кривая, описываемая точкой z и заданная параметрически: $u(t)$, $\psi(t)$, гладко касается этих параллелей. Первый пункт теоремы доказан.

2. Пусть u_ψ совпадает с одним из корней u_1 или u_2. Докажем, что это может быть только корень u_2. В самом деле, если $f(u_\psi) = 0$, то из вида функции $f(u)$ следует

$$\alpha = au_\psi.$$

В выражении $f(u)$ заменим α этим значением:

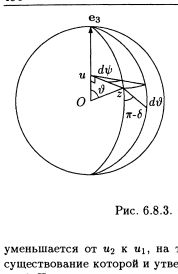
$$f(u) = (u_\psi - u)[a(1-u^2) - b^2r_0^2(u_\psi - u)].$$

Один из корней очевиден. Другой обращает в нуль выражение в квадратных скобках. Для этого корня должно быть $u_\psi > u$. Значит, u_ψ есть наибольший корень, и точки, в которых угловая скорость прецессии обращается в нуль, располагаются на верхней параллели, а не на нижней. Чтобы определить, как приближается траектория точки z к верхней параллели, вычислим угол δ между траекторией и меридианом, проведенным через вертикаль и точку z (рис. 6.8.3). Очевидно,

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\sin\vartheta\,d\psi}{d\vartheta} = \frac{(1-u^2)\dot\psi}{\dot u} = \frac{\beta r_0(u_\psi - u)}{\mp\sqrt{f(u)}}.$$

Когда $u \to u_\psi$, имеем $\delta \to 0$, а значит, точка z приближается к верхней параллели в направлении перпендикуляра и аналогично удаляется. На верхней параллели имеем точку возврата. Утверждение пункта 2 доказано.

3. Пусть $u_1 < u_\psi < u_2$. Тогда $\dot\psi$ обращается в нуль только на параллели, соответствующей значению u_ψ и лежащей внутри допустимой для точки z полосы. Знак $\dot\psi$ вблизи параллели ϑ_1 будет противоположен знаку $\dot\psi$ вблизи параллели ϑ_2. Когда u_ψ постепенно



Угол δ образован вектором касательной к траектории точки z на единичной сфере и соответствующим меридианом. Элементарное смещение точки вдоль траектории представляется в виде суммы смещений вдоль параллели на величину $d\psi\sin\vartheta$ и вдоль меридиана на величину $d\vartheta$. Если $\delta = 0$, касательная к траектории направлена вверх по меридиану. Если $\delta = \pi/2$, касательная к траектории направлена по параллели.

Рис. 6.8.3. Определение угла δ

уменьшается от u_2 к u_1, на траектории точки z образуется петля, существование которой и утверждает пункт 3.

4. Чем меньше u_ψ по сравнению с u_2, тем больше размер петель. При уменьшении u_ψ соседние точки, в которых траектория z касается параллели ϑ_1, сближаются. Покажем, что не существует значения параметра u_ψ, при котором эти точки совпадут.

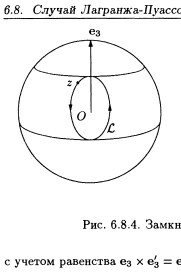
Примем противоположное. Пусть при некотором значении $u_\psi \in (u_1, u_2)$ соседние точки касания на параллели ϑ_1 совпали. На поверхности единичной сферы возникает замкнутая траектория $\mathcal{L}$ точки z (рис. 6.8.4). Ограниченная этой траекторией область $\mathcal{D}$ не содержит внутри себя конца вектора $\mathbf{e}_3$, принадлежащего пересечению единичной сферы с вертикальной осью. Конец вектора $\mathbf{e}_3$ может принадлежать лишь границе $\mathcal{L}$, когда $\vartheta = 0$. Поэтому вектор $\mathbf{e}_3'$, вычерчивая траекторию $\mathcal{L}$, не может совершать вращательное движение вокруг вертикальной оси $\mathbf{e}_3$.

Для удобства дальнейших преобразований введем базис, "полусвязанный с телом". Он образован единичным вектором $\mathbf{e}_2'$, направленным вдоль оси симметрии тела, ортогональным к нему единичным вектором $\mathbf{e}_1^{(2)}$, направленным по угловой скорости нутации (линии узлов) и расположенным в горизонтальной плоскости, и вектором $\mathbf{e}_2^{(2)}$, образующим с $\mathbf{e}_3'$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ правую тройку (рис. 2.5.1).

Из-за того, что $A = B$, оси $\mathbf{e}_1^{(2)}$ и $\mathbf{e}_2^{(2)}$ служат, как и оси $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$, главными осями инерции. Следовательно,

$$\boldsymbol\omega = \dot\vartheta\,\mathbf{e}_1^{(2)} + \dot\psi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_2^{(2)} + r_0\mathbf{e}_3^{(2)}, \quad \mathbf{K} = A\dot\vartheta\,\mathbf{e}_1^{(2)} + A\dot\psi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_2^{(2)} + Cr_0\mathbf{e}_3^{(2)}.$$

Возьмем плоскость $\mathcal{P}$, проходящую через вертикальную ось и вектор $\mathbf{K}$. Нормаль к этой плоскости параллельна вектору $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{K}$, который



В случае Лагранжа точка z пересечения оси симметрии волчка с единичной сферой не может описывать замкнутую кривую, аналогичную изображенной на рисунке. Эта точка все время находится вблизи вертикальной плоскости $\mathcal{P}$, содержащей вектор кинетического момента и монотонно вращающейся вокруг вертикали. Поэтому возможные типы движения изображающей точки z исчерпываются показанными на рис. 6.8.2.

Рис. 6.8.4. Замкнутая траектория точки z

с учетом равенства $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1^{(2)}\sin\vartheta$ принимает вид

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{K} = A\dot\vartheta(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1^{(2)}) + A\dot\psi\sin\vartheta(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2^{(2)}) + Cr_0\mathbf{e}_1^{(2)}\sin\vartheta.$$

По теореме 5.1.5 о кинетическом моменте скорость конца вектора $\mathbf{K}$ выражается формулой

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\zeta\mathbf{e}_3' \times mg\,\mathbf{e}_3 = \zeta mg\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3' = \zeta mg\,\mathbf{e}_1^{(2)}\sin\vartheta.$$

Найдем угловую скорость $\boldsymbol\omega_\Pi$ вращения плоскости $\mathcal{P}$. С этой целью вычислим смешанное произведение

$$(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{K})\cdot\mathbf{e}_1^{(2)} = A\dot\psi\sin\vartheta[(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2^{(2)})\cdot\mathbf{e}_1^{(2)}] + Cr_0\sin\vartheta =$$

$$= A\dot\psi\sin\vartheta[(\mathbf{e}_2^{(2)} \times \mathbf{e}_1^{(2)})\cdot\mathbf{e}_3] + Cr_0\sin\vartheta =$$

$$= -A\dot\psi\sin\vartheta(\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_3) + Cr_0\sin\vartheta = A\sin\vartheta(-\dot\psi\cos\vartheta + br_0) =$$

$$= \frac{Abr_0\sin\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left(-\frac{\beta}{br_0}\cos\vartheta + 1\right) = \frac{Abr_0}{\sin\vartheta}(1-u_\psi u).$$

Мы исследуем случай, когда $u_1 < u_\psi < u_2$. Следовательно, $|u_\psi u| < 1$, $r_0 \ne 0$, и рассматриваемое смешанное произведение сохраняет знак в процессе движения, никогда не обращаясь в нуль. Введем горизонтальную составляющую $\mathbf{K}_r$ вектора $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_r + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3.$$

Тогда $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{K} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{K}_r$. Угловая скорость вращения плоскости $\mathcal{P}$ выразится формулой

$$\boldsymbol\omega_\Pi = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{K}}{K_r^2}\cdot\frac{d\mathbf{K}}{dt} = Abr_0\zeta mg(1-u_\psi u)K_r^{-2}.$$

Заметим теперь, что вектор $\mathbf{e}_1^{(2)}$ ортогонален плоскости, содержащей векторы $\mathbf{e}_3'$ и $\mathbf{e}_3$. Значит, угол γ между этой плоскостью и плоскостью $\mathcal{P}$ удовлетворяет равенству

$$\cos\gamma = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{K})\cdot\mathbf{e}_1^{(2)}}{K_r} = \frac{Abr_0}{K_r\sin\vartheta}(1-u_\psi u).$$

Для определенности примем $r_0 > 0$. Тогда получим, что $\cos\gamma > 0$. Тем самым угол γ, изменяясь непрерывно, обязан во все время движения быть в диапазоне

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что если вектор $\mathbf{e}_3'$ вычерчивает замкнутую кривую $\mathcal{L}$, то плоскость $\mathcal{P}$ не может монотонно с ограниченной снизу угловой скоростью вращаться вокруг вектора $\mathbf{e}_3$. Это, однако, противоречит тому, что в данном случае $\omega_\Pi \ge \epsilon > 0$, где ϵ — постоянная.

Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и тогда, когда $r_0 < 0$.

Полученный результат убеждает нас в том, что путем непрерывных изменений начальных условий другие типы траекторий точки z, кроме тех, что содержатся в утверждении теоремы, найти невозможно. Вместе с тем имеет место непрерывная зависимость решений по начальным условиям.□

Теорема 6.8.2. *Для возникновения в случае Лагранжа-Пуассона регулярной прецессии вокруг вертикальной оси необходимо и достаточно выполнение в начальный момент времени движения следующих равенств:*

$$\dot\vartheta_0 = 0, \quad 2\dot\psi_0^2\cos\vartheta_0 - 2br_0\dot\psi_0 + a = 0.$$

Доказательство. Регулярная прецессия означает, что движение происходит при сохранении значений

$$\dot\vartheta = 0, \quad \dot\psi = \dot\psi_0, \quad \dot\varphi = \dot\varphi_0.$$

Так может быть только тогда, когда $u_1 = u_2 = \cos\vartheta_0$, т.е. u_1 должно быть кратным корнем уравнения $f(u) = 0$. Отсюда

$$\left.\frac{df}{du}\right|_{u_1} = 0.$$

Выполнив дифференцирование, найдем

$$-a(1-u_1^2) - 2u_1(\alpha - au_1) + 2br_0(\beta - br_0u_1) = 0.$$

Напомним, что

$$\alpha - au_1 = p^2 + q^2 = \dot\psi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2 = \dot\psi_0^2 \sin^2\vartheta_0,$$
$$\beta - br_0u_1 = \dot\psi_0 \sin^2\vartheta_0.$$

Учитывая эти выражения, получим уравнение

$$\sin^2\vartheta_0(2\dot\psi_0^2\cos\vartheta_0 - 2br_0\dot\psi_0 + a) = 0.$$

Оно имеет два решения: $\vartheta_0 = 0$, а также угол ϑ_0, для которого

$$2\dot\psi_0^2\cos\vartheta_0 - 2br_0\dot\psi_0 + a = 0.$$

Решение $\vartheta_0 = 0$ следует исключить, так как в условии теоремы речь идет о регулярной прецессии вокруг вертикальной оси. Следовательно, остаются условия, приведенные в утверждении теоремы. В силу тождественности преобразований они оказываются необходимыми и достаточными.□

Определение 6.8.1. Волчок Лагранжа, вращающийся вокруг вертикальной оси ($\vartheta \equiv 0$), называется *спящим волчком*.

Уравнения движения допускают решение, для которого $\vartheta \equiv 0$. Вопрос о том, будет ли волчок, закрученный вокруг вертикальной оси, спящим, по сути дела сводится к вопросу об устойчивости такого решения.

Теорема 6.8.3. (Условие Маи́евского). *Волчок Лагранжа, закрученный вокруг вертикальной оси, будет спящим тогда и только тогда, когда*

$$r_0^2 \geq \frac{4mg\zeta A}{C^2}.$$

Доказательство. В соответствии с условием теоремы ось волчка $\mathbf{e}_3'$ направлена в начальный момент вертикально: $\sin\vartheta_0 = 0$. Решение

$$\dot\vartheta \equiv 0, \quad \psi \equiv 0, \quad \dot\varphi \equiv \dot\varphi_0$$

удовлетворяет уравнениям движения. Найдем условие, при котором такое решение будет устойчиво по ϑ. Как следует из теоремы 6.8.2, корень $u = 1$ должен быть кратным корнем многочлена $f(u)$. При этом имеются две возможности:

1. Совпали корни u_2 и u'. В этом случае, очевидно, имеется корень $u_1 \neq u_2 = u'$, и малые возмущения начальных условий приведут к малым возмущениям корней, что приведет к большому отклонению ϑ от начального положения. Движение будет неустойчивым по ϑ.

2. Совпали корни u_1 и u_2. В этом случае малые возмущения приведут к малым отличиям обеих корней u_1 и u_2 друг от друга и от единицы. Движение в этом случае будет устойчивым.

Условие, позволяющее отделить первый случай от второго, состоит в том, что во втором случае при $u = 1$ функция $f(u)$ выпукла вверх, т.е. $d^2f/du^2 \leq 0$ или

$$2a - (\alpha - a) - b^2r_0^2 \leq 0.$$

Учитывая, что для рассматриваемых начальных условий $\alpha = a$, и выполняя необходимые преобразования, получаем утверждение теоремы.□

Определение 6.8.2. Волчок Лагранжа называется *быстро закрученным*, если в начальный момент времени угловые скорости прецессии и нутации равны нулю, угол нутации может быть отличен от нуля, и задана большая угловая скорость собственного вращения. Иначе говоря,

$$\dot\psi_0 = 0, \quad \dot\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_0 \neq 0, \quad br_0^2/a \gg 1.$$

Определение 6.8.3. *Псевдорегулярной прецессией* называется движение быстро закрученного волчка Лагранжа, происходящее между близкими с заданной точностью различными параллелями ϑ_1 и ϑ_2.

Теорема 6.8.4. *Для любого сколь угодно малого $\Delta\vartheta > 0$ существует угловая скорость собственного вращения, при которой быстро закрученный волчок Лагранжа осуществляет псевдорегулярную прецессию между параллелями ϑ_1 и $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta$.*

Доказательство. Для быстро закрученного волчка получим с помощью первых интегралов

$$\alpha = au_0, \quad \beta = br_0u_0,$$

где $u_0 = \cos\vartheta_0$. Функция $f(u)$ принимает вид

$$f(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0u)^2.$$

Подставим сюда вместо α и β их выражения через u_0:

$$f(u) = (u_0 - u)[a(1 + u^2) - b^2r_0^2(u_0 - u)].$$

Как и следовало ожидать, один из корней $f(u)$ равен u_0. Кроме того, $u_0 = u_\psi$, и значит, $u_0 = u_2$. На параллели u_0 имеем точки возврата (случай 2 теоремы 6.8.1). Корень u_1 находится из уравнения

$$a(1 - u_1^2) - b^2r_0^2(u_0 - u_1) = 0.$$

Отсюда

$$u_0 - u_1 = \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2r_0^2}.$$

При увеличении r_0 разность $u_0 - u_1$ стремится к нулю.□

Движение оси симметрии быстро закрученного волчка осуществляется в виде мелких нутационных дрожаний и прецессионного движения, происходящего все время в одну сторону. Реальный волчок при таком движении издает характерное гудение.

§ 6.9. Случай Ковалёвской

Пусть твердое тело под действием силы тяжести движется около неподвижной точки. Направим ортонормированные векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ с началом в этой точке по главным осям инерции тела. Соответствующие моменты инерции обозначим A, B, C. Примем, что между моментами инерции выполнено соотношение

$$A = B = 2C,$$

т.е. эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения вокруг оси $\mathbf{e}_3'$. Центр масс расположим в экваториальной плоскости этого эллипсоида (плоскости векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$). В рассматриваемом случае любая ось в экваториальной плоскости, проходящая через неподвижную точку, оказывается главной, и мы можем выбрать оси $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ так, чтобы радиус-вектор центра масс тела представился равенством

$$\mathbf{r}_c = \xi\mathbf{e}_1'.$$

Пусть неподвижный вектор $\mathbf{e}_3$, направленный вертикально вверх, имеет разложение

$$\mathbf{e}_3 = \gamma\,\mathbf{e}_1' + \gamma'\mathbf{e}_2' + \gamma''\mathbf{e}_3'.$$

Тогда сила тяжести выражается формулой $\mathbf{P} = -mg\,\mathbf{e}_3$, а силовая функция принимает вид

$$U = -mg\,\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}_c = -mg\xi\gamma.$$

Сила тяжести потенциальна, а ее момент относительно вертикальной оси равен нулю. Следовательно, имеем два первых интеграла уравнений движения — интеграл энергии и интеграл площадей относительно оси $\mathbf{e}_3$:

$$Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 + 2mg\xi\gamma = h,$$
$$Ap\gamma + Aq\gamma' + Cr\gamma'' = \beta.$$

Найдем еще один первый интеграл. Для этого рассмотрим динамические уравнения Эйлера

$$A\dot p + (C - A)qr = 0,$$
$$A\dot q + (A - C)pr = mg\xi\gamma'',$$
$$C\dot r = -mg\xi\gamma'.$$

Примем во внимание соотношения между моментами инерции и перепишем эту систему следующим образом:

$$2\dot p = qr, \quad 2\dot q = -pr + \gamma_3, \quad \dot r = -\gamma_2,$$

где

$$\gamma_3 = \frac{mg\xi}{C}\gamma'', \quad \gamma_2 = \frac{mg\xi}{C}\gamma', \quad \gamma_1 = \frac{mg\xi}{C}\gamma.$$

Величины γ_1, γ_2, γ_3 удовлетворяют дифференциальным уравнениям, аналогичным уравнениям Пуассона для вектора $\mathbf{e}_3$ (см. § 2.15):

$$\dot\gamma_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot\gamma_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot\gamma_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2.$$

Возьмем функцию

$$X = p^2 - q^2 - \gamma_1.$$

Вычислим производную от нее в силу уравнений движения твердого тела:

$$\frac{dX}{dt} = 2p\dot p - 2q\dot q - \dot\gamma_1 = r(2pq - \gamma_2).$$

Пусть теперь

$$Y = 2pq - \gamma_2.$$

Для этой функции найдем

$$\frac{dY}{dt} = 2\dot pq + 2p\dot q - \dot\gamma_2 = -r(p^2 - q^2 - \gamma_1) = -rX.$$

Следовательно, в силу уравнений движения выполняется равенство

$$X^2 + Y^2 = k^2,$$

где k — постоянная интегрирования. Это и есть искомый первый интеграл уравнений движения, называемый *интегралом Ковалевской*.

Четвертый "геометрический" интеграл уравнений выражает постоянство модуля вектора $mg\xi\mathbf{e}_3/C$:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \left(\frac{mg\xi}{C}\right)^2.$$

Как будет показано ниже (см. § 9.6), полученной совокупности первых интегралов в данном случае достаточно, чтобы найти фазовые траектории посредством квадратур. Качественное исследование решения в случае Ковалевской выходит за рамки настоящей книги. Здесь остановимся лишь на некоторых его свойствах.

Представим интеграл энергии в виде

$$Z - X = D = \frac{h}{A}, \quad Z = \frac{1}{2}r^2 + 2p^2.$$

В трехмерном пространстве введем прямоугольные оси и возьмем точку $\mathcal{N}(X, Y, Z)$. Координаты этой точки удовлетворяют равенствам

$$Z - X = D, \quad X^2 + Y^2 = k^2,$$

из которых ясно, что при движении тела точка $\mathcal{N}$ перемещается по эллипсу, служащему пересечением прямого кругового цилиндра радиуса k с образующей, параллельной оси Z, и плоскости, которая проходит параллельно оси Y, наклонена к оси X под углом $\pi/4$ и пересекает ось Z в точке с координатой D.

Спроектируем точку $\mathcal{N}$ на плоскость (X, Y). Получим новую точку $n(X, Y, 0)$. Из выражений для производных $\dot X, \dot Y$ можно усмотреть, что

$$X\dot Y - \dot XY = -r(X^2 + Y^2).$$

Пусть β — угол между радиусом-вектором точки n и осью X. Тогда из полученного равенства следует

$$\dot\beta = -r.$$

Другими словами, точка n движется по окружности радиуса k так, что угловая скорость ее радиуса-вектора равна $-r$.

§ 6.10. Частные первые интегралы

При изучении случаев Эйлера-Пуансо, Лагранжа-Пуассона, Ковалевской мы имели исчерпывающий набор так называемых алгебраических первых интегралов, справедливых при любых начальных

условиях и позволяющих исследовать движение с помощью квадратур. Других случаев существования полного набора подобных первых интегралов в задаче движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки не имеется. В связи с этим может быть поставлен вопрос о существовании в указанной задаче алгебраических первых интегралов, справедливых не во всей области начальных условий, а в какой-нибудь ее части. Утвердительный ответ дают случаи Бобылёва-Стекло́ва и Гёсса. Рассмотрим их.

Случай Бобылёва-Стеклова. Пусть между главными моментами инерции, взятыми относительно точки опоры, справедливо соотношение

$$B = 2A,$$

а центр масс принадлежит второй главной оси:

$$\mathbf{r}_c = \eta\mathbf{e}_2'.$$

Тогда система уравнений движения примет вид

$$A\dot p - (2A - C)qr = -mg\gamma''\eta, \quad \dot\gamma = r\gamma' - q\gamma'',$$
$$2A\dot q - (C - A)pr = 0, \quad \dot\gamma' = p\gamma'' - r\gamma,$$
$$C\dot r + Apq = mg\gamma\eta, \quad \dot\gamma'' = q\gamma - p\gamma',$$

где γ, γ', γ'' — координаты вертикального вектора $\mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ главных направлений инерции:

$$\mathbf{e}_3 = \gamma\mathbf{e}_1' + \gamma'\mathbf{e}_2' + \gamma''\mathbf{e}_3'.$$

Динамические уравнения Эйлера допускают следующее частное решение

$$r = 0, \quad q = q_0, \quad p = \frac{mg\eta}{Aq_0}\gamma = M\gamma.$$

Три уравнения Пуассона примут вид

$$\dot\gamma = -q_0\gamma'', \quad \dot\gamma' = M\gamma\gamma'', \quad \dot\gamma'' = \gamma(q_0 - M\gamma').$$

Кроме очевидного

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

для этих уравнений существует еще один первый интеграл

$$2q_0\gamma' + M\gamma^2 = \Gamma.$$

Отсюда

$$\gamma' = l - n\gamma^2, \quad l = \frac{\Gamma}{2q_0}, \quad n = \frac{M}{2q_0}.$$

Следовательно,

$$(\gamma'')^2 = 1 - \gamma^2 - (l - n\gamma^2)^2.$$

Найденное значение γ'' подставим в первое из уравнений Пуассона. Тогда интегрирование уравнений движения сводится к эллиптической квадратуре

$$-q_0dt = \pm\frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2 - (l - n\gamma^2)^2}}.$$

Таким образом, здесь мы получаем лишь частное решение задачи о движении тела.

Случай Гесса. Предположим, что все три момента инерции не равны между собой:

$$A > B > C,$$

а центр масс задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_c = \xi\mathbf{e}_1' + \zeta\mathbf{e}_3'.$$

Тогда система уравнений движения для рассматриваемого случая примет вид

$$A\dot p - (B - C)qr = mg\gamma'\zeta, \quad \dot\gamma = r\gamma' - q\gamma'',$$
$$B\dot q - (C - A)pr = mg(\gamma''\xi - \gamma\zeta), \quad \dot\gamma' = p\gamma'' - r\gamma,$$
$$C\dot r + (A - B)pq = -mg\gamma'\xi, \quad \dot\gamma'' = q\gamma - p\gamma'.$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии, интеграл площадей относительно вертикальной оси $\mathbf{e}_3 = \gamma\mathbf{e}_1' + \gamma'\mathbf{e}_2' + \gamma''\mathbf{e}_3'$ и геометрический интеграл вида $|\mathbf{e}_3| = 1$:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -2mg(\xi\gamma + \zeta\gamma'') + h,$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \sigma,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Из первого и третьего динамических уравнений Эйлера получим

$$A\xi\dot p + C\zeta\dot r - q[r\xi(B - C) + p\zeta(A - B)] = 0.$$

Потребуем теперь, чтобы для координат центра масс были выполнены соотношения

$$(B - C) = kC\zeta^2, \quad (A - B) = kA\xi^2,$$

где k — произвольный постоянный коэффициент. Тогда предыдущему дифференциальному уравнению можно придать вид

$$\frac{d}{dt}(A\xi p + C\zeta r) = kq\xi\zeta(A\xi p + C\zeta r).$$

Отсюда мы заключаем, что при подходящем выборе начальных условий будет справедлив частный интеграл, указанный Гессом:

$$A\xi p + C\zeta r = 0.$$

Начальные условия также должны удовлетворять этому равенству.

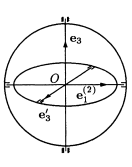
Помимо указанных в теории движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки существуют еще несколько случаев, когда справедливы алгебраические частные первые интегралы. Тогда можно решить задачу, получив закон движения посредством квадратур.

§ 6.11. Симметричный гироскоп

Одним из наиболее ярких примеров применения теории движения твердого тела около неподвижной точки служит гироскоп.

Определение 6.11.1. *Симметричный гироскоп* — это твердое тело, одна из точек которого O закреплена, а эллипсоид инерции относительно этой точки есть эллипсоид вращения. Ось симметрии эллипсоида $\mathbf{e}_3'$ называется осью фигуры гироскопа.

В технике для обеспечения вращения гироскопа вокруг одной из его точек часто применяется *карда́нов подвес*. Наиболее простая конструкция карданова подвеса представляет собой два кольца (рис. 6.11.1). Гироскоп может вращаться вокруг оси фигуры $\mathbf{e}_3'$ относительно внутреннего кольца. Внутреннее кольцо может вращаться вокруг оси $\mathbf{e}_1^{(2)}$ относительно внешнего. Внешнее кольцо может вращаться вокруг оси $\mathbf{e}_3$ неподвижной подставки. Ось $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярна как к $\mathbf{e}_3'$, так и к $\mathbf{e}_3$. Все три оси пересекаются в одной точке O, которая и будет здесь неподвижной точкой.



Карданов подвес образован двумя круговыми кольцами. Внешнее кольцо вращается вокруг оси, закрепленной в некоторой системе отсчета. Внутреннее кольцо вращается вокруг перпендикулярной оси, закрепленной во внешнем кольце. Само тело вращается вокруг оси $\mathbf{e}_3'$, закрепленной во внутреннем кольце. Тело имеет неподвижную точку O, лежащую в пересечении указанных осей.

Рис. 6.11.1. Карданов подвес

Из-за симметрии эллипсоида инерции гироскопа любая ось, проходящая через O и перпендикулярная к $\mathbf{e}_3'$, будет главной осью инерции, и моменты инерции гироскопа относительно таких осей будут одинаковыми. Обозначим эти моменты инерции A. Момент инерции относительно оси фигуры обозначим C.

Разложим угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ гироскопа по направлению оси фигуры и по направлению, к ней перпендикулярному. Вторую составляющую обозначим $\boldsymbol{\omega}_\perp$, а составляющую вдоль оси фигуры обозначим r. Составляющую $\boldsymbol{\omega}_\perp$ можно интерпретировать как угловую скорость оси фигуры, а r — как скорость собственного вращения вокруг этой оси.

Кинетический момент $\mathbf{K}$ гироскопа представим суммой

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\perp + Cr\mathbf{e}_3',$$

где $\mathbf{K}_\perp = A\boldsymbol{\omega}_\perp$. Величина $H = Cr$ называется *собственным моментом* гироскопа. Ей соответствует вектор $\mathbf{H} = Cr\mathbf{e}_3'$ собственного момента.

Пусть $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ — единичные направления каких-нибудь осей, перпендикулярных друг к другу и к оси $\mathbf{e}_3'$, образующих с $\mathbf{e}_3'$ правый репер и вращающихся так, что проекция угловой скорости репера $Oe_1'e_2'e_3'$ на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{e}_3'$, равна $\boldsymbol{\omega}_\perp$. Имеем

$$\boldsymbol{\omega}_\perp = p\mathbf{e}_1' + q\mathbf{e}_2', \quad \mathbf{K}_\perp = Ap\mathbf{e}_1' + Aq\mathbf{e}_2'.$$

Очевидно, что проекции угловой скорости репера $Oe_1'e_2'e_3'$ на направления $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ также должны быть равны p и q соответственно и лишь проекция r' угловой скорости репера на ось $\mathbf{e}_3'$ фигуры, вообще говоря, не равна r, так как векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ могут иметь вращение, независимое от гироскопа. Угловую скорость репера $Oe_1'e_2'e_3'$ обозначим $\boldsymbol{\omega}'$.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента: $\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{K} = \mathbf{M}$. В проекциях на оси репера $Oe_1'e_2'e_3'$ получим динамические уравнения

$$A\left(\frac{dp}{dt} - qr'\right) + Hq = M_1,$$

$$A\left(\frac{dq}{dt} + pr'\right) - Hp = M_2,$$

$$\frac{dH}{dt} = M_3.$$

Вектор, равный и противоположный скорости конца $\mathbf{K}$, есть момент того сопротивления, которое оказывает гироскоп внешним те-

лам, передающим момент $\mathbf{M}$. По смыслу этот вектор представляет собой главный момент сил инерции гироскопа. Из динамических уравнений видно, что инерционный момент образован следующими составляющими.

1. Моменты

$$-A\left(\frac{dp}{dt}-qr'\right)\mathbf{e}_1', \quad -A\left(\frac{dq}{dt}+pr'\right)\mathbf{e}_2',$$

не зависящие от угловой скорости r собственного вращения гироскопа, а потому сохраняющие свою величину, если остановить собственное вращение и превратить гироскоп в маятник. При этом ось фигуры должна занимать то же положение, что и ось вращающегося вокруг него гироскопа. Эти моменты обусловлены угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$.

2. Обращенная скорость

$$-\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{H}=\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega}'=-Hq\,\mathbf{e}_1'+Hp\,\mathbf{e}_2'$$

конца вектора $\mathbf{H}$. Она возникает от вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$. Так как $\mathbf{H}$ направлен вдоль оси фигуры, то

$$\boldsymbol{\Gamma}=(\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega}')=\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Этот момент представляет собой инерционное сопротивление, развиваемое вращающимся гироскопом при изменении направления его оси. Момент $\boldsymbol{\Gamma}$ называется *гироскопическим моментом*. Как видно из формулы, гироскопический момент перпендикулярен к плоскости, содержащей векторы $\mathbf{H}$ и $\boldsymbol{\omega}$, и направлен так, что он как бы стремится привести вектор $\mathbf{H}$ в совпадение с $\boldsymbol{\omega}$.

3. Составляющая

$$-\frac{dH}{dt}=-C\frac{dr}{dt},$$

откладываемая вдоль направления $\mathbf{e}_3'$, представляет собой инерционное сопротивление изменению скорости собственного вращения.

Пример 6.11.1. Рассмотрим действие гироскопического момента на винтовой самолет. Пусть винт самолета вращается по часовой стрелке, если смотреть из кабины пилота. Тогда вектор собственного момента $\mathbf{H}$ направлен по продольной оси самолета вперед. При повороте налево (левый вираж) самолету сообщается угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, направленная вверх. Гироскопический момент будет стремиться совместить вектор $\mathbf{H}$ с вектором $\boldsymbol{\omega}$ так, чтобы нос самолета поднимался вверх. Аналогично при правом вираже у самолета возникает тенденция опустить нос. Наоборот, когда специально поднимают нос самолета, то самолет стремится повернуть направо, а при опускании носа — налево. Способ борьбы с

этими явлениями состоит в уравновешивании гироскопического момента посредством управления.◇

Пусть к гироскопу не приложено никаких внешних моментов. Тогда имеет место случай Эйлера движения твердого тела при $A=B\neq C$. Кинетический момент $\mathbf{K}$ будет постоянным как по величине, так и по направлению. В соответствии с теоремой 6.7.4 гироскоп осуществляет регулярную прецессию вокруг вектора кинетического момента. Ось фигуры вращается вокруг него с постоянной угловой скоростью прецессии

$$\boldsymbol{\omega}_\text{п}=\mathbf{K}/A$$

и образует с ним постоянный угол ϑ. Постоянным будет также собственный момент $H=K\cos\vartheta$. Гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси фигуры, которая сама совершает равномерное вращение по круговому конусу вокруг постоянного направления $\mathbf{K}$. При этом чем больше угловая скорость r собственного вращения, тем меньше ϑ.

Изучим поведение оси фигуры при действии на гироскоп отличного от нуля внешнего момента.

Определение 6.11.2. *Кинетической осью* гироскопа называется линия, направленная вдоль вектора $\mathbf{K}$ кинетического момента.

Теорема 6.11.1. *Пусть ϑ — угол отклонения оси фигуры от кинетической оси гироскопа, $\boldsymbol{\omega}_\text{п}=\mathbf{K}/A$ — угловая скорость прецессии, которую имел бы гироскоп, если его освободить от внешнего момента. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\vartheta=0,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{\omega_\text{п}}{|r|}=\frac{C}{A}.$$

Доказательство. Угол ϑ между кинетической осью и осью фигуры определяется формулой

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{A\omega_2}{Cr}.$$

Кроме того,

$$\omega_\text{п}=\frac{K}{A}=\frac{1}{A}\sqrt{A^2\omega_2^2+(Cr)^2}=\frac{C}{A}|r|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}.$$

Когда $r\to\infty$, например, за счет начальной закрутки или воздействия вращающего момента вокруг оси $\mathbf{e}_3'$, и при этом остальные компоненты угловой скорости остаются ограниченными, то имеем $\operatorname{tg}\vartheta\to 0$, откуда и следует утверждение теоремы.□

Следствие 6.11.1. *При больших значениях $|r|$ амплитуда колебаний оси фигуры около кинетической оси будет малой, а угловая скорость прецессии оси фигуры достигает значительной величины порядка $|r|$.*

Следствие 6.11.2. *В общем случае, когда внешний момент $\mathbf{M}$ отличен от нуля, кинетическая ось не остается постоянной, а движется в соответствии с теоремой об изменении кинетического момента. Вместе с тем всегда существует столь большое значение угловой скорости r собственного вращения, что угол между осью гироскопа и кинетической осью будет сколь угодно малым.*

Следствие 6.11.3. *Когда собственное вращение r велико по сравнению с ω_3, колебания оси фигуры составляют лишь мелкое дрожание, не имеющее существенного значения для практики.*

От колебаний, указанных в следствии 6.11.3, в прикладной теории гироскопов часто отвлекаются и в качестве основной задачи занимаются изучением движения кинетической оси, рассматривая его как главную составляющую часть движения самой фигуры гироскопа.

Следствие 6.11.4. (Закон прецессии в прикладной теории. Правило Жукóвского). *Внешний момент $\mathbf{M}$, приложенный к гироскопу, заставляет кинетическую ось поворачиваться с мгновенной угловой скоростью*

$$\Omega=\frac{M\sin(\widehat{\mathbf{K},\mathbf{M}})}{K}$$

вокруг оси, перпендикулярной к плоскости векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$. Это вращение имеет тенденцию совместить вектор $\mathbf{K}$ с вектором $\mathbf{M}$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{M}_\text{п}$ проекцию момента $\mathbf{M}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\mathbf{K}$. Составляющая $\mathbf{M}_\text{п}$ не сказывается на изменении абсолютной величины $|\mathbf{K}|$ и вызывает лишь поворот вектора $\mathbf{K}$. Найдем угловую скорость $\Omega\mathbf{e}$ этого поворота. Здесь $\mathbf{e}$ — единичный вектор ее направления, перпендикулярный к вектору $\mathbf{K}$. Искомая угловая скорость удовлетворяет уравнению

$$\Omega\mathbf{e}\times\mathbf{K}=\mathbf{M}_\text{п}.$$

Отсюда

$$\mathbf{K}\times(\Omega\mathbf{e}\times\mathbf{K})=\mathbf{K}\times\mathbf{M}_\text{п}=\mathbf{K}\times\mathbf{M}$$

или

$$\Omega K^2\mathbf{e}-\Omega\mathbf{K}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{K})=\mathbf{K}\times\mathbf{M}.$$

По смыслу должно быть $\mathbf{e}\perp\mathbf{K}$. Поэтому

$$\Omega\mathbf{e}=\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{M}}{K^2}.\square$$

Так как угловая скорость Ω обратно пропорциональна абсолютной величине кинетического момента

$$K=C|r|\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta},$$

то движение оси быстро вращающегося гироскопа при прочих равных условиях происходит тем медленнее, чем больше его собственный момент. Этим объясняется факт чрезвычайно малой податливости (большой жесткости) оси фигуры такого гироскопа по отношению к приложенным к нему возмущающим силам.

Рассмотрим несколько примеров практического использования гироскопов.

Пример 6.11.2. Гиромаятником называется гироскоп с тремя степенями свободы, центр масс которого принадлежит оси фигуры (случай Лагранжа-Пуассона, см. § 6.8). Такой гироскоп служит основным чувствительным элементом гирогоризонта — прибора, предназначенного для надежного определения вертикали или перпендикулярной к ней горизонтальной плоскости. Гиромаятник движется, как быстро закрученный волчок Лагранжа. Ось фигуры подчиняется закону псевдорегулярной прецессии (теорема 6.8.4). Угловая скорость прецессии $\dot\psi$ направлена вдоль вертикального вектора $\mathbf{e}_3$. По теореме об изменении кинетического момента получим (рис. 6.11.2)

Вследствие быстрой закрутки волчка Лагранжа вокруг оси его симметрии, отклоненной от вертикали, любая точка этой оси описывает кривую, близкую к горизонтальной окружности. Если точку оси отметить, то плоскость горизонтальной окружности станет наблюдаемой и сможет служить опорой при проведении измерений.

Рис. 6.11.2. Принцип действия гирогоризонта

$$\dot\psi H\sin\vartheta=Pl\sin\vartheta.$$

Отсюда

$$\dot\psi=Pl/H,$$

где P — вес, l — расстояние от центра масс до неподвижной точки. Период прецессии рассчитывается по формуле

$$\tau=2\pi H/(Pl).$$

Конец оси фигуры будет приближенно описывать окружность, расположенную в горизонтальной плоскости.

Широта какого-либо места определяется по высоте над горизонтом одного из небесных светил. Для измерения высоты светила нужна горизонтальная плоскость, от которой производится отсчет. В условиях хорошей видимости для этой цели может служить естественная линия горизонта. При отсутствии видимости на суше можно пользоваться свободной поверхностью какой-нибудь жидкости или плоскостью, перпендикулярной к отвесу. Однако эти приспособления не должны двигаться ускоренно. В море, когда имеет место качка корабля, все эти способы неприемлемы. Одним из первых надежно работавших в этих условиях приборов с гироскопическим маятником был искусственный горизонт Флериэ (1886 г.).◇

Пример 6.11.3. Астатический гироскоп имеет центр масс, расположенный на пересечении карданових осей (случай Эйлера-Пуансо, § 6.7). Если такой гироскоп установить на земной поверхности и сообщить ему начальную угловую скорость, направленную по оси фигуры, то при отсутствии возмущающих сил эта ось будет сохранять постоянное направление в абсолютном репере. Астатический гироскоп применяется, например, для управления вертикальными рулями торпеды. В этом случае ось фигуры направлена в цель. Если торпеда сбивается с курса, то рама поворачивается относительно вертикального диаметра внешнего кольца подвеса. Это приведет в действие руль поворота, который выправит курс.◇

Пример 6.11.4. Чувствительным элементом указателя поворота самолета служит астатический гироскоп с двумя степенями свободы, ось которого вынуждена оставаться в плоскости, жестко связанной с самолетом. Ось фигуры удерживается пружиной вблизи нейтрального положения. При вращении самолета вокруг направления, перпендикулярного к оси фигуры гироскопа, развивается гироскопический момент, зависящий от угловой скорости вращения. Под действием этого момента ось фигуры, оттягивая пружину, переходит в новое положение равновесия, а ее отклонение передается на стрелку прибора.◇

Приведенные примеры иллюстрируют лишь основные механические принципы использования гироскопов. Современные гироскопические приборы имеют значительную сферу применения. Эти приборы устроены достаточно сложно, особенно когда они призваны длительно работать с высокой точностью в условиях действия возмущений.

§ 6.12. Волчок на гладкой горизонтальной плоскости

Пусть начало O и векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ абсолютного ортонормированного репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ принадлежат гладкой горизонтальной опорной плоскости. Направление $\mathbf{e}_3$ вертикально. Начало ортонормированного подвижного репера $C_\tau\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, жестко связанного с телом, примем в центре масс тела C_τ. Волчок (абсолютно твердое тело) будем считать динамически симметричным (как в случае Лагранжа, § 6.8):

$$A=B\neq C.$$

Вектор $\mathbf{e}_3'$ направим вдоль оси динамической симметрии. Предположим, что точка опоры D волчка о плоскость лежит на оси симметрии волчка. Расстояние от точки опоры до центра масс равно l. Угол между векторами $\mathbf{e}_3'$ и $\mathbf{e}_3$ по-прежнему обозначим ϑ (угол нутации). Радиус-вектор центра масс представим разложением по векторам абсолютного репера:

$$\mathbf{r}_c=r_1\mathbf{e}_1+r_2\mathbf{e}_2+r_3\mathbf{e}_3.$$

Уравнение связи, учитывающей действие опорной плоскости, будет иметь вид (рис. 6.12.1)

$$r_3-l\cos\vartheta=0.$$

Выражение для кинетической энергии волчка получим с помощью теоремы 5.2.2:

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}[A(\dot\psi^2\sin^2\vartheta+\dot\vartheta^2)+C(\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi)^2],$$

где ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения волчка (§ 6.8) в осях Кёнига, v_c — скорость центра масс:

$$v_c^2=\dot r_1^2+\dot r_2^2+\dot r_3^2.$$

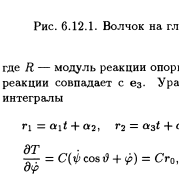
Сила тяжести имеет силовую функцию

$$U=-mg\,r_3.$$

Уравнения движения волчка примут вид (§ 6.6)

$$m\ddot r_1=0,\quad m\ddot r_2=0,\quad m\ddot r_3=-mg+R,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right)=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right)=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\vartheta}\right)=Rl\sin\vartheta,$$



Если в начальный момент времени движения горизонтальная составляющая скорости центра масс отсутствует, то волчок, опираясь о гладкую горизонтальную плоскость, движется так, что его центр масс перемещается все время только вдоль вертикальной оси. Точка опоры D волчка описывает на горизонтальной плоскости кривые, сходные по типу с изображенными на рис. 6.8.2.

Рис. 6.12.1. Волчок на гладкой горизонтальной плоскости

где R — модуль реакции опорной плоскости. Направляющий вектор реакции совпадает с $\mathbf{e}_3$. Уравнения допускают очевидные первые интегралы

$$r_1=\alpha_1 t+\alpha_2,\quad r_2=\alpha_3 t+\alpha_4,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=C(\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi)=Cr_0,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot\psi}=A\dot\psi\sin^2\vartheta+Cr_0\cos\vartheta=A\beta.$$

Здесь α_1, α_2, α_3, α_4, r_0, β — постоянные интегрирования. Кроме того, справедлив интеграл энергии

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}[A(\dot\psi^2\sin^2\vartheta+\dot\vartheta^2)+C(\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi)^2]=-mgr_3+h.$$

С учетом уравнения связи полученные интегралы позволяют закончить решение задачи с помощью квадратур. Пусть, в частности,

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0,$$

т.е. в начальный момент центр масс волчка проектируется в начало абсолютного репера и не имеет начальной горизонтальной скорости. Тогда, так как горизонтальные силы отсутствуют, в соответствии с интегралом количества движения центр масс волчка будет оставаться на вертикальной прямой, проходящей через точку O. Остальные первые интегралы составляют систему уравнений

$$\dot\psi^2\sin^2\vartheta+\dot\vartheta^2(1+a_1\sin^2\vartheta)=\alpha-a\cos\vartheta,$$
$$\dot\psi\sin^2\vartheta=\beta-br_0\cos\vartheta,$$
$$\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi=r_0,$$

где $a=2mgl/A$, $a_1=ml^2/A$, $\alpha=(2h-Cr_0^2)/A$, $b=C/A$. Видим, что мы вполне можем применить технику исследования движения, оказавшуюся полезной в случае Лагранжа-Пуассона (§ 6.8). В частности, после введения переменной $u=\cos\vartheta$ получим

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{f(u)}{1+a_1(1-u^2)},\quad \dot\psi=\frac{\beta-br_0u}{1-u^2},\quad \dot\varphi=r_0-\dot\psi u.$$

Многочлен $f(u)$ оказывается в точности таким же, как при изучении волчка Лагранжа. Поэтому качественный анализ поведения углов ϑ, ψ, φ, проведенный в § 6.8, остается справедливым и в данном случае. Однако реальная картина движения будет здесь несколько иной. Чтобы показать это, зададим следующие начальные условия

$$\dot\psi_0=0,\quad \dot\vartheta_0=0,\quad \dot r_{30}=0,\quad \vartheta_0>0,\quad \dot\varphi_0\neq 0.$$

Рассмотрим уравнение относительно переменной u:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2[1+a_1(1-u^2)]=(u_0-u)[a(1-u^2)-b^2r_0^2(u_0-u)].$$

Угол ϑ не может принимать значений, для которых правая часть отрицательна. Следовательно, $\vartheta\geq\vartheta_0$. Вместе с тем ϑ не может увеличиться до значения π, так как при $\vartheta=\pi$ имеем $u=-1$ и

$$f(u)=-(1+u_0)^2b^2r_0^2<0.$$

Следовательно, ϑ может достичь лишь некоторого значения $\vartheta_1<\pi$. Итак, значения ϑ заключены в пределах

$$\vartheta_0\leq\vartheta\leq\vartheta_1<\pi.$$

Обозначим ρ модуль радиуса-вектора точки D опоры волчка о плоскость, проведенного из начала O абсолютного репера (рис. 6.12.1). Очевидно, что

$$l\sin\vartheta_0\leq\rho\leq l\sin\vartheta_1,$$

т.е. траектория точки D заключена между двумя концентрическими окружностями радиусов

$$\rho_0=l\sin\vartheta_0,\quad \rho_1=l\sin\vartheta_1$$

с центром в точке O. Заметим, что когда $\vartheta=\vartheta_0$, угловая скорость прецессии обращается в 0. Поэтому траектория D имеет на внутренней окружности радиуса ρ_0 точки возврата. Очевидно, что чем

больше будет $\dot\varphi_0$, тем меньше разница между радиусами упомянутых окружностей.

Во всем предыдущем изложении предполагалось, что ни для значения $\vartheta=\vartheta_0$, ни для значения $\vartheta=\vartheta_1$, ни для промежуточных значений ϑ волчок, кроме точки D, не имеет с плоскостью общих точек. Если это не так, то задача о движении тела становится существенно более сложной.

§ 6.13. Относительное равновесие спутника

Рассмотрим движение абсолютно твердого спутника в центральном поле тяготения сферической Земли. По теореме об изменении количества движения центр масс спутника в центральном ньютонианском поле сил будет двигаться как материальная точка с массой, равной массе m спутника (§ 3.11). Предположим, что траектория центра масс есть окружность радиуса R с центром в центре Земли.

Из центра O Земли проведем радиус-вектор $\mathbf{R}$ центра масс спутника. Выберем вращающийся репер $O\mathbf{e}_1''\mathbf{e}_2''\mathbf{e}_3''$ так, чтобы ось $\mathbf{e}_3''$ была коллинеарна $\mathbf{R}$, ось $\mathbf{e}_2''$ — параллельна скорости v центра масс, ось $\mathbf{e}_1''$ — перпендикулярна к плоскости орбиты и составляла с указанными двумя правую тройку. Относительно абсолютного (см. § 3.14) репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ репер $O\mathbf{e}_1''\mathbf{e}_2''\mathbf{e}_3''$ вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega=v/R$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1''=\mathbf{e}_1$. Найдем условие, при котором спутник будет находиться в равновесии относительно вращающегося репера $O\mathbf{e}_1''\mathbf{e}_2''\mathbf{e}_3''$ под действием сил тяготения и сил инерции: центробежных и кориолисовых.

Силовая функция, описывающая действие центрального поля на спутник, имеет вид

$$U=\mu\int_V\frac{dm}{r},$$

где V — объем спутника, $\mu=fM$ — произведение гравитационной постоянной на массу M Земли, r — расстояние от элемента спутника массы dm до точки O. Пусть $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор элемента dm относительно центра масс спутника. Тогда

$$r=\sqrt{R^2+2R\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_3''+(\mathbf{r}')^2}.$$

В подынтегральном выражении силовой функции переменным интегрирования будет вектор $\mathbf{r}'$. Следовательно,

$$U=U(R,\mathbf{e}_3'').$$

Тем самым силовая функция зависит от радиуса орбиты и положения спутника на орбите, характеризуемого вектором $\mathbf{e}_3''$. При вращениях спутника относительно центра масс величина R не меняется. Меняется ориентация вектора $\mathbf{e}_3''$ относительно спутника.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор дифференциала вращения (см. § 2.10) спутника около центра масс. Тогда виртуальное перемещение вектора $\mathbf{e}_3''$ относительно спутника примет вид

$$\delta\mathbf{e}_3'' = -\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_3''.$$

Отсюда получим приращение силовой функции U на виртуальном перемещении спутника, определенном дифференциалом $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_3''}\cdot\delta\mathbf{e}_3'' = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_3''}\cdot(\mathbf{e}_3''\times\boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_3''}\times\mathbf{e}_3''\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}.$$

Следовательно, вектор момента гравитационных сил относительно центра масс спутника может быть найден по формуле (см. § 4.8):

$$\mathbf{M}_g = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_3''}\times\mathbf{e}_3''.$$

Конкретный вид U зависит от формы тела и распределения массы в его объеме. Предположим, что размеры спутника малы по сравнению с радиусом орбиты ($\mathbf{r}'/R \ll 1$) настолько, что функцию $\mathbf{r}^{-1}$ можно разложить в ряд Тейлора, оставив в нем лишь величины до второго порядка малости включительно. Тогда

$$\mathbf{r}^{-1} \approx \frac{1}{R}\left[1 - \frac{\mathbf{r}'}{R}\cdot\mathbf{e}_3'' - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{R^2} + \frac{3}{8}\left(2\frac{\mathbf{r}'}{R}\cdot\mathbf{e}_3''\right)^2\right].$$

Пусть жестко связанный с телом ортонормированный репер $O_c\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ задает главные центральные оси инерции спутника:

$$\mathbf{r}' = \rho_1\mathbf{e}_1' + \rho_2\mathbf{e}_2' + \rho_3\mathbf{e}_3',$$

$$\int_V \rho_1\,dm = \int_V \rho_2\,dm = \int_V \rho_3\,dm = \int_V \rho_1\rho_2\,dm = \int_V \rho_1\rho_3\,dm = \int_V \rho_2\rho_3\,dm = 0.$$

Как и прежде, главные моменты инерции обозначим

$$A = \int_V (\rho_2^2+\rho_3^2)\,dm, \quad B = \int_V (\rho_3^2+\rho_1^2)\,dm, \quad C = \int_V (\rho_1^2+\rho_2^2)\,dm.$$

Кроме того, положим

$$\mathbf{e}_3'' = \gamma\mathbf{e}_1' + \gamma'\mathbf{e}_2' + \gamma''\mathbf{e}_3'.$$

Выполним теперь необходимые преобразования, опуская заведомо равные нулю члены.

$$U \approx \frac{\mu}{R}\int_V\left\{1 + \frac{\rho_2^2+\rho_3^2+\rho_3^2+\rho_1^2+\rho_1^2+\rho_2^2}{2R^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2R^2}[(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2) - \rho_1^2\gamma^2 - \rho_2^2\gamma'^2 - \rho_3^2\gamma''^2]\right\}dm.$$

Учитывая обозначения для моментов инерции, получим приближенную (до членов второго порядка малости по размерам спутника относительно радиуса орбиты) формулу для гравитационной силовой функции

$$U = \frac{\mu m}{R} + \frac{\mu}{2R^3}(A+B+C) - \frac{3\mu}{2R^3}(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2).$$

Первые два члена этой формулы постоянны при фиксированном радиусе орбиты и потому не существенны. Выражение в скобках у третьего члена есть момент инерции спутника относительно оси c направляющим вектором $\mathbf{e}_3''$, т.е. относительно радиуса-вектора центра масс.

Вычислим гравитационный момент $\mathbf{M}_g$:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_3''} = -\frac{3\mu}{R^3}(A\gamma\,\mathbf{e}_1' + B\gamma'\,\mathbf{e}_2' + C\gamma''\,\mathbf{e}_3'),$$

$$\mathbf{M}_g = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_3''}\times\mathbf{e}_3'' = \frac{3\mu}{R^3}[(C-B)\gamma''\gamma'\mathbf{e}_1' + (A-C)\gamma\gamma''\mathbf{e}_2' + (B-A)\gamma'\gamma\mathbf{e}_3'].$$

Перейдем к учету влияния сил инерции. Силы инерции из-за вращения системы координат имеют при постоянной угловой скорости переносного движения силовую функцию (теорема 3.13.3)

$$U_{\text{в}} = \frac{\Omega^2}{2}\int_V[\mathbf{r}^2 - (\mathbf{e}_1''\cdot\mathbf{r}')^2]\,dm = \frac{\Omega^2}{2}\int_V\{(R\,\mathbf{e}_3''+\mathbf{r}')^2 - [\mathbf{e}_1''\cdot(R\,\mathbf{e}_3''+\mathbf{r}')]^2\}\,dm =$$
$$= \frac{m\Omega^2R^2}{2} + \Omega^2R\int_V(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{e}_3'')\,dm + \frac{\Omega^2}{2}\int_V[\mathbf{r}'^2 - (\mathbf{e}_1''\cdot\mathbf{r}')^2]\,dm.$$

Пусть в репере $O_c\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, жестко связанном со спутником, вектор $\mathbf{e}_1''$ имеет разложение

$$\mathbf{e}_1'' = \beta_1\,\mathbf{e}_1' + \beta_2\,\mathbf{e}_2' + \beta_3\,\mathbf{e}_3'.$$

Тогда

$$\int_V[\mathbf{r}'^2 - (\mathbf{e}_1''\cdot\mathbf{r}')^2]\,dm = \int_V[r'^2(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2) - (\beta_1\rho_1+\beta_2\rho_2+\beta_3\rho_3)^2]\,dm.$$

С учетом свойств осей $O_c\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ окончательно найдем

$$U_{\text{в}} = \frac{m\Omega^2R^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2}(A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2).$$

Заметим, что в круглых скобках стоит момент инерции спутника относительно оси $\mathbf{e}_1''$.

Момент $\mathbf{M}_{\text{в}}$ сил инерции из-за вращения репера $Oe_1''e_2''e_3''$ выражается формулой, аналогичной формуле для гравитационного момента:

$$\mathbf{M}_{\text{в}} = \frac{\partial U_{\text{в}}}{\partial \mathbf{e}_1''}\times\mathbf{e}_1'' = \Omega^2[(B-C)\beta_2\beta_3\mathbf{e}_1' + (C-A)\beta_3\beta_1\mathbf{e}_2' + (A-B)\beta_2\beta_1\mathbf{e}_3'].$$

Вычислим момент, создаваемый силами Кориолиса относительно центра масс:

$$\mathbf{M}_k = -2\Omega\int_V\mathbf{r}'\times(\mathbf{e}_1''\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'))\,dm = 2\Omega\int_V\mathbf{r}'\times[\mathbf{r}'(\mathbf{e}_1''\cdot\boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{e}_1''\cdot\mathbf{r}')]\,dm =$$
$$= 2\Omega\int_V(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')(\mathbf{e}_1''\cdot\mathbf{r}')\,dm,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость спутника относительно репера $O_c\mathbf{e}_1''\mathbf{e}_2''\mathbf{e}_3''$, так что относительная скорость $\mathbf{v}_r$ точки спутника с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$ выражается формулой

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'.$$

Заметим теперь, что в осях, связанных с телом, имеем разложения $\mathbf{r}' = \rho_1\mathbf{e}_1' + \rho_2\mathbf{e}_2' + \rho_3\mathbf{e}_3'$, $\boldsymbol{\omega} = p\,\mathbf{e}_1' + q\,\mathbf{e}_2' + r\,\mathbf{e}_3'$ и, следовательно,

$$\int_V\rho_1^2\,dm = \frac{1}{2}(B+C-A),\ \int_V\rho_2^2\,dm = \frac{1}{2}(C+A-B),\ \int_V\rho_3^2\,dm = \frac{1}{2}(A+B-C).$$

Поэтому момент сил Кориолиса принимает вид

$$\mathbf{M}_k = \Omega\{[q\beta_3(A+B-C) - r\beta_2(C+A-B)]\mathbf{e}_1' +$$
$$+[r\beta_1(B+C-A) - p\beta_3(A+B-C)]\mathbf{e}_2' +$$
$$+[p\beta_2(C+A-B) - q\beta_1(B+C-A)]\mathbf{e}_3'\}.$$

При изучении стационарных положений спутника относительно репера $Oe_1''e_2''e_3''$ следует принять во внимание, что силы Кориолиса не совершают работы на относительном действительном перемещении спутника, а при относительном равновесии, когда $\boldsymbol{\omega} = 0$, они вообще отсутствуют.

Рассмотрим потенциальную энергию гравитационных сил и сил инерции. Для круговой орбиты $\Omega^2 = \mu/R^3$ (см. § 3.11). Поэтому

$$\Pi = \frac{\Omega^2}{2}[3(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) - (A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2)].$$

В положении равновесия потенциальная энергия спутника должна иметь стационарное значение.

Теорема 6.13.1. *В принятых предположениях сумма потенциальных энергий гравитационных сил и сил инерции принимает минимальное значение, когда наибольшая ось эллипсоида инерции направлена вдоль радиуса-вектора центра масс, а наименьшая — по нормали к плоскости орбиты.*

Доказательство. Из выражения для потенциальной энергии следует, что ее абсолютный минимум достигается, если минимально выражение

$$A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2.$$

Как отмечалось выше, это есть момент инерции относительно оси $\mathbf{e}_3''$. Следовательно, ось c наименьшим моментом инерции должна быть направлена вдоль вектора $\mathbf{e}_3''$. Аналогично в положении абсолютного минимума потенциальной энергии должно быть максимально выражение

$$A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2,$$

а оно есть момент инерции относительно оси $\mathbf{e}_1''$. Следовательно, ось c наибольшим моментом инерции должна быть направлена вдоль оси $\mathbf{e}_1''$. □

Особо подчеркнем, что теорема 6.13.1 была получена в предположении, что спутник не влияет на движение центра масс Земли и что размеры спутника малы по сравнению с расстоянием до центра Земли.

§ 6.14. Качение диска по горизонтальной плоскости

В повседневной жизни часто встречается движение, при котором одна поверхность катится по другой. Примерами могут служить колеса транспортных средств, катящиеся по опорной поверхности, шарикоподшипниковые соединения, мельничные жернова и многие другие устройства. Часто это — механические системы с неголономными связями. Здесь мы рассмотрим простейшие модели, связанные с качением.

Определение 6.14.1. *Диском* называется абсолютно твердое тело, на поверхности которого выделена окружность. Точки соприкосновения этого тела с опорной поверхностью могут располагаться только на выделенной окружности. *Ободом* называется диск, вся масса которого сосредоточена на окружности, по которой обруч может соприкасаться с опорной поверхностью. Считается, что диск упал, если в процессе движения возникают точки соприкосновения диска с опорной поверхностью, не принадлежащие выделенной для этого окружности.

Предположим, что диск катится по опорной абсолютно шероховатой (отсутствует проскальзывание точки диска, находящейся в контакте с опорой) горизонтальной плоскости под действием силы тяжести. Правоориентированный абсолютный репер $Oe_1e_2e_3$ выберем так, чтобы его начало и ортонормированные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ принадлежали опорной поверхности, единичный вектор $\mathbf{e}_3$ направим по вертикали вверх. Пусть диск соприкасается с опорной плоскостью в точке $O_{\text{п}}$, заданной радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_{\text{п}} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2.$$

Введем ортонормированный подвижный репер $O_{\text{п}}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ с началом в точке $O_{\text{п}}$ (рис. 6.14.1). Вектор $\mathbf{e}_1'$ направим по касательной к опорной окружности диска, вектор $\mathbf{e}_2'$ — по радиусу к центру опорной окружности, вектор $\mathbf{e}_3'$ — перпендикулярно к плоскости опорной окружности так, чтобы вместе с векторами $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ он образовывал правую тройку. Обозначим ψ угол курса между векторами $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_1$, ϑ — угол между векторами $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3$ (характеризует наклон опорной окружности к опорной плоскости), φ — угол собственного вращения диска. Если R — радиус опорной окружности, то $R\varphi$ есть дуга между точкой $O_{\text{п}}$ и некоторой жестко зафиксированной точкой на окружности.

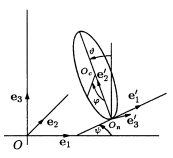
Очевидно, что пять величин

$$r_1, \quad r_2, \quad \vartheta, \quad \psi, \quad \varphi$$

однозначно определяют положение диска в пространстве и могут служить лагранжевыми координатами задачи.

Чтобы получить уравнения движения диска по плоскости, воспользуемся теоремой 5.2.4 об изменении кинетического момента $\mathbf{K}'$, взятого относительно подвижной точки $O_{\text{п}}$.

Для простоты примем, что центр масс диска расположен в центре O_c опорной окружности, а центральный эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения вокруг оси, параллельной вектору $\mathbf{e}_3'$ и проходящей через O_c. Это означает, что моменты инерции, взятые относительно осей репера $O_{\text{п}}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, не будут изменяться при движении диска.



Плоскость опорной окружности диска пересекает горизонтальную плоскость по прямой с направляющим вектором курса $\mathbf{e}_1'$. Плоскость окружности наклонена и составляет с вертикалью угол ϑ. Угол φ собственного вращения диска отсчитывается от проекции вертикали из точки $O_{\text{п}}$ на плоскость диска. Точка $O_{\text{п}}$ соприкосновения диска с плоскостью имеет скорость, направленную вдоль линии курса.

Рис. 6.14.1. Диск на горизонтальной плоскости

Закон изменения вектора $\mathbf{K}'$ в репере $O_{\text{п}}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ выражается уравнением

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{\text{п}}\times\mathbf{K}' + m\mathbf{v}_{\text{п}}\times\mathbf{v}_c = \mathbf{M}_g,$$

где m — масса диска, $\boldsymbol{\omega}_{\text{п}}$ — угловая скорость репера $O_{\text{п}}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, $\mathbf{v}_{\text{п}}$ и $\mathbf{v}_c$ — скорости точки $O_{\text{п}}$ и центра диска O_c соответственно, $\mathbf{M}_g$ — момент силы тяжести:

$$\mathbf{M}_g = -mgR\sin\vartheta\,\mathbf{e}_1'.$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}_{\text{п}}$ можно представить с помощью разложения

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{п}} = \Omega_1\mathbf{e}_1' + \Omega_2\mathbf{e}_2' + \Omega_3\mathbf{e}_3' = -\dot\vartheta\,\mathbf{e}_1' + \dot\psi\cos\vartheta\,\mathbf{e}_2' + \dot\psi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_3'.$$

Поворот по углу ϑ осуществляется вокруг оси $\mathbf{e}_1'$, а по углу курса ψ — вокруг оси, параллельной вектору $\mathbf{e}_3$ и проходящей через $O_{\text{п}}$.

По отношению к подвижному реперу $O_{\text{п}}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ поле скоростей диска вращательное с угловой скоростью $\dot\varphi$ вокруг оси $\mathbf{e}_3'$, так как относительное поле скоростей плоскопараллельно и вследствие абсолютной шероховатости поверхности точка $O_{\text{п}}$ есть мгновенный центр относительных скоростей диска (§ 2.14). Угловая скорость диска равна

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1' + \omega_2\mathbf{e}_2' + \omega_3\mathbf{e}_3' = \boldsymbol{\omega}_{\text{п}} + \dot\varphi\mathbf{e}_3'.$$

Из-за отсутствия проскальзывания диска относительно опоры в точке $O_{\text{п}}$ скорость $\mathbf{v}_{\text{п}}$ этой точки выражается уравнением неголономной связи

$$\mathbf{v}_{\text{п}} = -\dot\varphi R\,\mathbf{e}_1'.$$

Скорость центра масс O_c дается равенством

$$\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\omega}\times R\,\mathbf{e}_2'.$$

Для подсчета кинетического момента диска относительно точки $O_{\text{п}}$ воспользуемся теоремой 5.2.1 Кёнига:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}^* + \mathbf{K}_c,$$

где $\mathbf{K}_c$ — кинетический момент центра масс:

$$\mathbf{K}_c = mR^2\mathbf{e}_2'\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2') = mR^2(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{e}_2'\omega_2) = mR^2[-\dot\vartheta\,\mathbf{e}_1' + (\dot\psi\sin\vartheta+\dot\varphi)\mathbf{e}_3'],$$

а $\mathbf{K}^*$ — кинетический момент диска относительно его центра масс.

По предположению, оси $O_c\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ — главные центральные, несмотря на вращение диска по углу φ, так как $A = B$. Поэтому

$$\mathbf{K}^* = A(-\dot\vartheta\,\mathbf{e}_1' + \dot\psi\cos\vartheta\,\mathbf{e}_2') + C(\dot\psi\sin\vartheta+\dot\varphi)\mathbf{e}_3'.$$

Следовательно,

$$\mathbf{K}' = -(A+mR^2)\dot\vartheta\mathbf{e}_1' + A\dot\psi\cos\vartheta\,\mathbf{e}_2' + (C+mR^2)(\dot\psi\sin\vartheta+\dot\varphi)\mathbf{e}_3' =$$
$$= (A+mR^2)\omega_1\mathbf{e}_1' + A\omega_2\mathbf{e}_2' + (C+mR^2)\omega_3\mathbf{e}_3'.$$

Вычислим теперь векторное произведение $\mathbf{v}_{\text{п}}\times\mathbf{v}_c$. Сначала заметим, что

$$\mathbf{v}_c = (\boldsymbol{\omega}_{\text{п}} + \dot\varphi\,\mathbf{e}_3')\times R\,\mathbf{e}_2' = R(\boldsymbol{\omega}_{\text{п}}\times\mathbf{e}_2' - \dot\varphi\,\mathbf{e}_1').$$

Поэтому

$$\mathbf{v}_{\text{п}}\times\mathbf{v}_c = -\dot\varphi R^2\mathbf{e}_1'\times(\boldsymbol{\omega}_{\text{п}}\times\mathbf{e}_2' - \dot\varphi\,\mathbf{e}_1') = -\dot\varphi R^2\mathbf{e}_1'\times(\boldsymbol{\omega}_{\text{п}}\times\mathbf{e}_2') = \dot\varphi R^2\Omega_1\mathbf{e}_2'.$$

Далее легко получить, что

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{п}}\times\mathbf{K}' = [(C+mR^2)\omega_3\Omega_2 - A\omega_2\Omega_3]\mathbf{e}_1' +$$
$$+[(A+mR^2)\omega_1\Omega_3 - (C+mR^2)\omega_3\Omega_1]\mathbf{e}_2' +$$
$$+[A\omega_2\Omega_1 - (A+mR^2)\omega_1\Omega_2]\mathbf{e}_3'.$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых базисных векторах в уравнении кинетического момента, найдем систему динамических уравнений движения

$$(A+mR^2)\dot\omega_1 + (C+mR^2)\omega_3\Omega_2 - A\omega_2\Omega_3 = -mgR\sin\vartheta,$$
$$A\dot\omega_2 + (A+mR^2)\omega_1\Omega_3 - (C+mR^2)\omega_3\Omega_1 + m\dot\varphi R^2\Omega_1 = 0,$$
$$(C+mR^2)\dot\omega_3 + A\omega_2\Omega_1 - (A+mR^2)\omega_1\Omega_2 = 0.$$

Чтобы замкнуть эту систему уравнений, к ней следует добавить следующие кинематические уравнения:

$$\omega_1 = \Omega_1 = -\dot\vartheta, \quad \omega_2 = \Omega_2 = \dot\psi\cos\vartheta, \quad \omega_3 = \Omega_3 + \dot\varphi = \dot\psi\sin\vartheta + \dot\varphi.$$

Пример 6.14.1. Найдем уравнения движения обруча, катящегося по абсолютно шероховатой плоскости. В соответствии с примером 1.14.6 будем иметь

$$A = B = \frac{1}{2}mR^2, \quad C = mR^2.$$

Поэтому система динамических уравнений примет вид

$$\frac{3}{2}\dot\omega_1 + 2\omega_3\Omega_2 - \frac{1}{2}\omega_2\Omega_3 = -\frac{g}{R}\sin\vartheta,$$
$$\frac{1}{2}\dot\omega_2 + \frac{3}{2}\omega_1\Omega_3 - 2\omega_3\Omega_1 + \dot\varphi\Omega_1 = 0,$$
$$2\dot\omega_3 + \frac{1}{2}\omega_2\Omega_1 - \frac{3}{2}\omega_1\Omega_2 = 0.\diamond$$

Пример 6.14.2. Напишем динамическую систему уравнений для материального круга массы m, катящегося по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Воспользовавшись результатом примера 1.14.7, найдем

$$A = B = \frac{1}{4}mR^2, \quad C = \frac{1}{2}mR^2.$$

Имеем следующие динамические уравнения:

$$\frac{5}{4}\dot\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_3\Omega_2 - \frac{1}{4}\omega_2\Omega_3 = -\frac{g}{R}\sin\vartheta,$$
$$\frac{1}{4}\dot\omega_2 + \frac{5}{4}\omega_1\Omega_3 - \frac{3}{2}\omega_3\Omega_1 + \dot\varphi\Omega_1 = 0,$$
$$\frac{3}{2}\dot\omega_3 + \frac{1}{4}\omega_2\Omega_1 - \frac{5}{4}\omega_1\Omega_2 = 0.\diamond$$

Рассмотрим так называемые *циклические движения* диска, т.е. движения с постоянными значениями величин ϑ, ω_2, ω_3. Если ϑ постоянно, то $\omega_1 = \Omega_1 = \dot\vartheta = 0$, и при неизменных значениях ω_2, ω_3, второе и третье динамические уравнения диска удовлетворяются тождественно. Из первого динамического уравнения видим, что при таком движении должно быть

$$(C+mR^2)\omega_3\Omega_2 - A\omega_2(\omega_3 - \dot\varphi) = -mgR\sin\vartheta.$$

Исключив $\dot\varphi$ с помощью кинематического уравнения

$$\dot\varphi = \omega_3 - \omega_2\operatorname{tg}\vartheta,$$

получим условие совместности

$$A\omega_2^2\operatorname{tg}\vartheta - (C+mR^2)\omega_3\Omega_2 = mgR\sin\vartheta.$$

Ясно, что рассматриваемое циклическое движение диска существует при любых значениях $\vartheta = \vartheta_0$ и $\omega_2 = \omega_{20} \neq 0$, так как всегда можно найти подходящее значение ω_3.

Из условия совместности следует, что при $\vartheta = 0$ должно быть либо $\omega_2 = 0$, либо $\omega_3 = 0$, либо $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Когда $\omega_2 = 0$, $\omega_3 \neq 0$, диск катится прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\dot\varphi = \omega_3$. Когда $\omega_2 \neq 0$, $\omega_3 = 0$, диск вертится вокруг неподвижного вертикального диаметра. При $\omega_2 = \omega_3 = 0$ диск неподвижно стоит на горизонтальной плоскости.

При $\vartheta = \vartheta_0 \neq 0$ найдем $\dot\psi = \omega_2/\cos\vartheta$ или

$$\psi = \frac{\omega_2}{\cos\vartheta}(t - t_0) + \psi_0.$$

Ранее было найдено, что скорость $\mathbf{v}_{\text{п}}$ точки соприкосновения диска с плоскостью равна

$$\mathbf{v}_{\text{п}} = -\dot\varphi R\,\mathbf{e}_1' = -\dot\varphi R(\mathbf{e}_1\cos\psi + \mathbf{e}_2\sin\psi).$$

Поэтому координаты точки соприкосновения удовлетворяют уравнениям

$$\dot r_1 = -\dot\varphi R\cos\psi, \quad \dot r_2 = -\dot\varphi R\sin\psi.$$

Учитывая, что $\dot\varphi = \omega_3 - \omega_2\operatorname{tg}\vartheta$, будем иметь

$$\dot r_1 = -(\omega_3 - \omega_2\operatorname{tg}\vartheta)R\cos\psi, \quad \dot r_2 = -(\omega_3 - \omega_2\operatorname{tg}\vartheta)R\sin\psi.$$

Угловая скорость $\dot\psi = \omega_2/\cos\vartheta \neq 0$. Следовательно,

$$\dot r_1 = R'\dot\psi\cos\psi, \quad \dot r_2 = R'\dot\psi\sin\psi.$$

где

$$R' = R\left(\sin\vartheta - \frac{\omega_3}{\omega_2}\cos\vartheta\right).$$

Интегрируя, найдем

$$r_1 - r_{10} = R'(\sin\psi - \sin\psi_0), \quad r_2 - r_{20} = -R'(\cos\psi - \cos\psi_0).$$

Получили, что при циклическом движении диска, когда $\vartheta_0 \neq 0$, точка опоры $O_п$ описывает окружность радиуса R' с центром в точке

$$\mathbf{r}_ц = (r_{10} - R'\sin\psi_0)\,\mathbf{e}_1 + (r_{20} + R'\cos\psi_0)\,\mathbf{e}_2.$$

Отношение ω_3/ω_2 вычисляется из условия совместности:

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{1}{C+mR^2}\left(A\operatorname{tg}\vartheta - \frac{mgR}{\omega_2^2}\sin\vartheta\right).$$

§ 6.15. Качение шара по горизонтальной плоскости

В отличие от диска любая точка шара допускается к контакту с опорной поверхностью. Кроме того, при движении однородного шара по горизонтальной плоскости сила тяжести всегда проходит через точку опоры и не оказывает воздействия на движение. Радиус шара массы m примем равным R.

Как и в § 6.14, начало O и векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ортонормированного правоориентированного абсолютного репера выберем принадлежащими опорной плоскости. Вектор $\mathbf{e}_3$ того же репера направим вертикально вверх. Радиус-вектор центра масс шара зададим равенством

$$\mathbf{r}_c = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3.$$

Предположим, что абсолютно твердый шар однороден. Начало O_c репера $O_c\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ осей Кёнига поместим в центре шара.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шара, а

$$\mathbf{v}_c = \dot r_1\mathbf{e}_1 + \dot r_2\mathbf{e}_2$$

— скорость его центра масс. Из точки O_c выпустим радиус-вектор $\mathbf{r}_п$ в точку $O_п$ контакта шара с опорной поверхностью:

$$\mathbf{r}_п = -R\mathbf{e}_3.$$

По теореме 2.12.1 Эйлера о поле скоростей твердого тела найдем абсолютную скорость $\mathbf{v}_ш$ точки шара, совпадающей с $O_п$:

$$\mathbf{v}_ш = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_п.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Шар не проскальзывает в точке контакта с опорной плоскостью. Это означает, что скорость $\mathbf{v}_ш$ и скорость совпадающей с $O_п$ точки плоскости одинаковы и равны нулю. Следовательно,

скорость $\mathbf{v}_c$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ стеснены дифференциальным соотношением

$$\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_п = 0.$$

В координатной форме это эквивалентно двум уравнениям неголономных связей

$$\dot r_1 - R\omega_2 = 0, \quad \dot r_2 + R\omega_1 = 0.$$

Воспользуемся уравнением кинетического момента $\mathbf{K}'$, взятого относительно точки $O_п$:

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dt} + m\mathbf{v}_п\times\mathbf{v}_c = 0,$$

где $\mathbf{v}_п$ — скорость смещения точки опоры по плоскости. Моменты внешних сил отсутствуют, так как и сила тяжести, и реакция опоры проходят через точку $O_п$. Кроме того, отметим, что $\mathbf{v}_п = \mathbf{v}_c$, так как центр шара всегда проектируется в точку опоры. Поэтому имеем первый интеграл

$$\mathbf{K}' = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3,$$

выражающий постоянство вектора $\mathbf{K}'$ в абсолютном пространстве. Для вычисления $\mathbf{K}'$ воспользуемся формулой Кёнига (теорема 5.2.1):

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}^* - m\mathbf{r}_п\times\mathbf{v}_c,$$

где $\mathbf{K}^* = A\boldsymbol{\omega}$ — кинетический момент шара относительно его центра масс, A — осевой центральный момент инерции.

Векторный первый интеграл эквивалентен трем скалярным интегралам

$$A\omega_1 - \dot r_2 mR = \sigma_1, \quad A\omega_2 + \dot r_1 mR = \sigma_2, \quad A\omega_3 = \sigma_3.$$

Исключив в первых двух интегралах угловые скорости ω_1, ω_2 с помощью уравнений связей, найдем компоненты скорости центра масс шара:

$$\dot r_1 = \sigma_2\left(\frac{A}{R}+mR\right)^{-1}, \quad \dot r_2 = -\sigma_1\left(\frac{A}{R}+mR\right)^{-1}.$$

Видим, что центр шара движется прямолинейно и равномерно.

Угловая скорость шара сохраняется в инерциальном пространстве:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\sigma_1}{A+mR^2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sigma_2}{A+mR^2}\mathbf{e}_2 + \frac{\sigma_3}{A}\mathbf{e}_3.$$

Значит, угловое движение шара около центра масс есть вращение вокруг оси постоянного направления, проходящей через центр шара. Эта ось не обязательно горизонтальна.

2. Шар проскальзывает в точке контакта с опорной плоскостью. Это означает, что в точке контакта с поверхностью скорость шара не равна нулю. Тогда возникает сила трения, которая будет влиять на движение шара. Примем, что в точке контакта приложена сила сухого кулоновского трения скольжения: $\mathbf{F}_{тр} = -kmg\,\mathbf{v}_ш/|\mathbf{v}_ш|$, где k — коэффициент трения (см. пример 3.4.3). Относительно точки контакта шара с плоскостью будет справедлив, как и в предыдущем случае, векторный интеграл кинетического момента: $\mathbf{K}' = \boldsymbol{\sigma}$. Умножив обе части этого равенства справа векторно на $\mathbf{r}_п$ и приняв во внимание выражение вектора $\mathbf{K}'$ через угловую скорость и скорость центра масс шара, найдем

$$A\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_п + m\,\mathbf{r}_п\times(\mathbf{r}_п\times\mathbf{v}_c) = \boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{r}_п.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_п = \frac{\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{r}_п}{A} + \frac{mR^2}{A}\mathbf{v}_c.$$

Используя это выражение, получим зависимость между скоростью шара в точке контакта и скоростью его центра масс.

$$\mathbf{v}_c = \left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{v}_ш - \frac{\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{r}_п}{A}\right).$$

В соответствии с теоремой об изменении количества движения скорость центра масс шара подчиняется уравнению

$$m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = -kmg\frac{\mathbf{v}_ш}{|\mathbf{v}_ш|}.$$

Поэтому для скорости $\mathbf{v}_ш$ будем иметь

$$\frac{d\mathbf{v}_ш}{dt} = -æ\frac{\mathbf{v}_ш}{|\mathbf{v}_ш|}, \quad æ = kg\left(1+\frac{mR^2}{A}\right).$$

Обозначим $\mathbf{v}_{ш0}$ значение вектора скорости точек шара, находящихся в контакте с опорной плоскостью, в начальный момент времени. Тогда решение уравнения для вектора $\mathbf{v}_ш$ имеет вид

$$\mathbf{v}_ш = \mathbf{v}_{ш0}\left[1 - \frac{æ}{|\mathbf{v}_{ш0}|}(t-t_0)\right],$$

где t_0 — начальный момент времени движения. Другими словами, направление скорости точек шара, находящихся в контакте с плоскостью, с течением времени не изменяется, а величина скорости убывает линейно по времени.

Теперь мы можем найти скорость центра масс:

$$\mathbf{v}_c = \left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}\left\{\mathbf{v}_{ш0}\left[1-\frac{æ}{|\mathbf{v}_{ш0}|}(t-t_0)\right] - \frac{\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{r}_п}{A}\right\} = -\mathbf{v}_{ш0}\frac{kg}{|\mathbf{v}_{ш0}|}(t-t_0) + \mathbf{v}_{c0},$$

где $\mathbf{v}_{c0}$ — начальное значение скорости центра масс. Таким образом центр масс шара движется с постоянным ускорением, направленным противоположно скорости проскальзывания шара в точке контакта. Ускорение действует до тех пор, пока не прекратится проскальзывание. Это произойдет в момент времени

$$t^* = t_0 + \frac{|\mathbf{v}_{ш0}|}{kg}\left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}.$$

Затем шар будет двигаться в соответствии с моделью качения по абсолютно шероховатой плоскости. Скорость $\mathbf{v}^*$ центра масс шара по окончании проскальзывания выразится формулой

$$\mathbf{v}^* = -\left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{r}_п}{A} = \left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}\left(-\boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{r}_п + \frac{mR^2}{A}\mathbf{v}_{c0}\right),$$

где $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\mathbf{v}_{c0}$ — начальные значения угловой скорости шара относительно центра масс и скорости центра масс соответственно. Видим, что скорость центра шара в конце проскальзывания не зависит от коэффициента трения.

Найдем траекторию центра масс шара при проскальзывании:

$$\mathbf{r}_c = -\mathbf{v}_{ш0}\frac{kg}{|\mathbf{v}_{ш0}|}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \mathbf{v}_{c0}(t-t_0) + \mathbf{r}_{c0}.$$

Отсюда видно, что если векторы $\mathbf{v}_{ш0}$ и $\mathbf{v}_{c0}$ неколлинеарны, то траектория центра масс шара представляет собой параболу, выпуклую в направлении скорости в точке контакта шара с плоскостью. Приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}_c^* - \mathbf{r}_{c0}$ центра шара к моменту окончания скольжения выразится формулой:

$$\mathbf{r}_c^* - \mathbf{r}_{c0} = \frac{t^*-t_0}{2}(\mathbf{v}^*+\mathbf{v}_{c0}) = \frac{|\mathbf{v}_{ш0}|}{2kg}\left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-2}\left[-\boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{r}_п + \left(1+2\frac{mR^2}{A}\right)\mathbf{v}_{c0}\right].$$

3. Соударение биллиардных шаров. Рассмотрим соударение двух однородных шаров, имеющих равные радиусы R и массы m. Следуя Кориолису, примем две гипотезы.

1. Мгновенное трение отсутствует: касательные составляющие скоростей шаров в точке контакта не изменяются. Ударный импульс

направлен по нормали к поверхности шаров. Он не создает момента относительно центра шара.

2. Удар шаров абсолютно упругий: кинетическая энергия системы при ударе не изменяется.

Учтем, что сила тяжести и сила трения шаров о плоскость суть конечные силы. Воспользовавшись следствием 5.2.1, получаем, что при ударе угловые скорости шаров относительно их центров не меняются. Пусть единичный вектор $\mathbf{n}$ задает направление линии центров шаров при ударе, скорости центров масс шаров до удара равны $\mathbf{v}_1^-$, $\mathbf{v}_2^-$, а после удара — соответственно $\mathbf{v}_1^+$, $\mathbf{v}_2^+$. Обозначим u_1^-, u_2^-, u_1^+, u_2^+ проекции скоростей центров масс шаров на направление вектора $\mathbf{n}$ до и после соударения. В согласии со сказанным выше количества движения системы до и после соударения примут вид

$$\mathbf{Q}^- = m(u_1^- + u_2^-)\mathbf{n} + m[\mathbf{v}_1^- + \mathbf{v}_2^- - (u_1^- + u_2^-)\mathbf{n}],$$
$$\mathbf{Q}^+ = m(u_1^+ + u_2^+)\mathbf{n} + m[\mathbf{v}_1^- + \mathbf{v}_2^- - (u_1^- + u_2^-)\mathbf{n}],$$

а выражения для кинетической энергии до и после соударения запишутся следующим образом

$$T^- = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{m(u_j^-)^2}{2} + \frac{m(\mathbf{v}_j^- - \mathbf{n}\,u_j^-)^2}{2} + A\frac{(\omega_j^-)^2}{2}\right],$$
$$T^+ = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{m(u_j^+)^2}{2} + \frac{m(\mathbf{v}_j^- - \mathbf{n}\,u_j^-)^2}{2} + A\frac{(\omega_j^-)^2}{2}\right],$$

где A — момент инерции шара относительно диаметра. Воспользовавшись равенствами $\mathbf{Q}^- = \mathbf{Q}^+$ и $T^- = T^+$, получим систему уравнений относительно u_1^+, u_2^+

$$u_1^+ + u_2^+ = u_1^- + u_2^-,$$
$$(u_1^+)^2 + (u_2^+)^2 = (u_1^-)^2 + (u_2^-)^2.$$

Эта система содержит линейное и квадратное уравнения, а потому имеет два решения. Одно из них: $u_1^+ = u_1^-$, $u_2^+ = u_2^-$ следует отбросить, а второе: $u_1^+ = u_2^-$, $u_2^+ = u_1^-$ — оставить.

Таким образом, при ударе биллиардные шары обмениваются проекциями скоростей центров на направление общего диаметра, тогда как другие составляющие линейной и угловой скоростей сохраняются.

Непосредственно после удара условия качения шаров без проскальзывания могут не выполняться, и для определения радиусов-векторов и скоростей центров шаров по окончании проскальзывания следует воспользоваться результатами предыдущего пункта.

Предположим, например, что до удара первый шар стоял на месте, а второй катился без проскальзывания и скорость его центра была равна $\mathbf{v}$. Тогда после удара скорость центра первого шара станет равной $\mathbf{v}_{10} = \mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})$, а скорость центра второго окажется равной $\mathbf{v}_{20} = \mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})$. Угловая скорость первого шара непосредственно после удара равна нулю, и он начнет движение с проскальзыванием. После окончания проскальзывания скорость центра первого шара станет равной

$$\mathbf{v}_1^* = \left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}\frac{mR^2}{A}\mathbf{v}_{10} = \frac{5}{7}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Здесь учтено, что для однородного шара $A = 2mR^2/5$ (см. пример 1.14.10). Поэтому шар, находившийся до удара в покое, после удара будет двигаться по направлению линии центров в момент соударения, но с несколько меньшей скоростью, чем та, которую получил его центр при ударе.

Так как второй шар перед столкновением катился без проскальзывания, то непосредственно перед ударом было выполнено соотношение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_п = -\mathbf{v}$. Направление скорости центра второго шара сразу после удара будет перпендикулярным линии центров шаров в момент соударения. Следовательно, и второй шар непосредственно после удара начнет двигаться с проскальзыванием. После окончания проскальзывания скорость его центра станет равной

$$\mathbf{v}_2^* = \left(1+\frac{mR^2}{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{v} + \frac{mR^2}{A}\mathbf{v}_{20}\right) = \mathbf{v} - \frac{5}{7}\mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}).$$

Она будет отклонена от скорости центра второго шара до удара на угол, меньший, чем скорость $\mathbf{v}_{20}$, возникшая непосредственно после удара. При лобовом соударении шаров после окончания проскальзывания их скорости будут соответственно равны

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{5}{7}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2^* = \frac{2}{7}\mathbf{v}.$$

Видим, что после лобового столкновения и первый, и второй шар движутся в одном и том же направлении. Движение второго шара после соударения объясняется тем, что он при ударе не меняет своей угловой скорости.

Отметим, что в рассмотренных задачах закрутка шара вокруг вертикальной оси $\mathbf{e}_3$ никак не влияет на движение его центра масс. Так происходит из-за того, что контакт шара с плоскостью предполагается происходящим лишь в одной точке. Реальные (не абсолютно

твердые) тела при контакте всегда деформируются. Вместо точки возникает поверхность контакта с ненулевой площадью. Появляется момент относительно точки $O_п$ сил взаимодействия шара с опорной плоскостью, и картина движения может быть значительно сложнее.

Контрольные вопросы к главе 6

6.1. Составить в терминах угловой скорости и углового ускорения выражение для энергии ускорений свободного абсолютно твердого тела. Выписать уравнения Аппеля и получить из них динамические уравнения Эйлера.

6.2. Пусть ψ, ϑ, φ — углы Эйлера, так что ψ — угол прецессии, $\mathbf{e}_\psi$ — единичный вектор направления угловой скорости прецессии, ϑ — угол нутации, $\mathbf{e}_\vartheta$ — единичный вектор направления угловой скорости нутации, φ — угол собственного вращения, $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор угловой скорости собственного вращения, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\mathbf{v}_A$ — скорость начала репера, жестко связанного с телом. Доказать формулы

$$\mathbf{e}_\psi = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\psi}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\vartheta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot\varphi},$$

$$\frac{\tilde d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{\tilde d\mathbf{e}_\psi}{dt} = \dot\varphi\mathbf{e}_\psi\times\mathbf{e}_\varphi + \dot\vartheta\mathbf{e}_\psi\times\mathbf{e}_\vartheta, \quad \frac{\tilde d\mathbf{e}_\vartheta}{dt} = \dot\varphi\mathbf{e}_\vartheta\times\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\varphi} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\psi} = \frac{\tilde d\mathbf{e}_\psi}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\psi = 0, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\vartheta} = \frac{\tilde d\mathbf{e}_\vartheta}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\vartheta = \dot\psi\mathbf{e}_\psi\times\mathbf{e}_\vartheta,$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\varphi} = \mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\psi} = \mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\psi, \quad \frac{\partial\mathbf{v}_A}{\partial\vartheta} = \mathbf{v}_A\times\mathbf{e}_\vartheta,$$

где $\tilde d/dt$ — оператор дифференцирования в осях, жестко связанных с телом.

6.3. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси, и внешние активные силы отсутствуют. В абсолютных осях, одна из которых направлена по оси вращения, найти выражения компонент реакций в точках опоры.

6.4. Центральный радиус инерции физического маятника составляет 0,05м. Каким должно быть расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, чтобы период его малых колебаний составил 1 с? Сколько решений имеет задача? Как практически можно реализовать эти решения?

6.5. Однородный стержень длины l и массы m стоит вертикально на гладкой горизонтальной плоскости. По нижнему концу стержня произведен удар $\mathbf{P}$. Какую скорость приобретут нижний и верхний концы стержня?

6.6. Однородную дверь высоты b и ширины a необходимо открыть посредством удара. В какую точку двери следует ударить, чтобы реакции в дверных петлях не возникли?

6.7. В каком случае существует система координат, не связанная жестко с твердым телом, относительно которой его тензор инерции имеет постоянные компоненты?

6.8. Что служит осью регулярной прецессии в случае Эйлера при $A = B$?

6.9. Как будет двигаться твердое тело в случае Эйлера, если

a) $B = C$?

b) $A = C$?

c) $A = B = C$?

6.10. В случае Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки при $A = B$ найти зависимость p, q, r от времени.

6.11. Как надо закрутить волчок Лагранжа, чтобы этот волчок стал спящим?

6.12. Какие типы движений может совершать ось волчка Лагранжа?

6.13. В чем состоит различие между регулярной и псевдорегулярной прецессиями?

6.14. Определить направление псевдорегулярной прецессии волчка Лагранжа, если в начальный момент времени его закрутили по ходу часовой стрелки.

6.15. Выразить величину угловой скорости псевдорегулярной прецессии волчка Лагранжа в зависимости от угловой скорости первоначальной закрутки.

6.16. Определить направление регулярной прецессии в случае Эйлера при $A = B$.

6.17. В случае Ковалевской указать начальные условия, при которых реализуется постоянное вращение вокруг первой координатной оси, связанной с телом.

6.18. Как найти градиент к эллипсоиду инерции в апексе тела, движущегося вокруг неподвижной точки?

6.19. К некоторой точке оси вращения гироскопа приложена сила, стремящаяся повернуть ось влево относительно смотрящего на него наблюдателя. В какую сторону будет двигаться ось гироскопа?

6.20. При каких начальных условиях возникает псевдорегулярная прецессия волчка Лагранжа?

6.21. Какое движение может совершать центр масс волчка с точкой опоры на гладкой горизонтальной плоскости?

6.22. Какие существуют положения относительного равновесия спутника на круговой орбите? Размеры спутника малы по сравнению с расстоянием спутника до притягивающего центра.

6.23. Найти стационарные движения обруча, катящегося в поле тяжести по горизонтальной плоскости без проскальзывания.

6.24. В какую точку неподвижного биллиардного шара должен целиться биллиардист, чтобы после соударения шаров и окончания их проскальзывания относительно стола угол между скоростями центров шаров составил $\pi/3$.

Глава 7

Уравнения движения в лагранжевых координатах

Напомним (определение 4.7.1), что лагранжевыми координатами системы материальных точек называется минимальный набор переменных величин, конкретное задание значений которых однозначно определяет совместное с геометрическими (конечными) связями положение всех точек системы. Число лагранжевых координат есть число степеней свободы системы, а выбор таких координат зависит от структуры геометрических связей. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — лагранжевы координаты, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ — обобщенные скорости. Тогда радиусы-векторы материальных точек будут функциями лагранжевых координат и времени t:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t), \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

где N — число материальных точек. По определению эти функции тождественно удовлетворяют при произвольно заданных $q_1, \ldots, q_n$ всем учтенным геометрическим связям, стесняющим систему.

Помимо учтенных геометрических на систему могут быть наложены еще дополнительные геометрические и дифференциальные связи, которые не учитываются указанными функциями и которые можно выразить с помощью системы уравнений (§ 4.4)

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, t) = \phi_j(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m, \quad m < n.$$

§ 7.1. Координатная форма принципа Даламбера-Лагранжа

В соответствии со сказанным скорости $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ точек системы выражаются формулами

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Пространство виртуальных перемещений, соответствующее учтенным геометрическим связям, задается линейными комбинациями вида

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Дополнительные связи сужают пространство виртуальных перемещений, добавляя уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu}\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{v}_\nu}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m.$$

Теорема 7.1.1. *В лагранжевых координатах тождество принципа Даламбера-Лагранжа эквивалентно тождеству*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0$$

для любых значений δq_i, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Здесь T — кинетическая энергия системы,

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}$$

— обобщенные силы.

Доказательство. Согласно теореме 5.1.1 принцип Даламбера-Лагранжа состоит в выполнении тождества

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

для любого набора $\delta\mathbf{r}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N$, виртуальных перемещений тогда и только тогда, когда $\ddot{\mathbf{r}}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N$, суть действительные ускорения точек системы, возникающие под действием активных сил $\mathbf{F}_\nu$, приложенных к ее точкам.

Выразим $\delta\mathbf{r}_\nu$ через дифференциалы лагранжевых координат. Тогда тождество принципа Даламбера-Лагранжа примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0.$$

Рассмотрим коэффициент при δq_i. В нем

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = Q_i$$

по определению 4.7.3 обобщенной силы. Далее

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_\nu}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right) - \dot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Дифференцированием по времени получим

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k\partial q_i}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial t\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

При частном дифференцировании переменные $\dot{q}_i$ и q_i следует считать независимыми. Продифференцируем первое равенство по $\dot{q}_i$. Получим тождество

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Теперь можно продолжить преобразования:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{\mathbf{r}}_\nu\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_\nu^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_\nu^2\right).$$

Осталось подставить правую часть последнего равенства в тождество принципа Даламбера-Лагранжа и учесть определение 5.1.1 кинетической энергии системы.□

Отметим аналогию преобразований в доказательстве этой теоремы с преобразованиями, связанными с выводом уравнений движения одной материальной точки в криволинейных координатах (теорема 3.6.1).

§ 7.2. Уравнения движения

Используя теорему 7.1.1, можно построить систему дифференциальных уравнений движения, в которой искомыми переменными будут лагранжевы координаты и которые будут учитывать действие дополнительных дифференциальных связей. Эти связи мы будем предполагать независимыми, так что после очевидных преобразований и соответствующей перенумерации переменных уравнения связей можно представить в виде

$$\dot{q}_{p+\nu} = \varphi_{p+\nu}(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p), \quad p = n - m, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Согласно теореме 7.1.1 принцип Даламбера-Лагранжа состоит в выполнении тождества

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0$$

для любых дифференциалов δq_j, удовлетворяющих уравнениям виртуальных перемещений

$$\delta q_{p+\nu} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k, \quad p = n - m, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Умножим каждое из этих уравнений на соответствующий множитель λ_ν и прибавим к тождеству Даламбера-Лагранжа. Получим выражение

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k}\lambda_\nu\right]\delta q_k +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{p+\nu}} - Q_{p+\nu} + \lambda_\nu\right]\delta q_{p+\nu} = 0.$$

Дифференциалы δq_k независимы, и их можно задать произвольно. Дифференциалы $\delta q_{p+\nu}$ зависимые. По методу Лагранжа подберем m множителей λ_ν так, чтобы коэффициенты при зависимых дифференциалах $\delta q_{p+\nu}$ обратились в нуль. Тогда коэффициенты при независимых дифференциалах δq_k обязаны стать равными нулю, так как тождество должно сохраниться при любых δq_k. В результате получаем систему дифференциальных уравнений, содержащую неопределенные множители λ_ν:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k}\lambda_\nu = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{p+\nu}} - Q_{p+\nu} + \lambda_\nu = 0.$$

Здесь кинетическая энергия системы зависит от лагранжевых координат, независимых скоростей $\dot{q}_k$, зависимых скоростей $\dot{q}_{p+\nu}$ и времени:

$$T = T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p, \dot{q}_{p+1}, \ldots, \dot{q}_n, t).$$

Частное дифференцирование выполняется так, как будто все величины

$$q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p, \dot{q}_{p+1}, \ldots, \dot{q}_n$$

не зависят друг от друга.

Введем функции

$$T^* = T^*(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p, t), \quad \varphi^*_{p+\nu}(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p, t).$$

Функция T^* получается из T заменой скоростей $\dot{q}_{p+\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$, их выражениями через дифференциальные связи, а функции $\varphi^*_{p+\nu}$ совпадают по форме с соответствующими функциями $\varphi_{p+\nu}$. Однако при частном дифференцировании T^* и $\varphi^*_{p+\nu}$ будем считать справедливыми в силу уравнений дифференциальных связей следующие соотношения (см. определение 5.5.2):

$$\frac{\partial q_{p+\nu}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{q}_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k}, \quad \nu = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, p.$$

Частные производные от функций T, $\varphi_{p+\nu}$ будем по-прежнему вычислять так, как будто все их аргументы независимы. Тогда

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Далее

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\right)\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Мы теперь можем воспользоваться уравнениями, содержащими неопределенные множители, чтобы исключить отсюда выражения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}.$$

В результате будем иметь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\lambda_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial q_{p+\nu}}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}Q_{p+\nu}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\lambda_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Видим, что все члены, содержащие неопределенные множители, взаимно уничтожаются.

Теорема 7.2.1. *Лагранжевы координаты определяют движение механической системы, стесненное идеальными дифференциальными связями, тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i^* + \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \ldots, p = n - m,$$

где

$$Q_i^* = Q_i + \sum_{\nu=1}^{m}Q_{p+\nu}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{\nu=1}^{m}Q_{p+\nu}\frac{\partial \dot{q}_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \varphi^*_{p+\nu}}{\partial q_i}\right], \quad i = 1, \ldots, p = n - m.$$

Доказательство. Очевидно, принцип Даламбера-Лагранжа выполняется тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} + Q_i + \sum_{\nu=1}^{m}Q_{p+\nu}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\right),$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial q_{p+\nu}}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left(\frac{\partial \varphi^*_{p+\nu}}{\partial q_i}\right).$$

Вычитая из первого равенства второе, находим требуемую систему уравнений.□

Замечание 7.2.1. Система уравнений теоремы 7.2.1 справедлива при любых наложенных на систему связях. Но она не полна. Нам

удалось при ее выводе исключить скорости $\dot{q}_{p+\nu}$ в явном виде, но не удалось исключить координаты $q_{p+\nu}$. Чтобы эту систему замкнуть, достаточно добавить к ней уравнения дифференциальных связей (кинематические уравнения).

Замечание 7.2.2. Слагаемые $\tilde{Q}_i$ обусловлены воздействием дифференциальных связей. В общем случае они могут содержать вторые производные от обобщенных координат, и потому их не всегда можно трактовать как обобщенные силы.

Найдем сумму

$$\sum_{i=1}^{p}\tilde{Q}_i\dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi^*_{p+\nu}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial q_i}\dot{q}_i -\right.$$
$$\left.- \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial q_{p+\mu}}\frac{\partial \varphi_{p+\mu}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \varphi_{p+\nu}\right) +\right.$$
$$\left.+ \sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial q_{p+\mu}}\left(\varphi_{p+\mu} - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\mu}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial t}\right].$$

Лемма 7.2.1. *Если дифференциальные связи допускают принадлежность действительных перемещений множеству виртуальных, то тогда справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{p}\tilde{Q}_i\dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\frac{\partial \varphi^*_{p+\nu}}{\partial t}.$$

Доказательство. Принадлежность действительных перемещений множеству виртуальных означает справедливость равенств

$$\dot{q}_{p+\nu} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \varphi_{p+\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, m.□$$

Следствие 7.2.1. *Если дифференциальные связи стационарны и допускают принадлежность действительных перемещений множеству виртуальных, то тогда*

$$\sum_{i=1}^{p}\tilde{Q}_i\dot{q}_i = 0.$$

В том случае, когда дифференциальные связи линейны по скоростям:

$$\dot{q}_{p+\nu} = \varphi_{p+\nu} = \sum_{i=1}^{p}b_{p+\nu,i}\dot{q}_i + b_{p+\nu,0}, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

где коэффициенты $b_{p+\nu,i} = b_{p+\nu,i}(q_1, \ldots, q_n, t)$, $i = 0, \ldots, p$, могут зависеть только от координат и времени, слагаемые $\tilde{Q}_i$ принимают вид

$$\tilde{Q}_i = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left[\frac{db_{p+\nu,i}}{dt} - \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial b^*_{p+\nu,j}}{\partial q_i}\dot{q}_j - \frac{\partial b^*_{p+\nu,0}}{\partial q_i}\right] = \sum_{j=1}^{p}\gamma_{ij}\dot{q}_j + \gamma_{i0},$$
$$i = 1, \ldots, p = n - m,$$

где коэффициенты γ_{ij} выражаются формулами

$$\gamma_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left(\frac{\partial b^*_{p+\nu,i}}{\partial q_j} - \frac{\partial b^*_{p+\nu,j}}{\partial q_i}\right),$$

$$\gamma_{i0} = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left(\frac{\partial b^*_{p+\nu,i}}{\partial t} - \frac{\partial b^*_{p+\nu,0}}{\partial q_i}\right) \quad i, j = 1, \ldots, p.$$

Система уравнений теоремы 7.2.1 превращается тогда в *уравнения Воронца*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i^* + \sum_{j=1}^{n-m}\gamma_{ij}\dot{q}_j + \gamma_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n - m,$$

а величины $\tilde{Q}_i$ можно интерпретировать, как обобщенные силы.

Отметим, что матрица (γ_{ij}) кососимметрична:

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n - m.$$

Отметим также, что когда связи голономны, то

$$\frac{\partial b^*_{p+\nu,i}}{\partial q_j} = \frac{\partial b^*_{p+\nu,j}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial b^*_{p+\nu,i}}{\partial t} = \frac{\partial b^*_{p+\nu,0}}{\partial q_i}$$

для любых индексов j и i, и в этом случае все γ_{ij}, γ_{i0} окажутся равными нулю. Когда связи стационарны: $\partial b_{p+\nu,j}/\partial t = 0$, и вместе с тем $b_{p+\nu,0} = 0$ для любых ν, j, то будем иметь $\gamma_{i0} \equiv 0$.

Определение 7.2.1. Силы, действующие на систему материальных точек, называются *гироскопическими*, если соответствующие им обобщенные силы линейно зависят от обобщенных скоростей:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik}\dot{q}_k, \quad i = 1, \ldots, p,$$

причем матрица (γ_{ik}) кососимметрична: $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$.

Из структуры уравнений Воронца видим, что реакции неголономных линейных по скоростям идеальных связей могут зависеть от обобщенных скоростей. Эта зависимость выражается с помощью гироскопических слагаемых в выражениях для обобщенных сил реакций.

§ 7.3. Системы Чаплыгина

В некоторых системах с линейными дифференциальными связями вида

$$\dot{q}_{p+\nu} = \sum_{k=1}^{p}b_{p+\nu,k}\dot{q}_k + b_{p+\nu,0}, \quad p = n - m, \quad \nu = 1, \ldots, m,$$

переменные $q_{p+\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$, можно выбрать таким образом, что они не войдут ни в один из коэффициентов $b_{p+\nu,k}$, ни в выражение для кинетической энергии T, составленное без учета дифференциальных связей.

Определение 7.3.1. Механическая система с дифференциальными связями, разрешенными относительно $\dot{q}_{p+\nu}$, $\nu = 1, \ldots, m$, называется *системой Чаплыгина*, если связи стационарны, однородны: $b_{p+\nu,0} = 0$, и если выполнены равенства

$$\frac{\partial b_{p+\nu,k}}{\partial t} = \frac{\partial b_{p+\nu,k}}{\partial q_{p+\mu}} = \frac{\partial T}{\partial q_{p+\mu}} \equiv 0, \; p = n - m, \; \mu, \nu = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, p.$$

Уравнения движения для систем Чаплыгина могут быть получены как следствие уравнений Воронца. Действительно, пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, найдем, что для систем Чаплыгина справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial b_{p+\nu,k}}{\partial q_i}\dot{q}_k\right),$$

$$\frac{\partial b^*_{p+\nu,i}}{\partial q_k} = \frac{\partial b_{p+\nu,i}}{\partial q_k}, \quad \gamma_{ik} = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}}\left(\frac{\partial b_{p+\nu,i}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{p+\nu,k}}{\partial q_i}\right).$$

Поэтому уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{p+\nu}}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial b_{p+\nu,k}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{p+\nu,i}}{\partial q_k}\right)\dot q_k = Q_i^*,$$

$$\dot q_{p+\nu} = \sum_{k=1}^{p} b_{p+\nu,k}\dot q_k + b_{p+\nu,0},\ p = n-m,\ \nu = 1,\dots,m,\ i = 1,\dots,p.$$

Полученные уравнения образуют *систему уравнений Чаплыгина*. Когда Q_i^*, $i = 1,\dots,n-m$, зависят только от координат $q_1,\dots,q_{n-m}$, первая группа уравнений окажется замкнутой относительно координат $q_1,\dots,q_{n-m}$ и сможет быть решена независимо от второй группы, представляющей собой уравнения дифференциальных связей. Для этого достаточно в выражениях $\partial T/\partial \dot q_{p+\nu}$ исключить с помощью уравнений связей зависимые скорости $\dot q_{p+1},\dots,\dot q_n$.

Пример 7.3.1. Обратимся к механической системе, рассмотренной в примере 5.6.2. Заданы две материальные точки массы m, соединенные не имеющим массы стержнем длины $2l$. Под действием силы тяжести система движется только в вертикальной плоскости и только так, что скорость центра масс направлена вдоль стержня. Пусть y — вертикальная, а x — горизонтальная координаты середины стержня, φ — угол, который стержень образует с горизонтальным направлением. Имеем кинетическую энергию и силовую функцию системы

$$T = m(\dot x^2 + \dot y^2) + ml^2\dot\varphi^2,\quad U = -2mgy.$$

Дифференциальная связь представлена уравнением

$$\dot x = \dot y \operatorname{ctg}\varphi.$$

Пусть $q_1 = y$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = x$. Имеем $n = 3$, $p = 2$. Коэффициенты кинематической связи принимают вид

$$b_{31} = ctg\varphi,\quad b_{32} = 0.$$

Видим, что ни выражения кинетической и потенциальной энергий, ни выражения коэффициентов $b_{p+\nu,k}$ не зависят от координаты x. Следовательно, это — система Чаплыгина.

Запишем уравнения Чаплыгина:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \dot x}\frac{\dot\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \dot x}\frac{\dot y}{\sin^2\varphi} = 0.$$

Найдем функции T^* и $\partial T/\partial \dot x$:

$$T^* = \frac{m\dot y^2}{\sin^2\varphi} + ml^2\dot\varphi^2,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot x} = 2m\dot x = 2m\dot y\operatorname{ctg}\varphi.$$

Подставим их в уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2m\dot y}{\sin^2\varphi}\right) + \frac{2m\dot y\dot\varphi\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\varphi} = -2mg,$$

$$2ml^2\ddot\varphi + \frac{2m\dot y^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi} - \frac{2m\dot y^2\cos\varphi}{\sin^3\varphi} = 0.$$

Выполнив очевидные преобразования, найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot y}{\sin\varphi}\right) = -mg\sin\varphi,$$

$$\dot\varphi = \alpha.$$

где α — постоянная интегрирования. Далее см. пример 5.6.2.◇

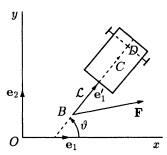
Пример 7.3.2. Пусть двухколесная тележка с одинаковыми колесами поставлена на абсолютно шероховатую горизонтальную плоскость. Кузов тележки может перемещаться только параллельно плоскости (рис. 7.3.1). Каждое колесо есть плоский диск, перпендикулярный к оси длины $2a$, на которую насажены колеса. На тележку действует сила $\mathbf{F}$, параллельная опорной плоскости и приложенная в точке B, находящейся на прямой $\mathcal{L}$. Прямая $\mathcal{L}$ горизонтальна, задает ось симметрии тележки и проходит перпендикулярно к оси, на которую насажены колеса, через ее середину D. Точка B расположена на расстоянии b от точки D. Предположим, что центр масс C тележки также принадлежит прямой $\mathcal{L}$ и отстоит от точки D на расстояние l по ту же сторону, что и точка B. Радиус каждого колеса обозначим R.

Выберем правоориентированный абсолютный репер $Oe_1e_2e_3$ с началом O, векторами e_1, e_2, принадлежащими опорной плоскости, и вектором e_3, перпендикулярным к ней. Положение тележки на плоскости можно описать, задав радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки D:

$$\mathbf{r} = xe_1 + ye_2 + Re_3,$$

угол ϑ между вектором e_1 и единичным вектором e_1' оси $\mathcal{L}$, угол φ_2 поворота левого колеса, угол φ_1 поворота правого колеса (правое и левое, если смотреть в сторону вектора e_1'). Таким образом, система содержит пять лагранжевых координат:

$$x,\quad y,\quad \vartheta,\quad \varphi_1,\quad \varphi_2.$$



Тележка Чаплыгина имеет два одинаковых колеса и гладкую подпорку, которая мешает ей опрокинуться и не оказывает сопротивления горизонтальному перемещению. Тележка может катиться вдоль прямой при одинаковых угловых скоростях колес относительно корпуса и поворачивать, когда относительные угловые скорости колес различны. Поступательно смещаться вдоль оси колес тележка не может.

Рис. 7.3.1. Тележка Чаплыгина

Найдем уравнения дифференциальных связей. Из-за абсолютного трения колеса не могут проскальзывать относительно опорной плоскости в точке контакта с ней. Скорость каждого колеса в точке контакта выразим по теореме 2.12.1 Эйлера как сумму скорости точки D, составляющей скорости в точке контакта из-за поворота тележки по углу ϑ и составляющей из-за поворота колеса вокруг своей оси.

Для правого колеса получим

$$\dot x\cos\vartheta + \dot y\sin\vartheta + a\dot\vartheta + R\dot\varphi_1 = 0.$$

Для левого колеса будем иметь

$$\dot x\cos\vartheta + \dot y\sin\vartheta - a\dot\vartheta + R\dot\varphi_2 = 0.$$

Кроме того, колеса не должны иметь бокового проскальзывания. Следовательно, скорость точки D должна быть направлена вдоль оси $\mathcal{L}$:

$$\dot x\sin\vartheta - \dot y\cos\vartheta = 0.$$

После преобразований систему дифференциальных связей можем представить в виде

$$\dot x = -(a\cos\vartheta)\dot\vartheta - (R\cos\vartheta)\dot\varphi_1,$$
$$\dot y = (a\sin\vartheta)\dot\vartheta - (R\sin\vartheta)\dot\varphi_2,$$
$$\dot\varphi_2 = \frac{2a}{R}\dot\vartheta + \dot\varphi_1.$$

Система связей имеет лишь две независимые скорости $\dot\vartheta$ и $\dot\varphi_1$, а ее коэффициенты зависят только от координаты ϑ.

Кинетическую энергию T тележки найдем как сумму кинетической энергии T_0 кузова, кинетических энергий T_1 правого и T_2 левого колеса.

Для расчета кинетической энергии воспользуемся теоремой 5.2.2 Кёнига. Вычислим скорость $\mathbf{v}_c$ центра масс кузова. Относительно точки D кузов вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\dot\vartheta$. По теореме Эйлера

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_D + \dot\vartheta e_3\times(-le_1') = (\dot x + \dot\vartheta l\sin\vartheta)e_1 + (\dot y - \dot\vartheta l\cos\vartheta)e_2,$$

так как $e_1' = e_1\cos\vartheta + e_2\sin\vartheta$. Отсюда

$$v_c^2 = \dot x^2 + \dot y^2 + 2\dot\vartheta l(\dot x\sin\vartheta - \dot y\cos\vartheta) + \dot\vartheta^2 l^2.$$

Кузов около центра масс вращается с угловой скоростью $\omega = \dot\vartheta e_3$. По теореме Кёнига

$$T_0 = \frac{m_0}{2}\left[\dot x^2 + \dot y^2 + 2\dot\vartheta l(\dot x\sin\vartheta - \dot y\cos\vartheta) + k_0^2\dot\vartheta^2\right],$$

где m_0 — масса кузова, $k_0^2 = A_c + m_0l^2$, так что k_0 — радиус инерции кузова относительно оси, параллельной e_3 и проходящей через точку D, A_c — центральный момент инерции, соответствующий направлению e_3 (теорема 1.10.2 Гюйгенса–Штейнера).

Скорость $\mathbf{v}_{c1}$ центра масс правого колеса выражается формулой

$$\mathbf{v}_{c1} = \mathbf{v}_D + \dot\vartheta a e_1' = (\dot x + \dot\vartheta a\cos\vartheta)e_1 + (\dot y + \dot\vartheta a\sin\vartheta)e_2.$$

Колесо около своего центра вращается с угловой скоростью $\dot\vartheta$ вокруг диаметра, параллельного e_3, и с угловой скоростью $\dot\varphi_1$ вокруг своей оси крепления. Для колеса эти направления суть главные и центральные (пример 1.14.7). Обозначим A момент инерции относительно диаметра, C — момент инерции относительно оси колеса. Тогда

$$T_1 = \frac{m_1\mathbf{v}_{c1}^2}{2} + \frac{A\dot\vartheta^2 + C\dot\varphi_1^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left[\dot x^2 + \dot y^2 + 2\dot\vartheta a(\dot x\cos\vartheta + \dot y\sin\vartheta) + a^2\dot\vartheta^2\right] + \frac{1}{2}(A\dot\vartheta^2 + C\dot\varphi_1^2).$$

Аналогично для левого колеса

$$T_2 = \frac{m_1}{2}\left[\dot x^2 + \dot y^2 - 2\dot\vartheta a(\dot x\cos\vartheta + \dot y\sin\vartheta) + a^2\dot\vartheta^2\right] + \frac{1}{2}(A\dot\vartheta^2 + C\dot\varphi_2^2),$$

где m_1 — масса каждого колеса. Кинетическая энергия системы в целом равна

$$T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + m_0\dot\vartheta l(\dot x\sin\vartheta - \dot y\cos\vartheta) + \frac{J}{2}\dot\vartheta^2 + \frac{C}{2}(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2),$$

где $m = m_0 + 2m_1$ — масса всей системы, $J = m_0k_0^2 + 2m_1a^2 + 2A$ — момент инерции всей тележки вокруг вертикальной оси, проходящей через точку D.

Найдем выражения для обобщенных сил. Виртуальное перемещение точки B, к которой приложена единственная сила $\mathbf{F}$, определено формулой (§ 2.10):

$$\delta r_B = \delta r_D + \delta\vartheta\, e_3\times(-be_1') = (\delta x + b\,\delta\vartheta\sin\vartheta)e_1 + (\delta y - b\,\delta\vartheta\cos\vartheta)e_2.$$

Пусть $\mathbf{F} = F_xe_1 + F_ye_2$. Работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении δr_B дается равенством

$$\mathbf{F}\cdot\delta r_B = F_x\delta x + F_y\delta y + b(F_x\sin\vartheta - F_y\cos\vartheta)\delta\vartheta.$$

Отсюда получаем обобщенные силы

$$Q_x = F_x,\quad Q_y = F_y,\quad Q_\vartheta = b(F_x\sin\vartheta - F_y\cos\vartheta).$$

Когда сила $\mathbf{F}$ зависит только от угла ϑ ориентации тележки:

$$F_x = F_x(\vartheta),\quad F_y = F_y(\vartheta),$$

мы будем иметь дело с системой Чаплыгина, так как ни коэффициенты связей, ни выражение для кинетической энергии и обобщенных сил не будут содержать координат x, y, φ_2.

Для того чтобы получить уравнения Чаплыгина, найдем функцию T^*. После исключения зависимых скоростей с помощью уравнений связей будем иметь

$$T^* = \frac{m}{2}(a\dot\vartheta + R\dot\varphi_1)^2 + \frac{J}{2}\dot\vartheta^2 + \frac{C}{2}\left[\dot\varphi_1^2 + \left(\frac{2a}{R}\dot\vartheta + \dot\varphi_1\right)^2\right].$$

Видим, что T^* не зависит явно от координат. Поэтому уравнения Чаплыгина запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot\vartheta}\right) + \gamma_{\vartheta1}\dot\varphi_1 = Q_\vartheta^*,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot\varphi_1}\right) - \gamma_{\vartheta1}\dot\vartheta = Q_1^*.$$

Для расчета $\gamma_{\vartheta1}$ представим дифференциальные связи следующим образом:

$$\dot x = b_{x\vartheta}\dot\vartheta + b_{x1}\dot\varphi_1,\quad \dot y = b_{y\vartheta}\dot\vartheta + b_{y1}\dot\varphi_1,\quad \dot\varphi_2 = b_{2\vartheta}\dot\vartheta + b_{21}\dot\varphi_1,$$

где

$$b_{x\vartheta} = -a\cos\vartheta,\quad b_{x1} = -R\cos\vartheta,\quad b_{y\vartheta} = -a\sin\vartheta,\quad b_{y1} = -R\sin\vartheta,$$
$$b_{2\vartheta} = \frac{2a}{R},\quad b_{21} = 1.$$

По определению 7.2.1 коэффициентов гироскопических сил, выражающих влияние дифференциальных связей, получим

$$\gamma_{\vartheta1} = \frac{\partial T}{\partial\dot x}\frac{\partial b_{x1}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial T}{\partial\dot y}\frac{\partial b_{y1}}{\partial\vartheta} = R\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x}\sin\vartheta - \frac{\partial T}{\partial\dot y}\cos\vartheta\right),$$

поскольку $b_{2\vartheta}$, b_{21} — постоянные, а $b_{x\vartheta}$ и $b_{y\vartheta}$ не зависят от φ_1. Далее

$$\frac{\partial T}{\partial\dot x} = m\dot x + m_0l\dot\vartheta\sin\vartheta = m_0\left[\left(l\sin\vartheta - a\frac{m}{m_0}\cos\vartheta\right)\dot\vartheta - \frac{m}{m_0}R\dot\varphi_1\cos\vartheta\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot y} = m\dot y - m_0l\dot\vartheta\cos\vartheta = m_0\left[-\left(l\cos\vartheta - a\frac{m}{m_0}\sin\vartheta\right)\dot\vartheta - \frac{m}{m_0}R\dot\varphi_1\sin\vartheta\right].$$

Поэтому $\gamma_{\vartheta1} = m_0Rl\dot\vartheta$.

Вычислим теперь обобщенные силы:

$$Q_\vartheta^* = Q_\vartheta + Q_xb_{x\vartheta} + Q_yb_{y\vartheta} = (bF_x - aF_y)\sin\vartheta - (aF_x + bF_y)\cos\vartheta,$$

$$Q_1^* = Q_xb_{x1} + Q_yb_{y1} = -R(F_x\cos\vartheta + F_y\sin\vartheta).$$

Учитывая все полученные соотношения, выписываем уравнения Чаплыгина:

$$\left(ma^2 + J + 4C\frac{a^2}{R^2}\right)\ddot\vartheta + \left(maR + 2C\frac{a}{R}\right)\ddot\varphi_1 + m_0Rl\dot\vartheta\dot\varphi_1 = Q_\vartheta^*,$$

$$\left(maR + 2C\frac{a}{R}\right)\ddot\vartheta + (mR^2 + 2C)\ddot\varphi_1 - m_0Rl\dot\vartheta^2 = Q_1^*.$$

Это — замкнутая система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая может быть исследована независимо от системы уравнений дифференциальных связей.◇

Контрольные вопросы к главе 7

7.1. Пусть дифференциальные связи представлены в виде

$$\dot q_{p+\nu} = \varphi_{p+\nu}(t, q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_p),\quad p = n-m,\ \nu = 1,\dots,m,$$

где $q_1,\dots,q_n$ — обобщенные координаты системы. Доказать, что тогда множество виртуальных перемещений определено равенствами

$$\delta q_{p+\nu} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\varphi_{p+\nu}}{\partial\dot q_k}\delta q_k.$$

7.2. Показать, что если величины $\tilde Q_i$ теоремы 7.2.1 не зависят от ускорений, то система связей линейна по скоростям.

7.3. Допускают ли уравнения теоремы 7.2.1 интеграл энергии, если действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных, а активные силы потенциальны.

7.4. Показать, что если дифференциальные, линейные по скоростям связи однородны, то $\sum_{i=1}^{p}\tilde Q_i\dot q_i = 0$, где величины $\tilde Q_i$ определены теоремой 7.2.1 (см. следствие 7.2.1).

7.5. Как будут выглядеть уравнения движения тележки Чаплыгина в примере 7.3.2, если колеса считать не имеющими массы?

7.6. В примере 7.3.2, приняв $\mathbf{F} = 0$, указать стационарные движения тележки Чаплыгина.

Глава 8

Динамика голономных систем

В этой главе будут рассмотрены системы материальных точек со связями, имеющими геометрическую природу и выражающимися конечными зависимостями от радиусов-векторов точек системы. Такие связи допускают введение лагранжевых координат $q_1,\dots,q_n$, где n — число степеней свободы системы (определение 4.7.1). Любое совместимое со связями положение всех точек системы однозначно определяется заданием момента времени t и значениями лагранжевых координат:

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1,\dots,q_n,t),\quad \nu = 1,\dots,N.$$

Здесь $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек системы, N — число ее точек. На координаты $q_1,\dots,q_n$ и их обобщенные скорости $\dot q_1,\dots,\dot q_n$ не накладывается никаких кинематических условий.

Действительные элементарные перемещения точек системы задаются равенствами

$$d\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial t}dt,\quad \nu = 1,\dots,N$$

или

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial t},\quad \nu = 1,\dots,N.$$

Виртуальные перемещения выражаются формулами

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i,\quad \nu = 1,\dots,N,$$

где δq_i — дифференциалы независимых переменных q_i.

§ 8.1. Уравнения Лагранжа второго рода

Получить уравнения движения голономной системы с идеальными связями можно, воспользовавшись теоремой 7.1.1 о форме принципа Даламбера–Лагранжа в лагранжевых координатах. Основное

тождество этого принципа имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0.$$

Поскольку для голономной системы дифференциалы δq_i произвольны и независимы, а основное тождество должно выполняться при любых значениях δq_i, то закон $q_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, будет соответствовать действительному движению тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\quad i = 1,\dots,n,$$

которая называется *системой уравнений Лагранжа второго рода*. Эти уравнения удобны для использования, так как экономно описывают движение, определяя зависимость лишь лагранжевых координат от времени. Они не содержат неизвестных реакций идеальных связей, а правила составления этих уравнений стандартны и не зависят от специфики изучаемой голономной системы.

Лагранжев формализм — это последовательность стандартных операций, которые необходимо выполнить, чтобы получить уравнения Лагранжа второго рода. Вот эти операции.

1. Выбрать минимальный набор независимых координат $q_1,\dots,q_n$, с помощью которых желательно записать уравнения движения.

2. Найти обобщенные силы

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_i},\quad i = 1,\dots,n.$$

Их можно получить как коэффициенты при дифференциалах обобщенных координат в выражении для элементарной работы всех сил, действующих на систему, на виртуальных перемещениях точек их приложения:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}Q_i\,\delta q_i.$$

Если исходные силы $\mathbf{F}_\nu$ были функциями координат точек системы или их скоростей, то при вычислении обобщенных сил следует выразить эти функции через обобщенные координаты и их производные.

3. Вычислить кинетическую энергию T системы как функцию лагранжевых координат q_i, обобщенных скоростей $\dot q_i$, времени t. Чтобы найти T, полезно использовать теоремы кинематики о структуре поля скоростей, а также теоремы Кёнига. Удобно бывает вычислить

сначала кинетическую энергию в декартовых координатах, а затем перейти от декартовых координат и скоростей к лагранжевым координатам и обобщенным скоростям.

4. Выполнить указанное в уравнениях Лагранжа частное и полное дифференцирование. При этом дифференцирование по обобщенным скоростям и лагранжевым координатам производится так, как будто они независимые переменные.

Указанная последовательность операций позволяет для любой системы координат, действуя стандартным образом, выписать уравнения движения. Специфика левых частей этих уравнений вполне определяется видом кинетической энергии для той или иной механической системы.

Теорема 8.1.1. *Кинетическая энергия T системы материальных точек есть сумма*

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

— однородная квадратичная форма обобщенных скоростей,

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i\dot{q}_i$$

— однородная линейная форма обобщенных скоростей, T_0 от скоростей не зависит.

Доказательство. Кинетическая энергия вычисляется по формуле (см. определение 5.1.1)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^2.$$

Выражая радиусы-векторы точек системы через лагранжевы координаты, получим

$$\mathbf{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \quad \nu = 1,\ldots,N.$$

Подставим эти выражения в формулу для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2\right].$$

Теперь примем

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)\dot{q}_i,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}.\square$$

Следствие 8.1.1. *Коэффициенты однородных форм разложения кинетической энергии имеют вид*

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}, \quad b_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}.$$

Следствие 8.1.2. *Для склерономной механической системы связи не зависят явно от времени: $\partial \mathbf{r}_\nu/\partial t = 0$, $\nu = 1,\ldots,N$, и кинетическая энергия есть квадратичная форма обобщенных скоростей: $T = T_2$.*

Теорема 8.1.2. *Форма T_2 кинетической энергии положительно определена.*

Доказательство. По определению

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Рассмотрим квадратичную дифференциальную форму

$$\Phi(\delta q_1,\ldots,\delta q_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\delta q_i\delta q_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_i\delta q_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i\right)^2,$$

где δq_i, δq_j — дифференциалы лагранжевых координат при фиксированном времени. Массы точек системы строго положительны. Поэтому значения формы Φ неотрицательны. Докажем, что форма Φ невырождена.

Рассмотрим матрицу

$$J = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1}\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1}, & \sqrt{m_2}\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1}, & \ldots & \sqrt{m_N}\frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_1} \\ \sqrt{m_1}\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2}, & \sqrt{m_2}\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2}, & \ldots & \sqrt{m_N}\frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{m_1}\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_n}, & \sqrt{m_2}\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_n}, & \ldots & \sqrt{m_N}\frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

С ее помощью матрицу формы Φ можно представить в виде

$$(a_{ij}) = JJ^T.$$

Таким образом матрица (a_{ij}) есть матрица Грама для строк матрицы J. Если связи, наложенные на систему материальных точек, независимы, то J имеет максимально возможный ранг, равный n, и, следовательно, ее строки линейно независимы. Поэтому $\det(a_{ij}) \neq 0.\square$

Замечание 8.1.1. В отдельных изолированных точках пространства обобщенных координат матрица (a_{ij}) может вырождаться. Это — особые точки. Поведение механической системы в их окрестности нуждается в специальном исследовании.

Следствие 8.1.3. *Систему уравнений Лагранжа можно, за исключением тех случаев, когда координаты принимают значения, соответствующие особым точкам, разрешить относительно вторых производных от обобщенных координат.*

Доказательство. Пользуясь равенством $T = T_2 + T_1 + T_0$, найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j + b_i.$$

После выполнения в уравнениях Лагранжа операции дифференцирования по времени получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

Относительно вторых производных $\ddot{q}_j$ имеем систему линейных уравнений с невырожденной матрицей (a_{ij}).$\square$

Замечание 8.1.2. Уравнения Лагранжа второго рода могут быть справедливыми не только для голономных систем. Например, уравнения Чаплыгина имеют форму уравнений Лагранжа, в которых реакции, введенные в соответствии с принципом освобождения от неголономных связей, оказываются гироскопическими и имеют специальную форму. Однако техника получения уравнений Чаплыгина не поддается лагранжеву формализму и оказывается более сложной (§ 7.3).

§ 8.2. Энергетические соотношения

Теорема 5.1.8 обусловливает существование интеграла энергии систем с произвольными связями, для которых действительные перемещения принадлежат множеству виртуальных. Для голономных систем интеграл энергии может существовать и тогда, когда действительные перемещения не содержатся среди виртуальных. Чтобы получить этот результат, докажем сначала обобщение теоремы 5.1.6 об изменении кинетической энергии.

Теорема 8.2.1. *Для действительного элементарного перемещения $\{dq_i,\ i = 1,\ldots,n\}$ голономной механической системы выполнено дифференциальное соотношение*

$$d(T_2 - T_0) = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,dq_i - \frac{\partial T}{\partial t}\,dt.$$

Доказательство. Умножим каждое уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1\ldots,n$$

на $\dot{q}_i$ и результаты почленно сложим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i.$$

Это равенство можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) - \frac{dT}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i.$$

или

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Осталось умножить это соотношение на $dt.\square$

Теорема 8.2.2. (Обобщенный интеграл энергии Якоби). *Пусть голономные связи, стесняющие систему материальных точек, зависят явно от времени, но кинетическая энергия T от времени явно не зависит. Пусть, кроме того, активные силы, действующие на систему, обладают силовой функцией U, зависящей только от лагранжевых координат. Тогда уравнения Лагранжа допускают первый интеграл*

$$T_2 - T_0 = U + h,$$

где h — произвольная постоянная (константа энергии), определяемая начальными условиями.

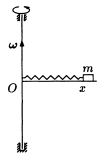
Доказательство. Воспользуемся теоремой 8.2.1 и учтем, что если кинетическая энергия не зависит явно от времени, то $\partial T/\partial t = 0$, а если существует силовая функция U, то

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i = dU.\square$$

Пример 8.2.1. Пусть невесомая горизонтальная перекладина вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального стержня (рис. 8.2.1). На перекладине расположена материальная точка массы m, прикрепленная к вертикальному стержню пружиной жесткости c и могущая скользить по горизонтальной перекладине без трения. Найти вид интеграла энергии.

Решение. Расстояние от материальной точки до вертикального стержня обозначим x. Кинетическая энергия точки дается формулой

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2).$$



Материальная точка m вынуждена двигаться вдоль прямой, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Реакция связи, перпендикулярная этой прямой, не равна нулю и совершает работу на абсолютном перемещении точки. Механическая энергия системы в этом случае не сохраняется, хотя сила пружины, действующая на точку, потенциальна. Вместе с тем имеет место обобщенный интеграл энергии Якоби.

Рис. 8.2.1. Связь, зависящая от времени

Сила потенциальна с силовой функцией

$$U = -\frac{c}{2}(x - x_0)^2,$$

где x_0 — длина пружины в недеформированном состоянии. Однако сумма кинетической и потенциальной энергий

$$\mathcal{H} = T + \Pi = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2) + \frac{c}{2}(x - x_0)^2$$

не может служить интегралом уравнений движения, так как связи зависят явно от времени, и реакция связи совершает работу на действительном перемещении точки. Вместе с тем кинетическая энергия от времени явно не зависит. Поэтому справедлив обобщенный интеграл энергии Якоби

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2x^2) + \frac{c}{2}(x - x_0)^2 = h,$$

где h — постоянная интегрирования.$\diamond$

Следствие 8.2.1. (Об изменении полной энергии). *Пусть $\mathcal{H} = T + \Pi$ — полная энергия системы, $\Pi = -U$ — потенциальная энергия части сил. Тогда*

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Теорема 8.2.3. (Критерий гироскопических сил). *Силы, действующие на систему материальных точек, будут гироскопическими тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i \equiv 0$$

для любых значений обобщенных скоростей $\dot{q}_i$.

Доказательство. Необходимость. В соответствии с определением 7.2.1 гироскопическими называются силы, для которых

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ji}\dot{q}_i, \quad \gamma_{ji} = -\gamma_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что для них доказываемый критерий выполнен.

Достаточность. Пусть силы таковы, что справедливо указанное в условии теоремы тождество. Продифференцируем его частным образом по $\dot{q}_i$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j + Q_i \equiv 0.$$

Обозначив $\gamma_{ji} = \partial Q_j/\partial \dot{q}_i$, убеждаемся в том, что рассматриваемые силы удовлетворяют определению 7.2.1. Для них должно выполняться тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ji}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i<j=1}^{n}(\gamma_{ji} + \gamma_{ij})\dot{q}_i\dot{q}_j \equiv 0$$

при любых значениях обобщенных скоростей. Отсюда $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}.\square$

Пример 8.2.2. Пусть движение изучается в неинерциальном репере. Тогда на механическую систему помимо прочих сил инерции действуют кориолисовы силы (теорема 3.13.1). Для связей, не зависящих явно от времени в этом репере, такие силы будут гироскопическими. В самом деле, сила Кориолиса, действующая на ν-ю точку системы, выражается формулой

$$\mathbf{F}_\nu = -2m_\nu(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{r\nu}), \quad \nu = 1,\ldots,N,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость репера, $\mathbf{v}_{r\nu}$ — относительная скорость ν-й точки. Следовательно,

$$Q_i = -2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{r\nu})\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Далее

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = -2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{r\nu})\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i = -2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{r\nu})\cdot\mathbf{v}_{r\nu} \equiv 0.\diamond$$

Определение 8.2.1. Силы называются *диссипативными*, если их мощность может принимать только неположительные значения:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i \leq 0.$$

Пример 8.2.3. Пусть к каждой точке системы приложена сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости:

$$\mathbf{F}_\nu = -\beta\mathbf{v}_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,N, \quad \beta > 0.$$

Соответствующие обобщенные силы примут вид

$$Q_i = -\beta\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{v}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Если система склерономна, то

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = -\beta\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{v}_\nu\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i = -\beta\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{v}_\nu^2.$$

Следовательно, при любых склерономных связях такая система сил будет диссипативной.$\diamond$

Следствие 8.2.2. *Необходимое и достаточное условие гироскопичности сил можно представить в виде*

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\left(\mathbf{v}_\nu - \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right) \equiv 0,$$

а диссипативности сил — в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\left(\mathbf{v}_\nu - \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right) \leq 0.$$

Доказательство. Согласно определению обобщенных сил, найдем

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu\cdot\left(\mathbf{v}_\nu - \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right).\square$$

Определение 8.2.2. Пусть

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_j, \quad i = 1,\ldots,n,$$

с симметричной ($b_{ij} = b_{ji}$) неотрицательно определенной матрицей. Тогда функция

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

называется *диссипативной функцией Рэлея*.

Функция Рэлея неотрицательна. Следовательно, если она существует, то

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = -2\mathcal{R},$$

и силы, приложенные к системе, будут диссипативными. Если функция Рэлея положительно определена, то диссипацию называют *полной*, а совокупность таких сил — *определенно диссипативной*.

Следствие 8.2.3. *Гироскопические силы не влияют на изменение полной энергии системы. Они не нарушают интеграл энергии или обобщенный интеграл энергии Якоби. Диссипативные силы стремятся уменьшить полную энергию.*

Заметим, что для склерономных систем выполнено соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} = 0, \quad \nu = 1,\ldots,N, \quad T_1 = T_0 \equiv 0.$$

Поэтому закон изменения полной энергии упрощается:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i.$$

Для таких систем необходимое и достаточное условие существования интеграла энергии состоит в том, что непотенциальные силы либо отсутствуют, либо они должны быть гироскопическими.

§ 8.3. Обобщенная силовая функция

Пусть лагранжевы координаты задают конфигурацию механической системы в подвижном репере. Изменения лагранжевых координат никак не влияют на положение базисных векторов в абсолютном пространстве и характеризуют лишь относительное движение.

Изучим структуру уравнений Лагранжа, построенных по правилам составления уравнений для относительного движения. По теореме 2.11.1 сложения скоростей для каждой материальной точки системы будем иметь

$$\mathbf{v}_\nu^a = \mathbf{v}_\nu^e + \mathbf{v}_\nu^r,$$

где $\mathbf{v}_\nu^a$ — скорость точки в абсолютном репере, $\mathbf{v}_\nu^r$ — скорость точки относительно подвижного репера, $\mathbf{v}_\nu^e$ — переносная скорость. Кинетическая энергия абсолютного движения примет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\mathbf{v}_\nu^a)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\mathbf{v}_\nu^e + \mathbf{v}_\nu^r)^2 = T^* + U^*,$$

где T^* — кинетическая энергия относительного движения. Функция U^* выражается формулой

$$U^* = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \times \mathbf{v}_\nu^r + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\mathbf{v}_\nu^e)^2.$$

Определение 8.3.1. Функция

$$U = U(q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n, t)$$

называется *обобщенной силовой функцией*, если обобщенные силы в уравнениях Лагранжа второго рода выражаются формулами

$$Q_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Соответствующая система сил называется *обобщенно потенциальной*.

Теорема 8.3.1. *Функция U^* служит обобщенной силовой функцией сил инерции, действующих в подвижном репере.*

Доказательство. Вычислим необходимые частные производные:

$$\frac{\partial U^*}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\partial \mathbf{v}_\nu^e}{\partial q_i}\cdot \mathbf{v}_\nu^r + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu^r}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu^e}{\partial q_i}.$$

Обозначим: $\mathbf{v}_0$ — скорость начала подвижного репера, $\boldsymbol\omega$ — угловую скорость этого репера, $\mathbf{r}_\nu$ — радиусы-векторы относительного положения точек системы. По теореме Эйлера найдем

$$\mathbf{v}_\nu^e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol\omega \times \mathbf{r}_\nu.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu^e}{\partial q_i} = \boldsymbol\omega \times \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

С учетом этих выражений сгруппируем первый и третий члены в правой части выражения для $\partial U^*/\partial q_i$:

$$\frac{\partial U^*}{\partial q_i} = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu [\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}_\nu) + \boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_\nu^r]\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu^e}{\partial q_i}.$$

Далее

$$\frac{\partial U^*}{\partial \dot q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu^r}{\partial \dot q_i} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

По-прежнему символом $\tilde d/dt$ будем обозначать дифференцирование по времени координат вектора в подвижном репере (относительная производная). Отметим, что полная производная по времени, взятая от евклидова скалярного произведения, может быть заменена на относительную производную. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot q_i}\right) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{\tilde d \mathbf{v}_\nu^e}{dt}\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu^e \cdot \frac{\tilde d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Примем во внимание равенства

$$\frac{\tilde d \mathbf{v}_\nu^e}{dt} = \frac{\tilde d \mathbf{v}_0}{dt} + \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r}_\nu + \boldsymbol\omega \times \frac{\tilde d \mathbf{r}_\nu}{dt},$$

$$\frac{\tilde d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_\nu^r}{\partial q_i}, \quad \frac{\tilde d \mathbf{r}_\nu}{dt} = \mathbf{v}_\nu^r.$$

В соответствии с определением 8.3.1 вычислим обобщенную силу

$$Q_i = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\frac{\tilde d \mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol\omega \times (\boldsymbol\omega \times \mathbf{r}_\nu) + \dot{\boldsymbol\omega} \times \mathbf{r}_\nu + 2(\boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_\nu^r)\right]\cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Но

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{\tilde d \mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol\omega \times \mathbf{v}_0.$$

Поэтому первые четыре члена в квадратной скобке выражения для Q_i учитывают действие силы инерции из-за переносного ускорения. Пятый член учитывает действие силы Кориолиса.□

Следствие 8.3.1. *Кинетическая энергия относительного движения имеет вид*

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\mathbf{v}_\nu^r)^2,$$

а с учетом того, что U^* служит обобщенной силовой функцией для сил инерции, уравнения Лагранжа можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial U^*}{\partial q_i} + Q_i,$$

где Q_i — обобщенные силы, не учитывающие сил инерции. Как и следовало ожидать, с учетом того, что $T = T^* + U^*$, уравнения Лагранжа принимают стандартный вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

Помимо сил инерции в природе существуют и другие силы, обладающие обобщенной силовой функцией.

Пример 8.3.1. На электрон, движущийся в электромагнитном поле, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\,\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{v}$ — скорость электрона, c — скорость света, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, e — заряд электрона. Покажем, что сила $\mathbf{F}$ имеет обобщенную силовую функцию вида

$$U = -e\,\varphi - \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

Функция φ и вектор-функция $\mathbf{A}$ называются скалярным и векторным потенциалами. При этом

$$\mathbf{r} = r_1\,\mathbf{e}_1 + r_2\,\mathbf{e}_2 + r_3\,\mathbf{e}_3$$

радиус-вектор электрона и

$$\varphi = \varphi(r_1, r_2, r_3, t), \quad \mathbf{A} = A_1\,\mathbf{e}_1 + A_2\,\mathbf{e}_2 + A_3\,\mathbf{e}_3, \quad A_i = A_i(r_1, r_2, r_3, t).$$

Найдем силу $\mathbf{F}$, воспользовавшись определением 8.3.1 и считая r_1, r_2, r_3 обобщенными координатами электрона:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot r_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{e}{c}A_i\right) = -\frac{e}{c}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_j}\dot r_j + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} - \frac{e}{c}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_j}{\partial r_i}\dot r_j.$$

Отсюда следует, что

$$F_i = -e\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} + \frac{e}{c}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_i}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_i}\right)\dot r_j + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}.$$

Другими словами, должно быть

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = -\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

Существование потенциалов φ и $\mathbf{A}$ следует из свойств уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

В частном случае, когда векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ постоянны, указанные потенциалы принимают вид

$$\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{r} \times \mathbf{B}.$$

Заметим, что уравнения движения электрона в постоянном электромагнитном поле интегрируются аналитически. Это — линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Здесь ограничимся лишь исследованием траектории. Представим радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ электрона и вектор $\mathbf{E}$ в виде суммы двух составляющих:

$$\mathbf{r} = r_b\mathbf{e}_b + \mathbf{r}_\perp, \quad \mathbf{v} = v_b\mathbf{e}_b + \mathbf{v}_\perp, \quad \mathbf{E} = E_b\mathbf{e}_b + \mathbf{E}_\perp,$$

$$\frac{d}{dt}r_b = v_b, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{r}_\perp = \mathbf{v}_\perp,$$

где $\mathbf{e}_b$ — единичный направляющий вектор поля $\mathbf{B}$. В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{B} \neq 0$, так как в противоположном случае движение будет равноускоренным, и его траектория представит собой прямую или параболу.

Запишем уравнения движения с учетом принятых обозначений:

$$m\frac{d}{dt}v_b = eE_b, \quad m\frac{d}{dt}\mathbf{v}_\perp = e\,\mathbf{E}_\perp + \frac{e}{c}(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}).$$

Первое уравнение выражает равноускоренное смещение электрона вдоль оси $\mathbf{e}_b$, параллельной вектору $\mathbf{B}$ магнитной индукции:

$$r_b = \frac{eE_b(t-t_0)^2}{2m} + v_{b0}(t-t_0) + r_{b0},$$

где v_{b0}, r_{b0} — начальные значения проекций скорости и радиуса-вектора.

Проинтегрируем один раз второе уравнение движения:

$$m\mathbf{v}_\perp = e\,\mathbf{E}_\perp(t-t_0) + \frac{e}{c}[(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{\perp 0}) \times \mathbf{B}] + m\mathbf{v}_{\perp 0}.$$

Пусть $\mathbf{B} \neq 0$. Положим

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{\perp 0} + \frac{\mathbf{B} \times [m\mathbf{v}_{\perp 0} + e\,\mathbf{E}_\perp(t-t_0)]c}{B^2 e} + \frac{c^2 m}{B^2 e}\mathbf{E}_\perp.$$

Проверкой убеждаемся в справедливости дифференциального уравнения

$$m\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{e}{c}(\mathbf{R} \times \mathbf{B}),$$

из которого ясно, что модуль R вектора $\mathbf{R}$ не изменяется в процессе движения. Введем вектор

$$\mathbf{r}_n = r_b\mathbf{e}_b + \mathbf{r}_{\perp 0} - \frac{\mathbf{B} \times [m\mathbf{v}_{\perp 0} + e\,\mathbf{E}_\perp(t-t_0)]c}{B^2 e} - \frac{c^2 m}{B^2 e}\mathbf{E}_\perp.$$

Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_n,$$

и траекторию электрона можно представить как результат композиции двух движений: движения по окружности радиуса R с центром в точке $\mathbf{r}_n$, причем плоскость окружности перпендикулярна вектору $\mathbf{B}$, и движения вместе с точкой $\mathbf{r}_n$, перемещающейся по параболе. Образно говоря, при действии ненулевого магнитного поля электрон совершает "спиралевидное" движение.◇

Теорема 8.3.2. *Всякая обобщенная силовая функция U линейно зависит от обобщенных скоростей:*

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i\dot q_i + U_0,$$

где $U_i = U_i(q_1, \ldots, q_n, t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, а силы, ею определяемые, представляют собой сумму гироскопических сил и сил, не зависящих от обобщенных скоростей.

Доказательство. Пусть задана обобщенная силовая функция

$$U = U(q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n, t).$$

По определению 8.3.1 найдем

$$Q_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial \dot q_j \partial q_i}\dot q_j - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i}\ddot q_j + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot q_i}.$$

Но в соответствии с принципом детерминированности Ньютона (§ 3.3) обобщенные силы могут зависеть лишь от лагранжевых координат, обобщенных скоростей и времени:

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot q_j \partial \dot q_i} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, U линейно зависит от обобщенных скоростей:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i\dot q_i + U_0,$$

где $U_i(q_1, \ldots, q_n, t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Таким образом,

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial q_j}\dot q_i + \frac{\partial U_0}{\partial q_j},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_j}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial U_j}{\partial t}.$$

Вычитая, найдем

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U_i}{\partial q_j} - \frac{\partial U_j}{\partial q_i}\right)\dot q_i + \frac{\partial U_0}{\partial q_j} - \frac{\partial U_j}{\partial t}.$$

Обозначим

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial q_j} - \frac{\partial U_j}{\partial q_i} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, первый член выражения для Q_j дает гироскопическую силу (определение 7.2.1). Второй и третий члены не зависят от обобщенных скоростей.□

Следствие 8.3.2. *Силы, определяемые обобщенной силовой функцией, не могут быть диссипативными.*

§ 8.4. Функция Лагранжа. Циклические координаты

Пусть из множества активных сил, действующих на систему материальных точек, можно выделить часть, для которой существует силовая функция $U = U(q_1, \ldots, q_n, t)$ либо обобщенная силовая функция $U = U(q_1, \ldots, q_n, \dot q_1, \ldots, \dot q_n, t)$.

Определение 8.4.1. Сумма кинетической энергии T и функции U

$$L = T + U$$

называется *функцией Лагранжа* (*лагранжианом*) системы материальных точек.

Следствие 8.4.1. *С использованием функции Лагранжа уравнения Лагранжа второго рода принимают вид*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \ldots, n,$$

где Q_i — силы, не обладающие силовой функцией.

Доказательство непосредственно следует из определения 8.3.1.

Следствие 8.4.2. *Для систем материальных точек функция Лагранжа представляется в виде*

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

где L_2 — квадратичная форма от обобщенных скоростей, L_1 — линейная форма от обобщенных скоростей, L_0 от обобщенных скоростей не зависит.

Доказательство. Когда U есть силовая функция, т.е. она зависит только от координат, то указанное представление функции Лагранжа следует из теоремы 8.1.1. Если U — обобщенная силовая функция, то необходимо привлечь еще теорему 8.3.2.□

Следствие 8.4.3. *Если функция Лагранжа не зависит явно от времени, а силы, не обладающие силовой функцией, являются гироскопическими или отсутствуют, то имеет место обобщенный интеграл энергии Якоби:*

$$L_2 - L_0 = h.$$

Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 8.2.2 при замене T на L. Однако теперь L может включать уже обобщенную силовую функцию.□

Определение 8.4.2. Координата q_i называется *циклической*, если функция Лагранжа от нее не зависит:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Соответственно $\dot q_i$ называется *циклической скоростью*.

Теорема 8.4.1. *Если q_i — циклическая координата и соответствующая ей непотенциальная сила отсутствует: $Q_i = 0$, то система уравнений Лагранжа допускает первый интеграл вида*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \beta_i,$$

где β_i — постоянная интегрирования.

Доказательство. Так как q_i — циклическая координата, а $Q_i = 0$, то соответствующее уравнение Лагранжа (см. следствие 8.4.1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = 0.□$$

Первый интеграл, о котором идет речь в теореме 8.4.1, называется *циклическим интегралом*. В отличие от циклических координат остальные координаты называются *позиционными*.

Принимая во внимание следствие 8.4.2, заключаем, что циклические интегралы линейны относительно циклических скоростей $\dot q_i$ и не зависят явно от циклических координат q_i. С помощью циклических интегралов можно исключить из остальных уравнений движения циклические скорости, выразив их через скорости позиционных координат. При этом порядок системы уравнений движения снижается на $2s$ единиц, где s — число циклических координат.

Рассмотрим примеры, показывающие, что при действии только голономных связей теорема 8.4.1 о циклическом интеграле обобщает основные теоремы динамики системы.

Пример 8.4.1. Интеграл количества движения (следствие 5.1.2) имеет место, когда связи допускают виртуальное поступательное перемещение всей системы вдоль постоянного направления с единичным вектором $\mathbf{e}$. Соответствующую этому перемещению лагранжеву координату обозначим q_1. Тогда

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \mathbf{e}\,\delta q_1, \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

суть виртуальные перемещения всех точек системы и $\partial \mathbf{r}_\nu/\partial q_1 = \mathbf{e}$. Обобщенная сила Q_1 имеет вид

$$Q_1 = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu$$

и представляет собой сумму проекций активных сил на направление $\mathbf{e}$. Вычислим теперь частные производные $\partial T/\partial \dot q_1$, $\partial T/\partial q_1$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{e} \cdot M\mathbf{v}_c,$$

где M — масса, $\mathbf{v}_c$ — скорость центра масс системы. Далее

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\mathbf{de}}{dt} = 0.$$

Следовательно, если $\partial U/\partial q_1 = 0$, то координата q_1 будет циклической. Соответствующее ей уравнение

$$\mathbf{e} \cdot M\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu = Q_1$$

дает теорему 5.1.2 о движении центра масс. Если же $Q_1 = 0$, то будет справедлив циклический интеграл, выражающий закон сохранения проекции количества движения на направление вектора $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} \cdot M\mathbf{v}_c = \beta_1.◇$$

Пример 8.4.2. Интеграл площадей (следствие 5.1.3) существует, когда множество виртуальных перемещений в каждый момент времени включает дифференциал вращения всей системы как целого вокруг неподвижной оси (§ 2.10). Пусть $\mathbf{e}$ — единичный вектор направления этой оси, а q_1 — угол поворота вокруг нее. Примем q_1 за одну из лагранжевых координат системы. Дифференциалы вида

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \delta q_1(\mathbf{e} \times \mathbf{r}_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, N,$$

определяют в рассматриваемом случае виртуальные перемещения точек системы. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Обобщенная сила, соответствующая координате q_1, вычисляется следующим образом:

$$Q_1 = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{F}_\nu \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_\nu) = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu.$$

Она представляет собой проекцию суммарного момента сил на направление $\mathbf{e}$. Вычислим теперь частные производные $\partial T/\partial \dot q_1$, $\partial T/\partial q_1$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_\nu) = \mathbf{e} \cdot \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu,$$

что совпадает с проекцией суммарного вектора кинетического момента на ось $\mathbf{e}$. Далее

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{e} \times \mathbf{r}_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot (\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0.$$

Уравнение Лагранжа, соответствующее координате q_1, принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times m_\nu\mathbf{v}_\nu\right)=\mathbf{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{r}_\nu\times\mathbf{F}_\nu$$

и выражает теорему 5.1.4 об изменении кинетического момента. Если момент активных сил относительно оси $\mathbf{e}$ равен нулю, то соответствующий циклический интеграл будет интегралом площадей.◇

Пример 8.4.3. Пусть силы, не имеющие силовой функции, отсутствуют: $Q_i=0$. Тогда система уравнений Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad i=1,\dots,n.$$

Если, кроме того, функция Лагранжа не зависит явно от времени, то для этой системы справедлив обобщенный интеграл энергии (следствие 8.4.3). Покажем, что этот интеграл можно интерпретировать как циклический.

Перейдем к другой независимой переменной τ:

$$t=t(\tau).$$

Обозначим

$$\frac{dt}{d\tau}=t',\quad \frac{dq_i}{d\tau}=q_i',\quad \dot q_i=\frac{dq_i}{dt}=\frac{1}{t'}\,q_i'.$$

Уравнения Лагранжа после перехода к новой независимой переменной примут вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0,\quad i=1,\dots,n,$$

где

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(q_1,\dots,q_n,q_1',\dots,q_n',t')=t'L\left(q_1,\dots,q_n,\frac{q_1'}{t'},\dots,\frac{q_n'}{t'}\right).$$

Эти уравнения имеют структуру уравнений Лагранжа, но чтобы их полностью определить, требуется задать зависимость $t=t(\tau)$. Пользуясь произволом в выборе этой функции, определим ее, добавив к исходной системе дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t'}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=0.$$

Тем самым переменные $q_1,\dots,q_n,t$ заданы посредством системы уравнений Лагранжа второго рода, где $\mathcal{L}$ служит функцией Лагранжа. Поскольку $\mathcal{L}$ от t явно не зависит, координата t будет циклической, и ей соответствует циклический интеграл

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t'}=-h.$$

Покажем, что этот интеграл есть обобщенный интеграл энергии. В самом деле,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t'}=t'\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial\dot q_i}{\partial t'}+L=L-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\,\dot q_i.$$

Поскольку $L=L_2+L_1+L_0$, получим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t'}=L_0-L_2.$$

Следовательно, изучаемый циклический интеграл есть

$$L_2-L_0=h.◇$$

Рассмотренные примеры показывают, что для голономных систем основные теоремы динамики можно рассматривать как проявление свойств циклических координат. Ясно, что удачный выбор лагранжевых координат в значительной мере облегчает интегрирование и исследование системы уравнений Лагранжа. При выборе координат полезно стремиться к тому, чтобы из них как можно больше оказались циклическими.

Решающую роль здесь играет структура множества виртуальных перемещений и то, как изменяется функция Лагранжа по различным направлениям в пространстве лагранжевых координат. Дифференциалу циклической координаты отвечает направление виртуальных перемещений системы, в котором функция Лагранжа не изменяется. Наоборот, если в каждой точке конфигурационного пространства существует направление виртуальных перемещений, оставляющее постоянной функцию Лагранжа, то одну из лагранжевых координат следует выбирать так, чтобы ее дифференциал задавал именно это виртуальное перемещение системы.

Направление виртуального перемещения удобно задавать набором конкретных значений дифференциалов лагранжевых координат. Эти дифференциалы можно назначать произвольными. Например, можно задать их в виде

$$\delta q_i=f_i(q_1,\dots,q_n,t)\,\delta s,\quad i=1,\dots,n,$$

где функции f_i задают направление виртуального перемещения при фиксированном времени, δs — дифференциал скалярного параметра s. Когда обобщенные координаты изменяются с течением времени:

$$q_i=q_i(t),$$

то и введенные дифференциалы δq_i также будут зависеть от времени. Считая s и t независимыми, найдем

$$\frac{d\delta q_i}{dt}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot q_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)\delta s.$$

Символы "d" и "δ" обозначают частные дифференциалы лагранжевых координат по независимым параметрам t и s. Следовательно, должно быть

$$d(\delta q_i)=\delta(dq_i),\quad i=1,\dots,n,$$

и, значит,

$$\delta\dot q_i=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot q_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)\delta s.$$

Определим функции $q_i(s)$, $\dot q_i(s)$ с помощью следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{ds}=f_i(q_1,\dots,q_n,t),$$

$$\frac{d\dot q_i}{ds}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot q_j+\frac{\partial f_i}{\partial t},\quad i=1,\dots,n.$$

Если теперь параметр s принять за некоторую новую лагранжеву координату, то при различных начальных условиях эта система обыкновенных дифференциальных уравнений определит в фазовом пространстве системы семейство координатных линий, соответствующих изменению координаты s при фиксированном времени t. Условие, при котором координате s соответствует циклический интеграл, сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8.4.2. (Э. Нётер). *Пусть изучаемая система определена посредством функции Лагранжа*

$$L=L(q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n,t),$$

обобщенные силы, не имеющие силовой функции, отсутствуют: $Q_i=0$, а координата s вводится с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{ds}=f_i(q_1,\dots,q_n,t),\quad \frac{d\dot q_i}{ds}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot q_j+\frac{\partial f_i}{\partial t},\quad i=1,\dots,n,$$

где t — постоянный параметр, не зависящий от s, в силу чего

$$q_i=q_i(s,t),\quad \dot q_i=\dot q_i(s,t),\quad L=L(s,t).$$

Если при этом L не зависит явно от s: $\partial L/\partial s\equiv 0$, то координата s будет циклической, и ей соответствует циклический интеграл вида

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\,f_i=\beta,$$

где β — постоянная интегрирования.

Доказательство. Поскольку $Q_i=0$, то координаты q_i и их скорости $\dot q_i$ подчиняются уравнениям Лагранжа, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right),\quad i=1,\dots,n.$$

Условие постоянства функции L при изменении параметра s можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\frac{dq_i}{ds}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\,\frac{d\dot q_i}{ds}=0.$$

Преобразуем это условие с помощью уравнений Лагранжа и правила введения координаты s:

$$\frac{\partial L}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)f_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot q_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)f_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\,\frac{df_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\,f_i\right)=0.□$$

Замечание 8.4.1. Относительно неизвестных функций f_i условие

$$\frac{\partial L}{\partial s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\,f_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,\dot q_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)=0$$

можно рассматривать как одно дифференциальное уравнение в частных производных. Найдя его общее решение, можно получить все циклические координаты системы. При этом необходимо учитывать, что f_i, $i=1,\dots,n$, зависят только от координат и времени и должны удовлетворять уравнению при любых значениях обобщенных скоростей.

Следствие 8.4.4. *Известно, что для произвольной системы материальных точек справедливо равенство*

$$L=L_2+L_1+L_0,$$

где

$$L_2=\frac{1}{2}\sum_{k,p=1}^{n}a_{kp}\dot q_k\dot q_p$$

— однородная квадратичная форма обобщенных скоростей,

$$L_1=\sum_{p=1}^{n}b_p\dot q_p$$

— однородная линейная форма скоростей, L_0 от скоростей не зависит.

Уравнение для определения функций f_i принимает вид

$$\sum_{k,p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial a_{kp}}{\partial q_i}\,f_i+a_{ik}\frac{\partial f_i}{\partial q_p}\right)\dot q_k\dot q_p+\sum_{p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial b_p}{\partial q_i}\,f_i+b_i\frac{\partial f_i}{\partial q_p}+\right.$$

$$\left.+a_{ip}\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)\dot q_p+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q_i}\,f_i+b_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)=0.$$

Так как это уравнение должно быть тождеством при любых значениях обобщенных скоростей, то соответствующие коэффициенты должны обратиться в нуль. Отсюда получается система уравнений в частных производных относительно функций f_i:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial f_i}{\partial q_p}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{kp}}{\partial q_i}\,f_i,\quad k,p=1,\dots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial f_i}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial b_k}{\partial q_i}\,f_i+b_i\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q_i}\,f_i+b_i\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)=0.$$

Матрица (a_{ik}) невырожденная, а значит, первые две группы уравнений полученной системы можно разрешить относительно частных производных:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_p}=\sum_{j=1}^{n}d_{pj}^{i}f_j,\quad \frac{\partial f_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}d_{0j}^{i}f_j,\quad i=1,\dots,n.$$

Тогда последнее уравнение исходной системы примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L_0}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{n}b_jd_{0i}^{j}\right)f_i=0.$$

Не останавливаясь подробно на условиях совместности полученной системы уравнений, отметим следующие ее свойства.

1. Пусть $b_i=0$, $i=1,\dots,n$, $L_0=0$. Такой случай имеет место, когда связи не зависят явно от времени, и силы потенциальны. Получаем, что решением системы служат функции f_i, не зависящие явно от времени: $\partial f_i/\partial t=0$.

2. Пусть q_μ — циклическая координата. Тогда

$$\frac{\partial a_{kp}}{\partial q_\mu}=\frac{\partial b_k}{\partial q_\mu}=\frac{\partial L_0}{\partial q_\mu}=0,\quad k,p=1,\dots,n.$$

Как и следовало ожидать, решение системы в этом случае можно взять следующим:

$$f_\mu=1,\quad f_i=0,\quad i\neq\mu.$$

Это означает, что здесь координата s совпадает с циклической координатой q_μ.

§ 8.5. Метод Рáуса исключения циклических координат

Когда некоторые из лагранжевых координат оказались циклическими, можно с помощью соответствующих первых интегралов понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения. Метод Рауса позволяет выполнить понижение порядка системы, сохранив при этом форму уравнений Лагранжа.

Пусть $q_1,\dots,q_s$ — позиционные, а $q_{s+1},\dots,q_n$ — циклические координаты. Если $Q_\mu=0$, $\mu=s+1,\dots,n$, то координатам $q_{s+1},\dots,q_n$ отвечают циклические интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial\dot q_\mu}=\beta_\mu,\quad \mu=1,\dots,n.$$

С помощью этих интегралов можно циклические скорости $\dot q_\mu$ представить в виде функций (для механических систем соответствующая матрица не вырождена)

$$\dot q_\mu=\dot q_\mu(q_1,\dots,q_s,\dot q_1,\dots,\dot q_s,\beta_{s+1},\dots,\beta_n,t).$$

Составим функцию

$$R=L-\sum_{\mu=s+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\mu}\,\dot q_\mu,$$

в которой $\dot q_\mu$ заменим их выражениями через позиционные координаты, скорости и константы циклических интегралов, так что

$$R=R(q_1,\dots,q_s,\dot q_1,\dots,\dot q_s,\beta_{s+1},\dots,\beta_n,t).$$

Полученная таким образом функция R называется *функцией Рауса*.

Для того чтобы вывести уравнения движения, не содержащие циклических скоростей, рассмотрим дифференциал dR функции Рауса по всем аргументам:

$$dR=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial q_i}\,dq_i+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial\dot q_i}\,d\dot q_i+\sum_{\mu=s+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial\beta_\mu}\,d\beta_\mu+\frac{\partial R}{\partial t}\,dt.$$

Принимая во внимание выражение функции Рауса через L и ее производные, будем иметь

$$dR=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_i}\,dq_i+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\,d\dot q_i+\sum_{\mu=s+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\mu}\,d\dot q_\mu-\sum_{\mu=s+1}^{n}\beta_\mu d\dot q_\mu-\sum_{\mu=s+1}^{n}\dot q_\mu d\beta_\mu+\frac{\partial L}{\partial t}\,dt,$$

где dq_i, $d\dot q_i$, $d\beta_\mu$, dt — независимые дифференциалы соответствующих переменных. Полученные выражения для dR тождественны. Следовательно, должны совпадать коэффициенты при дифференциалах аргументов. Учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial\dot q_\mu}=\beta_\mu,\quad \mu=s+1,\dots,n,$$

найдем

$$\frac{\partial R}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i},\ \frac{\partial R}{\partial\dot q_i}=\frac{\partial L}{\partial\dot q_i},\ \frac{\partial R}{\partial\beta_\mu}=-\dot q_\mu,\ \frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t},\ i=1,\dots,s;\ \mu=s+1,\dots,n.$$

Заметим, что в каждом из этих равенств смысл частной производной в левой и правой частях неодинаков. Частные производные от функции Рауса по q_i, $\dot q_i$ вычисляются в предположении, что не изменяются аргументы β_μ, $\mu=s+1,\dots,n$, а частные производные от функции Лагранжа — в предположении, что не меняются аргументы $\dot q_\mu$, $\mu=s+1,\dots,n$.

Принимая во внимание систему уравнений Лагранжа, найдем уравнения для позиционных координат:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,\dots,s.$$

Эта система замкнута, когда Q_i не зависят от циклических координат, и в этом случае она носит название *системы уравнений Рауса*.

Видим, что уравнения Рауса имеют форму уравнений Лагранжа, но роль функции Лагранжа в них играет функция Рауса. После интегрирования уравнений Рауса задача определения закона изменения циклических координат приводится к квадратурам. В самом деле,

$$\dot q_\mu=-\frac{\partial R}{\partial\beta_\mu},\quad \mu=s+1,\dots,n.$$

Отсюда

$$q_\mu=-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial R}{\partial\beta_\mu}\,dt+c_\mu,$$

где c_μ — постоянная интегрирования. Подынтегральное выражение будет известной функцией времени, когда определены все позиционные координаты.

Пример 8.5.1. В случае Лагранжа-Пуассона движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. § 6.8) функция Лагранжа имеет вид

$$L=\frac{1}{2}[A(\dot\vartheta^2\sin^2\vartheta+\dot\psi^2)+C(\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi)^2]-mg\zeta\cos\vartheta.$$

Она не зависит явно от углов φ и ψ, которые, следовательно, будут циклическими координатами. Им соответствуют циклические интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=\dot\psi(A\sin^2\vartheta+C\cos^2\vartheta)+C\dot\varphi\cos\vartheta=\beta A,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=C(\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi)=Cr_0.$$

Вычислим функцию Рауса:

$$R=L-\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}\,\dot\psi-\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\,\dot\varphi=L-\beta A\,\dot\psi-Cr_0\dot\varphi.$$

Разрешим циклические интегралы относительно $\dot\varphi$, $\dot\psi$:

$$\dot\psi=\frac{\beta-br_0\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta},\quad \dot\varphi=r_0-\dot\psi\cos\vartheta.$$

Поэтому

$$R=L-A(\beta-br_0\cos\vartheta)\,\dot\psi-Cr_0^2=L-A\,\frac{(\beta-br_0\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}-Cr_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[A\left(\dot\vartheta^2-\frac{(\beta-br_0\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}\right)-Cr_0^2\right]-mg\zeta\cos\vartheta.$$

Заметив, что функция Рауса не зависит явно от времени, выпишем обобщенный интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}\left[A\left(\dot\vartheta^2+\frac{(\beta-br_0\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}\right)+Cr_0^2\right]+mg\zeta\cos\vartheta=h.$$

Далее исследование движения можно провести так же, как в § 6.8.◇

§ 8.6. Устойчивость движения

Пусть движение некоторой механической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{Y}(t,\mathbf{y}),$$

где $\mathbf{y}\in R^m$, а вектор-функция $\mathbf{Y}$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения. Предположим, что вектор-функция $\mathbf{z}(t)$ — решение системы, а $\mathbf{x}=\mathbf{y}-\mathbf{z}$ — отклонение решения $\mathbf{y}$ от решения $\mathbf{z}$. Поскольку

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}\equiv\mathbf{Y}(t,\mathbf{z}(t)),$$

то для $\mathbf{x}$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{X}(t,\mathbf{x}),$$

где

$$\mathbf{X}(t,\mathbf{x})=[\mathbf{Y}(t,\mathbf{x}+\mathbf{z}(t))-\mathbf{Y}(t,\mathbf{z}(t)),\quad \mathbf{X}(t,0)=0.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение для переменной $\mathbf{x}$ допускает тривиальное решение $\mathbf{x}=0$. Исследование свойств движения в окрестности решения $\mathbf{z}=\mathbf{z}(t)$ сводится к исследованию свойств движения в окрестности тривиального решения $\mathbf{x}=0$.

Определение 8.6.1. Непрерывная скалярная функция $V(t,\mathbf{x})$ называется *знакопостоянной* (*знакоположительной* или *знакоотрицательной*), если $V(t,\mathbf{x})\geq 0$ (или $V(t,\mathbf{x})\leq 0$) во всей своей области определения.

Определение 8.6.2. Функция $V(t,\mathbf{x})$ называется *знакоопределенной* (*положительно определенной* или *отрицательно определенной*), если в ее области определения существует непрерывная скалярная функция $W(\mathbf{x})$ такая, что либо $V(t,\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$ (положительно определенная функция), либо $V(t,\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$ (отрицательно определенная функция), причем $V(t,0) = W(0) = 0$.

Определение 8.6.3. Нулевое решение системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t,\mathbf{x})$$

называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \to \infty$, если для любого t_0 из области существования и единственности решений и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое,что

1) все решения $\mathbf{x}(t)$ системы, включая нулевое решение, для которых $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, определены в промежутке $t_0 \leq t < \infty$;

2) для всех этих решений справедливо неравенство $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t_0 \leq t < \infty$.

Теорема 8.6.1. (Ляпунов). *Если для системы*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t,\mathbf{x}),$$

удовлетворяющей условиям существования и единственности решений при любом $t \geq t_0$, существует положительно определенная функция $V(t,\mathbf{x})$, допускающая знакоотрицательную производную по времени $\dot{V}(t,\mathbf{x})$ в силу системы, то тривиальное решение $\mathbf{x} = 0$ данной системы устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$.

Доказательство. По условию теоремы имеется непрерывная положительно определенная функция $W(\mathbf{x})$ такая, что

$$V(t,\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0, \quad V(t,0) = W(0) = 0.$$

В пространстве R^n возьмем сферу S_ε: $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$, целиком принадлежащую области определения функции $V(t,\mathbf{x})$. Сфера S_ε — компактное множество. Функция $W(\mathbf{x})$ непрерывна и положительна на S_ε. Нижняя грань этой функции достигается в некоторой точке $\mathbf{x}^* \in S_\varepsilon$: $\inf_{\mathbf{x}\in S_\varepsilon} W(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}^*) = \alpha > 0$.

Зафиксируем t_0. Функция $V(t_0,\mathbf{x})$ непрерывна по $\mathbf{x}$, причем $V(t_0,0) = 0$. Следовательно, существует окрестность $\|\mathbf{x}\| < \delta < \varepsilon$ такая, что $0 \leq V(t_0,\mathbf{x}) < \alpha$ при $\|\mathbf{x}\| < \delta$.

Рассмотрим любое нетривиальное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\|\mathbf{x}\| < \delta$ и предположим, что существует $t = t_1$, для которого $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$. Изучим поведение функции $V(t,\mathbf{x}(t))$ вдоль решения

$\mathbf{x}(t)$. В силу условия теоремы $\dot{V} \leq 0$. Поэтому функция $V(t,\mathbf{x}(t))$ невозрастающая и

$$\alpha > V(t_0,\mathbf{x}_0) \geq V(t_1,\mathbf{x}(t_1)) \geq W(\mathbf{x}(t_1)) \geq \alpha,$$

что невозможно.□

Замечание 8.6.1. Функция $V(t,\mathbf{x})$, удовлетворяющая условию теоремы 8.6.1, называется *функцией Ляпунова*.

§ 8.7. Движение вблизи равновесия

Исследуем движение склерономной механической системы под действием потенциальных сил в окрестности ее положения равновесия в пространстве лагранжевых координат. В точке равновесия все потенциальные силы обращаются в нуль:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Если в какой-то момент времени лагранжевы координаты равны их значениям в положении равновесия, а обобщенные скорости отсутствуют, то и в любой другой момент времени лагранжевы координаты будут в силу уравнений движения оставаться постоянными. Не уменьшая общности, можно принять, что в положении равновесия все лагранжевы координаты обращаются в нуль:

$$q_i = 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Такое решение системы уравнений Лагранжа будем в дальнейшем называть "нулевым" решением.

Введем $2n$-мерный вектор:

$$(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = (q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$$

и выберем в пространстве таких векторов какую-либо метрику $\|\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\|$.

Достаточным условием устойчивости нулевого решения служит существование функции Ляпунова. Применительно к рассматриваемому случаю *функция Ляпунова* есть дифференцируемая функция

$$V = V(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n),$$

знакоопределенная (сохраняющая знак и обращающаяся в нуль только при нулевых значениях всех аргументов) и такая, что ее производная в силу уравнений движения

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

знакопостоянна, причем ее знак противоположен знаку V. Знакопостоянная функция может либо быть тождественно равной нулю, либо обращаться в нуль в каких-нибудь точках фазового пространства.

Скажем, что силовая функция $U(q_1,\dots,q_n)$ имеет в точке

$$q_1 = 0,\dots,q_n = 0$$

изолированный максимум, если существует число δ такое, что при выполнении условий

$$|q_i| < \delta, \quad i = 1,\dots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} q_i^2 > 0$$

справедливо неравенство

$$U(q_1,\dots,q_n) < U(0,\dots,0).$$

Теорема 8.7.1. (Лагранж). *Положение равновесия склерономной системы, находящейся под действием потенциальных сил, устойчиво, если в этом положении силовая функция достигает изолированного максимума (потенциальная энергия — изолированного минимума).*

Доказательство. Так как силовая функция

$$U(q_1,\dots,q_n)$$

определена с точностью до произвольной постоянной, то можно считать, что в положении равновесия она достигает нулевого значения. Тогда существует окрестность нулевого решения, в которой

$$U(q_1,\dots,q_n) \leq 0,$$

причем поскольку максимум U изолирован, то эту окрестность можно выбрать такой, чтобы равенство нулю функции U было возможно лишь в положении равновесия.

Для склерономной системы кинетическая энергия представляет собой невырожденную положительно определенную квадратичную форму всех скоростей. Следовательно, полная энергия

$$\mathcal{H} = T - U$$

есть знакоположительная функция. Рассматриваемая система допускает интеграл энергии $\mathcal{H} = h$ (следствие 8.2.3), т.е. в силу уравнений движения

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \equiv 0.$$

Тем самым $\mathcal{H}$ есть функция Ляпунова.□

Следствие 8.7.1. *Если положение равновесия склерономной системы, находящейся под действием потенциальных сил, устойчиво, то оно останется устойчивым при добавлении гироскопических и диссипативных сил.*

Устойчивость движения означает, что если в начальный момент времени отклонения фазовых переменных (координат и скоростей) от нулевых значений были малыми, то они останутся малыми и в любой другой момент. С целью получения более подробной информации о структуре движения введем допустимые пределы изменения лагранжевых координат и обобщенных скоростей

$$|q_i| \leq d_i, \quad |\dot{q}_i| \leq \bar{d}_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Эти пределы приблизительно характеризуют размеры допустимой области движения, где положение равновесия системы будет изолированным, а также предельное значение кинетической энергии, при котором система достаточно долго остается внутри допустимой области, если ее вывести из положения равновесия.

Величины $q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n$ будем считать малыми в том смысле, что

$$\frac{|q_i|}{d_i} \ll 1, \quad \frac{|\dot{q}_i|}{\bar{d}_i} \ll 1, \quad i = 1,\dots,n,$$

и настолько, что при разложении в окрестности положения равновесия в степенные ряды кинетической энергии и силовой функции членами выше второго порядка малости по сравнению с другими членами будем пренебрегать.

Представим силовую функцию в виде ряда

$$U(q_1,\dots,q_n) = U(0,\dots,0) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_0 q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 q_i q_j + \dots$$

Принимая во внимание, что в положении равновесия

$$U(0,\dots,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_0 = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

получим приближенное выражение для силовой функции

$$U(q_1,\dots,q_n) \approx -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j,$$

где b_{ij} суть постоянные коэффициенты, образующие симметричную матрицу

$$B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

отличающуюся только знаком от матрицы вторых частных производных от силовой функции, взятых в положении равновесия.

Разложение в ряд коэффициентов a_{ij} кинетической энергии дается формулой

$$a_{ij}(q_1,\dots,q_n) = a_{ij}(0,\dots,0) + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right|_0 q_k + \dots$$

Так как малыми предполагаются не только лагранжевы координаты, но и обобщенные скорости, а кинетическая энергия в рассматриваемом случае есть квадратичная форма от обобщенных скоростей, то члены первого и более высоких порядков в разложении коэффициентов a_{ij} не следует учитывать. В кинетической энергии они будут иметь порядок не ниже третьего. Окончательно получаем, что приближенно кинетическая энергия может быть представлена квадратичной формой

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

где все коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(0)$ образуют симметричную постоянную положительно определенную матрицу

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Эта матрица в точности совпадает с матрицей коэффициентов кинетической энергии, взятой в положении равновесия.

Определение 8.7.1. Механическая система называется *позиционной линейной системой*, если ее кинетическая энергия есть положительная симметричная квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad A = (a_{ij}),$$

а силовая функция есть симметричная квадратичная форма лагранжевых координат:

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j, \quad B = (b_{ij})$$

с постоянной положительно определенной симметричной матрицей A и постоянной симметричной матрицей B.

Следствие 8.7.2. *Для позиционной линейной системы нулевое значение координат*

$$q_i = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

задает положение равновесия.

Следствие 8.7.3. *На конечном достаточно малом интервале времени позиционная линейная система приближенно описывает движение соответствующей произвольной склерономной механической системы в окрестности ее положения равновесия.*

Следствие 8.7.4. *Уравнения Лагранжа для позиционной линейной системы имеют вид*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j, \quad i = 1,\dots,n,$$

и образуют систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

§ 8.8. Главные координаты

Пусть R^n — линейное пространство с базисом $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$. Набору лагранжевых координат $q_1,\dots,q_n$ сопоставим вектор

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i\,\boldsymbol{\alpha}_i.$$

Тогда уравнения Лагранжа для позиционной линейной системы можно представить в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathcal{C}\,\mathbf{q}, \quad \mathcal{C} = A^{-1}B.$$

Другими словами, вектор $\ddot{\mathbf{q}}$ есть результат действия линейного оператора $\mathcal{C}$ в пространстве R^n. В базисе $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ матрица оператора $\mathcal{C}$ есть произведение матрицы A^{-1}, обратной к матрице кинетической энергии, на матрицу B силовой функции (определение 8.7.1).

Теорема 8.8.1. (О приведении позиционной линейной системы к главным координатам). *В пространстве R^n существует базис $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ главных направлений:*

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{u}_i,$$

для которого переменные ξ_i удовлетворяют системе уравнений Лагранжа

$$\ddot{\xi}_i = -\lambda_i\xi_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

с действительными коэффициентами λ_i — собственными значениями оператора $\mathcal{C}$.

Доказательство. В линейном пространстве R^n введем метрический тензор, матрица которого в базисе $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ совпадает с матрицей A кинетической энергии. Это можно сделать, так как матрица A симметричная и положительно определенная, а кинетическая энергия не зависит от выбора базиса в пространстве R^n. С помощью этого тензора определим скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.$$

Тем самым пространство R^n превращается в евклидово. Так как матрица B симметричная, то $\mathcal{C}$ — самосопряженный оператор по метрике A. Известно, что все собственные значения λ_i, $i = 1,\dots,n$, самосопряженного оператора — действительные числа. Кроме того, у каждого самосопряженного оператора, действующего в вещественном евклидовом пространстве R^n, существует ортонормированный по метрике A базис из собственных векторов. Пусть собственному значению λ_i соответствует собственный вектор $\mathbf{u}_i$ этого базиса: $\mathcal{C}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$. Среди λ_i могут быть и кратные корни характеристического уравнения. Кратный корень повторяется в последовательности

$$\lambda_1,\dots,\lambda_n$$

столько раз, какова его кратность.

Представим вектор $\mathbf{q}$ в виде разложения по базису $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{u}_i.$$

Тогда векторное уравнение движения позиционной линейной системы примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{\xi}_i\mathbf{u}_i = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathcal{C}\,\mathbf{u}_i = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\xi_i\mathbf{u}_i.$$

Векторы $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ линейно независимы. Значит, должны совпадать коэффициенты при этих векторах в правой и левой частях.□

Определение 8.8.1. Уравнение вида

$$\det(\lambda A - B) = 0$$

называется *уравнением частот* позиционной линейной системы.

Теорема 8.8.2. (Сильвéстр). *Все корни уравнения частот вещественны и совпадают с собственными значениями оператора $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Характеристическое уравнение для собственных значений оператора $\mathcal{C}$ имеет вид

$$\det(\mathcal{C} - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица. Воспользуемся свойствами определителей:

$$\det A\det(\mathcal{C} - \lambda E) = \det[A(\mathcal{C} - \lambda E)] = \det(B - \lambda A),$$

так как $\mathcal{C} = A^{-1}B$. Поскольку $\det A \neq 0$, то уравнение частот и характеристическое уравнение оператора $\mathcal{C}$ эквивалентны.□

Следствие 8.8.1. *Собственные векторы $\mathbf{u}_i$ оператора $\mathcal{C}$ удовлетворяют уравнению*

$$(B - \lambda A)\mathbf{u} = 0.$$

Доказательство. По определению собственного вектора

$$\mathcal{C}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i.$$

Но $\mathcal{C} = A^{-1}B$. Поэтому $B\mathbf{u}_i = \lambda_i A\mathbf{u}_i$.□

Следствие 8.8.2. *В позиционной линейной системе, в отличие от системы линейных дифференциальных уравнений общего вида, резонансные члены не возникают даже в случае кратных собственных чисел.*

Определение 8.8.2. Координаты $\xi_1,\dots,\xi_n$, описывающие движение позиционной линейной системы по главным направлениям, называются *главными координатами*.

Следствие 8.8.3. *В главных координатах кинетическая и потенциальная энергии позиционной линейной системы принимают вид*

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\xi_i^2.$$

Следствие 8.8.4. *Движение позиционной линейной системы, заданной с помощью произвольных лагранжевых координат, есть прямое произведение движений n одномерных систем по главным направлениям.*

Для каждой одномерной системы могут представиться три случая.

1. $\lambda = \omega^2 > 0$. Имеем колебания гармонического осциллятора по закону

$$\xi = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t.$$

2. $\lambda = 0$. Случай безразличного равновесия. Закон движения:

$$\xi = c_1 + c_2 t.$$

3. $\lambda = -\omega^2 < 0$. Случай неустойчивого движения. Закон движения:

$$\xi = c_1\operatorname{ch}\omega t + c_2\operatorname{sh}\omega t.$$

Пусть некоторое собственное значение λ_i положительно. Тогда система при соответствующих начальных условиях может совершать периодическое колебание вида

$$\mathbf{q}(t) = (c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)\mathbf{u}_i,$$

где $\mathbf{u}_i$ — вектор, соответствующий собственному значению λ_i. Такое движение есть прямое произведение одномерного движения

$$\xi_i = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

и тривиальных движений $\xi_j \equiv 0$, $j \neq i$.

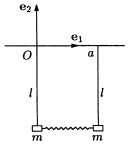
Пример 8.8.1. Рассмотрим систему из двух одинаковых математических маятников длины l, массы m, находящуюся в поле силы тяжести с ускорением g. Пусть маятники соединены невесомой пружиной, длина которой в недеформированном состоянии равна расстоянию a между точками подвеса (рис. 8.8.1). Исследуем движение соответствующей позиционной линейной системы.

Введем декартов репер Oe_1e_2. Начало O репера поместим в точку подвеса одного из маятников. Вектор $\mathbf{e}_1$ направим в сторону другого маятника, вектор $\mathbf{e}_2$ — вертикально вверх. Радиусы-векторы точек сосредоточения масс маятников представим в виде

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_2 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2.$$

Пусть q_1 и q_2 — углы отклонений маятников от вертикали. Эти углы суть лагранжевы координаты системы. Они образуют координатное пространство R^2. Имеем

$$x_1 = l\sin q_1, \qquad x_2 = -l\cos q_1,$$
$$y_1 = a + l\sin q_2, \quad y_2 = -l\cos q_2.$$



Два маятника образуют колебательную систему с двумя степенями свободы. При одинаковых массах и длинах маятники, будучи соединены пружиной, выполняют по одной из главных координат синхронное движение по одному и тому же закону, а по другой — движение в противофазе. Маятники способны в процессе движения системы чередовать между собой возбуждение малых колебаний.

Рис. 8.8.1. Система маятников

Составим выражения для силовой функции и кинетической энергии системы. Согласно закону Гука (см. пример 3.4.2,в) силовая функция U пружины дается выражением

$$U_n = -\frac{c(b-a)^2}{2},$$

где b — длина пружины в деформированном состоянии, равная длине отрезка между массами маятников:

$$b = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} = \sqrt{[a+l(\sin q_2 - \sin q_1)]^2 + l^2(\cos q_2 - \cos q_1)^2}.$$

Считая q_1 и q_2 величинами первого порядка малости, найдем b с точностью до третьего порядка:

$$b \approx a + l(q_2 - q_1).$$

Силовая функция U_T силы тяжести выражается формулой

$$U_T = -(mgx_2 + mgy_2) = mgl(\cos q_1 + \cos q_2).$$

С точностью до членов четвертого порядка малости получим

$$U_T \approx -\frac{mgl}{2}(q_1^2 + q_2^2).$$

Таким образом, кинетическая энергия и силовая функция для соответствующей позиционной линейной системы принимают вид

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2), \quad U = -\frac{mgl}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{cl^2}{2}(q_2 - q_1)^2.$$

Для матриц A и B имеем выражения

$$A = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} (mgl + cl^2) & -cl^2 \\ -cl^2 & (mgl + cl^2) \end{pmatrix}.$$

Выпишем уравнение частот:

$$\begin{vmatrix} mg + cl - \lambda ml & -cl \\ -cl & mg + cl - \lambda ml \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(mg + cl - \lambda ml)^2 - c^2 l^2 = 0.$$

Находим два собственных значения

$$\lambda_1 = \frac{g}{l}, \quad \lambda_2 = \lambda_1(1 + 2\beta), \quad \beta = \frac{cl}{gm}.$$

Координаты собственного вектора, соответствующего λ_1,

$$\mathbf{u}_1 = u_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + u_{12}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ — базисные векторы пространства R^2, равны между собой:

$$u_{11} = u_{12}.$$

Для координат собственного вектора, соответствующего λ_2,

$$\mathbf{u}_2 = u_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + u_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

найдем

$$u_{21} = -u_{22}.$$

Чтобы решить задачу, достаточно принять (учитывается норма с коэффициентами кинетической энергии)

$$u_{11} = u_{12} = u_{21} = -u_{22} = (l\sqrt{2m})^{-1},$$

и тогда

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2}{l\sqrt{2m}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2}{l\sqrt{2m}}.$$

Главные координаты ξ_1, ξ_2 суть координаты вектора $\mathbf{q} = q_1\boldsymbol{\alpha}_1 + q_2\boldsymbol{\alpha}_2$ в базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, т.е.

$$\mathbf{q} = \xi_1\mathbf{u}_1 + \xi_2\mathbf{u}_2 = \frac{(\xi_1 + \xi_2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\xi_1 - \xi_2)\boldsymbol{\alpha}_2}{l\sqrt{2m}}.$$

Переход от главных координат к лагранжевым осуществляется по формулам

$$q_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{l\sqrt{2m}}, \quad q_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{l\sqrt{2m}}.$$

В главных координатах кинетическая энергия и силовая функция выражаются равенствами

$$T = \frac{1}{2}(\dot\xi_1^2 + \dot\xi_2^2), \quad U = -\frac{1}{2}(\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2).$$

Главные координаты имеют следующий смысл.

1. $\xi_2 = 0$. Тогда $q_1 = q_2$. Оба маятника движутся по одному и тому же закону. Пружина не работает.

2. $\xi_1 = 0$. Тогда $q_1 = -q_2$. Маятники движутся симметрично в противоположных направлениях относительно вертикальной прямой, проходящей через середину отрезка между точками подвеса маятников (движутся в противофазе).

Уравнения движения в главных координатах приобретают форму

$$\ddot\xi_1 = -\lambda_1\xi_1, \quad \ddot\xi_2 = -\lambda_2\xi_2.$$

Это — уравнения двух гармонических осцилляторов (см. § 3.9) с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \omega_1\sqrt{1 + 2\beta}.$$

Чтобы завершить исследование примера, рассмотрим конкретный случай колебаний, заданных при $t = 0$ начальными условиями

$$q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot q_1(0) = \Omega, \quad \dot q_2(0) = 0.$$

Им отвечает решение

$$\xi_1 = \Omega\frac{l\sqrt{2m}}{\omega_1}\sin\omega_1 t, \quad \xi_2 = \Omega\frac{l\sqrt{2m}}{\omega_2}\sin\omega_2 t.$$

В лагранжевых координатах оно принимает вид

$$q_1 = \Omega\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right),$$

$$q_2 = \Omega\left(\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2}\right).$$

Допустим теперь, что $\beta \ll 1$. Это эквивалентно требованию, что жесткость пружины весьма мала. Тогда

$$\omega_2 \approx \omega_1(1 + \beta).$$

Подставив это значение в закон движения и применив тригонометрические преобразования, найдем

$$q_1 = \frac{\Omega}{\omega_1(1+\beta)}(2\cos\varepsilon t\sin\omega' t + \beta\sin\omega_1 t),$$

$$q_2 = \frac{\Omega}{\omega_1(1+\beta)}(-2\sin\varepsilon t\cos\omega' t + \beta\sin\omega_1 t),$$

где

$$\varepsilon = \frac{\omega_1\beta}{2}, \quad \omega' = \omega_1\left(1 + \frac{\beta}{2}\right).$$

Величина ε мала вместе с β. Поэтому в законе движения первое слагаемое в круглых скобках можно представить как колебания частоты ω' с медленно изменяющейся амплитудой. Второе слагаемое есть фоновое колебание с малой амплитудой. Сначала наблюдатель увидит, что практически колеблется только первый маятник с амплитудой

$$\frac{2\Omega}{\omega_1(1+\beta)}\cos\varepsilon t.$$

Затем с течением времени начнет раскачиваться второй, а через время $\tau = \pi\varepsilon/2$ будет колебаться практически лишь второй маятник. Через время 2τ второй маятник успокоится и будет снова колебаться лишь первый и так далее.◇

Обратимся теперь к изучению общей структуры решения позиционной линейной системы. Уравнения движения в главных координатах

$$\ddot\xi_k = -\lambda_k\xi_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

разрешаются с помощью функций

$$\xi_k = c_1\exp(i\omega_k t) + c_2\exp(-i\omega_k t),$$

где i — мнимая единица, $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, c_1, c_2 — постоянные, определяемые начальными условиями. Постоянные ω_k могут оказаться и мнимыми, когда $\lambda_k < 0$. В лагранжевых координатах решение, соответствующее собственному значению λ_k, запишется следующим образом:

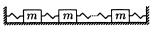
$$\mathbf{q} = [c_1\exp(i\omega_k t) + c_2\exp(-i\omega_k t)]\,\mathbf{u}_k.$$

Следствие 8.8.5. *Все решения позиционной линейной системы представляют собой линейную комбинацию слагаемых вида*

$$\mathbf{q} = \exp(\pm i\omega t)\,\mathbf{u}.$$

Линейно независимых решений указанного вида имеется ровно $2n$. Общее решение позиционной линейной системы можно построить, найдя все такие линейно независимые решения. Следствие 8.8.5 может оказаться полезным для исследования систем с большим числом степеней свободы. Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим следующий пример.

Пример 8.8.2. Изучим малые колебания системы, состоящей из n материальных точек массы m, связанных друг с другом одинаковыми пружинками жесткости c и могущих двигаться по прямой. Крайние материальные точки соединены пружинками с неподвижными стенками (рис. 8.8.2).



Материальные точки соединены между собой и со стенками пружинками в цепочку и движутся без трения по горизонтальной прямой.

Рис. 8.8.2. Система осцилляторов

Функция Лагранжа системы есть сумма кинетической энергии точек и силовой функции пружин:

$$L = \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot q_k^2 - \frac{c}{2}\left[q_1^2 + \sum_{k=2}^{n}(q_k - q_{k-1})^2 + q_n^2\right],$$

где q_k — смещение k-й материальной точки из положения равновесия.

Система уравнений Лагранжа запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &m\ddot q_1 + c(2q_1 - q_2) = 0,\\ &m\ddot q_k + c(2q_k - q_{k-1} - q_{k+1}) = 0, \quad k = 2, \ldots, n-1,\\ &m\ddot q_n + c(2q_n - q_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Если для удобства обозначить $q_0 = q_{n+1} = 0$, то уравнения движения можно представить более симметрично:

$$m\ddot q_k + c(2q_k - q_{k-1} - q_{k+1}) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Для этих уравнений будем искать решение вида

$$q_k = D\exp[i(\omega t \pm k\varphi)], \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

Подставив эти выражения в уравнения Лагранжа, получим

$$[-\omega^2 m + c(2 - e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})]q_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что $e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} = 2\cos\varphi$. Так как $q_k \neq 0$, то должно быть

$$\omega^2 = 4\frac{c}{m}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Условиям на границе ($q_0 = q_{n+1} = 0$) можно удовлетворить, взяв комбинацию

$$q_k = D\exp[i(\omega t + k\varphi)] + F\exp[i(\omega t - k\varphi)].$$

Условие $q_0 = 0$ дает $D = -F$. Или

$$q_k = 2iD\sin k\varphi\exp(i\omega t).$$

Получили стоячую волну. Условие $q_{n+1} = 0$ приводит к уравнению

$$\sin[(n+1)\varphi] = 0,$$

которое имеет n различных корней, расположенных в верхней части единичной окружности:

$$\varphi_s = \frac{\pi s}{n+1}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

В результате находим n положительных частот

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{\pi s}{2(n+1)}.$$

Собственный вектор $\mathbf{u}_s$ можно взять в виде

$$\mathbf{u}_s = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_k\sin k\varphi_s.$$

Главная координата ξ_s изменяется по закону

$$\xi_s = c_s\cos(\omega_s t + \beta_s) = \mathrm{Re}[2iD_s\exp(i\omega_s t)].$$

Общее решение есть комбинация главных колебаний:

$$q_k = \sum_{s=1}^{n}\xi_s(t)\sin k\varphi_s.◇$$

В соответствии с определением 8.8.1, чтобы найти собственные значения позиционной линейной системы, достаточно решить уравнение частот. В общем случае это — алгебраическое уравнение степени n. Как видно из рассмотренных примеров, при малых n, а также в некоторых других исключительных случаях его решение может быть

получено аналитическими методами. Однако для значительного числа практически интересных задач n велико, а решение характеристического уравнения можно получить только численно. Но тогда существенно сказываются вычислительные погрешности. Вместе с тем для вычисления собственных значений можно использовать их экстремальные свойства (см. следующий параграф), что позволяет привлечь к этой задаче эффективные численные методы поиска экстремумов функций нескольких переменных.

§ 8.9. Экстремальные свойства собственных значений

Сопоставим с кинетической энергией позиционной линейной системы квадратичную форму от лагранжевых координат

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}q_iq_j.$$

Квадратичную форму, соответствующую потенциальной энергии системы, обозначим

$$B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}q_iq_j.$$

Смысл коэффициентов a_{ij}, b_{ij} ясен из определения 8.7.1.

После перехода к главным координатам по формулам

$$q_i = \sum_{j=1}^{n}u_{ji}\xi_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

квадратичные формы принимают вид

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2.$$

Будем предполагать, что главные координаты пронумерованы так, что между собственными значениями выполнено соотношение

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n.$$

Рассмотрим отношение квадратичных форм

$$\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}.$$

Очевидно, что

$$\lambda_1 \le \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2} \le \lambda_n.$$

Этот результат можно сформулировать еще и по-другому:

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{q}}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \min_{\|\mathbf{q}\|=1}B(\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad \lambda_n = \max_{\mathbf{q}}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} = \max_{\|\mathbf{q}\|=1}B(\mathbf{q}, \mathbf{q}),$$

где норма $\|\mathbf{q}\|$ вектора $\mathbf{q}$ есть евклидова норма с матрицей A.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{E}^m$, представляющее собой линейную оболочку собственных векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$:

$$\mathcal{E}^m = \mathrm{lin}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}.$$

Если $\mathbf{q} \in \mathcal{E}^m$, то

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{u}_i$$

и

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2, \quad B(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i^2.$$

Поэтому справедлива формула

$$\lambda_m = \max_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}^m}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

Аналогично, если $\tilde{\mathcal{E}}^m = \mathrm{lin}\{\mathbf{u}_m, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, то

$$\lambda_m = \min_{\mathbf{q}\in\tilde{\mathcal{E}}^m}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

Теорема 8.9.1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения позиционной линейной системы, пронумерованные в порядке возрастания. Тогда*

$$\lambda_m = \min_{\mathcal{E}\in E_m}\max_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})},$$

где E_m — множество всех подпространств размерности m, $\mathcal{E}$ — одно из таких подпространств.

Доказательство. Рассмотрим подпространство

$$\tilde{\mathcal{E}}^m = \mathrm{lin}\{\mathbf{u}_m, \ldots, \mathbf{u}_n\}.$$

Его размерность равна $n - m + 1$. Поэтому оно пересекается с подпространством $\mathcal{E}$, имеющим размерность m: $\tilde{\mathcal{E}}^m \cap \mathcal{E} \neq 0$. Значит, существует элемент $\tilde{\mathbf{q}}$ такой, что

$$\tilde{\mathbf{q}} \in \tilde{\mathcal{E}}^m, \quad \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{E}.$$

Для элемента $\tilde{\mathbf{q}}$ имеем

$$\max_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})} \ge \frac{B(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})}{A(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})} \ge \lambda_m.$$

Первое неравенство справедливо, так как максимум ищется для всех $\mathbf{q} \in \mathcal{E}$, а $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{E}$. Второе неравенство справедливо, так как $\tilde{\mathbf{q}} \in \tilde{\mathcal{E}}^m$, а для $\tilde{\mathcal{E}}^m$ справедливо равенство

$$\lambda_m = \min_{\mathbf{q}\in\tilde{\mathcal{E}}^m}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

Кроме того, среди $\mathcal{E} \in E_m$ имеется подпространство

$$\mathcal{E}^m = \mathrm{lin}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}.$$

Для него

$$\lambda_m = \max_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}^m}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

Следовательно, минимум выражения

$$\max_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}$$

достигается и равен λ_m.□

Следствие 8.9.1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения позиционной линейной системы, пронумерованные в порядке возрастания. Тогда*

$$\lambda_{n-m+1} = \max_{\mathcal{E}\in E_m}\min_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}}\frac{B(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{A(\mathbf{q}, \mathbf{q})}.$$

Следствие 8.9.2. *Пусть координаты $q_1, \ldots, q_n$ удовлетворяют линейным уравнениям*

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n}l_{ij}q_j = 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

которые в пространстве R^n лагранжевых координат выделяют $(n-k)$-мерное подпространство. Экстремальные свойства собственных значений позиционной линейной системы можно переписать в виде

$$\lambda_{k+1} = \max_{l_1,\dots} \min_{\substack{\Phi_1=0,\\ \dots\\ \Phi_k=0}} \frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})},$$

$$\lambda_{n-k} = \min_{l_1,\dots} \max_{\substack{\Phi_1=0,\\ \dots\\ \Phi_k=0}} \frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})},$$

где внутренний экстремум вычисляется среди всех $\mathbf{q}$, удовлетворяющих линейным уравнениям, а внешний экстремум берется по всем независимым комбинациям коэффициентов этих уравнений.

В случае, когда все $\lambda_i > 0$, можно дать геометрическую интерпретацию экстремальных свойств собственных значений позиционной линейной системы. Каждой такой системе сопоставим эллипсоид $\Im$:

$$\Im = \{\mathbf{q} : B(\mathbf{q},\mathbf{q}) = 1\}$$

и определим

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{A(\mathbf{q},\mathbf{q})} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}.$$

Пусть λ_i — некоторое собственное значение, а $\mathbf{x}$ — соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{x} = \xi_i\mathbf{u}_i$, принадлежащий поверхности эллипсоида. Тогда

$$B(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\lambda_i\xi_i^2 = \lambda_i\|\mathbf{x}\|^2 = 1.$$

Следовательно, главные оси эллипсоида $\Im$ обратно пропорциональны собственным частотам

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

Отношение $B(\mathbf{q},\mathbf{q})/A(\mathbf{q},\mathbf{q})$ не меняется при пропорциональном изменении всех компонент вектора $\mathbf{q}$. Поэтому, применяя теорему 8.9.1, $\mathbf{q}$ можно считать принадлежащим эллипсоиду $\Im$. Утверждение теоремы 8.9.1 можно тогда представить в виде

$$\omega_m^2 = \min_{\mathcal{E}\in\mathcal{E}_m} \max_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}\cap\Im} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2},$$

или окончательно

$$a_m = \max_{\mathcal{E}\in\mathcal{E}_m} \min_{\mathbf{q}\in\mathcal{E}\cap\Im} \|\mathbf{q}\|,$$

где a_m — длина полуоси эллипсоида, соответствующая собственному вектору $\mathbf{u}_m$. Верхняя грань в этом равенстве достигается на подпространстве $\mathcal{E}^m$, натянутом на векторы $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$. При этом предполагается, что

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_m.$$

Определение 8.9.1. Пусть задана некоторая позиционная линейная система с кинетической энергией T и потенциальной энергией $\Pi = -U$. Другая система с кинетической энергией $\tilde{T}$ и потенциальной энергией $\tilde{\Pi}$ называется системой, обладающей *большей жесткостью* по сравнению с исходной, если

$$\tilde{T} = T, \quad \tilde{\Pi} \ge \Pi.$$

Аналогично систему, обладающую свойством

$$\tilde{T} \le T, \quad \tilde{\Pi} = \Pi,$$

называют системой, имеющей *меньшую инерцию* при той же жесткости.

Теорема 8.9.2. (Рэлей). *При увеличении жесткости системы или при уменьшении ее инерции собственные значения увеличиваются.*

Доказательство. Как при увеличении жесткости, так и при уменьшении инерции имеем

$$\frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})} \le \frac{\tilde{B}(\mathbf{q},\mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q},\mathbf{q})}.$$

Но тогда минимумы и максимумы этих отношений будут связаны между собой таким же неравенством, т.е.

$$\lambda_i \le \tilde{\lambda}_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

При этом хотя бы в одном из этих соотношений имеет место строгое неравенство, если только не выполнено тождество

$$\frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})} \equiv \frac{\tilde{B}(\mathbf{q},\mathbf{q})}{\tilde{A}(\mathbf{q},\mathbf{q})}.\square$$

Следствие 8.9.3. (Геометрическая интерпретация теоремы Рэлея). *При увеличении жесткости системы или при уменьшении ее инерции новый эллипсоид $\tilde{\Im}$ содержится внутри исходного эллипсоида $\Im$. Полуоси внутреннего эллипсоида не больше, чем соответствующие полуоси объемлющего.*

Пусть на позиционную линейную систему, имевшую собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, наложено дополнительно s независимых линейных связей

$$\tilde{\Phi}_1 = 0,\dots,\tilde{\Phi}_s = 0.$$

Полученная таким образом новая позиционная линейная система будет иметь $n-s$ степеней свободы. Обозначим

$$\lambda_1^* \le \lambda_2^* \le \dots \le \lambda_{n-s}^*$$

собственные значения этой системы.

Теорема 8.9.3. *При наложении s независимых связей каждое из первых $n-s$ собственных значений увеличивается, не превосходя при этом собственное значение исходной системы, номер которого на s единиц больше:*

$$\lambda_m \le \lambda_m^* \le \lambda_{m+s}.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 8.9.2:

$$\lambda_m^* = \max_{\Phi_j} \min_{\substack{\tilde{\Phi}_1=0,\\ \dots\\ \tilde{\Phi}_s=0,\\ \Phi_j=0}} \frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})}, \quad j = 1,\dots,m-1.$$

Здесь связи $\tilde{\Phi}_1 = 0,\dots,\tilde{\Phi}_s = 0$ фиксированы, а связи $\Phi_j = 0$ варьируются. Сопоставим полученное выражение с выражением для λ_m:

$$\lambda_m = \max_{\Phi_j} \min_{\Phi_j=0} \frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})}, \quad j = 1,\dots,m-1.$$

В правой части последнего равенства минимум берется по более широкому множеству, так как связи $\tilde{\Phi}_i = 0$ отсутствуют. Поэтому

$$\lambda_m \le \lambda_m^*.$$

С другой стороны, имеет место формула

$$\lambda_{m+s} = \max_{\Phi_j} \min_{\Phi_j=0} \frac{B(\mathbf{q},\mathbf{q})}{A(\mathbf{q},\mathbf{q})}, \quad j = 1,\dots,m+s-1,$$

в которой варьируются все $m+s-1$ связей. Поэтому

$$\lambda_m^* \le \lambda_{m+s}.\square$$

Следствие 8.9.4. *Если наложена лишь одна линейная связь, то*

$$\lambda_1 \le \lambda_1^* \le \lambda_2 \le \lambda_2^* \le \dots \le \lambda_{n-1}^* \le \lambda_n.$$

Другими словами, собственные значения исходной позиционной линейной системы разделяются собственными значениями системы, отличающейся от исходной тем, что в ней имеется дополнительная линейная связь.

Замечание 8.9.1. Пусть на координаты позиционной линейной системы дополнительно наложена нелинейная связь $\Phi(\mathbf{q}) = 0$. Тогда вновь полученная система уже не будет линейной. Вместе с тем если положение равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ удовлетворяет уравнению дополнительной связи, то разложение левой части уравнения связи в степенной ряд будет иметь вид

$$\Phi(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial q_j}q_iq_j + \dots = 0.$$

Предположим, что линейные члены действительно имеются:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\right)^2 \ne 0.$$

Тогда можем пренебречь членами второго и более высокого порядка и получить линейную связь, которая, будучи наложена на координаты позиционной линейной системы, вновь образует позиционную линейную систему.

Дадим геометрическую интерпретацию теоремы 8.9.3 для случая $s = 1$.

Следствие 8.9.5. *Пусть эллипсоид $\Im = \{\mathbf{q} : B(\mathbf{q},\mathbf{q}) = 1\}$ соответствует исходной позиционной линейной системе и имеет полуоси*

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n.$$

Рассмотрим сечение этого n-мерного эллипсоида гиперплоскостью в R^n. В сечении получится $(n-1)$-мерный эллипсоид $\Im^*$. Полуоси эллипсоида $\Im^*$ разделяют полуоси эллипсоида $\Im$:

$$a_1 \ge a_1^* \ge a_2 \ge a_2^* \ge \dots \ge a_{n-1}^* \ge a_n.$$

Пример 8.9.1. Наличие трещины в стеклянном сосуде определяют, постукивая о посуду каким-нибудь предметом. У посуды без трещины имеются дополнительные связи между ее элементами по сравнению с посудой, имеющей трещину. Поэтому у посуды без трещины частота возникающих колебаний должна быть более высокой, а значит, должен быть выше и тон звучания.◇

§ 8.10. Влияние дополнительных сил

Пусть помимо потенциальных сил с потенциальной энергией $\Pi = B(\mathbf{q},\mathbf{q})$ на позиционную линейную систему действуют еще и другие силы

$$Q_i = Q_i(t), \quad i = 1,\dots,n.$$

Перейдем к главным координатам по формулам

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\xi_j, \quad i = 1,\dots,n, \quad \det(u_{ji}) \ne 0.$$

Силам Q_i в координатах q_i соответствуют силы Ξ_i в координатах ξ_i. Установим соотношение между Q_i и Ξ_i, исходя из равенства выражений для элементарной работы

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\Xi_i\,\delta\xi_i.$$

Дифференциалы координат связаны формулами

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\,\delta\xi_j, \quad i = 1,\dots,n.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ji}Q_i\right)\delta\xi_j = \sum_{j=1}^{n}\Xi_j\,\delta\xi_j.$$

Сравнив коэффициенты при независимых дифференциалах главных координат, найдем

$$\Xi_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}Q_i.$$

Таким образом, если лагранжевы координаты выражаются через главные при помощи матрицы

$$V = (u_{ji})^{\mathrm{T}}: \quad \mathbf{q} = V\boldsymbol{\xi},$$

то обобщенные силы Ξ_j, $j = 1,\dots,n$, выражаются через Q_i, $i = 1,\dots,n$, при помощи транспонированной матрицы:

$$\boldsymbol{\Xi} = V^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}.$$

В главных координатах уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\xi}_j + \lambda_j\xi_j = \Xi_j(t).$$

Рассмотрим случай, когда все собственные значения положительны: $\lambda_j = \omega_j^2$, $j = 1,\dots,n$, а силы $Q_j(t)$ и, значит, $\Xi_j(t)$ суть произвольные периодические функции с периодом τ и частотой $\Omega = 2\pi/\tau$. Такие функции можно разложить в ряд Фурье:

$$\Xi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk}\sin(k\Omega t + \varphi_{jk}).$$

Подстановкой нетрудно убедиться в том, что ряды

$$\xi_j^* = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{jk}}{\omega_j^2 - k^2\Omega^2}\sin(k\Omega t + \varphi_{jk}), \quad j = 1,\dots,n,$$

дают частное решение уравнений движения.

Если некоторое значение $k\Omega$ совпадает с ω_j и соответствующее $A_{jk} \ne 0$, то для координаты ξ_j будет иметь место явление резонанса. Когда резонанс отсутствует, решение можно представить в виде

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^*,$$

где

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{u}_j\sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad \mathbf{q}^* = \sum_{j=1}^{n}\xi_j^*\mathbf{u}_j,$$

$\mathbf{u}_j$ — собственные векторы позиционной линейной системы. Таким образом, $\tilde{\mathbf{q}}$ описывает свободное колебание системы, а $\mathbf{q}^*$ — вынужденное колебание.

Теорема 8.10.1. *Пусть на систему действуют периодические обобщенные силы*

$$Q_i = f_i\cos\gamma t, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_n)$ — постоянный вектор. Тогда движение по главным координатам, для которых собственный вектор $\mathbf{u}_j$ ортогонален вектору $\mathbf{f}$:

$$(\mathbf{u}_j,\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}f_i = 0,$$

не возбуждаются при действии этой силы.

Доказательство. В матрице $V = (u_{ji})^{\mathrm{T}}$ второй индекс соответствует номеру собственного вектора, первый индекс выделяет компоненту разложения этого вектора по базису $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$:

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}\,\boldsymbol{\alpha}_i.$$

Для случая, указанного в условии теоремы, обобщенная сила, отвечающая j-му главному колебанию, принимает вид

$$\Xi_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}Q_i = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}f_i\cos\gamma t.\square$$

Следствие 8.10.1. *Пусть функция Лагранжа не изменяет своего вида при преобразованиях координат*

$$\mathbf{q} = S\mathbf{x},$$

где матрица S обладает свойствами: $SS = E$, $S = S^{\mathrm{T}}$ (это, в частности, могут быть преобразования симметрии относительно плоскости или повороты на угол π). Тогда, если на систему действует внешняя сила $\mathbf{Q}$, такая, что

$$S\mathbf{Q} = \mathbf{Q},$$

то главные координаты, для которых собственный вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет условию

$$S\mathbf{u} = -\mathbf{u},$$

не возбуждаются. Наоборот, для силы $\mathbf{Q}$, удовлетворяющей условию

$$S\mathbf{Q} = -\mathbf{Q},$$

не возбуждаются координаты, для которых

$$S\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Доказательство. Если собственное значение λ оказывается простым (некратным), то для соответствующего ему собственного вектора $\mathbf{u}$ будем иметь

$$S\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \text{либо} \quad S\mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

Действительно, поскольку вид функции Лагранжа не изменяется при преобразовании с матрицей S, то $S\mathbf{u}$ — собственный вектор, соответствующий значению λ, а так как λ — простой корень, то эти собственные векторы коллинеарны:

$$S\mathbf{u} = æ\mathbf{u}.$$

Далее имеем

$$SS\mathbf{u} = æ^2\mathbf{u} = \mathbf{u},$$

так как $SS = E$. Следовательно, $æ^2 = 1$ или $æ = \pm 1$.

Если λ — кратный корень, то необязательно должно быть $S\mathbf{u} = æ\mathbf{u}$. Но тогда $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + S\mathbf{u}$ удовлетворяет условию $S\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$.

Теперь получим

$$\sum_{i=1}^{n} u_iQ_i = (\mathbf{u},\mathbf{Q}) = (\mathbf{u},S\mathbf{Q}) = (S\mathbf{u},\mathbf{Q}) = -(\mathbf{u},\mathbf{Q}),$$

если $S\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Поэтому $(\mathbf{u},\mathbf{Q}) = 0$. Аналогично выводятся остальные утверждения.□

Рассмотрим влияние гироскопических сил. Такие силы могут возникать, например, вследствие действия кориолисовых сил в неинерциальной системе отсчета. Они также могут быть следствием процедуры Рауса игнорирования циклических координат. Рассмотрим случай $L = L_2 + L_0$. Если лагранжевы координаты системы ортогональны в том смысле, что форма L_2 есть сумма членов, содержащих только квадраты обобщенных скоростей, то (см. § 8.5) функция Рауса также будет представлять собой сумму положительно определенной квадратичной формы по позиционным скоростям и свободного от скоростей члена. Однако если L_2 — произвольная положительно определенная квадратичная форма, то отсутствие линейного по скоростям члена в функции Рауса гарантировать нельзя, так что функцию Рауса следует принять в виде

$$R = R_2 + R_1 + R_0,$$

где R_2 — квадратичная по скоростям, R_1 — линейная по скоростям формы, R_0 от скоростей не зависит. Стационарное положение такой системы, соответствующее решению системы уравнений $\partial R_0/\partial q_i = 0$, $i = 1,\dots,m$ означает, что в нем позиционные координаты $q_1,\dots,q_m$ сохраняют постоянные значения, тогда как циклические координаты могут изменяться в соответствии с циклическими интегралами. Такой тип движения системы называют *стационарным*. По смыслу исследование свойств движения в окрестности стационарной точки уравнений Рауса совпадает с исследованием окрестности стационарного движения в пространстве всех лагранжевых координат (как циклических, так и позиционных).

Мы можем принять для исследуемой стационарной точки $q_1 = q_2 = \dots = q_m = 0$ (см. § 8.7) и оставить в функции Рауса только слагаемые до второго порядка малости включительно. Функция Рауса

соответствующей линейной системы примет вид

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{m}\left(l_i + \sum_{j=1}^{m} l_{ij}q_j\right)\dot{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}q_iq_j,$$

где $A = (a_{ij})$ — положительно определенная постоянная симметричная матрица, $B = (b_{ij})$ — постоянная симметричная матрица, l_i, l_{ij} постоянные коэффициенты. Составим уравнения Рауса:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}\dot{q}_j + \sum_{j=1} b_{ij}q_j = 0, \quad d_{ij} = l_{ij} - l_{ji} = -d_{ji}, \quad i = 1,\dots,m.$$

Полученная линейная система отличается от позиционной линейной системы слагаемыми вида

$$\sum_{j=1}^{m} d_{ij}\dot{q}_j, \quad i = 1,\dots,m,$$

которые имеют смысл гироскопических сил (см. определение 7.2.1), так как матрица $D = (d_{ij})$ кососимметрична.

Линейно независимые решения этой системы будем искать в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{\beta t}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\eta}e^{\beta t}, \quad \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{u},\beta\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{u} \in R^m$, $\boldsymbol{\eta} \in R^{2m}$ — постоянные векторы, $\mathbf{x} \in R^{2m}$ — фазовый вектор, соответствующий искомому решению. Подставив вместо $\mathbf{q}$ его выражение в уравнения движения, получим задачу на собственные значения:

$$(A\beta^2 + D\beta + B)\mathbf{u} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A\beta^2 + D\beta + B) = 0.$$

Его степень равна $2m$. Корни этого уравнения есть собственные значения задачи. Каждому собственному значению β соответствует по крайней мере один ненулевой *собственный фазовый вектор* $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{u},\beta\mathbf{u})$, где $\mathbf{u}$ ненулевое решение полученной вырожденной системы линейных уравнений.

Теорема 8.10.2. *Различным корням характеристического уравнения соответствуют линейно независимые ненулевые собственные фазовые векторы.*

Доказательство. Предположим противоположное. Пусть собственные значения $\beta_1, \ldots, \beta_k$ попарно различны, а соответствующие им собственные фазовые векторы $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_k$ линейно зависимы, т.е. существуют не все равные нулю скаляры $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ такие, что

$$\gamma_1\boldsymbol{\eta}_1 + \ldots + \gamma_k\boldsymbol{\eta}_k = 0.$$

Предположим, например, что $\gamma_k \neq 0$. Вектор-функция

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i\boldsymbol{\eta}_i e^{\beta_i t}$$

составляет решение изучаемой системы дифференциальных уравнений с начальными условиями, определенными значением этой вектор-функции при $t = 0$. Но по построению $\mathbf{f}_1(0) = 0$. Следовательно в силу теоремы единственности решений системы дифференциальных уравнений имеем $\mathbf{f}(t) \equiv 0$. А потому

$$\dot{\mathbf{f}}(0) = \gamma_1\beta_1\boldsymbol{\eta}_1 + \ldots + \gamma_k\beta_k\boldsymbol{\eta}_k = 0.$$

Мы теперь можем условие линейной зависимости векторов $\boldsymbol{\eta}_i$ умножить на β_1 и результат вычесть из полученного равенства:

$$\gamma_2(\beta_2 - \beta_1)\boldsymbol{\eta}_2 + \ldots + \gamma_k(\beta_k - \beta_1)\boldsymbol{\eta}_k = 0.$$

Другими словами, оказывается что линейно зависимыми будут также векторы $\boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_k$. Процесс исключения векторов мы можем аналогичным образом продолжать и в результате получим

$$\gamma_k(\beta_k - \beta_1)(\beta_k - \beta_2)\ldots(\beta_k - \beta_{k-1})\boldsymbol{\eta}_k = 0.$$

Имеем противоречие, так как по предположению $\gamma_k \neq 0$.□

Следствие 8.10.2. *Пусть характеристическое уравнение имеет $2m$ различных корней $\beta_1, \ldots, \beta_{2m}$ и $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{2m}$ — соответствующие этим корням собственные векторы. Тогда общее решение исследуемой линейной системы представляется в виде*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{2m} \xi_j\boldsymbol{\eta}_j e^{\beta_j t},$$

где ξ_j, $j = 1, \ldots, 2m$, произвольные постоянные.

Следствие 8.10.3. *Если все корни характеристического уравнения различные и мнимые, то движение линейной системы с гироскопическими силами в окрестности стационарной точки будет устойчивым.*

Теорема 8.10.3. *Пусть матрица B положительно определена. Тогда все корни характеристического уравнения системы с гироскопическими силами суть мнимые числа.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8.7.1 Лагранжа. Если матрица B положительно определена, то потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}q_iq_j$$

имеет в стационарной точке изолированный минимум. Система имеет интеграл энергии, так как гироскопические силы на энергию системы не влияют. Согласно следствию 8.7.1, такая система устойчива в окрестности стационарной точки. Предположим теперь, что корень характеристического уравнения β_k оказался при этом не мнимым, то есть

$$\beta_k = \eta_k + i\zeta_k, \quad i^2 = -1, \quad \eta_k \neq 0,$$

η_k, ζ_k — действительные числа. Это означает, что общее решение будет иметь слагаемое, содержащее в виде множителя функцию $\exp(\eta_k t)$. Пусть $\eta_k > 0$, тогда найдется сколь угодно близкое к стационарной точке в начальный момент времени решение, удаляющееся в бесконечность при $t \to \infty$. Предположим, что $\eta_k < 0$. Сделаем замену независимой переменной: $t = -\tau$. Обозначим q' дифференцирование по τ. Линейная система уравнений с гироскопическими силами примет вид

$$A\mathbf{q}'' - D\mathbf{q}' + B\mathbf{q} = 0.$$

Она удовлетворяет теореме Лагранжа об устойчивости, а ее характеристическое уравнение совпадает с характеристическим уравнением исходной системы, если искать решение в виде $\mathbf{q} = \mathbf{u}\exp(-\beta\tau)$. Следовательно, общее решение системы будет включать слагаемое, содержащее в виде множителя функцию $\exp(-\eta_k\tau)$. Таким образом, и предположение об отрицательности η_k противоречит устойчивости системы.□

Заметим, что если характеристическое уравнение линейной системы с гироскопическими силами имеет кратные корни, то даже в том случае, когда все они мнимые, нельзя утверждать, что система будет устойчивой. Сказанное проиллюстрируем примером.

Пример 8.10.1. Материальная точка массы m движется в плоскости с декартовыми координатами Oxy. Плоскость вращается с угловой скоростью $\omega = \omega e$. Вектор e перпендикулярен плоскости Oxy и образует с осями Ox и Oy правую тройку, а ось вращения проходит через точку O. На точку действует центральная сила $\mathbf{F} = -c(x, y)$, где x, y —

координаты точки, $\mathbf{r} = (x, y)$ — ее радиус-вектор. Уравнения движения примут вид

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - (\omega^2 - \alpha)x = 0,$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - (\omega^2 - \alpha)y = 0, \quad \alpha = \frac{c}{m}.$$

Здесь учтены кориолисова (гироскопические члены, содержащие $\dot{x}$ и $\dot{y}$) и центробежная силы инерции. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \beta^2 - (\omega^2 - \alpha) & -2\omega\beta \\ 2\omega\beta & \beta^2 - (\omega^2 - \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$[\beta^2 - (\omega^2 - \alpha)]^2 + 4\omega^2\beta^2 = 0.$$

Корнями этого уравнения служат

$$\beta_1 = -i(\omega - \sqrt{\alpha}), \quad \beta_2 = -i(\omega + \sqrt{\alpha}), \quad \beta_3 = i(\omega - \sqrt{\alpha}), \quad \beta_4 = i(\omega + \sqrt{\alpha}).$$

При $\alpha > 0$ все корни мнимые и различные. Следовательно, система будет устойчивой при любом сколь угодно малом положительном α. Если $\alpha < 0$, то у корней возникнут действительные части и система будет неустойчивой.

В рассматриваемой системе координат характер устойчивости при малом положительном α следует считать гироскопическим, так как если гироскопические силы убрать, то в случае $\omega^2 > \alpha > 0$ движение будет явно неустойчивым.

Особо рассмотрим случай $\alpha = 0$. Тогда $\beta_1 = \beta_2$ и $\beta_3 = \beta_4$. Имеем два кратных мнимых корня характеристического уравнения. Если мысленно убрать гироскопические силы, то рассматриваемая система превращается в позиционную линейную систему, уравнение частот которой имело бы один кратный корень, и вся плоскость Oxy состояла бы из собственных векторов. В ней следовало бы выбрать взаимно ортогональные, например вдоль осей Ox и Oy, и каждому из направлений соответствовало бы по два линейно независимых решения. Действие гироскопических сил приводит к тому, что система имеет одно собственное направление $\mathbf{u}_1$ для корня $\beta_1 = \beta_2 = -i\omega$, определяемое из условия

$$u_{1x} - iu_{1y} = 0,$$

и одно собственное направление $\mathbf{u}_3$ для корня $\beta_3 = \beta_4 = i\omega$, определяемое из условия

$$u_{3x} + iu_{3y} = 0.$$

Недостаток базисных решений здесь восполняется за счет так называемых "резонансных" членов вида $\mathbf{r} = t\mathbf{u}_j\exp(\beta_j t)$, $j = 1; 3$, где $\mathbf{u}_j$ —

уже найденные векторы. В самом деле, возьмем, например, $\beta_1 = -i\omega$. Тогда резонансные члены имеют вид

$$x = u_{1x}t\exp(-i\omega t), \qquad y = u_{1y}t\exp(-i\omega t),$$
$$\dot{x} = u_{1x}\exp(-i\omega t) - i\omega x, \qquad \dot{y} = u_{1y}\exp(-i\omega t) - i\omega y,$$
$$\ddot{x} = -2i\omega u_{1x}\exp(-i\omega t) - \omega^2 x, \quad \ddot{y} = -2i\omega u_{1y}\exp(-i\omega t) - \omega^2 y.$$

Подставив эти выражения в уравнения движения, убеждаемся в том, что уравнения удовлетворяются с учетом условия для компонент соответствующего вектора $\mathbf{u}_1$. То же самое касается и второго собственного значения $\beta_3 = \beta_4 = i\omega$. Таким образом общее решение уравнений движения в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{r} = (\xi_1 + \xi_2 t)\mathbf{u}_1\exp(-i\omega t) + (\xi_3 + \xi_4 t)\mathbf{u}_2\exp(i\omega t),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_4$ — произвольные постоянные. Возможность появления резонансных членов в случае кратных корней принципиально отличает линейную систему с гироскопическими силами от позиционной линейной системы, для которой из-за кратности корней резонансные члены никогда не возникают.◇

§ 8.11. Экстремумы функционалов

Определение 8.11.1. *Функционалом* называется отображение заданного множества функций в некоторое множество действительных чисел. При этом каждой функции из заданного множества (множества определения функционала) соответствует единственное действительное число из множества значений.

В этом определении термин "функция" может пониматься также в смысле "вектор-функция". Будем считать, что все функции принадлежат классу C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Обозначим γ некоторую вектор-функцию в пространстве R^n лагранжевых координат, определенную на отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_1$:

$$\gamma = \{\mathbf{q} \in R^n : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1\}.$$

Пусть γ' — другая вектор-функция, определенная на том же отрезке:

$$\gamma' = \{\mathbf{q}' \in R^n : \mathbf{q}' = \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1\}.$$

Представим ее в виде $\gamma' = \gamma + \delta$. На множестве вектор-функций γ зададим некоторый функционал $\Phi(\gamma)$. Изучим свойства приращения

$$\Delta\Phi = \Phi(\gamma + \delta) - \Phi(\gamma).$$

С этой целью в пространстве вектор-функций γ зададим норму $\|\gamma\|$. *Нормой* называется функционал, удовлетворяющий следующим условиям.

1. $\|\gamma\| \geq 0$, причем $\|\gamma\| = 0$ только если $\gamma = 0$,
2. $\|\gamma_1 + \gamma_2\| \leq \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|$,
3. $\|\alpha\gamma\| = |\alpha|\|\gamma\|$, каково бы ни было число α.

Если $\gamma \in C^2$, нормой может служить, например, величина

$$\|\gamma\| = \max_i \max_t [|q_i(t)|, |\dot{q}_i(t)|], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 8.11.2. Функционал Φ называется *дифференцируемым* на некотором множестве вектор-функций, если $\Delta\Phi$ представляется суммой двух функционалов:

$$\Delta\Phi = F + R,$$

где F зависит от δ линейно:

$$F(\delta_1 + \delta_2, \gamma) = F(\delta_1, \gamma) + F(\delta_2, \gamma),$$
$$F(a\delta, \gamma) = a\,F(\delta, \gamma),$$

при фиксированном γ и любом действительном a, а функционал R есть малая более высокого порядка относительно δ:

$$R(\delta, \gamma) = o(\|\delta\|),$$

то есть из выполнения неравенства

$$\|\delta\| \leq \varepsilon$$

следует, что $|R| \leq c(\varepsilon)\varepsilon$, причем $c(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Линейная часть приращения называется *дифференциалом функционала* или его *вариацией*. Слагаемое $\delta(t)$ называется вариацией вектор-функции. Дифференциал функционала Φ часто обозначается как $\delta\Phi$.

Теорема 8.11.1. *Функционал*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt,$$

где $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, а L имеет вторые непрерывные частные производные по всем аргументам, дифференцируемый, и его дифференциал (вариация) дается формулой

$$F(\delta, \gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\,dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Доказательство.

$$\Phi(\gamma + \delta) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1}[L(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt + \int_{t_0}^{t_1} o(\|\delta\mathbf{q}\|)\,dt.$$

Пусть $\|\delta\mathbf{q}\| < \varepsilon$. Тогда по определению $o(\|\delta\mathbf{q}\|)$ найдем

$$|R| = \left|\int_{t_0}^{t_1} o(\|\delta\mathbf{q}\|)\,dt\right| \leq \int_{t_0}^{t_1}|o(\|\delta\mathbf{q}\|)|\,dt \leq (t_1 - t_0)c(\varepsilon)\varepsilon.$$

Проинтегрируем по частям выражение

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d(\delta q_i)}{dt}\,dt = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Bigg|_{t_0}^{t_1} -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\delta q_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)dt.$$□

Определение 8.11.3. *Экстремалью* дифференцируемого функционала называется вектор-функция γ, для которой $F(\delta, \gamma) = 0$ при любом допустимом δ.

Теорема 8.11.2. (Эйлер). *Вектор-функция γ служит экстремалью функционала*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt$$

на множестве кривых, проходящих через фиксированные точки (допустимое множество)

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1,$$

тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

в вариационном исчислении называемой системой уравнений Эйлера.

Доказательство. Согласно теореме 8.11.1, дифференциал функционала имеет вид

$$F(\delta) = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\,dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как по предположению теоремы о допустимом множестве вектор-функций имеем

$$\delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0.$$

Необходимость. Пусть γ — экстремаль. Это значит, что

$$F(\delta) = 0, \quad \forall\delta : \delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = 0.$$

Допустим, что существует момент времени $t^* \in [t_0, t_1]$, для которого квадратная скобка, соответствующая i-й координате в подынтегральном выражении дифференциала, не равна нулю. По непрерывности она тогда будет сохранять знак в некоторой окрестности точки t^*: $t_0 < t^* - a < t < t^* + a < t_1$. Выберем $\delta q_i \neq 0$ в этой окрестности, причем того же знака, что и квадратная скобка. Вне окрестности положим $\delta q_i = 0$. Для индексов $j \neq i$ примем $\delta q_j \equiv 0$. Тогда, очевидно, будет $F(\delta) > 0$, что противоречит экстремальности γ.

Достаточность. Если утверждение теоремы выполнено, то квадратная скобка в выражении для дифференциала, очевидно, равна нулю.□

Замечание 8.11.1. Система уравнений Эйлера в приведенном виде совпадает по форме с системой уравнений Лагранжа второго рода. Однако по смыслу в уравнениях Лагранжа функция Лагранжа должна удовлетворять обязательному условию невырожденности по обобщенным скоростям. Вместе с тем в уравнениях Эйлера, применяемых для решения задач на экстремум функционала, аналогичное условие невырожденности подынтегральной функции относительно первых производных может не выполняться. Кроме того, в уравнениях Эйлера под t следует понимать любую независимую переменную (не только время).

Пример 8.11.1. **(Задача о брахистохро́не).** Материальная точка массы m соскальзывает без начальной скорости в поле параллельных сил тяжести в вертикальной плоскости по абсолютно гладкой кривой γ, соединяющей заданные начальную точку A и конечную точку B. Среди всех дважды непрерывно дифференцируемых кривых γ, проходящих через фиксированные точки A и B, найти такую, для которой время движения точки из A в B минимально.

Р е ш е н и е. Поместим начало координат в точку A. Ось Ay направим вертикально вниз. Горизонтальную ось Ax выберем так, чтобы плоскость Axy содержала точку B. Пусть точка B имеет координаты x_1, y_1. Время T движения по кривой γ можно выразить с помощью криволинейного интеграла первого рода:

$$T = \int_{\gamma}\frac{ds}{v},$$

где ds — элемент длины дуги, а v — скорость точки, которую в данном случае можно найти из интеграла энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy, \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Примем y в качестве независимой переменной и обозначим x' производную от x по y. Тогда получим

$$T = \int_0^{y_1}\frac{\sqrt{1 + (x')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dy.$$

Имеем функционал, для которого пределы интегрирования, а также начальная и конечная точки фиксированы. Необходимое и достаточное условие экстремальности есть уравнение Эйлера относительно функции $x(y)$:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}\,\sqrt{2gy}}\right) = 0.$$

Следовательно

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + (x')^2}\,\sqrt{2gy}} = c, \quad x' = \pm\frac{C\sqrt{y}}{\sqrt{1 - C^2 y}},$$

где c — константа интегрирования и $C = c\sqrt{2g}$. Из интеграла энергии следует, что $y > 0$. Ясно также, что должно быть $C^2 y < 1$. Перейдем к другой переменной: $C^2 y = \sin^2\tau$. Возьмем только ту ветвь экстремали, которая соответствует увеличению x. В результате будем иметь

$$x = \frac{1}{C^2}\int_0^{\tau} 2\sin^2\tau\,d\tau.$$

После интегрирования получаем искомую экстремаль в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{2C^2}(2\tau - \sin 2\tau), \quad y = \frac{1}{2C^2}(1 - \cos 2\tau).$$

Это циклоида. Она вычерчивается точкой обруча, совпадающей в начальный момент с точкой A. Обруч имеет радиус $1/(2C^2)$, катится без проскальзывания по оси Ax так, что его центр расположен ниже оси Ax, а абсцисса центра равна 2τ и служит параметром циклоиды. Постоянная C подбирается так, чтобы циклоида прошла через точку B.◇

При получении условий оптимальности большую роль играет множество функций, на котором происходит сравнение значений функционала. Это множество назовем *областью определения функционала*. Для теоремы Эйлера это было множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, проходящих через фиксированные начальную и конечную точки в заданные начальное и конечное значения параметра t. Могут быть и другие ограничения. Предположим, например, что требуется найти экстремум функционала $\Phi(\gamma)$ среди всех вектор-функций, для которых значение другого функционала такого же вида:

$$\Psi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$$

равно постоянной c. Условие $\Psi = c$ ограничивает множество функций, среди которых ищется экстремум, и традиционно называется *изопериметрическим условием*, а соответствующая задача оптимизации *изопериметрической задачей*. По существу это задача на условный экстремум.

Определение 8.11.4. *Градиентом функционала* $\Phi(\gamma)$ на множестве вектор-функций с фиксированными краевыми точками называется вектор-функция

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right], \ldots, \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right]\right).$$

Пусть на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ заданы две вектор-функции

$$\gamma_1 = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad x_i \in C^2, \quad i = 1, \ldots, n\},$$
$$\gamma_2 = \{\mathbf{y} \in R^n : \mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)), \quad y_i \in C^2, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Определим для них скалярное произведение по формуле

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\,dt.$$

Очевидно, что все свойства скалярного произведения при этом выполняются. Скалярное произведение порождает норму вектор-функции:

$$\|\gamma\|^2 = (\gamma, \gamma) = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} q_i^2\,dt.$$

Теорема 8.11.3. *Пусть, как и прежде, все траектории проходят через фиксированную начальную и конечную точки для заданных начального t_0 и конечного t_1 значений параметра t. Тогда найдется постоянная λ, для которой экстремаль функционала Φ при условии, что функционал Ψ сохраняет постоянное значение, совпадает с безусловной экстремалью функционала $\Phi + \lambda\Psi$.*

Доказательство. Дифференциалы функционалов можем представить в виде

$$\delta\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}, \delta\right), \quad \delta\Psi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}, \delta\right).$$

Изопериметрическую задачу переформулируем так: требуется найти такую кривую γ^* (экстремаль), что $\delta\Phi = 0$ для любой вариации δ', обращающей в нуль значение $\delta\Psi$. Пусть задана совершенно произвольная вариация δ. Тогда вариация δ' может быть получена по формуле

$$\delta' = \delta - \left\|\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\right\|^{-2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}, \delta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}.$$

Прямой проверкой легко убедиться в том, что скалярное произведение

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}, \delta'\right) = 0.$$

По смыслу δ' представляет собой вариацию в плоскости, перпендикулярной градиенту функционала Ψ в пространстве функций.

Необходимое и достаточное условие экстремальности состоит в том, что

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}, \delta'\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}, \left[\delta - \left\|\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\right\|^{-2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}, \delta\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\right]\right) = \left(\frac{\partial[\Phi + \lambda\Psi]}{\partial\gamma}, \delta\right) = 0$$

для любого δ, причем скалярная постоянная λ выражается формулой

$$\lambda = -\left\|\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\right\|^{-2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}, \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\right). \square$$

Следствие 8.11.1. (Свойство взаимности изопериметрической задачи). *Множество экстремалей функционала Φ при фиксированном значении функционала Ψ и множество экстремалей функционала Ψ при фиксированном значении функционала Φ принадлежат однопараметрическому по параметру λ семейству безусловных экстремалей функционала $\Phi + \lambda\Psi$.*

Теорема 8.11.3 обосновывает метод множителей Лагранжа для изопериметрических задач (сравните с замечанием 4.6.2). Рецепт решения задач по этому методу состоит в том, что ищется безусловный экстремум функционала $\Phi + \lambda\Psi$. Его экстремаль γ^* будет зависеть от скалярного параметра λ. Параметр λ находится из условия, что $\Psi(\gamma^*) = c$.

Пример 8.11.2. Найти функцию $y(x)$ такую, что ее график на плоскости с декартовой системой координат $0xy$ представляет собой гладкую кривую, проходит через фиксированные точку A с координатами $(0, 0)$ и точку B с координатами $(a, 0)$, а площадь, ограниченная графиком функции $y(x)$ и осью Ox, максимальна среди всех кривых одинаковой длины l.

Решение. По условию имеем

$$\Phi = \int_0^a y(x)\,dx, \quad \Psi = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = l, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Функционал Φ задает площадь под графиком функции $y = y(x)$, а функционал Ψ есть длина дуги искомой кривой. Воспользуемся теоремой 8.11.3. Составим функционал

$$\int_0^a [y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}]\,dx.$$

Согласно теореме 8.11.2, экстремаль этого функционала удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$1 - \lambda\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right] = 0.$$

После однократного интегрирования получим

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{x}{\lambda} + \alpha = \xi,$$

где α — постоянная интегрирования, а ξ — новая независимая переменная, так что $dx/d\xi = \lambda$, $dy/d\xi = \lambda y'$. Видим, что знаки y' и ξ совпадают. Разрешив полученное уравнение относительно y', найдем

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\lambda\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad y - y_0 = -\lambda\sqrt{1 - \xi^2} + \lambda\sqrt{1 - \xi_0^2},$$

где y_0, ξ_0 — значения переменных y и ξ в точке A. Перейдем к независимой переменной x и определим значение постоянной α из краевых

условий. Имеем $y_0 = 0$, $\xi_0 = \alpha$ и $y(a) = 0$. Поэтому

$$\alpha^2 = \left(\frac{a}{\lambda} + \alpha\right)^2, \quad \alpha = -\frac{a}{2\lambda}.$$

В итоге получаем уравнение искомой экстремали, в которое входит параметр λ:

$$\left[y - \lambda\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2}\right]^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \lambda^2.$$

Таким образом, все экстремали оказываются дугами окружности, имеющей радиус $|\lambda|$ и проходящей через точки A и B. Радиус окружности найдем из условия, что длина искомой дуги равна l. Это условие приводит к уравнению:

$$\sin\frac{l}{|\lambda|} = \frac{a}{l}\,\frac{l}{|\lambda|},$$

которое имеет ненулевое решение, если $a/l < 1$. Часть окружности, расположенная выше оси Ox, дает максимум требуемой площади. Знак λ выбирается из условия, чтобы именно эта часть окружности имела длину l.◇

Область определения функционала может задаваться также с помощью системы дифференциальных уравнений. Для удобства построения метода поиска экстремумов функционала в этом случае примем следующие обозначения:

$$x_i = q_i, \quad x_{n+i} = \dot{q}_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad m = 2n, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m).$$

Будем искать экстремумы функционала

$$\Theta = \int_{t_0}^{t_1} W(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt,$$

где t_0 и t_1 — начальное и конечное значения независимой переменной t, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$ — вектор управления, задающий функцию $\mathbf{x}(t)$ как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{X} \in R^m,$$

при конкретном задании вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ и начальных условий $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Например, если рассматриваемый процесс есть движение системы материальных точек, то вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ задает управляющие силы, которые могут выбираться, чтобы целенаправленно изменить траекторию, скорость и другие характеристики движения. В дальнейшем будем считать, что вектор $\mathbf{u}$ принадлежит замкнутой ограниченной области U, так как возможности управления обычно ограничены.

В сформулированной задаче область определения функционала формируется свободно выбираемыми из области D функциями $\mathbf{u}(t)$. Поэтому градиент функционала целесообразно построить именно в этом пространстве. Составим вспомогательный функционал

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1}\left[\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \boldsymbol{\psi}) - \sum_{i=1}^{m}\psi_i\dot{x}_i\right]dt, \quad \mathcal{H} = W + \sum_{s=1}^{m}\psi_s X_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

Функционал Λ совпадает с функционалом Θ для функций $\mathbf{x}(t)$, служащих решениями заданной системы дифференциальных уравнений. При этом коэффициенты $\psi_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, можно выбирать совершенно произвольно. Воспользуемся произволом с целью преобразования дифференциала функционала к виду, в котором будут присутствовать только вариации δu_j, $j = 1, \ldots, k$. Выполним варьирование в предположении, что $\mathbf{x}$ удовлетворяет заданной системе дифференциальных уравнений:

$$\delta\Theta = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_j}\delta u_j - \sum_{i=1}^{m}\psi_i\delta(\dot{x}_i)\right)dt + \left(\mathcal{H} - \sum_{i=1}^{m}\psi_i\dot{x}_i\right)dt\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Внеинтегральный член выражает приращение функционала из-за изменения пределов интегрирования. Меняя местами символы варьирования и дифференцирования по времени в последнем слагаемом подынтегрального выражения и выполняя интегрирование по частям, найдем

$$\delta\Theta = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} + \dot{\psi}_i\right)\delta x_i + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_j}\delta u_j\right]dt + \left(\mathcal{H} - \sum_{i=1}^{m}\psi_i\dot{x}_i\right)dt\Bigg|_{t_0}^{t_1} - \sum_{i=1}^{m}\psi_i\,\delta x_i\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Символ "δ" означает изохронное варьирование, то есть приращение значения функции при фиксированном значении независимой переменной. Если независимая переменная тоже изменяется, то соответствующий дифференциал (*полная вариация функции*) выразится формулой $dx_i = \delta x_i + \dot{x}_i\,dt$. Учитывая это равенство, получим

$$\delta\Theta = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i} + \dot{\psi}_i\right)\delta x_i + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_j}\delta u_j\right]dt + \left(\mathcal{H}dt - \sum_{i=1}^{m}\psi_i dx_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Теорема 8.11.4. *Дифференциал функционала Θ дается формулой*

$$\delta\Theta = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_j}\delta u_j\,dt, \quad \mathcal{H} = W + \sum_{s=1}^{m}\psi_s X_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

если найдется вектор-функция $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))$, удовлетворяющая совместно с вектор-функцией $\mathbf{x}(t)$ системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m$$

и условиям трансверсальности

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0))\,dt_0 - \sum_{i=1}^{m}\psi_i(t_0)\,dx_i(t_0) = 0,$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1))\,dt_1 - \sum_{i=1}^{m}\psi_i(t_1)\,dx_i(t_1) = 0,$$

которые подходящим выбором $\boldsymbol{\psi}$ и $\mathbf{u}$ в моменты t_0 и t_1 должны быть выполнены для любых допустимых условиями задачи дифференциалов dt и $d\mathbf{x}$ в начальной и конечной точках интегрирования. Условия трансверсальности обусловливают краевые значения вектор-функций $\boldsymbol{\psi}$ и $\mathbf{u}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться полученной формулой для дифференциала $\delta\Theta$, которая справедлива независимо от выбора вектор-функции $\boldsymbol{\psi}$. Потребуем, чтобы $\boldsymbol{\psi}$ было решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathbf{x}$ служит решением исходной системы уравнений:

$$\dot{x}_i = X_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Решение $\mathbf{x}(t)$ зависит только от управления $\mathbf{u}$ и заданных начальных или краевых условий для $\mathbf{x}$. Для заданного управления решение $\mathbf{x}(t)$ определяется независимо от неизвестной вектор-функции $\boldsymbol{\psi}(t)$. После того как решение $\mathbf{x}(t)$ найдено, можно воспользоваться системой дифференциальных уравнений для $\boldsymbol{\psi}$, задав краевые условия на начальные и конечные значения $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ и $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ таким образом, чтобы

уничтожить внеинтегральные члены в формуле, выражающей дифференциал функционала. После выполнения указанной процедуры в формуле для дифференциала функционала останутся только члены, содержащие управление.□

Переменные ψ_i, $i = 1, \ldots, m$ называются *сопряженными переменными*, а определяющая их система дифференциальных уравнений — *сопряженной системой*. Функция $\mathcal{H}$ называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* задачи управления. Сопряженная система совместно с системой дифференциальных уравнений для переменных x_i, $i = 1, \ldots, m$, образуют гамильтонову систему дифференциальных уравнений. Свойствам таких систем посвящена следующая глава.

Замечание 8.11.2. В приведенных выше рассуждениях не требовалось каких-либо жестких ограничений на функции $W(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и $\mathbf{u}(t)$. Достаточно лишь, чтобы выполнялись условия существования решений сопряженной системы, а функция

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_j}\delta u_j$$

была интегрируемой в смысле исходного функционала. Например, функция W может быть кусочно-дифференцируемой по управлению, а $\mathbf{u}$ — кусочно-непрерывной вектор-функцией.

Следствие 8.11.2. *В условиях теоремы 8.11.4 градиент функционала Θ по управлению выражается вектор-функцией*

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_k}\right), \quad u = \{\mathbf{u} \in R^k : u = \mathbf{u}(t), \quad t_0 \le t \le t_1\}.$$

Пример 8.11.3. Рассмотрим одномерное движение материальной точки, описываемое дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} = u, \quad -1 \le u \le 1,$$

где u — управление, выбираемое произвольно в указанном диапазоне, но так, чтобы уравнение движения имело решение. В начальный момент времени $t_0 = 0$ точка имеет координату $q(0) = q_0$ и скорость $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Управление требуется выбрать так, чтобы перевести точку из начального заданного положения в положение $q(T) = 0$, $\dot{q}(T) = 0$ за кратчайшее время T.

Такая задача встречается в теории активной стабилизации движения или равновесия.

Решение. Примем обозначения: $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$. Тогда имеем систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad -1 \le u \le 1.$$

Функционал Θ и гамильтониан $\mathcal{H}$ теоремы 8.11.4 принимают вид

$$\Theta = \int_0^T 1\,dt, \quad \mathcal{H} = 1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Запишем сопряженную систему

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Проанализируем условия трансверсальности. Начальная и конечная точки движения фиксированы, фиксирован также и начальный момент времени. Следовательно, $dx_1(0) = dx_2(0) = dx_1(T) = dx_2(T) = 0$; $dt_0 = 0$. Конечный момент времени не фиксирован: $dt_1 = dT \ne 0$. Поэтому условия трансверсальности будут выполнены, если приравнять нулю коэффициент при dt_1:

$$1 + \psi_1(T)x_2(T) + \psi_2(T)u(T) = 1 + \psi_2(T)u(T) = 0.$$

Дифференциал функционала Θ в пространстве управлений принимает вид

$$\delta\Theta = \int_0^T \psi_2\delta u\,dt.$$

Найдем решение сопряженной системы: $\psi_1 = const$, $\psi_2 = (t - T)\psi_1 + \psi_2(T)$. Функция $\psi_2(t)$ служит градиентом функционала Θ и определяет структуру оптимального управления. Из условия трансверсальности следует, что $\psi_2(T) \ne 0$. Поэтому функция $\psi_2(t)$ может обратиться в нуль всего лишь в один момент времени, и рассматриваемый функционал может иметь экстремумы только на границе области управления. Поскольку требуется найти минимум функционала, то следует выбирать $u = -\operatorname{sign}\psi_2$. Только в этом случае любая вариация управления будет приводить лишь к увеличению функционала. Из условия трансверсальности тогда следует, что $\psi_2(T) = \pm 1$. В любом случае в зависимости от значения ψ_1 управление как функция времени либо вообще не имеет переключений и все время остается равным какому-либо ограничению допустимой области, либо имеет только одно переключение с одного ограничения на другое.

Более полное представление об оптимальном управлении дает *задача синтеза*. Так называется задача определения оптимального управления в зависимости от фазовых координат (в рассматриваемом случае от x_1, x_2). Используем результаты исследования структуры оптимального управления. В начало координат траектория может входить либо при $u = +1$, либо при $u = -1$. Возьмем независимую переменную $\tau = T - t$. Определим все точки фазовой плоскости, из которых можно попасть в начало координат по закону оптимального управления за время T. Уравнения движения примут вид

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -u, \quad 0 \le \tau \le T.$$

Пусть сначала $u = +1$. Интегрируя, получаем уравнение траектории

$$x_2 = -\tau, \quad x_1 = \frac{\tau^2}{2}.$$

На плоскости (x_1, x_2) это полупарабола, отвечающая отрицательным значениям x_2 и положительным значениям x_1. Предположим теперь, что при каком-то значении $\tau = \tau_1$ произошло переключение управления, так что

$$u(t) = \begin{cases} +1, & 0 \le \tau < \tau_1; \\ -1, & \tau_1 \le \tau \le T. \end{cases}$$

Тогда для момента $\tau = T$ будем иметь

$$x_2 = -2\tau_1 + T, \quad x_1 = 2\tau_1 T - \tau_1^2 - \frac{T^2}{2}, \quad 0 \le \tau_1 \le T.$$

При изменении τ_1 в указанных пределах получим все множество точек фазовой плоскости, для которых время T приведения в начало координат минимально, если $u(+0) = 1$.

Аналогичные результаты получаются и для случая $u(+0) = -1$. Полупарабола, выходящая из начала координат и служащая линией переключения, имеет вид

$$x_2 = \tau, \quad x_1 = -\frac{\tau^2}{2}.$$

Если имеется переключение, то

$$u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le \tau < \tau_1; \\ +1, & \tau_1 \le \tau \le T, \end{cases}$$

и множество точек, для которых время T минимально, выражается формулами

$$x_2 = 2\tau_1 - T, \quad x_1 = -2\tau_1 T + \tau_1^2 + \frac{T^2}{2}, \quad 0 \le \tau_1 \le T.$$

Таким образом линия переключения состоит из двух непересекающихся полупарабол. Мы можем их объединить одним уравнением:

$$\tilde{x}_1 = -\frac{|x_2|x_2}{2}, \quad -\infty < x_2 < +\infty.$$

Рецепт оптимального управления прост. Пусть фазовая точка, отражающая текущее состояние системы, имеет координаты (x_1, x_2). Из уравнения линии переключения можно найти соответствующее значение $\tilde{x}_1$. Управление в точке (x_1, x_2) имеет вид

$$u = \begin{cases} +1, & x_1 < \tilde{x}_1(x_2); \\ -\operatorname{sign} x_2, & x_1 = \tilde{x}_1(x_2); \\ -1, & x_1 > \tilde{x}_1(x_2). \end{cases}$$

Приведенная формула определяет оптимальное управление для всей фазовой плоскости.◇

§ 8.12. Интегральные вариационные принципы

Теорема 8.12.1. (Принцип Га́мильтона стационарного действия). *Действительное движение голономной механической системы под действием потенциальных (обобщенно потенциальных) сил, выполняемое от заданного положения $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ до другого заданного положения $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ ($t_1 > t_0$), отличается от кинематически возможных движений системы между этими положениями в том же интервале времени тем, что действительное движение служит экстремалью функционала*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\,dt,$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа системы.

Доказательство. Вектор-функция $\mathbf{q}(t)$ лагранжевых координат, описывающая действительное движение, удовлетворяет уравнениям Лагранжа второго рода (см. § 8.1), которые в свою очередь служат необходимыми и достаточными условиями экстремальности (теорема 8.11.2).□

Определение 8.12.1. Пусть γ — экстремаль функционала Φ в смысле теоремы 8.12.1. Значение этого функционала на экстремали зависит от начального и конечного положения системы, начального и конечного моментов времени:

$$S(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t_0, t_1) = \Phi(\gamma).$$

Функция $S(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t_0, t_1)$ называется *действием по Гамильтону.*

Замечание 8.12.1. Использование принципа Гамильтона приводит к необходимости решать краевую задачу, то есть задачу о поиске решения системы дифференциальных уравнений движения, удовлетворяющего заданным краевым условиям $\mathbf{q}(t_0)$, $\mathbf{q}(t_1)$. Эта задача имеет ряд существенных особенностей по сравнению с задачей Коши, когда решение системы дифференциальных уравнений определяется по начальным условиям $\mathbf{q}(t_0)$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$. Задача Коши в силу принципа детерминированности Ньютона для реальных механических систем всегда имеет единственное решение. Решение же краевой задачи при произвольном выборе краевых условий может вообще отсутствовать или быть неоднозначным. Сказанное проиллюстрируем примером.

Пример 8.12.1. Функция Лагранжа гармонического осциллятора выражается формулой

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2),$$

где q — единственная лагранжева координата. Для определения закона движения воспользуемся принципом Гамильтона. Зададим начальный момент $t_0 = 0$ и конечный t_1 моменты времени, а также желаемые начальное $q(t_0) = q_0$ и конечное $q(t_1) = q_1$ положения системы. Тогда ее закон движения должен доставлять экстремум функционалу

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)\, dt$$

среди всех функций $q(t)$ таких, что $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$.

Применив теорему 8.11.2, убеждаемся в том, что движение рассматриваемой системы должно удовлетворять уравнению гармонического осциллятора (см. § 3.9)

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

Пусть $t_0 = 0$. Решение этого уравнения при $q(0) = q_0$ имеет вид

$$q = q_0 \cos\omega t + c \sin\omega t.$$

Постоянную c найдем из условия $q(t_1) = q_1$:

$$c = \frac{q_1 - q_0 \cos\omega t_1}{\sin\omega t_1}.$$

Видим, что когда $t_1 \neq \pi k/\omega$, трудностей при определении постоянной c не возникает, и решение краевой задачи существует и однозначно при любом q_1.

В том случае, когда $t_1 = \pi k/\omega$, c не определено и его нельзя найти из краевого условия. При этом если $q_1 \neq q_0 \cos\omega t_1$, то решение краевой задачи вообще отсутствует, а если $q_1 = q_0 \cos\omega t_1$, то существует бесчисленное множество решений краевой задачи, так как тогда параметр c будет произвольным. ◇

Определение 8.12.2. Два положения $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$ системы называются *сопряженными кинетическими точками*, если они могут быть соединены между собой несколькими различными экстремалями.

В примере 8.12.1 точки q_0 и $q_1 = q_0 \cos\omega t_1$ при $t_1 = \pi k/\omega$ суть сопряженные кинетические точки.

Принцип Гамильтона можно применять не только для вывода уравнений движения систем дискретных материальных точек, но и для описания движения непрерывных сред.

Пример 8.12.2. Рассмотрим малые упругие плоские поперечные колебания прямолинейного стержня длины l с жестко закрепленными концами. Обозначим x расстояние от какого-нибудь конца недеформированного стержня до некоторой его точки G. Пусть $u(t, x)$ — смещение точки G перпендикулярно прямой, вдоль которой был расположен недеформированный стержень. В каждый фиксированный момент времени смещение $u(t, x)$ есть функция аргумента x, определяющая мгновенную форму стержня. При фиксированном значении x смещение $u(t, x)$ есть функция времени, однозначно определяющая положение соответствующей точки системы. Следовательно, $u(t, x)$ при фиксированном x можно считать лагранжевой координатой. Лагранжевых координат получается бесконечно много. Однако принцип Гамильтона позволяет справиться с этой трудностью.

Пусть ρ — плотность стержня, σ — площадь его поперечного сечения. Дифференциал dx при малых $u(t, x)$ отождествим с элементом длины дуги деформированного стержня. Кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π упругой изгибной деформации имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx, \quad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^l c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx,$$

где постоянная c равна произведению модуля Юнга на момент инерции сечения стержня относительно поперечной оси. Величина $\partial^2 u/\partial x^2$ обратно пропорциональна радиусу кривизны мгновенной формы стержня.

Запишем функционал принципа Гамильтона

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\rho\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right] dx\, dt.$$

Для любого $\delta u(t, x)$, при котором в начальный и конечный моменты времени положение стержня не варьируется, а концы стержня не изменяют своего положения с течением времени:

$$\delta u(t_0, x) = \delta u(t_1, x) = \delta u(t, 0) = \delta u(t, l) = 0,$$

дифференциал $\delta\Phi$ этого функционала должен обратиться в нуль:

$$\delta\Phi = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\, dx\, dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}\, dx\, dt = 0.$$

Учитывая краевые и граничные условия, возьмем первый интеграл в выражении для $\delta\Phi$ один раз по частям по аргументу t, а второй интеграл — дважды по частям по аргументу x. Если ρ, σ и c постоянны, то, очевидно, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left(-\rho\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\delta u\, dx\, dt.$$

Поскольку δu произвольно, получим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{c}{\rho\sigma}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \diamond$$

Принцип Гамильтона справедлив только для консервативных систем, то есть для систем, находящихся под действием потенциальных или обобщенно потенциальных сил. Неконсервативные механические системы подчиняются принципу Остроградского.

Теорема 8.12.2. (Принцип Остроградского). *Действительное движение голономной механической системы под действием потенциальных (обобщенно потенциальных) и непотенциальных сил, выполняемое от заданного положения $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ до другого заданного положения $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ $(t_1 > t_0)$, отличается от кинематически возможных движений системы между этими положениями в том же интервале времени тем, что действительное движение удовлетворяет равенству*

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i\right) dt = 0,$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа системы, а Q_i — обобщенные силы, для любых функций $\delta q_i(t)$, удовлетворяющих условию $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что в условиях теоремы доказываемое равенство приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + Q_i\right]\delta q_i\, dt = 0. \square$$

Теорема 8.12.3. (Принцип Мопертюй-Лагранжа-Якоби). *Пусть лагранжиан L голономной системы не зависит явно от времени (силы потенциальны или обобщенно потенциальны). Тогда действительная траектория изображающей точки конфигурационного пространства служит экстремалью функционала*

$$J = \int_{P_0}^{P_1}\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, dq_i$$

среди всех траекторий, обладающих одной и той же константой h обобщенного интеграла энергии и проходящих через фиксированные начальную P_0 и конечную P_1 точки.

Доказательство. Функция Лагранжа $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ от времени явно не зависит. Так же, как в примере 8.4.3, сделаем замену переменной $t = t(\tau)$ и введем функцию Рауса

$$R = \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'}\, t',$$

где $\mathcal{L} = t' L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, $t' = dt/d\tau$. Обобщенный интеграл энергии представляется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} = -h.$$

После исключения в функции R производной t' при помощи интеграла энергии получим систему уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

все решения которой имеют одинаковую постоянную энергии h. Для этой системы справедлива теорема 8.12.1, так что соответствующие решения служат экстремалями функционала

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} R\, d\tau$$

среди всех кривых, проходящих через фиксированные начальную P_0 и конечную P_1 точки при заданных начальном и конечном значениях параметра τ. Пользуясь результатами примера 8.4.3, найдем

$$R = \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'}\, t' = Lt' - Lt' + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i t'. \square$$

Замечание 8.12.2. Несмотря на то что значения τ_0 и τ_1 фиксированы, начальный и конечный моменты реального времени движения могут изменяться в соответствии с зависимостью

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} = L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = -h.$$

Тем самым в изучаемом принципе начальный и конечный моменты времени (в отличие от принципа Гамильтона) не фиксированы, но связаны значением обобщенного интеграла энергии.

Определение 8.12.3. Пусть γ — экстремаль функционала J в смысле теоремы 8.12.3. Значение этого функционала на экстремали зависит от начального и конечного положений системы:

$$W(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) = J(\gamma).$$

Функция $W(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$ называется *действием по Мопертюи.*

Следствие 8.12.1. *Для системы материальных точек функция Лагранжа L есть сумма*

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

квадратичной L_2, линейной L_1 по обобщенным скоростям форм и члена L_0, не зависящего от обобщенных скоростей:

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad L_1 = \sum_{i=1}^n l_i\dot{q}_i.$$

Для такой системы функционал принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби представляется в виде

$$J = \int_{P_0}^{P_1}(2L_2 + L_1)\, dt = \int_{P_0}^{P_1} 2L_2\, dt + \int_{P_0}^{P_1}\sum_{i=1}^n l_i\, dq_i.$$

Доказательство. Преобразуем подынтегральное выражение рассматриваемого принципа. Воспользуемся теоремой Эйлера об однородных функциях:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, dq_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\, dt = (2L_2 + L_1)\, dt. \square$$

Следствие 8.12.2. *Для системы материальных точек функционал принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби приводится к виду*

$$J = \int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(L_0 + h)}\, ds + \int_{P_0}^{P_1}\sum_{i=1}^n l_i\, dq_i,$$

где метрика ds задается равенством:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, dq_i dq_j.$$

Доказательство. Форма L_2 не меняет значений при преобразованиях координат. Поэтому коэффициенты (a_{ij}) образуют тензор второго ранга. Он может служить метрическим, так как форма L_2 положительно определена.

Воспользуемся следствием 8.12.1. По определению метрики ds имеем

$$L_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Поэтому

$$J = \int_{P_0}^{P_1}\frac{ds}{dt}\, ds + \int_{P_0}^{P_1}\sum_{i=1}^n l_i\, dq_i.$$

Учтем обобщенный интеграл энергии Якоби:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2L_2} = \sqrt{2(L_0 + h)}. \square$$

Функционал следствия 8.12.2 позволяет искать экстремум в конфигурационном пространстве геометрическими методами, не привлекая информацию о скоростях системы.

Пример 8.12.3. Пусть на систему материальных точек наложены голономные связи, а силы обобщенно потенциальны (определение 8.3.1) с силовой функцией

$$U = \sum_{i=1}^n U_i\dot{q}_i + U_0,$$

причем ни силовая функция, ни связи от времени явно не зависят. Тогда функционал принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби имеет вид

$$J = \int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(U_0 + h)}\, ds + \int_{P_0}^{P_1}\sum_{i=1}^n U_i\, dq_i,$$

где метрика ds определена квадратичной формой кинетической энергии. В самом деле, здесь

$$L_1 = \sum_{i=1}^n U_i\dot{q}_i, \quad L_2 = T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad L_0 = U_0. \diamond$$

Следствие 8.12.3. (Принцип Якоби). *Пусть система с голономными связями находится под действием потенциальных (в обычном смысле) сил, а связи не зависят явно от времени. Тогда функционал принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби представляется в форме*

$$J = \int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(U + h)}\, ds,$$

где $U = U(q_1, \ldots, q_n)$ — силовая функция системы, h — постоянная энергии:

$$T - U = h,$$

а метрика ds определена квадратичной формой кинетической энергии:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, dq_i\, dq_j.$$

В принципе Якоби время t и дуга s связаны дифференциальным соотношением

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2(U + h)}}.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 8.12.2. В рассматриваемом случае имеем

$$L_0 = U, \quad L_1 \equiv 0, \quad L_2 = T.$$

Учитывая интеграл энергии и определение метрики ds, получим

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = U + h. \square$$

Следствие 8.12.4. *Принцип Якоби позволяет свести задачу об определении траектории движения изображающей точки к экстремальной задаче в пространстве конфигураций с римановой метрикой. В области $U + h > 0$ конфигурационного пространства зададим риманову метрику формулой*

$$d\rho = \sqrt{U + h}\, ds.$$

Тогда траектории системы с заданной константой энергии будут геодезическими линиями метрики $d\rho$.

Доказательство. Функционал принципа Якоби принимает вид

$$J = \sqrt{2}\int_{P_0}^{P_1} d\rho.$$

По этому принципу траектории реального движения суть геодезические линии метрики $d\rho$. $\square$

Отметим, что метрика $d\rho$ получается из ds растижением или сжатием, зависящим только от координат точки $\mathbf{q}$, но не зависящим от направления. Поэтому углы в метрике $d\rho$ совпадают с углами в метрике ds. Вблизи границы области $U + h \geq 0$ длина дуги уменьшается. На границе длина дуги любой кривой равна нулю.

Пример 8.12.4. Свободная материальная точка, вынужденная перемещаться только по связи, представляющей собой гладкое риманово многообразие, движется по геодезической линии. Действительно, для такой точки будем иметь

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \quad U = 0.$$

Запишем действие по Якоби

$$J = m\sqrt{2h}\int_{P_0}^{P_1} ds.$$

Так как h одинаково для всех сравниваемых траекторий, то экстремали суть геодезические рассматриваемого многообразия. ◇

Пример 8.12.5. Рассмотрим траектории движения материальной точки массы m в вертикальной плоскости под действием поля параллельных сил тяжести. Пусть орт $\mathbf{e}_2$ направлен вертикально вверх, а орт $\mathbf{e}_1$ — горизонтально в плоскости движения. Радиус-вектор материальной точки выразим формулой

$$\mathbf{r} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2.$$

Кинетическая энергия и силовая функция принимают вид

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad U = -mg\, q_2.$$

По-прежнему g — ускорение силы тяжести.

Согласно принципу Якоби (следствие 8.12.3) действительная траектория между точкой P_0 и точкой P_1 доставляет экстремум функционалу

$$J = \int_{P_0}^{P_1}\sqrt{2(h - mg\, q_2)}\, ds = \int_{P_0}^{P_1}\sqrt{AB}\, dq_1,$$

в котором $A = 2(h - mg\, q_2)$, $B = m[(dq_2/dq_1)^2 + 1]$. Согласно теореме 8.11.2 экстремаль этого функционала должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\sqrt{AB}}{\partial q_2} - \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial\sqrt{AB}}{\partial q_2'}\right) = 0,$$

где $q_2' = dq_2/dq_1$. Выполнив дифференцирование, найдем

$$\sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{d}{dq_1}\left(m\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{dq_2}{dq_1}\right) = 0.$$

Обратим внимание, что, согласно следствию 8.12.3,

$$\frac{dt}{dq_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Поэтому уравнение экстремали приводится к виду

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = -g,$$

совпадающему с общеизвестным уравнением изменения вертикальной координаты точки под действием силы тяжести. Из него получим

$$\frac{1}{2}\dot{q}_2^2 = -gq_2 + h_1.$$

Уравнение, определяющее горизонтальную координату, следует из выражения для производной dt/dq_1, если учесть, что это есть форма записи интеграла энергии:

$$\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = -gq_2 + \frac{h}{m}.$$

Отсюда и из предыдущего равенства вытекает, что

$$\dot{q}_1^2 = 2(h/m - h_1).$$

Таким образом, как и следовало ожидать, уравнения движения принимают вид

$$\ddot{q}_2 = -g, \quad \dot{q}_1 = v_r,$$

где v_r — начальная горизонтальная скорость. Траектория движения (геодезическая) есть парабола с вертикальной осью.◇

Контрольные вопросы к главе 8

8.1. Как выглядит разложение кинетической энергии системы по однородным формам от обобщенных скоростей?

8.2. Какими свойствами обладает матрица формы T_2 кинетической энергии для механической системы?

8.3. Привести пример механической системы, для которой матрица (a_{ij}) формы T_2 кинетической энергии вырождается для некоторых конфигураций.

8.4. Показать, что если связи склерономны, то обобщенный интеграл энергии Якоби переходит в интеграл энергии, соответствующий теореме 5.1.8.

8.5. Показать, что гироскопические силы не нарушают обобщенный интеграл энергии Якоби.

8.6. Показать, что движение электрона в электромагнитном поле допускает интеграл энергии (см. пример 8.3.1).

8.7. Как будет двигаться электрон в постоянном магнитном поле (см. пример 8.3.1)?

8.8. Показать, что из принципа детерминированности и второго закона Ньютона следует, что обобщенные силы не могут зависеть от обобщенных ускорений.

8.9. Выполнить доказательство существования обобщенного интеграла энергии Якоби в случае, когда Лагранжиан не зависит явно от времени.

8.10. Проверить справедливость теоремы Нетер для циклических координат уравнений Лагранжа 2-го рода.

8.11. Пусть система имеет циклические координаты, а соответствующая функция Рауса имеет стационарную точку в пространстве позиционных координат. Можно ли утверждать, что эта точка всегда отвечает положению равновесия системы?

8.12. Пусть $L = L_2 + L_0$ есть разложение функции Лагранжа по однородным относительно скоростей формам. Какое разложение по таким формам может иметь функция Рауса при наличии циклических координат.

8.13. Какой механический смысл имеют циклические интегралы в случае Лагранжа-Пуассона движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. § 6.8)?

8.14. Может ли знакопостоянная функция быть тождественно равной нулю во всей ее области определения?

8.15. Может ли знакоопределенная функция быть не равной нулю во всей ее области определения?

8.16. Может ли функция Ляпунова зависеть только от части обобщенных координат или скоростей?

8.17. Проанализировать устойчивость движения спящего волчка Лагранжа.

8.18. Будет ли устойчивым по Ляпунову движение твердого тела вокруг неподвижной точки

a) в случае Эйлера в окрестности наибольшей или наименьшей осей инерции;

b) при возникновении регулярной прецессии в случае Эйлера;

c) при возникновении регулярной прецессии в случае Лагранжа-Пуассона;

d) при возникновении псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа-Пуассона?

8.19. Сформулировать правило нахождения собственных векторов позиционной линейной системы.

8.20. Написать алгоритм получения закона движения позиционной линейной системы в лагранжевых координатах, если получен закон ее движения в главных координатах.

8.21. Показать, что если силовая функция позиционной линейной системы удовлетворяет условию теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, то все решения уравнения частот положительны.

8.22. Исследовать малые колебания системы, состоящей из n материальных точек массы m каждая, связанных последовательно друг с другом одинаковыми пружинками жесткости c и могущих двигаться по окружности радиуса R. В начальный момент времени пружинки ненатянуты. Действуют только упругие силы пружинок.

8.23. Пусть позиционная линейная система имела n собственных значений

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n.$$

Дополнительно на систему наложены две линейные по координатам однородные связи. Что можно сказать о собственных значениях вновь полученной системы?

8.24. Исследовать структуру решений линейной системы вблизи положения равновесия, когда на нее кроме потенциальных сил действуют диссипативные силы с отрицательно определенной по скоростям диссипативной функцией Рэлея.

8.25. Исследовать зависимость решения задачи о брахистохроне (см. пример 8.11.1) от начальных условий.

8.26. Выписать систему дифференциальных уравнений для сопряженных переменных в случае, когда управляемая система описывается линейными дифференциальными уравнениями.

8.27. Какие краевые условия будут следовать из условий трансверсальности в задаче оптимального управления, если

a) начальная и конечная точки траектории обязаны принадлежать поверхностям, заданным уравнениями

$$F_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = 0, \quad F_1(t_1, \mathbf{x}(t_1)) = 0;$$

b) начальная и конечная точки траектории обязаны принадлежать поверхностям, заданным уравнениями

$$F_0(\mathbf{x}(t_0)) = 0, \quad F_1(\mathbf{x}(t_1)) = 0;$$

c) не наложено никаких ограничений на начальную и конечную точки?

8.28. Как будет осуществляться управление в соответствии с синтезом примера 8.11.3, если фазовые координаты x, $\dot{x}$ определяются с некоторой ошибкой Δx, $\Delta\dot{x}$?

8.29. Указать область определения для функционала принципа Гамильтона.

8.30. Указать область определения для функционала принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби.

8.31. Сформулировать принцип Якоби.

8.32. Свободная материальная точка движется по сфере. Сфера — идеальная удерживающая связь. Указать возможные траектории движения точки.

Глава 9

Метод Га́мильтона-Яко́би

В дальнейшем будет изучаться движение голономных механических систем под действием потенциальных или обобщенно потенциальных сил. Для таких систем справедливы принцип Гамильтона и система уравнений Лагранжа второго рода. Каждое уравнение Лагранжа — это дифференциальное уравнение второго порядка, определенное на координатном пространстве. Для исследования геометрических свойств систем такого рода удобно вводить эквивалентные системы первого порядка, определенные на фазовом пространстве. Система дифференциальных уравнений первого порядка задает в фазовом пространстве векторное поле, по структуре которого можно, следуя Пуанкаре́, судить о свойствах интегральных кривых и о существовании первых интегралов.

Переход от системы уравнений второго порядка к системе уравнений первого порядка можно осуществлять разными способами, и в результате будут получаться, вообще говоря, различные эквивалентные системы. Среди них особенно простую и симметричную структуру имеет система канонических уравнений Гамильтона. Свойства этих уравнений лежат в основе метода Га́мильтона-Яко́би исследования движений механических систем, а также современной теории возмущений. Канонические уравнения получаются с помощью преобразования Лежа́ндра.

§ 9.1. Преобразование Лежа́ндра

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ переменного $\mathbf{x} \in R^n$: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяет условию невырожденности

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0.$$

Введем другие переменные

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 9.1.1. *Преобразованием Лежандра* функции $f(\mathbf{x})$ называется функция

$$g(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n p_i x_i - f(\mathbf{x}),$$

получающаяся после замены переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$, через переменные p_i, $i = 1, \ldots, n$, что возможно в силу условия невырожденности.

Теорема 9.1.1. *Преобразование Лежандра инволютивно: если при преобразовании Лежандра f переходит в g, то g при преобразовании Лежандра перейдет в f.*

Доказательство. Дифференциал функции $g(\mathbf{p})$ имеет вид

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i}\,dp_i = \sum_{i=1}^n x_i\,dp_i + \sum_{i=1}^n p_i\,dx_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i.$$

Согласно определению переменных p_i, $i = 1, \ldots, n$, коэффициенты при дифференциалах dx_i обращаются в нуль. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} - x_i\right) dp_i = 0$$

при любых дифференциалах dp_i. Отсюда

$$x_i = \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Значит, при указанном преобразовании функция $f(\mathbf{x})$ восстанавливается.□

Теорема 9.1.2. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — выпуклая функция переменной $\mathbf{x}$, такая, что квадратичная форма*

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,dx_i dx_j$$

положительно определена. Тогда при заданном $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ выполнено равенство

$$g(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{x}} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - f(\mathbf{x})\right).$$

Доказательство. Точки экстремума функции

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n p_i x_i - f(\mathbf{x})$$

при фиксированных параметрах p_i удовлетворяют уравнению

$$p_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Но таким же соотношением связаны переменные $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$ при преобразовании Лежандра. Кроме того, в силу выпуклости $f(\mathbf{x})$ этот экстремум есть максимум.□

Теорема 9.1.3. *Преобразование Лежандра выпуклую функцию $f(\mathbf{x})$ переводит в выпуклую функцию $g(\mathbf{p})$.*

Доказательство. Согласно теореме 9.1.1

$$\frac{\partial g}{\partial p_i} = x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Продифференцируем это равенство по p_j:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}.$$

Из равенства $p_j = \partial f/\partial x_j$ следует

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = 0, \quad k \neq j.$$

Поэтому матрицы

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_i}\right)$$

оказываются взаимно обратными, и из положительной определенности одной из них следует положительная определенность другой. Аналогично, если одна из матриц отрицательно определена, то и другая матрица также отрицательно определена.□

Следствие 9.1.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — выпуклая функция, причем матрица*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

положительно определена. Если $g(\mathbf{p})$ есть преобразование Лежандра функции $f(\mathbf{x})$, то

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \le g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{x}).$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 9.1.2. □

Следствие 9.1.2. *Если $f(\mathbf{x})$ — выпуклая функция, причем матрица*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

отрицательно определена, то после преобразования Лежандра эта функция переходит в

$$g(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - f(\mathbf{x})\right),$$

а значит, для таких функций

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \ge g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{x}).$$

Определение 9.1.2. Неравенство

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \le g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{x}),$$

справедливое для выпуклых вниз функций при любых значениях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$, и неравенство

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \ge g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{x}),$$

справедливое при любых значениях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ для функций, выпуклых вверх, называются *неравенствами Ю́нга.*

Пример 9.1.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad x > 0.$$

Эта функция выпукла вниз. Найдем ее преобразование Лежандра:

$$p = x^{\alpha-1}, \quad x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad g(p) = px - \frac{x^\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Обозначим

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} > 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Тогда неравенство Юнга принимает вид

$$px \le \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta},$$

и оно справедливо для всех $x > 0$, $p > 0$, $\alpha > 1$, $\beta > 1$, причем

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.◇$$

Пример 9.1.2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x > 0.$$

Эта функция выпукла вверх. Вычислим ее преобразование Лежандра:

$$p = \frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x = \sqrt{\frac{1-p}{p}}, \quad g(p) = p\sqrt{\frac{1-p}{p}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-p}{p}}.$$

С его помощью получаем неравенство Юнга:

$$xp \ge p\sqrt{\frac{1-p}{p}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-p}{p}} + \operatorname{arctg} x.$$

Введем переменную $y = \sqrt{(1-p)/p}$. Тогда

$$p = \frac{1}{1+y^2},$$

а неравенство Юнга примет вид

$$\frac{x-y}{1+y^2} \ge \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y,$$

где $x > 0$, $y > 0$.◇

Заметим, что оценки функций, получаемые с помощью неравенств Юнга, оказываются точными, т. е. существуют значения аргументов, при которых достигается точное равенство.

§ 9.2. Канонические уравнения Гамильтона

Пусть движение системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $q_1, \ldots, q_n$ — лагранжевы координаты системы.

Теорема 9.2.1. *Система уравнений Лагранжа второго рода эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + P_i, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, функция

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

есть преобразование Лежандра функции L по переменным $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, слагаемые

$$P_i(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) = Q_i(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

суть обобщенные силы, в записи которых обобщенные скорости выражены через переменные p_i, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Преобразование Лежандра функции

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

по переменным $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ есть функция

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t),$$

в которой скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ выражены через $p_1, \ldots, p_n$ с помощью системы уравнений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для механических систем это всегда можно сделать, так как по теореме 8.1.2 имеем

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0.$$

Полный дифференциал функции H

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

тождественно равен полному дифференциалу выражения

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$

при $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$:

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \, d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Коэффициенты при $d\dot{q}_i$ обращаются в нуль в соответствии с определением переменных p_i, $i = 1, \ldots, n$. Сравнивая полученные выражения для дифференциала dH, найдем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Примем теперь во внимание уравнения Лагранжа:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + P_i, \quad i = 1, \ldots, n. \square$$

Определение 9.2.1. Переменные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

называются *обобщенными импульсами системы*. Функция

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t),$$

где скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ выражены через переменные $p_1, \ldots, p_n$, называется *функцией Гамильтона*. Переменные

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

называются *каноническими переменными Гамильтона*. Пространство R^{2n} канонических переменных называется *фазовым пространством*.

Следствие 9.2.1. (Система уравнений Гамильтона). *Если $Q_i \equiv 0$, то $P_i \equiv 0$, и соответствующая система уравнений Лагранжа эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которая называется системой канонических уравнений Гамильтона.

Следствие 9.2.2. (Свойства функции Гамильтона).

1. Из доказательства теоремы 9.2.1 находим:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

При этом частная производная от H по q_i берется в множестве переменных $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, а частная производная от функции L по q_i берется в множестве переменных $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Это разные множества, и смысл частных производных для них различен.

2. Вычислим полную производную H по времени:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Пусть переменные p_i, q_i удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона. Тогда

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Другими словами, полная производная от H по времени в силу канонических уравнений Гамильтона совпадает с частной производной от H по времени.

3. Для произвольных систем материальных точек функция Гамильтона представляет собой обобщенную энергию:

$$H = L_2 - L_0,$$

а для склерономных систем под действием потенциальных (не обобщенно потенциальных) сил — полную энергию:

$$H = T + \Pi.$$

Действительно, для систем материальных точек функция L есть сумма форм:

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

где L_2 — однородная квадратичная форма, L_1 — однородная линейная форма скоростей, L_0 от скоростей не зависит. Далее

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L_2 - L_1 - L_0.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2L_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = L_1.$$

Поэтому $H = L_2 - L_0$. Когда система склерономна и силы потенциальны, то $L_2 = T$, $L_0 = U = -\Pi$.$\square$

Следствие 9.2.3. *Система канонических уравнений Гамильтона имеет первый интеграл вида $H = h$, где h — постоянная интегрирования, тогда и только тогда, когда функция Гамильтона H не зависит явно от времени: $\partial H/\partial t = 0$. Для систем материальных точек этот интеграл эквивалентен обобщенному интегралу энергии Якоби, для склерономных систем с потенциальными силами — интегралу полной механической энергии.*

Следствие 9.2.4. *Обобщенный импульс p_i, соответствующий циклической координате q_i, сохраняет в силу канонических уравнений Гамильтона во все время движения постоянное значение.*

Доказательство. По определению циклической координаты имеем $\partial L/\partial q_i = 0$, но

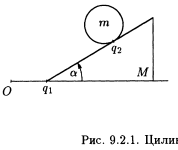
$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Значит, для циклической координаты $\partial H/\partial q_i = 0$, и

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \square$$

Когда в системе имеются циклические координаты, изменение позиционных координат описывается функцией Гамильтона, в которой циклические импульсы приняты за постоянные параметры.

Пример 9.2.1. Треугольная призма массы M может скользить по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 9.2.1). Однородный цилиндр радиуса r и массы m может катиться без проскальзывания под действием силы тяжести по боковой грани призмы, образующей угол α с горизонтом. Ось цилиндра в процессе движения горизонтальна. Составить канонические уравнения Гамильтона.



Призма скользит без трения по горизонтальной плоскости. Цилиндр скатывается так, что прямая его контакта с призмой остается все время параллельной плоскости. Из-за отсутствия внешних горизонтальных сил центр масс системы не смещается в горизонтальном направлении.

Рис. 9.2.1. Цилиндр, катящийся по призме

Решение. Пусть q_1 — горизонтальное смещение призмы слева направо, q_2 — смещение центра масс цилиндра относительно призмы

вдоль боковой грани снизу вверх от ее основания (рис. 9.2.1). Абсолютная скорость $\mathbf{v}$ центра масс цилиндра складывается из относительной его скорости вдоль поверхности призмы и переносной скорости горизонтального поступательного движения призмы. Следовательно,

$$v^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha.$$

Угловая скорость вращения цилиндра вокруг оси равна $\omega = \dot{q}_2/r$. По теореме Кёнига кинетическая энергия цилиндра есть

$$T_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{4}\omega^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \frac{3}{2}\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha\right).$$

Учитывая поступательный характер движения призмы, найдем выражение для кинетической энергии всей системы

$$T = \frac{M+m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{3}{2}\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha\right).$$

Потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = mg\,q_2\sin\alpha.$$

Найдем выражения для обобщенных импульсов:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = (M+m)\dot{q}_1 + m\dot{q}_2\cos\alpha,$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m\left(\frac{3}{2}\dot{q}_2 + \dot{q}_1\cos\alpha\right).$$

Отсюда

$$\dot{q}_1 = \frac{3p_1 - 2p_2\cos\alpha}{3(M+m) - 2m\cos^2\alpha},$$

$$\dot{q}_2 = \frac{2[(M+m)p_2 - mp_1\cos\alpha]}{m[3(M+m) - 2m\cos^2\alpha]}.$$

Чтобы найти функцию Гамильтона, достаточно учесть, что система склерономна. Поэтому $H = T + \Pi$, где обобщенные скорости следует заменить их выражениями через обобщенные импульсы (следствие 9.2.2, свойство 3). Учтем, что по теореме Эйлера

$$2T = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2.$$

Значит,

$$H = \frac{3mp_1^2 + 2(M+m)p_2^2 - 4mp_1p_2\cos\alpha}{2m[3(M+m) - 2m\cos^2\alpha]} + mgq_2\sin\alpha.$$

Видим, что координата q_1 циклическая. Это — проявление возможности поступательного перемещения всей системы по горизонтальному направлению. Импульс p_1 есть постоянный параметр, вычисляемый по начальным условиям. Система канонических уравнений Гамильтона принимает вид

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{2[(M+m)p_2 - mp_1\cos\alpha]}{m[3(M+m) - 2m\cos^2\alpha]},$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -mg\sin\alpha.$$

Эта система имеет интеграл энергии $H = h$. Окончание решения предоставим читателю.$\diamond$

Следствие 9.2.5. *В канонических переменных*

$$q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$$

функционал принципа Гамильтона (теорема 8.12.1) принимает вид

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,dq_i - H\,dt\right),$$

функционал принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби (теорема 8.12.3) выражается формулой

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i\,dq_i.$$

В такой записи наглядна связь этих принципов. При существовании интеграла энергии $H = h$ и фиксированном h на сравниваемых траекториях функция H не варьируется и потому выпадает из функционала J. Переменные p_i, $i = 1, \ldots, n$, на концах не закреплены.

§ 9.3. Скобка Пуассóна

Определение 9.3.1. Пусть даны две функции канонических переменных и времени

$$\varphi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \quad \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t).$$

Скобкой Пуассона $\{\varphi, \psi\}$ этих функций называется операция

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right).$$

Теорема 9.3.1. *Скобка Пуассона обладает следующими свойствами.*

1. Она есть билинейная кососимметричная операция:

а) $\{\varphi, \psi\} = -\{\psi, \varphi\}$,

б) $\{c\varphi, \psi\} = c\{\varphi, \psi\}$, $c \in R$,

в) $\{\varphi + \psi, \chi\} = \{\varphi, \chi\} + \{\psi, \chi\}$, $\chi = \chi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$.

2. Частное дифференцирование по времени выполняется над ней по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\varphi, \psi\} = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right\}.$$

3. Справедливо тождество Якоби

$$\{\{\varphi, \psi\}, \chi\} + \{\{\psi, \chi\}, \varphi\} + \{\{\chi, \varphi\}, \psi\} = 0.$$

Доказательство. Пункты 1 и 2 служат прямым следствием определения 9.3.1 и легко проверяются непосредственной подстановкой. Обратимся к доказательству тождества Якоби.

Скобку Пуассона $\{\varphi, \psi\}$ можно интерпретировать как результат применения линейного оператора

$$\mathbf{L}_\psi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

к функции φ, так что

$$\{\varphi, \psi\} = \mathbf{L}_\psi\varphi = -\mathbf{L}_\varphi\psi.$$

Следовательно,

$$\{\{\psi, \chi\}, \varphi\} = -\{\{\chi, \psi\}, \varphi\} = -\mathbf{L}_\varphi(\mathbf{L}_\psi\,\chi),$$
$$\{\{\chi, \varphi\}, \psi\} = \mathbf{L}_\psi(\mathbf{L}_\varphi\chi).$$

Откуда

$$\{\{\psi, \chi\}, \varphi\} + \{\{\chi, \varphi\}, \psi\} = (\mathbf{L}_\psi\mathbf{L}_\varphi - \mathbf{L}_\varphi\mathbf{L}_\psi)\chi = [\mathbf{L}_\psi, \mathbf{L}_\varphi]\chi,$$

где $[\mathbf{L}_\psi, \mathbf{L}_\varphi]$ — коммутатор линейных операторов $\mathbf{L}_\psi$ и $\mathbf{L}_\varphi$. Согласно теореме 4.5.2, такой коммутатор сам есть линейный оператор. Значит, сумма второго и третьего слагаемого в тождестве Якоби не содержит вторых частных производных от χ. Первое слагаемое левой части тождества таких производных также не содержит. Аналогичное рассуждение показывает, что в левой части тождества Якоби отсутствуют вторые частные производные от функций φ и ψ. Вместе с тем по определению скобки Пуассона каждое слагаемое содержит множителем частные производные второго порядка от какой-либо функции φ, ψ или χ. Полученное противоречие показывает, что все члены левой части тождества Якоби взаимно уничтожаются.$\square$

Следствие 9.3.1. *Пусть задана функция*

$$f = f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t).$$

Производная по времени от f в силу канонических уравнений Гамильтона дается выражением

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

где H — функция Гамильтона системы.

Доказательство.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right). \square$$

В случае автономной системы канонических уравнений Гамильтона ($\partial H/\partial t = 0$) их правые части задают в фазовом пространстве стационарное векторное поле: в каждой точке $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ фазового пространства приложен $2n$-мерный вектор

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right).$$

Указанное векторное поле называется *гамильтоновым*.

Следствие 9.3.2. *Скобка Пуассона $\{f, H\}$ есть производная от f по направлению гамильтонового поля. Оно определяет фазовый поток — однопараметрическую группу преобразований фазового пространства*

$$g^t : (\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) \to (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)),$$

где $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ — решение автономной системы уравнений Гамильтона.

Следствие 9.3.3. (Теорема Нётер). *Если функция Гамильтона*

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

выдерживает однопараметрическую группу преобразований, заданную каноническими уравнениями вида

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $F = F(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, то F есть первый интеграл системы с функцией Гамильтона H.

Доказательство. По условию теоремы

$$\frac{dH}{ds} = \{H, F\} = 0.$$

Отсюда $\{F, H\} = 0$.$\square$

Теорема 9.3.2. (Якоби-Пуассона). *Пусть функции*

$$f(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \quad g(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$$

суть первые интегралы канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t).$$

Тогда скобка Пуассона $\{f, g\}$ есть первый интеграл этих уравнений.

Доказательство. Выполним дифференцирование

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{\{f, g\}, H\}.$$

Но так как f и g — первые интегралы, то

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{H, f\}, g\} + \{\{f, g\}, H\} + \{\{g, H\}, f\} \equiv 0. \square$$

Следствие 9.3.4. *Пусть H не содержит явно t и $f = a$ есть первый интеграл системы канонических уравнений с функцией Гамильтона H. Тогда*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c_2, \ldots, \frac{\partial^m f}{\partial t^m} = c_m, \ldots$$

суть первые интегралы той же системы.

Доказательство. Когда H не зависит явно от времени, канонические уравнения допускают интеграл энергии

$$H = h.$$

По теореме 9.3.2 Якоби-Пуассона выражение

$$\{f, H\} = c$$

будет тогда тоже первым интегралом. Но

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0.$$

Значит, $\partial f/\partial t = c_1 = -c$. Аналогично получим, что $\partial^2 f/\partial t^2 = c_2$ также есть первый интеграл, и т.д.□

Теорема 9.3.2 и ее следствие 9.3.4 дают простое правило, позволяющее из двух известных первых интегралов получить при помощи алгебраических операций и дифференцирования третий интеграл, четвертый и т.д. Однако при этом не все получающиеся интегралы будут независимыми, так как независимых функций от $2n$ переменных может быть не более чем $2n$. Иногда может получиться функция от исходных первых интегралов, а иногда числовое тождество.

Пример 9.3.1. Пусть задана свободная от внешних воздействий система N точек с массами m_ν и радиусами-векторами

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu \mathbf{e}_1 + y_\nu \mathbf{e}_2 + z_\nu \mathbf{e}_3, \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Будем считать, что на эту систему не наложены связи, так что декартовы координаты x_ν, y_ν, z_ν, $\nu = 1, \ldots, N$ всех точек в абсолютном репере $Oe_1e_2e_3$ суть лагранжевы координаты системы. Силы взаимодействия точек потенциальны. Кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2).$$

Найдем обобщенные импульсы:

$$p_\nu^x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} = m_\nu \dot{x}_\nu, \quad p_\nu^y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_\nu} = m_\nu \dot{y}_\nu, \quad p_\nu^z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_\nu} = m_\nu \dot{z}_\nu.$$

Составим выражения для количеств движения и кинетических моментов:

$$p_x = \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu^x, \; p_y = \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu^y, \; p_z = \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu^z, \; K_x = \sum_{\nu=1}^{N} K_\nu^x = \sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu p_\nu^z - z_\nu p_\nu^y),$$

$$K_y = \sum_{\nu=1}^{N} K_\nu^y = \sum_{\nu=1}^{N} (z_\nu p_\nu^x - x_\nu p_\nu^z), \quad K_z = \sum_{\nu=1}^{N} K_\nu^z = \sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu p_\nu^y - y_\nu p_\nu^x).$$

Как известно (см. § 5.1), функции p_x, p_y, p_z, K_x, K_y, K_z служат первыми интегралами для такой системы.

Вычислим скобки Пуассона от функций, связанных с одной точкой:

$$\{p_\nu^x, p_\nu^y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_\nu^x}{\partial q_i} \frac{\partial p_\nu^y}{\partial p_i} - \frac{\partial p_\nu^x}{\partial p_i} \frac{\partial p_\nu^y}{\partial q_i} \right) = 0,$$

так как $\partial p_\nu^x/q_i = \partial p_\nu^y/\partial q_i = 0$. Аналогично

$$\{p_\nu^x, p_\nu^z\} = \{p_\nu^y, p_\nu^z\} = 0.$$

Далее

$$\{p_\nu^x, K_\nu^y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_\nu^x}{\partial q_i} \frac{\partial K_\nu^y}{\partial p_i} - \frac{\partial p_\nu^x}{\partial p_i} \frac{\partial K_\nu^y}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial p_\nu^x}{\partial p_\nu^z} \frac{\partial K_\nu^y}{\partial x_\nu} = p_\nu^z,$$

$$\{p_\nu^x, K_\nu^z\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_\nu^x}{\partial q_i} \frac{\partial K_\nu^z}{\partial p_i} - \frac{\partial p_\nu^x}{\partial p_i} \frac{\partial K_\nu^z}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial p_\nu^x}{\partial p_\nu^y} \frac{\partial K_\nu^z}{\partial x_\nu} = -p_\nu^y,$$

$$\{p_\nu^x, K_\nu^x\} = 0, \quad \{p_\nu^y, K_\nu^x\} = -p_\nu^z, \quad \{p_\nu^y, K_\nu^y\} = 0,$$

$$\{p_\nu^y, K_\nu^z\} = p_\nu^x, \quad \{p_\nu^z, K_\nu^x\} = p_\nu^y, \quad \{p_\nu^z, K_\nu^y\} = -p_\nu^x,$$

$$\{p_\nu^z, K_\nu^z\} = 0, \; \{K_\nu^x, K_\nu^y\} = K_\nu^z, \; \{K_\nu^x, K_\nu^z\} = -K_\nu^y, \; \{K_\nu^y, K_\nu^z\} = K_\nu^x.$$

Из-за независимости друг от друга координат и импульсов всех точек скобки Пуассона исследуемого набора первых интегралов будут суммами скобок Пуассона членов, соответствующих каждой отдельной точке. Скобки Пуассона, взятые от первых интегралов, дадут соотношения, аналогичные полученным для отдельных точек. Следовательно, с помощью скобок Пуассона, например, по трем первым интегралам

$$p_x, \quad K_y, \quad K_z$$

можно восстановить весь исследуемый набор, но других интегралов сверх этого набора получить не удается.◇

§ 9.4. Метод Гамильтона-Якоби

Обозначим для краткости

$$(\mathbf{q}_0, t_0) = (q_1(t_0), \ldots, q_n(t_0), t_0), \quad (\mathbf{q}, t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), t)$$

соответственно начальную и конечную точки движения системы в расширенном координатном пространстве R^{n+1}. Согласно определению 8.12.1, функция действия по Гамильтону есть интеграл

$$S(\mathbf{q}_0, t_0, \mathbf{q}, t) = \int_\gamma L\, dt,$$

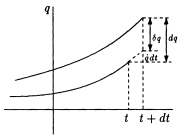
взятый вдоль экстремали γ, соединяющей точки $(\mathbf{q}_0, t_0)$, $(\mathbf{q}, t)$. Действие S будет однозначной функцией своих аргументов, если экстремали, выходящие из точки $(\mathbf{q}_0, t_0)$, не пересекаются друг с другом. В дальнейшем это условие считается выполненным.

Теорема 9.4.1. *Дифференциал функции действия выражается формулой*

$$dS = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H\, dt \right) \Bigg|_{t_0}^{t},$$

где подстановка вычисляется как разность между значениями функции, заключенной в скобки, взятыми в текущий t и начальный t_0 моменты времени, p_i — обобщенные импульсы, H — функция Гамильтона, dq_i, $i = 1, \ldots, n$, dt — независимые дифференциалы лагранжевых координат и времени.

Доказательство. Для того чтобы найти приращение интеграла действия, когда меняются не только краевые значения координат, но и моменты времени t_0 и t, разобьем дифференциалы $d\mathbf{q}_0$ и $d\mathbf{q}$ на два слагаемых следующим образом (рис. 9.4.1):



Полная вариация есть разность значений функций, соответствующих различным моментам времени, тогда как изохронная вариация означает изменение функции при фиксированном времени. Знание полной вариации позволяет найти значение изохронной даже тогда, когда моменты времени для сравниваемых точек конфигурационного пространства не совпадают.

Рис. 9.4.1. Полная и изохронная вариации

$$d\mathbf{q} = \delta\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}\, dt, \quad d\mathbf{q}_0 = \delta\mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{q}}_0\, dt_0.$$

Величины $\delta\mathbf{q}$ и $\delta\mathbf{q}_0$ характеризуют разницу между соседними экстремалями, имеющую место для одного и того же момента времени. По правилам дифференцирования интегралов найдем

$$dS = d\int_{t_0}^{t_1} L\, dt = L\, dt \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = \left(L\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i\, dt.$$

Но последний интеграл равен нулю, так как S вычисляется вдоль экстремали γ. Поэтому

$$dS = \left(L\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Учитывая, что

$$\delta q_i = dq_i - \dot{q}_i\, dt, \quad \delta q_i(t_0) = dq_i(t_0) - \dot{q}_i(t_0)\, dt_0, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

получим

$$dS = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i + \left(L - \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \right) dt \right] \Bigg|_{t_0}^{t_1}.□$$

Следствие 9.4.1. *Справедливы соотношения*

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Подставив вместо импульсов в выражение для H соответствующие частные производные $\partial S/\partial q_i$, получим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) = 0,$$

которому обязана удовлетворять функция действия по Гамильтону и которое называется уравнением Гамильтона-Якоби.

Пример 9.4.1. Составим функцию действия по Гамильтону для движения по инерции свободной материальной точки. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки и $t_0 = 0$. Тогда закон движения принимает вид

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t.$$

Согласно принципу Гамильтона, этот закон есть экстремаль функционала действия. Поэтому функция действия по Гамильтону вычисляется следующим образом:

$$S(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) = \frac{m}{2}\int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dt = \frac{mt}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) =$$

$$= \frac{m}{2t}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right].$$

Поверхности уровня этой функции суть концентрические сферы с центром в исходной точке. Воспользуемся следствием 9.4.1:

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = m\frac{x - x_0}{t}, \quad p_{x_0} = \frac{\partial S}{\partial x_0} = -m\frac{x - x_0}{t},$$

$$p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = m\frac{y - y_0}{t}, \quad p_{y_0} = \frac{\partial S}{\partial y_0} = -m\frac{y - y_0}{t},$$

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = m\frac{z - z_0}{t}, \quad p_{z_0} = \frac{\partial S}{\partial z_0} = -m\frac{z - z_0}{t}.$$

Найдем также уравнение Гамильтона-Якоби. Имеем

$$H = T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Следовательно, функция S удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.◇$$

Знание функции S действия по Гамильтону дает возможность найти закон движения системы. Функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Тем самым имеется возможность с помощью методов теории уравнений в частных производных исследовать свойства движения динамических систем.

Определение 9.4.1. Непрерывно дифференцируемое решение

$$S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

уравнения в частных производных Гамильтона-Якоби, содержащее n произвольных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, называется *полным интегралом* этого уравнения, если выполнено условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 9.4.2. (Якоби). *Пусть $S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Тогда соотношения*

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

суть независимые первые интегралы соответствующей системы канонических уравнений Гамильтона.

Доказательство. Поскольку S есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, то для него

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0,$$

где принято обозначение

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i.$$

Считая β_i, $i = 1, \ldots, n$, постоянными, найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \dot{q}_j = 0.$$

Так как S непрерывно дифференцируема, то можно изменить порядок дифференцирования и вычесть из второго равенства первое:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i}\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В связи с тем, что

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

получим

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

для $q_j(t)$, удовлетворяющих группе уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Найдем полную производную по времени от p_i, $i = 1, \ldots, n$. В соответствии с обозначением имеем

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Учтем, что S есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0.$$

Меняя порядок дифференцирования и вычитая из $\dot{p}_i$ левую часть последнего равенства, получим

$$\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что равенства

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

сохраняются в силу канонических уравнений Гамильтона. Значит, они представляют собой первые интегралы этих уравнений. Независимость интегралов следует из определения 9.4.1.□

Теорема Якоби обосновывает следующее правило построения закона движения $q_i(t)$, $p_i(t)$ по известному полному интегралу уравнения Гамильтона-Якоби $S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Сначала разрешается система n уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

относительно переменных $q_1, \ldots, q_n$ и находятся функции

$$q_i = q_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

зависящие от $2n$ произвольных постоянных. Затем эти функции подставляются в выражения

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

что дает зависимости

$$p_i = p_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это правило всегда можно применить в силу определения 9.4.1.

Пример 9.4.2. Кинетическая энергия и силовая функция гармонического осциллятора имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2, \quad U = -\frac{1}{2}\omega^2 q^2.$$

Найдем функцию Гамильтона:

$$H = T - U = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}, \quad p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dot{q}.$$

Составим уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде суммы

$$S = -ht + S_1(q),$$

где h — произвольная постоянная. Подставим эту сумму в уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{dS_1}{dq} = -\sqrt{2h - \omega^2 q^2}.$$

Возможность знака "+" перед радикалом здесь можно не учитывать, так как согласно теореме 9.4.2 достаточно найти любую функцию S_1, зависящую от одной произвольной постоянной, например h, и удовлетворяющую уравнению Гамильтона-Якоби.

Чтобы получить первый интеграл

$$\frac{\partial S}{\partial h} = \beta,$$

нет необходимости искать функцию $S_1(q, h)$, хотя в данном случае найти ее нетрудно:

$$S_1 = \frac{h}{\omega}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2h}}\omega q.$$

Достаточно определить производную $\partial S_1/\partial h$ из уравнения

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial S_1}{\partial h} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2h - \omega^2 q^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial S_1}{\partial h} = \frac{1}{\omega}\arccos\frac{\omega q}{\sqrt{2h}},$$

Следовательно, первый интеграл $\beta = \partial S/\partial h$ выражается равенством

$$\frac{1}{\omega}\arccos\frac{\omega q}{\sqrt{2h}} - t = \beta$$

или

$$q = \frac{\sqrt{2h}}{\omega}\cos(\omega t + \beta),$$

как это и следовало ожидать (см. § 3.9).◇

Рассмотренный пример показывает, что задача о поиске полного интеграла решается неоднозначно. Полный интеграл не дает общего решения уравнения Гамильтона-Якоби, охватывая лишь небольшую часть решений. Тем не менее по полному интегралу можно восстановить исходное уравнение. Действительно, дифференцируя полный интеграл, получим

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = f_i(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = f_0(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из первой группы соотношений можно выразить каждое α_i через частные производные $\partial S/\partial q_i$, t, q_i, $i = 1, \ldots, n$. Подставив найденные выражения для α_i, $i = 1, \ldots, n$, во второе равенство, получим исходное уравнение в частных производных.

Установленная связь между траекториями механической системы и уравнением в частных производных позволяет не только находить траекторию по решению уравнения Гамильтона-Якоби, но и, наоборот, свести интегрирование уравнения в частных производных указанного типа к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона.

В самом деле, поставим для уравнения Гамильтона-Якоби задачу Коши

$$S(\mathbf{q}, t_0) = S_0(\mathbf{q}), \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t \right) = 0.$$

Чтобы найти решение этой задачи, следует составить характеристические уравнения, которые в данном случае образуют систему канонических уравнений

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

с начальными условиями

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \quad p_i(t_0) = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отвечающее этим начальным условиям решение системы есть характеристика задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби. Выберем значение t_1 настолько близким к t_0, чтобы характеристики, выходящие из близких друг к другу точек $\mathbf{q}_0$, не пересекались при $t_0 \leq t \leq t_1$. Значения $\mathbf{q}(t_1)$, t_1 можно принять за координаты точки B, так что

$$S(B) = S_0(\mathbf{q}_0) + \int_{\mathbf{q}_0, t_0}^{\mathbf{q}, t} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\, dt,$$

где интегрирование выполняется вдоль характеристики, ведущей в точку B. Построенная функция $S(B)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Она называется *главной функцией действия по Гамильтону.*

Вернемся к задаче определения закона движения механической системы с помощью полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби. Для симметрии обозначим

$$x_0 = t, \quad x_i = q_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби примет вид

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}, x_0, x_1, \ldots, x_n\right) = \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) = 0.$$

Теорема 9.4.3. (Имшенéцкий). *Пусть какая-либо координата x_k и соответствующая ей производная $\partial S/\partial x_k$ входят в левую часть уравнения $F = 0$ только посредством некоторой функции*

$$\varphi = \varphi\left(x_k, \frac{\partial S}{\partial x_k}\right),$$

не содержащей других переменных и производных:

$$F = F\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial S}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}, x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \varphi\right).$$

Тогда функция

$$S = S' + S_k(x_k, \alpha_k),$$

где α_k — произвольная постоянная, S' не зависит от x_k, есть полный интеграл уравнения $F = 0$ в том и только том случае, если функция S_k удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi\left(x_k, \frac{dS_k}{dx_k}\right) = \alpha_k,$$

а функция S' есть полный интеграл уравнения

$$F\left(\frac{\partial S'}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial S'}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial x_n}, x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \alpha_k\right) = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$S = S' + S_k(x_k, \alpha_k),$$

где S' не зависит от x_k, есть полный интеграл уравнения $F = 0$. Подставив S в это уравнение, получим

$$F\left(\frac{\partial S'}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial S'}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial x_n}, x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \varphi\left(x_k, \frac{\partial S_k}{\partial x_k}\right)\right) = 0.$$

Так как S — решение, то последнее равенство есть тождество, справедливое при любом значении координаты x_k. Но при изменении x_k может изменяться только функция φ. В этих условиях тождество возможно, лишь когда φ при изменении x_k сохраняет постоянное значение. Поэтому выполнены два равенства:

$$\varphi\left(x_k, \frac{dS_k}{dx_k}\right) = \alpha_k,$$

$$F\left(\frac{\partial S'}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial S'}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial x_n}, x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \alpha_k\right) = 0.$$

Далее по условию

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right| = \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_k \partial \alpha_k} \left|\frac{\partial^2 S'}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right|_{i,j \neq k} \neq 0.$$

Поэтому ни один из сомножителей не обращается в нуль, и S' есть полный интеграл последнего уравнения.

Достаточность. Пусть S_k и S' удовлетворяют условию теоремы. Очевидно, что тогда $S = S' + S_k$ есть решение исходного уравнения. Продифференцируем по α_k уравнение для S_k, обозначив для краткости $p_k = \partial S_k/\partial x_k$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S_k}{\partial x_k \partial \alpha_k} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x_k \partial \alpha_k} \neq 0.$$

Учтем, что S' — полный интеграл соответствующего уравнения в частных производных:

$$\left|\frac{\partial^2 S'}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right|_{i,j \neq k} \neq 0.$$

Значит,

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \alpha_j}\right| \neq 0,$$

и S есть полный интеграл исходного уравнения.□

Метод получения полного интеграла уравнений в частных производных первого порядка, состоящий в последовательном применении теоремы 9.4.3, называется *методом Имшенецкого разделения переменных.* Рассмотрим несколько примеров на применение этого метода.

Пример 9.4.3. Пусть функция Гамильтона не зависит явно от времени. Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = 0.$$

Заключаем, что $\varphi = \partial S/\partial t$. По теореме 9.4.3 полный интеграл этого уравнения можно искать как сумму

$$S = -ht + S'(q_1, \ldots, q_n),$$

где h — постоянная интегрирования, а функция S' есть полный интеграл уравнения в частных производных

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = h.$$

При этом для каждого фиксированного значения h функция S' должна зависеть от $n-1$ произвольных постоянных.◇

Пример 9.4.4. Одна из координат, например q_1, оказалась циклической: $\partial H/\partial q_1 = 0$. Имеем $\varphi = \partial S/\partial q_1$, и полный интеграл следует искать в виде

$$S = \alpha_1 q_1 + S'(t, q_2, \ldots, q_n),$$

где α_1 — постоянная, а S' есть полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + H\left(\alpha_1, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_2, \ldots, q_n\right) = 0.◇$$

Пример 9.4.5. Пусть

$$H = \varphi_n(\varphi_{n-1}(\ldots\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2), q_3, p_3), \ldots), q_n, p_n).$$

Функция H не зависит явно от времени. Поэтому

$$S = -ht + S',$$

причем S' удовлетворяет уравнению

$$\varphi_n\left(\varphi_{n-1}\left(\ldots\varphi_3\left(\varphi_2\left(\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial S'}{\partial q_1}\right), q_2, \frac{\partial S'}{\partial q_2}\right), q_3, \frac{\partial S'}{\partial q_3}\right), \ldots\right), q_n, \frac{\partial S'}{\partial q_n}\right) = h.$$

Введем произвольные постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\alpha_n = h$ и положим последовательно

$$\varphi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1,$$

$$\varphi_2\left(\alpha_1, q_2, \frac{dS_2}{dq_2}\right) = \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n\left(\alpha_{n-1}, q_n, \frac{dS_n}{dq_n}\right) = \alpha_n.$$

Разрешив эти уравнения относительно производных, получим

$$\frac{dS_i}{dq_i} = \Phi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, S_i находятся квадратурами:

$$S_i = \int \Phi_i \, dq_i.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби представляется в виде суммы

$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

что дает решение задачи.◇

Пример 9.4.6. Рассмотрим кеплерово движение, при котором материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра. Функция Гамильтона в сферических координатах (пример 3.6.6) имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\psi^2}{\rho^2 \cos^2\vartheta}\right) - \frac{\gamma m}{\rho}.$$

Положим

$$\varphi_1 = p_\psi, \quad \varphi_2 = p_\theta^2 + \frac{\varphi_1^2}{\cos^2\vartheta}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{\varphi_2}{\rho^2}\right) - \frac{\gamma m}{\rho}.$$

Ясно, что реализуется случай, рассмотренный в примере 9.4.5. ◇

Пример 9.4.7. Предположим, что

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + \ldots + f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1) + \ldots + g_n(q_n, p_n)}.$$

Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби следует искать в виде

$$S = -ht + S',$$

причем S' удовлетворяет уравнению

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right) = h.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(q_i, \frac{\partial S'}{\partial q_i}\right) - h\, g_i\left(q_i, \frac{\partial S'}{\partial q_i}\right)\right] = 0.$$

Следуя методу Имшенецкого, положим

$$f_i\left(q_i, \frac{dS_i}{dq_i}\right) - h\, g_i\left(q_i, \frac{dS_i}{dq_i}\right) = \alpha_i,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — постоянные, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Вместе с h имеем ровно n независимых произвольных постоянных. Разрешив полученные уравнения относительно производных dS_i/dq_i, найдем

$$\frac{dS_i}{dq_i} = F_i(q_i, \alpha_i, h).$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби примет вид

$$S = -ht + \sum_{i=1}^{n} \int F_i(q_i, \alpha_i, h)\, dq_i,$$

а задача об определении закона движения решается квадратурами.◇

Пример 9.4.8. (Случай Лиувúлля). Пусть кинетическая и потенциальная энергии системы могут быть представлены в форме

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} B_j \dot{q}_j^2, \quad \Pi = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{-1},$$

где A_i, B_i, Π_i — функции только от одной, им соответствующей переменной q_i. Тогда закон движения такой системы может быть найден с помощью квадратур.

Действительно, для системы Лиувилля функция Гамильтона H выражается равенством

$$H = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{B_i} + 2\Pi_i\right)\left(2\sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{-1},$$

которое имеет вид такой же, как в примере 9.4.7.◇

Рассмотренные примеры убеждают, что случаи, когда эффективно работает метод разделения переменных, встречаются достаточно часто. Полезно иметь критерий, устанавливающий факт разделимости переменных на основе анализа структуры уравнения Гамильтона-Якоби. Для систем, кинетическая энергия которых зависит только от квадратов обобщенных скоростей, такой критерий доставляет теорема Штеккеля.

Теорема 9.4.4. (Штéккель). *Пусть кинетическая энергия системы есть*

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i p_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{c_i}, \quad c_i = c_i(q_1, \ldots, q_n).$$

Такая система допускает разделение переменных тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица

$$\Phi = (\varphi_{ij}(q_i)), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

и вектор-столбец $(f_i(q_i))$, $i = 1, \ldots, n$, элементы которых φ_{ij} и f_i зависят только от соответствующей координаты q_i, причем

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{ij} = \delta_{1j} = \begin{cases} 1, & j = 1; \\ 0, & j \neq 1, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = U,$$

где U — силовая функция системы.

Доказательство. Необходимость. В рассматриваемом случае функция Гамильтона не зависит явно от времени. Значит,

$$S = -ht + S',$$

причем S' удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial S'}{\partial q_i}\right)^2 - U = h = \alpha_1.$$

Предположим, что переменные разделяются, то есть существует полный интеграл последнего уравнения, имеющий вид

$$S' = \sum_{j=1}^{n} S_j,$$

где $S_j = S_j(q_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Подставим выражение полного интеграла в уравнение для функции S'. Оно должно удовлетворяться тождественно для всех значений $q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Дифференцируя частным образом по каждому α_j, получим

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial S_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 S_i}{\partial \alpha_1 \partial q_i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial S_i}{\partial q_i}\frac{\partial^2 S_i}{\partial \alpha_j \partial q_i} = 0, \quad j \neq 1.$$

Коэффициент при c_i в этих равенствах зависит только от q_i. Составим определитель из коэффициентов:

$$\Delta = \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\frac{\partial S_2}{\partial q_2}\ldots\frac{\partial S_n}{\partial q_n}\left|\frac{\partial^2 S_i}{\partial \alpha_j \partial q_i}\right|.$$

Он отличен от нуля, так как S' — полный интеграл. Следовательно, полученные соотношения принимают форму, указанную в условии теоремы. Далее

$$U = -\alpha_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial S'}{\partial q_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i \left[-\alpha_1 \varphi_{i1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}\right)^2\right],$$

то есть

$$U = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Учитывая условие теоремы, уравнение для функции S' можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial S'}{\partial q_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{ij},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные. Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S'}{\partial q_i}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{ij} - f_i\right] = 0.$$

Теперь очевидно, что сумма

$$S' = \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

где функции S_i определяются из уравнений

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS_i}{dq_i}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{ij} - f_i = 0,$$

представляет собой искомый полный интеграл, поскольку матрица

$$\Phi = (\varphi_{ij}(q_i)), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

невырожденна.□

Пример 9.4.9. В случае системы Лиувилля (см. пример 9.4.8) имеем

$$c_i = \left(B_i \sum_{j=1}^{n} A_j\right)^{-1}.$$

Тогда в качестве матрицы Φ условия теоремы 9.4.4 можно взять следующую

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_1B_1 & -B_1 & -B_1 & \ldots & -B_1 \\ A_2B_2 & B_2 & 0 & \ldots & 0 \\ A_3B_3 & 0 & B_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_nB_n & 0 & 0 & \ldots & B_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырожденна:

$$\det \Phi = \prod_{j=1}^{n} B_j \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Чтобы разделение переменных было возможно, функция U должна иметь вид

$$U = \sum_{j=1}^{n} f_j \left(B_j \sum_{i=1}^{n} A_i\right)^{-1},$$

который совпадает с указанным в примере 9.4.8. Тем самым случай Лиувилля есть следствие теоремы Штеккеля.◇

В заключение параграфа отметим, что все рассматривавшиеся ранее возможности интегрирования уравнений движения, основанные на использовании циклических координат, охватываются методом разделения переменных. К ним добавляются еще случаи, когда разделение переменных возможно, хотя координаты и не оказываются циклическими. Тем самым метод Гамильтона-Якоби представляет собой наиболее эффективный метод аналитического интегрирования уравнений движения.

Особую роль в этом методе играет выбор лагранжевых координат. Одна и та же задача для некоторого набора лагранжевых координат может допускать разделение переменных, а для другого набора — не допускать. Проиллюстрируем сказанное на задаче определения закона движения одной материальной точки.

Пример 9.4.10. Пусть положение материальной точки определяется в пространстве декартовыми координатами:

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3$$

в абсолютном ортонормированном репере. Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

где p_1, p_2, p_3 — обобщенные импульсы. В обозначениях теоремы Штеккеля имеем

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2m}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 2m & -2m & -2m \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в декартовых координатах переменные разделяются тогда и только тогда, когда силовая функция представляется суммой

$$U = f_1(r_1) + f_2(r_2) + f_3(r_3).$$

Поэтому декартовы координаты неудобны, например, для изучения движения в поле центральных сил (см. пример 3.4.2).◇

Пример 9.4.11. Положение материальной точки зададим сферическими координатами (пример 3.6.2)

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3,$$

причем

$$r_1 = r\cos\vartheta\cos\psi, \quad r_2 = r\cos\vartheta\sin\psi, \quad r_3 = r\sin\vartheta.$$

Кинетическая энергия имеет вид (пример 3.6.6)

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2\cos^2\vartheta}\right),$$

где p_ψ, p_ϑ, p_r — обобщенные импульсы, соответствующие координатам $q_1 = \psi$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = r$. Применим теорему Штеккеля:

$$c_1 = \frac{1}{2mr^2\cos^2\vartheta}, \; c_2 = \frac{1}{2mr^2}, \; c_3 = \frac{1}{2m}, \; \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cos^{-2}\vartheta & -1 \\ 2m & 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Видим, что коэффициенты c_1, c_2, c_3 этой теореме удовлетворяют, и сферические координаты разделяются тогда и только тогда, когда

$$U = \frac{f_1(\psi)}{r^2\cos^2\vartheta} + \frac{f_2(\vartheta)}{r^2} + f_3(r).$$

В случае поля центральных сил будем иметь $f_1 = f_2 = 0$.◇

Пример 9.4.12. Для описания движения материальной точки возьмем цилиндрические координаты (пример 3.6.1)

$$r_1 = \rho\cos\varphi, \quad r_2 = \rho\sin\varphi, \quad r_3 = z.$$

Выпишем кинетическую энергию в этом случае (пример 3.6.5):

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right),$$

где p_ρ, p_φ, p_z — обобщенные импульсы для координат ρ, ϑ, z соответственно. Обозначим $q_1 = z$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \rho$. Тогда

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{2m}, \quad c_2 = \frac{1}{2m\rho^2}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \rho^{-2} \end{pmatrix}.$$

Тем самым c_1, c_2, c_3 удовлетворяют теореме Штеккеля. Поэтому цилиндрические координаты разделяются тогда и только тогда, когда силовая функция имеет вид

$$U = f_1(z) + \frac{f_2(\varphi)}{\rho^2} + f_3(\rho).$$◇

Аналогично можно исследовать задачу о разделимости переменных и для других типов лагранжевых координат.

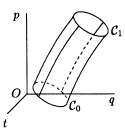
§ 9.5. Интегральные инварианты

Рассмотрим расширенное фазовое $(2n+1)$-мерное пространство R^{2n+1}, в котором координатами точки будут величины

$$q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t.$$

В этом пространстве выделим произвольную замкнутую кривую $\mathcal{C}_0$, заданную в параметрической форме:

$$q_i = q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha), \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le \alpha \le l.$$



Трубка интегральных кривых образована решениями системы уравнений Гамильтона, проходящими через заданный произвольный замкнутый контур $\mathcal{C}_0$ начальных состояний системы в расширенном фазовом пространстве. Это — двухпараметрическая поверхность. Один из ее параметров — время, а другой определяет начальную точку на контуре $\mathcal{C}_0$.

Рис. 9.5.1. Трубка интегральных кривых

Будем считать, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ мы имеем одну и ту же точку кривой $\mathcal{C}_0$. Из каждой точки кривой $\mathcal{C}_0$, как из начальной, выпустим интегральную кривую уравнений Гамильтона. Получим замкнутую трубку интегральных кривых (рис. 9.5.1), образующие которой задаются функциями

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha), \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le \alpha \le l,$$

где

$$q_i(t, 0) = q_i(t, l), \quad p_i(t, 0) = p_i(t, l).$$

На этой трубке произвольно выберем другую замкнутую кривую $\mathcal{C}_1$, охватывающую трубку. Уравнения кривой $\mathcal{C}_1$ запишем в виде

$$q_i = q_i^1(\alpha), \quad p_i = p_i^1(\alpha), \quad t = t_1(\alpha), \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le \alpha \le l,$$

сопоставив каждому значению параметра только одну точку кривой.

Теорема 9.5.1. *Криволинейный интеграл*

$$I = \oint\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - H\,dt\right),$$

взятый вдоль любого замкнутого контура $\mathcal{C}$ в пространстве R^{2n+1}, не меняет своего значения при произвольном смещении (возможно, с деформацией) этого контура вдоль трубки интегральных кривых, проходящих через контур $\mathcal{C}$.

Доказательство. Согласно теореме 9.4.1, дифференциал функции действия по Гамильтону выражается формулой

$$dS = \left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - H\,dt\right)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

При смещении точки вдоль контура $\mathcal{C}_0$ смещается и соответствующая тому же значению параметра α точка контура $\mathcal{C}_1$. Следовательно, $dS = S'(\alpha)\,d\alpha$. Проинтегрируем dS в пределах $0 \le \alpha \le l$:

$$0 = S(l) - S(0) = \int_0^l\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - H\,dt\right)\Big|_{t_0}^{t_1} = \int_0^l\left(\sum_{i=1}^n p_i^1\,dq_i^1 - H^1\,dt_1\right) -$$

$$-\int_0^l\left(\sum_{i=1}^n p_i^0\,dq_i^0 - H^0\,dt_0\right) = \oint_{\mathcal{C}_1}\left(\sum_{i=1}^n p_i^1\,dq_i^1 - H^1\,dt_1\right) - \oint_{\mathcal{C}_0}\left(\sum_{i=1}^n p_i^0\,dq_i^0 - H^0\,dt_0\right).$$□

Следствие 9.5.1. *Рассмотрим замкнутые контуры в R^{2n+1}, составленные из одновременных состояний, т.е. принадлежащие плоскостям $t = const$. Вдоль такого контура $dt = 0$. Поэтому*

$$I_n = \oint\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - H\,dt\right) = \oint\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i\right).$$

Интеграл I_n не меняет своего значения, если контур D_0, образованный состояниями системы в один и тот же момент времени t_0, смещается вдоль трубки интегральных кривых, переходя в контур D_1 других одновременных состояний.

Определение 9.5.1. Интеграл

$$I = \oint\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - H\,dt\right),$$

взятый вдоль замкнутого контура в пространстве R^{2n+1}, называется *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картáна*.

Интеграл

$$I_n = \oint\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i\right),$$

взятый вдоль замкнутого контура в пространстве R^{2n} одновременных состояний, называется *универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре*.

Слово "универсальный" подчеркивает, что интеграл I_n будет инвариантом для любой системы уравнений Гамильтона, так как в подынтегральное выражение не входит функция Гамильтона H.

Интеграл I_n удобно относить к фазовому пространству R^{2n} переменных

$$q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots, q_n, p_n.$$

Пусть в этом пространстве контуры одновременных состояний D_0, D_1 охватывают одну и ту же трубку фазовых траекторий гамильтоновой системы. Тогда для них

$$\oint_{D_0}\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i\right) = \oint_{D_1}\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i\right).$$

Один из контуров, например D_0, можно выбрать совершенно произвольно. Можно считать, что точки контура D_0 характеризуют различные состояния системы в один и тот же момент времени t_0. Отвечающие им состояния системы в момент времени t_1 образуют контур D_1.

Пример 9.5.1. Рассмотрим гармонический осциллятор с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}.$$

Напишем для него уравнения Гамильтона:

$$\dot q = p, \quad \dot p = -\omega^2 q.$$

Эти уравнения легко интегрируются, и решение имеет вид

$$q(t) = q_0\cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t,$$

$$\frac{p(t)}{\omega} = -q_0\sin\omega t + \frac{p_0}{\omega}\cos\omega t,$$

где q_0, p_0 — начальные (при $t = 0$) значения фазовых координат. Через фиксированное время t имеем преобразование координат в силу уравнений движения. Если при $t = 0$ из начальных точек (q_0, p_0) фазовой плоскости составить произвольный замкнутый контур, то к моменту времени t он перейдет в другой замкнутый контур, составленный из соответствующих точек $(q(t), p(t))$. Зафиксируем время t и возьмем интеграл Пуанкаре по замкнутому контуру, образованному фазовыми точками осциллятора в этот момент:

$$I_n = \oint p(t)\,dq(t) = \omega\oint\frac{p(t)}{\omega}\,dq(t) =$$

$$= \omega\int\left(-q_0\sin\omega t + \frac{p_0}{\omega}\cos\omega t\right)\left(dq_0\cos\omega t + \frac{dp_0}{\omega}\sin\omega t\right) =$$

$$= \omega\left[\frac{1}{2}\oint d\left(\frac{p_0^2}{\omega} - q_0^2\right)\sin\omega t\cos\omega t - \oint d\left(\frac{p_0 q_0}{\omega}\right)\sin^2\omega t + \oint\frac{p_0}{\omega}\,dq_0\right].$$

Учтем, что все интегралы, взятые от полных дифференциалов вдоль замкнутого контура, равны нулю. Тогда

$$I_n = \oint p(t)\,dq(t) = \oint p_0\,dq_0 = I_n(0).$$◇

Теорема 9.5.2. *Пусть движение системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона. Тогда алгебраическая сумма площадей S_i, ограниченных проекциями на координатные плоскости (q_i, p_i) контура D одновременных состояний:*

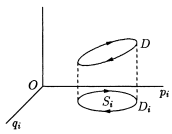
$$I_n = \sum_{i=1}^n S_i,$$

сохраняется при преобразованиях D в силу уравнений движения.

Доказательство. Произвольный контур D, заданный в фазовом пространстве, спроектируем на плоскость (q_i, p_i). Получим контур D_i. Тогда по формуле Грина

$$\oint_D p_i\,dq_i = \oint_{D_i} p_i\,dq_i = S_i,$$

где S_i — площадь области (со знаком), ограниченной контуром D_i в плоскости (q_i, p_i). Направление обхода контура D индуцирует направление обхода на проекции D_i (рис. 9.5.2). Площадь S_i берется со знаком "+", если контур D_i обходится по часовой стрелке (в направлении кратчайшего поворота оси p_i к оси q_i), и со знаком "−" в противоположном случае.□



Произвольный контур D в фазовом пространстве проектируется на двумерную координатную плоскость, соответствующую координате q_i и импульсу p_i. При интегрировании направление обхода проекции D_i этого контура определено направлением обхода контура D. Площадь S_i считается положительной, если проекция D_i обходится по часовой стрелке.

Рис. 9.5.2. Проекция контура на фазовую плоскость

Интегралы I и I_n называются *относительными интегральными инвариантами первого порядка*. Значения этих интегралов зависят

от выбора замкнутого контура, а дифференциалы, стоящие под знаком интеграла, входят линейно. Теорема 9.5.2 показывает, что интегрирование по контуру можно заменить интегрированием по поверхности, ограниченной контуром. Сохранение элемента любой поверхности будет иметь место при ее деформации в силу канонических уравнений Гамильтона. Имеем *абсолютный* (не связанный с конкретным видом поверхности) *интегральный инвариант второго порядка*. Существуют также интегральные инварианты более высоких порядков вплоть до интеграла по объему фазового пространства. Факт сохранения интегралов Пуанкаре и Пуанкаре-Картана есть отличительный признак канонических уравнений Гамильтона.

Теорема 9.5.3. *Если для некоторой системы дифференциальных уравнений вида*

$$\dot x_i = X_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$

$$\dot y_i = Y_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \quad i+1, \ldots, n,$$

интеграл

$$I_n = \oint\left(\sum_{i=1}^n y_i\,dx_i\right)$$

сохраняется вдоль любой трубки интегральных кривых, то это — система канонических уравнений Гамильтона, т.е. существует функция

$$H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{такая, что} \quad X_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Выберем в начальный момент времени произвольный замкнутый контур

$$x_i = x_i(\alpha), \quad y_i = y_i(\alpha), \quad t = t_0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le \alpha \le l,$$

$$x_i(0) = x_i(l), \quad y_i(0) = y_i(l).$$

Этот контур деформируется в силу уравнений движения, и для каждого момента времени t уравнения контура будут иметь вид

$$x_i = x_i(t, \alpha), \quad y_i = y_i(t, \alpha), \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le \alpha \le l.$$

Значение I_n можно вычислять как одномерный интеграл

$$I_n = \int_0^l\sum_{i=1}^n y_i\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\,d\alpha.$$

Сохранение I_n вдоль трубки интегральных кривых означает, что

$$0 = \frac{dI_n}{dt} = \int_0^l\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha} + y_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial\alpha}\right)d\alpha = \sum_{i=1}^n y_i\frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_0^l +$$

$$+\int_0^l\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha} - \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial\alpha}\right)d\alpha.$$

Здесь внеинтегральный член обращается в нуль, так как точки контура совпадают при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$. Следовательно,

$$\oint\sum_{i=1}^n(\dot y_i\,dx_i - \dot x_i\,dy_i) = 0.$$

Подставив сюда значения правых частей дифференциальных уравнений, получим

$$\oint\sum_{i=1}^n(Y_i\,dx_i - X_i\,dy_i) = 0$$

для любого замкнутого контура в пространстве R^{2n}. Видим, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал:

$$\sum_{i=1}^n(Y_i\,dx_i - X_i\,dy_i) = -dH.$$□

Следствие 9.5.2. *Сохранение интеграла Пуанкаре есть необходимое и достаточное условие того, что заданная система дифференциальных уравнений есть система канонических уравнений Гамильтона.*

Теорема 9.5.4. *Пусть для некоторой системы дифференциальных уравнений вида*

$$\dot x_i = X_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$

$$\dot y_i = Y_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

интеграл

$$I = \oint\left(\sum_{i=1}^n y_i\,dx_i - H\,dt\right)$$

Пуанкаре-Картана служит интегральным инвариантом. Тогда между функцией H и функциями X_i, Y_i имеют место зависимости

$$X_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Введем вместо t другую независимую переменную τ так, чтобы были выполнены соотношения

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dy_1}{Y_1} = \ldots\frac{dy_n}{Y_n} = \frac{dt}{1} = \mu\,d\tau,$$

где $\mu = \mu(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — произвольная функция от перечисленных аргументов.

Интегральная кривая этой системы задается равенствами типа

$$x_i = x_i(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, t_0),$$

$$y_i = y_i(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, t_0),$$

$$t = t(\tau, x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, t_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть начальные точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0, t_0)$ принадлежат замкнутой кривой $\mathcal{C}_0$:

$$x_i^0 = x_i^0(\alpha), \quad y_i^0 = y_i^0(\alpha), \quad t_0 = t_0(\alpha), \quad 0 \le \alpha \le l,$$

$$x_i(0) = x_i(l), \quad y_i(0) = y_i(l).$$

Приняв во внимание эти зависимости, получим параметрические уравнения интегральных кривых:

$$x_i = x_i(\tau, \alpha) \quad y_i = y_i(\tau, \alpha) \quad t = t(\tau, \alpha), \quad i = 1, \ldots, n, \quad 0 \le \alpha \le l,$$

в которых значение параметра α выделяет интегральную кривую, а значение параметра τ задает точку на этой кривой. Полагая τ постоянным, мы на каждой образующей зафиксируем точку, а на трубке интегральных кривых выделим замкнутую кривую. В силу сказанного интеграл

$$I = \oint\left(\sum_{i=1}^n y_i\,dx_i - H\,dt\right)$$

будет представлять собой функцию параметра τ, и при каждом значении τ будет криволинейным интегралом по соответствующей замкнутой кривой $\mathcal{C}$. В силу инвариантности I будем иметь

$$\frac{dI}{d\tau} = I' = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по τ. Дифференцируя под знаком интеграла, найдем

$$\oint\left\{\sum_{i=1}^n[y_i'dx_i + y_i(dx_i)'] - H'dt - H(dt)'\right\} = 0.$$

Здесь dx_i, dt зависят от дифференциала $d\alpha$. Изменим порядок дифференцирования по α и по τ и проинтегрируем по частям вдоль замкнутого контура:

$$\oint\left\{\sum_{i=1}^n[y_i'dx_i - x_i'dy_i] - H'dt + t'\,dH\right\} = 0.$$

В силу заданной системы дифференциальных уравнений имеем

$$x_i' = \dot x_i t' = \dot x_i\mu = X_i\,\mu, \quad y_i' = Y_i\,\mu.$$

Учитывая эти равенства в подынтегральном выражении, а также зависимость

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\,dx_i + \frac{\partial H}{\partial y_i}\,dy_i\right),$$

получим

$$\oint\mu\left\{\sum_{i=1}^n\left[\left(Y_i + \frac{\partial H}{\partial x_i}\right)dx_i + \left(-X_i + \frac{\partial H}{\partial y_i}\right)dy_i\right] + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{dH}{dt}\right)dt\right\} = 0.$$

Так как замкнутый контур, по которому ведется интегрирование, может быть выбран произвольно, то равенство нулю интеграла означает, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал. Но множитель μ может быть выбран каким угодно. В этих условиях выражение, стоящее в фигурных скобках, должно тождественно равняться нулю при любых дифференциалах dx_i, dy_i, dt. Поэтому

$$Y_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad X_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}.$$□

Следствие 9.5.3. *В условиях теоремы 9.5.4 выполнено тождество*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt},$$

которое справедливо для канонических уравнений Гамильтона.

Следствие 9.5.4. *Существование интегрального инварианта Пуанкаре-Картана есть необходимое и достаточное условие того, чтобы движение системы описывалось каноническими уравнениями с функцией Гамильтона, входящей в выражение инварианта. Инвариантность интеграла Пуанкаре-Картана может быть положена в основу механики голономных систем с потенциальными силами.*

Пример 9.5.2. В интеграле Пуанкаре-Картана функция Гамильтона H входит на правах импульса. Введем новую переменную $p_{n+1} = -H$. Тогда можно выразить, например, p_1 как функцию остальных переменных:

$$p_1 = -\varphi(t, q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_{n+1}),$$

а интеграл Пуанкаре-Картана можно переписать следующим образом:

$$I = \oint \left(\sum_{i=2}^{n+1} p_i\, dq_i - \varphi\, dq_1 \right), \quad q_{n+1} = t.$$

Здесь роль времени играет уже координата q_1. Поэтому закон движения будет определяться каноническими уравнениями

$$\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Полученные уравнения носят название *уравнений Уиттéкера*. Они позволяют сделать следующие выводы.

1. Если H не зависит явно от времени t, то в уравнениях Уиттекера координата q_{n+1} будет циклической, из-за чего порядок интегрируемой системы можно понизить на две единицы. Интеграл энергии приобретает смысл циклического интеграла.

2. Если функция H не содержит явно координату q_1, то $\partial\varphi/\partial q_1 = 0$, и $\varphi = c$ есть первый интеграл, аналогичный интегралу энергии в исходной системе. Если, кроме того,

$$f(q_1, \dots, q_{n+1}, p_2, \dots, p_{n+1}) = a$$

представляет собой еще один первый интеграл, то (следствие 9.3.4) выражения

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = a_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^2} = a_2, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial q_1^n} = a_n, \dots$$

также будут первыми интегралами этой системы. С другой стороны, когда $\partial\varphi/\partial q_1 = 0$, имеем $f = F(t, q_1, \dots, q_n, -\varphi, p_2, \dots, p_n)$ и

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1}.$$

Обобщая, можно сказать, что если равенство

$$F(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = a$$

служит первым интегралом системы канонических уравнений Гамильтона, имеющей циклическую координату q_k, то первыми интегралами будут также равенства

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = a_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_k^2} = a_2, \dots \frac{\partial^n F}{\partial q_k^n} = a_n, \dots \diamond$$

Перейдем к изучению инвариантов систем канонических уравнений Гамильтона, получающихся интегрированием по объему фазового пространства. Сначала докажем теорему Лиувилля об интегральном инварианте произвольной системы дифференциальных уравнений. Пусть движение точки пространства R^m переменных $x_1, \dots, x_m$ задано с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Выберем область $D(t_0) \subset R^m$ начальных координат $x_1, \dots, x_m$, соответствующих моменту t_0. Уравнения движения определяют преобразование

$$\mathbf{x}(t_0) \to \mathbf{x}(t),$$

вследствие которого область $D(t_0)$ перейдет в область $D(t)$. Составим интеграл

$$\Lambda(t) = \int\limits_{D(t)} F(\mathbf{x}, t)\, d\Omega_t,$$

где $d\Omega_t$ — элемент объема области $D(t)$, $F(\mathbf{x}, t)$ — некоторая скалярная функция. Этот интеграл, вообще говоря, будет зависеть от времени t.

Теорема 9.5.5. (Лиувúлль). *Интеграл $\Lambda(t)$ от заданной функции $F(\mathbf{x}, t)$ по произвольному объему $D(t)$ сохраняет свое значение при изменении t (служит интегральным инвариантом) тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (F f_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени t реализовались значения координат $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$. Вычислим производную $d\Lambda/dt$. С этой целью дадим времени малое приращение τ. Соответствующее τ преобразование координат в силу уравнений движения имеет вид

$$x_i(t+\tau) = x_i(t) + f_i(x_1(t), \dots, x_m(t), t)\,\tau + o(\tau).$$

Составим матрицу Якоби этого преобразования:

$$J = \left(\frac{\partial x_i(t+\tau)}{\partial x_j(t)} \right) = E + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \tau + o(\tau).$$

Следовательно,

$$\det J = 1 + \tau \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + o(\tau).$$

По свойству якобиана

$$\Lambda(t+\tau) = \int\limits_{D(t+\tau)} F(\mathbf{x}(t+\tau), t+\tau)\, d\Omega_{t+\tau} = \int\limits_{D(t)} F(\mathbf{x}(t+\tau), t+\tau) \det J\, d\Omega_t.$$

В точке $\tau = 0$ получим

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d\Lambda}{d\tau} = \int\limits_{D(t)} \left[\frac{dF}{d\tau} + F \frac{d}{d\tau}(\det J) \right] d\Omega_t.$$

Из выражения для $\det J$ найдем

$$\frac{d}{d\tau}(\det J)\Big|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Поэтому

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \int\limits_{D(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (F f_i)}{\partial x_i} \right] d\Omega_t.$$

Для непрерывно дифференцируемой функции $\Lambda(t)$ постоянство ее значения и условие $d\Lambda/dt = 0$ эквивалентны. Кроме того, область интегрирования может быть выбрана произвольно.□

Следствие 9.5.5. *При движении, описываемом системой дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, m,$$

область $D(t)$ сохраняет объем тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Доказательство. Чтобы получить этот результат, достаточно применить теорему Лиувилля, приняв $F \equiv 1$.□

Следствие 9.5.6. *Движение, определенное системой канонических уравнений Гамильтона, сохраняет объем фазового пространства.*

Доказательство. Число фазовых координат равно $m = 2n$:

$$x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n, x_{n+1} = p_1, \dots, x_{2n} = p_n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.\square$$

Следствие 9.5.7. *Движение, описываемое системой канонических уравнений Гамильтона, не может быть асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Утверждение справедливо, так как при асимптотической устойчивости объем области фазового пространства в окрестности притяжения соответствующей фазовой кривой должен уменьшаться, что невозможно.□

Следствие 9.5.8. *Если $F(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ есть первый интеграл системы канонических уравнений Гамильтона, то*

$$\Lambda = \int\limits_{D(t)} F(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\, d\Omega_t,$$

где интегрирование ведется по области $D(t)$ фазового пространства, есть интегральный инвариант.

Доказательство. Так как F — первый интеграл, то

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial x_j} f_j = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = 0,$$

а кроме того, в силу сохранения фазового объема

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Поэтому критерий теоремы Лиувилля выполняется.□

Следствие 9.5.9. *Если $\partial H/\partial t = 0$ (система канонических уравнений автономна), то*

$$\Lambda = \int\limits_{D(t)} H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\, d\Omega_t$$

есть интегральный инвариант.

Теорема 9.5.6. (Теорема Пуанкаре о возвращении). *Пусть Γ — сохраняющее объем непрерывное взаимно однозначное отображение, переводящее ограниченную область D евклидова пространства в себя: $\Gamma D = D$. Тогда в любой окрестности Ω любой точки из D найдется точка $x \in \Omega$, которая возвращается в окрестность Ω, т.е. $\Gamma^n x \in \Omega$ при некотором $n > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим образы окрестности:

$$\Omega, \quad \Gamma\Omega, \dots, \Gamma^k\Omega, \dots$$

Все они имеют одинаковый положительный объем. Предположим, что все они не пересекаются. Тогда объем их суммы равен сумме объемов. Но все образы должны принадлежать D. Область D ограничена по условию теоремы, а вместе с тем если образы Ω, $\Gamma\Omega, \dots$ не пересекаются ни при каком k, то объем D должен быть бесконечным. Получили противоречие. Значит, при некоторых натуральных $m \geq 0$, $k \geq 0$, $m > k$ получим

$$M = \Gamma^m\Omega \cap \Gamma^k\Omega \neq 0.$$

Пусть $\mathbf{z} \in M$. Тогда отображение Γ^{-k} (оно существует) возвращает точку $\mathbf{z}$ в окрестность Ω. Кроме того, имеем $\Gamma^{-k}\mathbf{z} \in \Gamma^{m-k}\Omega$. Обозначим $\mathbf{y} = \Gamma^{-k}\mathbf{z}$. Имеем $\mathbf{y} \in \Omega$. С другой стороны, существует $\mathbf{x} \in \Omega$, такое, что $\mathbf{y} = \Gamma^n\mathbf{x}$, $n = m - k$.□

Пример 9.5.3. Преобразование, описываемое системой канонических уравнений Гамильтона, сохраняет объем. Если система автономна ($\partial H/\partial t = 0$), то это преобразование обладает групповыми свойствами. Пусть, кроме того, система склерономна (справедлив интеграл энергии), и потенциал Π растет на бесконечности. Тогда теорема Пуанкаре о возвращении применима для области D, выделяемой неравенством

$$T + \Pi \leq h,$$

$T > 0$ — кинетическая энергия системы.◇

§ 9.6. Множители Якоби

Пусть в пространстве R^m задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Определение 9.6.1. Функция

$$M = M(x_1, \dots, x_m, t)$$

называется *множителем Якоби*, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (M f_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Пример 9.6.1. Система канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

допускает множитель Якоби, равный 1, что видно из следствия 9.5.6.◇

Пример 9.6.2. Пусть на систему материальных точек наложены идеальные голономные связи и заданы силы, зависящие только от лагранжевых координат. Движение такой системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

С помощью преобразования Лежандра (теорема 9.2.1) эти уравнения могут быть приведены к форме

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Легко видеть, что в данном случае

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0,$$

так что эти уравнения допускают множитель, равный единице.◇

Пример 9.6.3. Рассмотрим голономную систему, на которую действуют гироскопические силы вида

$$\boldsymbol{Q}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, \dot{q}_j, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ij}(\mathbf{q}, t) = -\gamma_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

и позиционные силы

$$Q'_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Уравнения движения этой системы (теорема 9.2.1) приводятся к виду

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\, \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + Q'_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \sum_{i<j}^{n} \gamma_{ij} \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} \right).$$

Из равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

найдем, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Следовательно, матрицы

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \right), \quad \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \right)$$

взаимно обратны, и матрица

$$\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \right)$$

симметрична. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Рассмотренная система допускает множитель $M = 1$.◇

Пример 9.6.4. Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки имеют вид (см. § 6.6)

$$A\dot{p} + (C - B)qr = mg(\gamma'\zeta - \gamma''\eta), \quad \dot{\gamma} = \gamma' r - \gamma'' q,$$
$$B\dot{q} + (A - C)pr = mg(\gamma''\xi - \gamma\zeta), \quad \dot{\gamma}' = \gamma'' p - \gamma r,$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = mg(\gamma\eta - \gamma'\xi), \quad \dot{\gamma}'' = \gamma q - \gamma' p,$$

где γ, γ', γ'' — направляющие косинусы вертикали в главных осях инерции тела относительно неподвижной точки, а радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ центра масс тела в тех же осях не меняется и имеет разложение $\mathbf{r}_c = \xi\,\mathbf{e}'_1 + \eta\,\mathbf{e}'_2 + \zeta\,\mathbf{e}'_3$. Здесь

$$x_1 = p, \quad x_2 = q, \quad x_3 = r, \quad x_4 = \gamma, \quad x_5 = \gamma', \quad x_6 = \gamma''.$$

Очевидно, что в данном случае $\partial f_i/\partial x_i = 0$, $i = 1, \dots, 6$, и система уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки имеет множитель Якоби $M = 1$.◇

Следствие 9.6.1. *Пусть M — множитель Якоби. Тогда по теореме 9.5.5*

$$\Lambda = \int\limits_{D(t)} M\, d\Omega_t$$

есть интегральный инвариант для любого объема $D(t) \subset R^m$.

Возьмем

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, k \leq m,$$

независимые первые интегралы рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Мы можем интерпретировать равенства

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, k \leq m,$$
$$x_{k+j} = x_{k+j}, \quad j = 1, \dots, m-k,$$

как невырожденное преобразование координат, так как

$$J_k = \det\left(\frac{\partial (y_1, \dots, y_k)}{\partial (x_1, \dots, x_k)} \right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При вычислении инварианта Λ можно перейти к переменным

$$y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m.$$

Элементарный объем в пространстве этих переменных обозначим $d\Omega_{yx}$. По правилу преобразования переменных при интегрировании будем иметь

$$\mathcal{N}(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m, t)\, d\Omega_{yx} = M J_k\, d\Omega_t,$$

где $\mathcal{N}$ — произвольная функция, а в правой части буквой N обозначена функция $\mathcal{N}$, в которой вместо $y_1, \dots, y_k$ подставлены их зависимости от $x_1, \dots, x_m$.

Теорема 9.6.1. *Пусть M_1 и M_2 — два множителя Якоби, причем $M_2 \neq 0$. Тогда их отношение*

$$M_1/M_2$$

есть первый интеграл системы дифференциальных уравнений.

Доказательство. Выполним дифференцирование:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M_1}{M_2} \right) = \frac{\dot{M}_1 M_2 - M_1 \dot{M}_2}{M_2^2}.$$

Преобразуем числитель полученного выражения.

$$\dot{M}_1 M_2 - M_1 \dot{M}_2 = \left(\frac{\partial M_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial M_1}{\partial x_i} f_i \right) M_2 - \left(\frac{\partial M_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial M_2}{\partial x_i} f_i \right) M_1.$$

По определению множителей Якоби, очевидно, будем иметь

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial M_1}{\partial x_i} f_i = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} M_1. \quad \frac{\partial M_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial M_2}{\partial x_i} f_i = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} M_2.$$

Следовательно,

$$\dot{M}_1 M_2 - M_1 \dot{M}_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} M_2 M_1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} M_1 M_2 = 0.\square$$

Если известны k независимых первых интегралов $y_1, \dots, y_k$, то с помощью преобразования к координатам $y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m$ исходная система дифференциальных уравнений может быть приведена к следующей:

$$\dot{y}_i = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$
$$\dot{x}_{k+j} = f_{k+j}(x_1(\mathbf{y}), \dots, x_k(\mathbf{y}), x_{k+1}, \dots, x_m, t), \quad j = 1, \dots, m-k,$$

где

$$x_i(\mathbf{y}) = x_i(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m, t), \quad i = 1, \dots, k.$$

Имеем систему дифференциальных уравнений порядка $m - k$ относительно неизвестных $x_{k+1}, \dots, x_m$.

Теорема 9.6.2. *Пусть известны k независимых первых интегралов $y_1, \dots, y_k$, а также множитель Якоби M. Тогда множитель Якоби N для системы $m-k$ дифференциальных уравнений, к которой приводится исходная система, имеет вид*

$$N = \frac{M}{J_k}.$$

Доказательство. Пусть N — множитель приведенной системы. Соответствующий интегральный элемент объема должен быть инвариантен. Следовательно,

$$N\,d\Omega_{yx} = N J_k\,d\Omega_t = M\,d\Omega_t.\square$$

Теорема 9.6.3. (Теорема о последнем множителе). *Если известны $m-1$ независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений и множитель Якоби M, то интегрирование этой системы заканчивается квадратурой.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 9.6.2 в случае $m = n-1$. Тогда интегральный элемент

$$\frac{M}{J_{m-1}}\,dx_m = F(y_1,\dots,y_m)\,dy_m,$$

где J_{m-1} — соответствующий якобиан, есть полный дифференциал при условии, что

$$y_1,\dots,y_{m-1}$$

сохраняют постоянные значения. Решение завершается квадратурой:

$$\int \frac{M}{J_{m-1}}\,dx_m = c_m.\square$$

Теорема 9.6.4. *Пусть имеется автономная система из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными*

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2),\quad \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2).$$

Тогда множитель Якоби служит интегрирующим множителем уравнения

$$f_2\,dx_1 - f_1\,dx_2 = 0.$$

Доказательство. Согласно определению уравнение для интегрирующего множителя имеет вид

$$\frac{\partial(Mf_2)}{\partial x_2} = -\frac{\partial(Mf_1)}{\partial x_1}$$

или

$$\frac{\partial(Mf_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(Mf_1)}{\partial x_1} = 0,$$

а это совпадает с уравнением для множителя Якоби в случае, когда M не зависит явно от времени.$\square$

Следствие 9.6.2. *Пусть система дифференциальных уравнений автономна:*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\dots,x_m),\quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0,\quad i = 1,\dots,m,$$

и пусть для нее известны $m-2$ независимых первых интеграла

$$y_i = y_i(x_1,\dots,x_m),\quad i = 1,\dots,m-2,$$

а также множитель Якоби M, не зависящий явно от времени. Тогда исходная система приводится к системе уравнений второго порядка

$$\dot{x}_{m-1} = f'_{m-1}(x_{m-1},x_m),$$
$$\dot{x}_m = f'_m(x_{m-1},x_m),$$

в которой функции f'_{m-1}, f'_m получаются из f_{m-1}, f_m исключением остальных переменных с помощью первых интегралов, а множитель Якоби принимает вид

$$N = M/J_{m-2}.$$

Дополнительный интеграл такой системы определяется выражением

$$y_{m-1} = \int N(f'_m\,dx_{m-1} - f'_{m-1}\,dx_m),$$

где результат интегрирования зависит лишь от начальной и конечной точек.

Доказательство. Приведенная система эквивалентна пропорции

$$\frac{dx_{m-1}}{f'_{m-1}} = \frac{dx_m}{f'_m}$$

или

$$f'_m dx_{m-1} - f'_{m-1}dx_m = 0.$$

Далее применяем теорему 9.6.4.$\square$

Таким образом, знание множителя Якоби и $m-2$ независимых первых интегралов автономной системы дифференциальных уравнений позволяет свести к квадратурам задачу определения ее траекторий.

Пример 9.6.5. Рассмотрим автономную систему канонических уравнений с двумя степенями свободы

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dp_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_2}} = dt,$$

где $H = H(q_1,q_2,p_1,p_2)$. Для такой системы существует интеграл энергии (следствие 9.2.3)

$$H = h.$$

Допустим, что известен еще один независимый с H первый интеграл вида

$$F = F(q_1,q_2,p_1,p_2) = \alpha.$$

Теория Якоби дает возможность полностью проинтегрировать систему в этих условиях. Итак,

$$H(q_1,q_2,p_1,p_2) = h,$$

$$F(q_1,q_2,p_1,p_2) = \alpha.$$

Предположим для определенности, что

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_1} & \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F}{\partial p_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда можно принять

$$p_1 = p_1(q_1,q_2,h,\alpha),\quad p_2 = p_2(q_1,q_2,h,\alpha)$$

и исключить с помощью этих соотношений обобщенные импульсы из системы уравнений Гамильтона.

Множителем Якоби для исходной системы служит 1. Следовательно, приведенная система допускает еще один первый интеграл

$$\int \frac{1}{J}\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\,dq_1 - \frac{\partial H}{\partial p_1}\,dq_2\right) = -\beta.$$

Если выражения для p_1 и p_2 подставить в заданные первоначально первые интегралы, то они обратятся в тождества. Продифференцируем эти тождества сначала по α:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} = 1.$$

Отсюда

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{J}\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{J}\frac{\partial H}{\partial p_1}.$$

Дополнительный первый интеграл принимает вид

$$\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\,dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\,dq_2\right) = \beta,$$

где подынтегральное выражение служит полным дифференциалом. Поэтому полным дифференциалом должно быть также выражение

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 = dG,$$

и дополнительный первый интеграл системы можно записать в виде

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \beta,\quad G = G(q_1,q_2,h,\alpha).$$

Применим теперь те же рассуждения для того, чтобы найти еще один первый интеграл. Продифференцируем по h заданные в условии первые интегралы с подставленными в них функциями p_1 и p_2:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h} = 1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial p_1}{\partial h} = \frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial p_2},\quad \frac{\partial p_2}{\partial h} = -\frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial p_1}.$$

Из уравнений движения с использованием свойств пропорций найдем

$$dt = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}\,dq_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}\,dq_2}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}\dfrac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}\,dq_1 - \dfrac{\partial F}{\partial p_1}\,dq_2}{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}\dfrac{\partial H}{\partial p_1} - \dfrac{\partial F}{\partial p_1}\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}.$$

Или

$$dt = \frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial p_2}\,dq_1 - \frac{1}{J}\frac{\partial F}{\partial p_1}\,dq_2 = \frac{\partial p_1}{\partial h}\,dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h}\,dq_2.$$

Получаем завершающий интеграл системы Гамильтона

$$\frac{\partial G}{\partial h} = t - t_0.$$

Таким образом, разрешая уравнения

$$H = h,\quad F = \alpha,$$

относительно p_1 и p_2, мы можем составить линейную форму

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2,$$

которая будет полным дифференциалом dG. Остальные интегралы принимают вид

$$\frac{\partial G}{\partial h} = t - t_0,\quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \beta.$$

Отметим сходство между полученным решением и тем, которое следует из теоремы 9.4.2 о полном интеграле уравнения Гамильтона-Якоби.$\diamond$

§ 9.7. Канонические преобразования

На примере циклических координат мы видели (см. § 8.4), что успех интегрирования систем дифференциальных уравнений, описывающих движение механических систем, в значительной мере зависит от удачного выбора лагранжевых координат. При переходе от одних лагранжевых координат к другим будут по определенному закону изменяться и обобщенные импульсы, так что в новых фазовых переменных уравнения движения вновь примут вид канонических уравнений Гамильтона. Произвольные преобразования фазовых координат таким свойством, вообще говоря, обладать не будут. Интегральный инвариант Пуанкаре (определение 9.5.1) позволяет, подходя с единых позиций как к преобразованию лагранжевых координат, так и обобщенных импульсов, выделить специальный класс преобразований фазовых переменных, не нарушающих структуру канонических уравнений движения.

Определение 9.7.1. Невырожденное преобразование координат

$$\xi_i = \xi_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),$$
$$\eta_i = \eta_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad i = 1,\dots,n,$$

называется *каноническим*, если существует функция W такая, что для любого фиксированного момента времени t выполнено соотношение

$$c\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - \sum_{i=1}^n \eta_i\,d\xi_i = \delta W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

где δW означает дифференциал W при фиксированном времени t, c — число, называемое валентностью канонического преобразования. Если $c = 1$, то каноническое преобразование называется *унивале́нтным*.

Следствие 9.7.1. *Канонические преобразования не нарушают интегральный инвариант Пуанкаре.*

Доказательство. В пространстве одновременных состояний выражение δW есть полный дифференциал. Значит,

$$\oint\sum_{i=1}^n \eta_i\,d\xi_i = c\oint\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i.\square$$

Теорема 9.7.1. *В переменных $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n$ уравнения движения механической системы суть канонические уравнения Гамильтона*

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial H'}{\partial \eta_i},\quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \xi_i},\quad i = 1,\dots,n,$$

с функцией Гамильтона

$$H'(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t) = cH(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t) + \frac{\partial W}{\partial t},$$

где в правой части переменные q_i, p_i выражены через переменные ξ_i, η_i:

$$q_i = q_i(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t),\quad p_i = p_i(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t).$$

Доказательство. По теореме 9.4.1 дифференциал функции действия выражается формулой

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - H\,dt\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = dS(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_0,t_1,t_0).$$

В силу каноничности преобразования будем иметь

$$c\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i = \sum_{i=1}^n \eta_i\,d\xi_i + \delta W = \sum_{i=1}^n \eta_i\,d\xi_i + \frac{\partial W}{\partial t}\,dt + dW.$$

С учетом этого для новых переменных получаем соотношение

$$\left[\sum_{i=1}^n \eta_i\,d\xi_i - \left(cH + \frac{\partial W}{\partial t}\right)dt\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1} = d(cS - W(\mathbf{q}_1,\boldsymbol{\xi}_1,t) + W(\mathbf{q}_0,\boldsymbol{\xi}_0,t)).$$

Так как преобразование фазовых переменных не вырождено, мы можем в правой и левой части заменить p_i, q_i их выражениями через ξ_i, η_i. Поэтому в новых переменных справедлив интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Осталось воспользоваться теоремой 9.5.4.$\square$

Следствие 9.7.2. *Если функция W не зависит явно от времени ($\partial W/\partial t = 0$), то*

$$H'(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t) = cH(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),$$

где вместо q_i, p_i подставлены их выражения через ξ_i, η_i.

Каноническое преобразование, для которого $W \equiv 0$, называется *однородным*.

Рассмотрим неособое преобразование

$$q_i = q_i(\xi_1,\dots,\xi_n),\quad i = 1,\dots,n,$$

выражающее переход от одной системы лагранжевых координат к другой.

Теорема 9.7.2. *Предположим, что преобразование координат непрерывно дифференцируемо, и каждой системе лагранжевых координат соответствуют обобщенные импульсы*

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\quad \eta_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}.$$

Тогда преобразование

$$(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$$

будет каноническим, однородным и унивалентным.

Доказательство. Выполним замену переменных

$$\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,dq_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j}\,d\xi_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\sum_{j=1}^n \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\xi}_j}\,d\xi_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j}\,d\xi_j = \sum_{j=1}^n \eta_j\,d\xi_j,$$

а это и есть условие однородного унивалентного канонического преобразования.$\square$

Переход от одних лагранжевых координат к другим называется *обобщенным точечным преобразованием*.

Определение 9.7.2. Выберем из новых канонических переменных некоторый набор, содержащий n величин:

$$(\eta_{i_1},\dots,\eta_{i_k},\xi_{j_1},\dots,\xi_{j_m}) = (y_1,\dots,y_n),$$

так, что $k+m = n$, а $(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_m)$ — любое разбиение множества натуральных чисел $(1,\dots,n)$ на две непересекающиеся части. Вместе с исходными координатами $q_1,\dots,q_n$ мы получим $2n$ переменных. Функция $W(q_1,\dots,q_n,y_1,\dots,y_n,t)$, для которой

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial q_j}\right) \neq 0,\quad i,j = 1,\dots,n,$$

называется *производящей функцией* соответствующего канонического преобразования.

Теорема 9.7.3. *Пусть W есть производящая функция в смысле определения 9.7.2. Тогда каноническое преобразование можно задать с помощью следующих уравнений:*

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = cp_i,\ \frac{\partial W}{\partial \xi_{j_\mu}} = -\eta_{j_\mu},\ \frac{\partial W}{\partial \eta_{i_\nu}} = \xi_{i_\nu},\quad \begin{matrix} i = 1,\dots,n,\ \mu = 1,\dots,m, \\ \nu = 1,\dots,k,\ m+k = n. \end{matrix}$$

Доказательство. По теореме о неявно заданной функции первая группа уравнений определяет зависимости

$$y_i = y_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad i = 1,\dots,n.$$

Две другие группы уравнений определяют функции

$$\eta_{j_\mu} = \eta_{j_\mu}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad \xi_{i_\nu} = \xi_{i_\nu}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),$$
$$\mu = 1,\dots,m,\quad \nu = 1,\dots,k.$$

Кроме того, имеем

$$c\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - \sum_{\mu=1}^m \eta_{j_\mu}\,d\xi_{j_\mu} + \sum_{\nu=1}^k \xi_{i_\nu}\,d\eta_{i_\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i}\,dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial y_i}\,dy_i = \delta W.$$

Вместе с тем

$$\sum_{\nu=1}^k \xi_{i_\nu}\,d\eta_{i_\nu} = -\sum_{\nu=1}^k \eta_{i_\nu}\,d\xi_{i_\nu} + d\left(\sum_{\nu=1}^k \xi_{i_\nu}\eta_{i_\nu}\right).$$

Поэтому

$$c\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i - \sum_{\mu=1}^m \eta_{j_\mu}\,d\xi_{j_\mu} - \sum_{\nu=1}^k \eta_{i_\nu}\,d\xi_{i_\nu} = \delta\left(W - \sum_{\nu=1}^k \xi_{i_\nu}\eta_{i_\nu}\right),$$

где в правой части следует выполнить требуемую определением 9.7.1 замену переменных.$\square$

Следствие 9.7.3. *Каноническое преобразование полностью определяется, если задать его валентность и производящую функцию W. Существенную роль здесь играет состав аргументов этой функции. Всего получается 2^n возможных вариантов выбора аргументов.*

Рассмотрим некоторые варианты.

Следствие 9.7.4. *Пусть $W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)$ — функция, заданная на прямом произведении двух n-мерных координатных пространств. Если*

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial q_j}\right) \neq 0,\quad i,j = 1,\dots,n,$$

то W может быть взята в качестве производящей функции канонического преобразования, определенного уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = cp_i,\quad \frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\eta_i,\quad i = 1,\dots,n.$$

Определение 9.7.3. Каноническое преобразование с производящей функцией вида

$$W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)$$

называется *свободным*.

Пример 9.7.1. Для преобразования переобозначения фазовых координат:

$$\xi_i = p_i,\quad \eta_i = q_i,\quad i = 1,\dots,n$$

должно быть выполнено

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\eta_i = -q_i,\quad i = 1,\dots,n.$$

Возьмем $W = -\sum_{i=1}^n q_i\xi_i$. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = cp_i = -\xi_i,\quad i = 1,\dots,n.$$

Требуемый результат получается при $c = -1$. Следовательно, преобразование переобозначения фазовых координат есть свободное преобразование валентности $c = -1$. Заметим, что $c = -1$ в данном примере независимо от вида производящей функции, т.к. при переобозначении фазовых координат функция Гамильтона должна поменять знак на противоположный.$\diamond$

Отметим, что существуют канонические преобразования, которые нельзя считать свободными.

Пример 9.7.2. Тождественное и обобщенное точечное преобразование не могут быть заданы производящей функцией вида

$$W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

так как функция с таким составом аргументов должна быть в данном случае тождественно равна постоянной. Эти преобразования не будут свободными.◇

Следствие 9.7.5. *Пусть $W(q_1,\dots,q_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t)$ — функция, заданная на прямом произведении двух n-мерных пространств переменных q_i, η_i, $i=1,\dots,n$. Если*

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\eta_i\partial q_j}\right)\neq 0,\quad i,j=1,\dots,n,$$

то W есть производящая функция канонического преобразования, определенного уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=cp_i,\quad \frac{\partial W}{\partial\eta_i}=\xi_i,\quad i=1,\dots,n.$$

Пример 9.7.3. Производящая функция тождественного преобразования есть

$$W=\sum_{i=1}^n \eta_i q_i.$$

В самом деле, применяя следствие 9.7.5, найдем

$$\eta_i=cp_i,\quad \xi_i=q_i,\quad i=1,\dots,n.$$

Дополнительно следует принять $c=1$.◇

Теорема 9.7.4. *Унивалентные канонические преобразования образуют группу.*

Доказательство. В силу невырожденности каждому каноническому преобразованию соответствует обратное каноническое преобразование. Пример 9.7.3 свидетельствует, что тождественное преобразование также будет каноническим. Возьмем два унивалентных канонических преобразования

$$(q_i,p_i,\quad i=1,\dots,n)\to(\xi_i,\eta_i,\quad i=1,\dots,n),$$
$$(q_i,p_i,\quad i=1,\dots,n)\to(\tilde\xi_i,\tilde\eta_i,\quad i=1,\dots,n).$$

Покажем, что преобразование

$$(\xi_i,\eta_i,\quad i=1,\dots,n)\to(\tilde\xi_i,\tilde\eta_i,\quad i=1,\dots,n)$$

есть каноническое и унивалентное. Согласно определению 9.7.1 имеем при $c=1$

$$\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^n\eta_i\,d\xi_i=\delta W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

$$\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^n\tilde\eta_i\,d\tilde\xi_i=\delta\tilde W(q_1,\dots,q_n,\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_n,t).$$

Вычтем первое равенство из второго:

$$\sum_{i=1}^n\eta_i\,d\xi_i-\sum_{i=1}^n\tilde\eta_i\,d\tilde\xi_i=\delta\left(\tilde W(\mathbf{q},\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_n,t)-W(\mathbf{q},\xi_1,\dots,\xi_n,t)\right).$$

Осталось выразить в правой части $\mathbf{q}$ через $\xi_1,\dots,\xi_n$.◇

Производящая функция может зависеть от параметра. Каждому значению параметра будет соответствовать отдельное каноническое преобразование, а в целом мы получим семейство преобразований. При непрерывном изменении параметра величины ξ_i, η_i, $i=1,\dots,n$, будут его функциями.

Теорема 9.7.5. *Пусть $W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha)$ — непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция, удовлетворяющая условию следствия 9.7.4, α — непрерывно изменяющийся параметр. Тогда функции*

$$\xi_i(\alpha),\quad \eta_i(\alpha),\quad i=1,\dots,n,$$

удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона

$$\frac{d\xi_i}{d\alpha}=\frac{\partial V}{\partial\eta_i},\quad \frac{d\eta_i}{d\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial\xi_i},\quad i=1,\dots,n,$$

где $V=\partial W/\partial\alpha$.

Доказательство. По определению канонического преобразования будем иметь

$$c\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^n\eta_i\,d\xi_i\Big|_{\alpha_0}=\delta W(\alpha_0),\ c\sum_{i=1}^n p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^n\eta_i\,d\xi_i\Big|_{\alpha_1}=\delta W(\alpha_1),$$

где δW — дифференциал при фиксированном значении α; α_0, α_1 — два различных значения параметра. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\sum_{i=1}^n\eta_i d\xi_i\Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1}=\delta W(\alpha_0)-\delta W(\alpha_1),\ \left(\sum_{i=1}^n\eta_i d\xi_i-\frac{\partial W}{\partial\alpha}d\alpha\right)\Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1}=d[W(\alpha_0)-W(\alpha_1)].$$

Следовательно, при изменении α будет справедлив интегральный инвариант Пуанкаре-Картана. Осталось воспользоваться теоремой 9.5.4, где роль времени играет параметр α. □

Замечание 9.7.1. Пусть заданы два значения α_0 и α_1 параметра α, и

$$(q_i,p_i,\quad i=1,\dots,n)\to(\xi_i(\alpha_0),\eta_i(\alpha_0),\quad i=1,\dots,n),$$
$$(q_i,p_i,\quad i=1,\dots,n)\to(\xi_i(\alpha_1),\eta_i(\alpha_1),\quad i=1,\dots,n),$$

суть два канонических преобразования одной и той же валентности с производящими функциями

$$W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha_0),$$
$$W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,\alpha_1)$$

соответственно. Тогда преобразование

$$(\xi_i(\alpha_0),\eta_i(\alpha_0),\quad i=1,\dots,n)\to(\xi_i(\alpha_1),\eta_i(\alpha_1),\quad i=1,\dots,n)$$

будет каноническим и унивалентным (см. теорему 9.7.4).

Следствие 9.7.6. *Движение, описываемое каноническими уравнениями Гамильтона, можно интерпретировать как каноническое преобразование, в котором роль параметра играет время t, а производящей функцией служит функция S действия по Гамильтону.*

Канонические преобразования сохраняют все общие свойства систем уравнений Гамильтона. Изменяется только вид самой функции Гамильтона. Выше мы видели (теорема 9.4.3), что возможность интегрирования таких систем тесно связана именно со спецификой зависимости функции Гамильтона от фазовых переменных. Если удается найти каноническое преобразование, переводящее функцию Гамильтона к такому виду, что систему, полученную после преобразования, можно проинтегрировать, то тем самым проинтегрируются и исходные канонические уравнения.

Теорема 9.7.6. *Канонические уравнения Гамильтона для системы с n степенями свободы аналитически интегрируются, если функция Гамильтона не зависит от n каких-нибудь канонических переменных с различными индексами.*

Доказательство. Для системы с n степенями свободы множество канонических переменных имеет вид

$$q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n.$$

Разобьем это множество произвольно на два подмножества переменных

$$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n.$$

Установим между элементами этих подмножеств соответствие

$$y_k=\begin{cases}p_s, & \text{если } x_k=q_s,\\ q_s, & \text{если } x_k=p_s,\end{cases}\quad s=1,\dots,n.$$

Пусть функция Гамильтона не зависит от переменных

$$x_1,\dots,x_n.$$

Очевидно, что тогда

$$\dot y_k=0,\quad k=1,\dots,n.$$

Следовательно, получаем первые интегралы

$$y_k=\beta_k,\quad k=1,\dots,n.$$

Так как функция Гамильтона зависит только от переменных

$$y_k,\quad k=1,\dots,n,$$

то переменные $x_1,\dots,x_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot x_k=F_k(y_1,\dots,y_n,t),\quad k=1,\dots,n.$$

Поэтому

$$x_k=\int_{t_0}^t F_k(\beta_1,\dots,\beta_n,t)\,dt+x_k(t_0),\quad k=1,\dots,n.\square$$

Замечание 9.7.2. С помощью канонических преобразований обобщенные импульсы можно переводить в обобщенные координаты, и наоборот. В самом деле, пусть, например, обобщенный импульс p_s требуется преобразовать в обобщенную координату и, наоборот, координату q_s — в импульс, а остальные канонические переменные оставить без изменений. Для этого достаточно применить производящую функцию вида

$$W=\xi_s q_s+\sum_{i\neq s}\eta_i q_i.$$

В результате будем иметь

$$\xi_s=cp_s,\quad \eta_s=-q_s,\quad \xi_i=q_i,\quad \eta_i=cp_i,\quad i\neq s.$$

Нужный эффект получается, например, при $c=1$.

Следствие 9.7.7. *Пусть выполнено условие теоремы 9.7.6. Тогда в соответствии с замечанием 9.7.2 существует такое каноническое преобразование, что в новых канонических переменных*

$$\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n$$

функция Гамильтона H не будет зависеть от $\eta_1,\dots,\eta_n$:

$$H=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

а решение примет вид

$$\xi_i(t)=\xi_i(t_0)=\beta_i,\quad \eta_i=\eta_i(t_0)-\int_{t_0}^t\frac{\partial V(\beta_1,\dots,\beta_n,t)}{\partial\beta_i}\,dt.$$

Определение 9.7.4. Канонические переменные

$$\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,$$

в которых функция Гамильтона имеет вид

$$H=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

называются *переменными действие-угол*.

В том случае, когда многообразие, определенное первыми интегралами $\xi_i=\beta_i$, $i=1,\dots,n$, канонических переменных, компактно, переменные η_i (см. пример 9.7.4) действительно имеют смысл угловых координат на этом многообразии. В других случаях переменные η_i, строго говоря, уже не будут угловыми, хотя мы сохраним за ними это название.

Замечание 9.7.3. По аналогии можно принять, что для переменных действие-угол функция H имеет вид

$$H=V(\eta_1,\dots,\eta_n,t),$$

т.е. не зависит от переменных ξ_i.

Пример 9.7.4. Рассмотрим движение гармонического осциллятора с единичной массой. Его функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{kq^2}{2}.$$

Найдем производящую функцию $W(q,\xi)$ канонического преобразования, после применения которого будет выполнено $H'=\xi$. Учтем, что

$$p=\frac{\partial W}{\partial q}.$$

Поэтому функция W должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{kq^2}{2}=\xi.$$

Это может быть, например,

$$W(q,\xi)=\int_0^q\sqrt{2\xi-kq^2}\,dq.$$

Определим переменную η:

$$\eta=-\frac{\partial W}{\partial\xi}=\int_0^q\frac{dq}{\sqrt{2\xi-kq^2}}=\frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{k}{2\xi}}\right).$$

Таким образом, переменная η имеет смысл аргумента тригонометрической функции в законе движения гармонического осциллятора

$$q=\sqrt{\frac{2\xi}{k}}\sin(\sqrt{k}\,\eta).$$

Этим оправдывается название "угловая переменная".

В рассматриваемом случае функция H не зависит явно от времени. Поэтому справедлив принцип Якоби (следствие 8.12.3). Вычислим действие по Мопертюи для фазовой кривой, соответствующей постоянной энергии ξ:

$$\frac{p^2}{2}+\frac{kq^2}{2}=\xi.$$

Эта кривая есть эллипс с полуосями $a=\sqrt{2\xi}$ и $b=\sqrt{2\xi/k}$. Если взять начальное положение, совпадающее с конечным, то фазовая точка пройдет по полному эллипсу, а значение действия I вычислится по формуле (следствие 9.2.5)

$$I=\oint\sqrt{2\xi-kq^2}\,dq=\oint p\,dq=\pi ab=2\pi\xi/\sqrt{k},$$

которая оправдывает для ξ название "переменная действие".◇

Теорема 9.7.7. (Якоби). *Пусть $c\neq 0$. Если найдено решение*

$$W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)$$

уравнения типа Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial W}{\partial t}+cH\left(q_1,\dots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1}c^{-1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_n}c^{-1},t\right)=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

зависящее от параметров $\xi_1,\dots,\xi_n$ и, быть может, времени t, и такое, что

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\xi_i\partial q_j}\right)\neq 0,\quad i,j=1,\dots,n,$$

то система канонических уравнений

$$\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i=1,\dots,n,$$

решается явно в квадратурах. При этом функции $\xi_1,\dots,\xi_n$, определенные системой уравнений

$$\frac{\partial W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)}{\partial q_i}=cp_i,\quad i=1,\dots,n,$$

служат независимыми первыми интегралами уравнений движения.

Доказательство. Рассмотрим каноническое преобразование с валентностью $c\neq 0$ и производящей функцией

$$W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t),$$

служащей полным интегралом уравнения типа Гамильтона-Якоби. По определению канонического преобразования переменные $\xi_1,\dots,\xi_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=cp_i,\quad i=1,\dots,n,$$

которая разрешима относительно них, так как по условию теоремы якобиан этой системы не равен нулю. Вычислим функцию Гамильтона

$$H'(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t)$$

в новых переменных. Согласно теореме 9.7.1, будем иметь

$$H'=cH\left(q_1,\dots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1}c^{-1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_n}c^{-1},t\right)+\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Далее после дифференцирования вместо $q_1,\dots,q_n$ следует подставить их выражения через ξ_i, η_i. Из условия теоремы найдем

$$H'(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t)=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t).$$

Осталось воспользоваться следствием 9.7.7.□

Таким образом, задача нахождения разнообразных типов переменных действие-угол сводится к отысканию достаточно большого числа решений уравнения Гамильтона-Якоби в частных производных.

Замечание 9.7.4. Пусть система с n степенями свободы описывается уравнениями Гамильтона и имеет n первых интегралов. Если можно указать такое каноническое преобразование, что эти первые интегралы входят в набор новых канонических переменных, то по теореме 9.7.6 рассматриваемые уравнения Гамильтона можно проинтегрировать аналитически. Это — еще один способ построения переменных действие-угол.

Определение 9.7.5. Две функции

$$F_1=F_1(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad F_2=F_2(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)$$

находятся в инволюции, если их скобка Пуассона (определение 9.3.1) равна нулю: $\{F_1,F_2\}=0$. Несколько функций находятся в инволюции, если они находятся в инволюции попарно друг с другом.

Лемма 9.7.1. *Пусть уравнения*

$$F_1=F_1(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)=0,$$
$$F_2=F_2(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)=0$$

служат следствием уравнений

$$u_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)=0,\quad i=1,\dots,m,$$

причем функции u_i, $i=1,\dots,m$, находятся в инволюции. Тогда в инволюции будут и функции F_1, F_2: $\{F_1,F_2\}=0$.

Доказательство. Зафиксируем время t и рассмотрим фазовый поток, обусловленный функцией u_1 (следствие 9.3.2) по параметру s. Так как функции u_i находятся в инволюции, то применение к ним указанного фазового потока оставляет их постоянными, и поток не нарушает уравнений $u_i=0$, $i=1,\dots,n$. Но тогда останется выполненным и уравнение $F_2=0$. Поэтому $\{F_2,u_1\}=0$. Аналогично для любого i получим $\{F_2,u_i\}=0$ или $\{u_i,F_2\}=0$. Последнее означает, что фазовый поток, обусловленный функцией F_2, не меняет функций u_i, а значит, сохраняет уравнение $F_1=0$. Поэтому $\{F_1,F_2\}=0$.□

Теорема 9.7.8. *Пусть даны n функций*

$$\xi_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad i=1,\dots,n$$

таких, что

$$\det\frac{\partial(\varphi_1,\dots\varphi_n)}{\partial(p_1,\dots,p_n)}\neq 0.$$

Тогда функции $\eta_1,\dots,\eta_n$, для которых преобразование

$$(\mathbf{q},\mathbf{p})\to(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$$

будет каноническим, существуют в том и только том случае, если функции φ_i, $i=1,\dots,n$ находятся в инволюции.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что функции φ_i, $i=1,\dots,n$ находятся в инволюции. Поскольку соответствующий якобиан не равен нулю, то можно разрешить систему уравнений

$$\xi_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad i=1,\dots,n,$$

относительно переменных p_k, $k=1,\dots,n$, так что

$$p_k=\psi_k(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t),\quad k=1,\dots,n.$$

Будем считать параметры $\xi_1,\dots,\xi_n$ постоянными. Вторая система уравнений есть следствие первой, а первая находится в инволюции. Значит, в инволюции будут и функции $p_k-\psi_k$, $k=1,\dots,n$. Возьмем от них скобки Пуассона:

$$\sum_{i=1}^n\left[\frac{\partial(p_k-\psi_k)}{\partial q_i}\frac{\partial(p_s-\psi_s)}{\partial p_i}-\frac{\partial(p_k-\psi_k)}{\partial p_i}\frac{\partial(p_s-\psi_s)}{\partial q_i}\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial q_i}\delta_{ki}-\frac{\partial\psi_k}{\partial q_i}\delta_{si}\right)=\frac{\partial\psi_s}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi_k}{\partial q_s}\equiv 0.$$

Видим, что существует функция $W=W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)$, для которой справедливо равенство

$$cp_k=c\psi_k(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)=\frac{\partial W}{\partial q_k},\quad k=1,\dots,n,$$

где c — постоянная. Если теперь принять

$$\eta_k=-\frac{\partial W}{\partial\xi_k},\quad cp_k=\frac{\partial W}{\partial q_k},\quad k=1,\dots,n,$$

то получим каноническое преобразование валентности c. Невырожденность матрицы вторых частных производных от функции W непосредственно следует из предположения о невырожденности якобиана.

Достаточность. Пусть существуют переменные $\eta_1,\dots,\eta_n$, для которых преобразование

$$(\mathbf{q},\mathbf{p})\to(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$$

оказалось каноническим. Согласно определению, это означает, что имеется функция $W=W(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)$ такая, что

$$c\sum_{i=1}^{n}p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^{n}\eta_i\,d\xi_i=\delta W.$$

В соответствии с принятым условием невырожденности якобиана можно найти $p_i=\psi_i(q_1,\dots,q_n,\xi_1,\dots,\xi_n,t)$ и воспользоваться условием того, что левая часть последнего равенства служит полным дифференциалом:

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi_k}{\partial q_s}\equiv 0.$$

Проводя теперь преобразования формул предыдущего пункта доказательства в обратном порядке, убеждаемся в том, что функции $p_k-\psi_k$, $k=1,\dots,n$ находятся в инволюции, а значит в инволюции будут и функции φ_i, $i=1,\dots,n$.□

Теорема 9.7.9. (Теорема Лиувилля об интегралах в инволюции). *Пусть имеется n независимых, находящихся в инволюции первых интегралов $f_1,\dots,f_n$ системы уравнений Гамильтона. Тогда существует каноническое преобразование, приводящее уравнения движения к форме*

$$\dot\xi_i=0,\quad \dot\eta_i=Y_i(f_1,\dots,f_n,t),\quad i=1,\dots,n,$$

где Y_i — функции первых интегралов и времени.

Доказательство. Примем в качестве новых переменных заданные первые интегралы

$$\xi_i=f_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad i=1,\dots,n.$$

Так как функции f_i, $i=1,\dots,n$, независимы и находятся в инволюции, то по теореме 9.7.8 существуют такие переменные η_i, $i=1,\dots,n$, что преобразование $(\mathbf{p},\mathbf{q})\to(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi})$ будет каноническим:

$$c\sum_{i=1}^{n}p_i dq_i-\sum_{i=1}^{n}\eta_i d\xi_i=\delta W.$$

В новых переменных $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ уравнения движения имеют форму уравнений Гамильтона и задаются функцией $H'=cH+\partial W/\partial t$. Но ξ_i, $i=1,\dots,n$, будучи первыми интегралами движения, не изменяются с изменением времени: $\dot\xi_i=0$, $i=1,\dots,n$. Отсюда $\partial H'/\partial\eta_i=0$. Поэтому

$$H'=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t).\square$$

Отметим, что пример 9.6.5 содержит систему интегралов в инволюции, удовлетворяющую теореме 9.7.9.

§ 9.8. Элементы теории возмущений

Предположим, что движение некоторой механической системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона с функцией Гамильтона

$$H=H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t).$$

Представим эту функцию в виде

$$H=H_0+\varepsilon H_1,$$

где $H_0=H_0(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)$ — функция Гамильтона, допускающая аналитическое решение соответствующей системы уравнений Гамильтона, функция H_1 ограничена, а ε — безразмерный параметр, величина которого характеризует точность приближения функции H с помощью функции H_0. Если для любой точки некоторой ограниченной области D расширенного фазового пространства имеем

$$\left\|\frac{\partial H_0}{\partial\mathbf{p}},-\frac{\partial H_0}{\partial\mathbf{q}}\right\|\gg\varepsilon\left\|\frac{\partial H_1}{\partial\mathbf{p}},-\frac{\partial H_1}{\partial\mathbf{q}}\right\|,$$

то для этой области погрешность приближения мала, и можно говорить о небольших отклонениях точного закона движения, обусловленного функцией H, от приближенного закона движения, обусловленного функцией H_0. Рассмотрим стандартные варианты

Вариант 1. Пусть функция H_0 такова, что для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби

$$\partial W/\partial t+H_0=0$$

можно указать полный интеграл $W=W(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n,t)$;

Уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_i}=-\beta_i,\quad i=1,\dots,n,$$

задают преобразование координат

$$\alpha_i=\alpha_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t),\quad \beta_i=\beta_i(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t).$$

Это преобразование координат будет каноническим и унивалентным, так как

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\,d\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}d\alpha_i=\delta W.$$

Найдем функцию Гамильтона H' в переменных $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$, соответствующую функции $H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)$:

$$H'=H+\frac{\partial W}{\partial t}=H_0+\varepsilon H_1+\frac{\partial W}{\partial t}=\varepsilon H_1=\varepsilon H_1'(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t),$$

где функция H_1' есть результат подстановки в функцию H_1 зависимостей

$$q_i=q_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n,t),$$
$$p_i=p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n,t),\quad i=1,\dots,n,$$

выражающих закон преобразования координат. Следовательно, в переменных $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ движение изучаемой системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона вида

$$\dot\alpha_i=\varepsilon\frac{\partial H_1'}{\partial\beta_i},\quad \dot\beta_i=-\varepsilon\frac{\partial H_1'}{\partial\alpha_i},\quad i=1,\dots,n.$$

Ясно, что если $\varepsilon=0$, то величины α_i и β_i в силу уравнений движения будут постоянными. Тем самым мы еще раз доказали теорему 9.4.2 Якоби. Закон движения, соответствующий функции Гамильтона H_0, имеет вид преобразования координат, в котором изменяется только t, а величины α_i, β_i, $i=1,\dots,n$ принимаются постоянными. Закон движения с функцией Гамильтона H дается точно такими же формулами, что и закон движения с функцией Гамильтона H_0, но координаты $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ заменяются решением системы канонических уравнений с функцией Гамильтона εH_1.

Этот результат можно истолковать следующим образом. Можно считать, что движение происходит в соответствии с законом, соответствующим функции H_0, а параметры этого закона $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ не остаются постоянными, а медленно (когда ε мало) изменяются с течением времени. Функция H_1 называется *пертурбационной (возмущающей) функцией*. В небесной механике описанный

метод носит название *метода оскулирующих элементов*. Сами оскулирующие элементы суть параметры кеплеровского движения (см. § 3.11).

Метод оскулирующих элементов сродни методу Лагранжа вариации произвольных постоянных. В самом деле, пусть изучается движение, описываемое следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot x_i=f_i(x_1,\dots,x_n,t),\quad i=1,\dots,n.$$

Предположим, что для вспомогательной системы вида

$$\dot x_i=F_i(x_1,\dots,x_n,t),\quad i=1,\dots,n,$$

нам удалось найти полный набор независимых первых интегралов

$$y_i=y_i(x_1,\dots,x_n,t),\quad i=1,\dots,n,$$

таких, что

$$\det\frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\neq 0,$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}F_j=0,\quad i=1,\dots,n.$$

Координаты $y_1,\dots,y_n$, будучи постоянными в силу вспомогательной системы дифференциальных уравнений, окажутся изменяющимися в силу изучаемой системы. Найдем закон этого изменения:

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}f_j+\frac{\partial y_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(f_j-F_j)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}F_j+\frac{\partial y_i}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(f_j-F_j).$$

Исключив в этих уравнениях координаты $x_1,\dots,x_n$ с помощью системы первых интегралов, получим замкнутую систему уравнений относительно координат $y_1,\dots,y_n$. Если разности

$$f_j-F_j=\mu\Phi_j,\quad j=1,\dots,n,$$

малы по сравнению с функциями f_j, $j=1,\dots,n$: $\mu\ll 1$, то переменные $y_1,\dots,y_n$ будут медленно по сравнению с переменными $x_1,\dots,x_n$

меняться во времени, и движение изучаемой системы можно интерпретировать как движение вспомогательной с медленно изменяющимися параметрами. Преимущество метода оскулирующих элементов по сравнению с методом вариации произвольных постоянных в том, что оскулирующие элементы удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона.

Применим метод вариации произвольных постоянных к случаю, когда вспомогательная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot x_i=F_i(t),\quad 1,\dots,n.$$

Для такой системы можно указать следующий полный набор первых интегралов:

$$y_i=x_i-\int_{t_0}^{t}F_i(t)\,dt=x_i-z_i(t).$$

Зависимости

$$z_1(t),\dots,z_n(t)$$

выражают опорный закон движения. В соответствии с методом Лагранжа будем иметь

$$\dot y_i=f_i(y_1+z_1,\dots,y_n+z_n,t)-F_i(t),\quad i=1,\dots,n.$$

Правую часть полученной системы можно представить в виде

$$\dot y_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}y_j+f_i(z_1(t),\dots,z_n(t),t)-F_i(t)+\Phi_i(y_1,\dots,y_n,t),$$

где функции Φ_i таковы, что их разложения в ряд Тейлора по переменным $y_1,\dots,y_n$ начинаются с квадратичных членов, а матрица

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$$

рассчитывается при $y_1=y_2=\dots=y_n=0$ и представляет собой известную функцию времени. Система дифференциальных уравнений

$$\dot\xi_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j+f_i(z_1(t),\dots,z_n(t),t)-F_i(t)$$

называется *системой уравнений в вариациях* для изучаемой системы в окрестности опорного закона движения. В общем случае это — система линейных дифференциальных уравнений с переменными во

времени коэффициентами. По ее свойствам можно судить о характерных особенностях исходной изучаемой системы. Система уравнений в вариациях принимает простой вид, когда

$$\dot z_i=F_i(t)=f_i(z_1(t),\dots,z_n(t),t),$$

т.е. опорный закон движения удовлетворяет изучаемой системе. Тогда

$$\dot\xi_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\xi_j.$$

Примером эффективного использования системы уравнений в вариациях служит теория движения в окрестности положения равновесия (§ 8.7). Там линейная система и есть система уравнений в вариациях относительно нулевого решения.

Во всех случаях, когда система уравнений движения приводится к виду

$$\dot{\mathbf{x}}=\varepsilon\mathbf{X}(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in R^m,$$

где ε — малый параметр, решение можно искать в виде асимптотических рядов по степеням ε:

$$\mathbf{x}=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\mathbf{x}^{(i)}.$$

Подставив этот ряд в уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложении правой и левой частей, получим рекуррентные системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}^{(0)}=0,$$
$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)}=\mathbf{X}^{(i)}(\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(i-1)}),\quad i=1,\dots,\infty.$$

Начальные условия можно задать так, чтобы при $t=0$ было выполнено

$$\mathbf{x}^{(0)}(0)=\mathbf{x}_0,\quad \mathbf{x}^{(i)}(0)=0,\quad i=1,\dots,\infty.$$

Пусть все приближения для индексов $0,\dots,i-1$ найдены. Тогда для индекса i в правой части соответствующей системы уравнений будут стоять известные функции времени, и i-е приближение находится квадратурой. Видим, что основная техническая трудность применения данного метода будет состоять в выписывании конкретных выражений для $\mathbf{X}^{(i)}$. Но имеется и принципиальная трудность, связанная с тем, что получающиеся ряды не всегда сходятся. Вопросам рационального применения получающихся разложений посвящена теория малого параметра, изложение которой выходит за рамки данной книги.

Вариант 2. Предположим, что функция H_0 допускает введение переменных действие-угол. Это значит, что существует каноническое преобразование $(\mathbf{q},\mathbf{p})\to(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ с производящей функцией W, удовлетворяющей уравнению типа уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+cH_0\left(q_1,\dots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_1}c^{-1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_n}c^{-1},t\right)=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t).$$

Функция Гамильтона $H=H_0+\varepsilon H_1$ при таком преобразовании примет вид

$$H'=V(\xi_1,\dots,\xi_n,t)+\varepsilon H_1'(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n,t),$$

а уравнения движения в переменных $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ запишутся в форме

$$\dot\xi_i=\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial\eta_i},\quad \dot\eta_i=-\frac{\partial V}{\partial\xi_i}-\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial\xi_i},\quad i=1,\dots,n.$$

Поиск решения этой системы в виде рядов по степеням ε приводит так же, как и в первом варианте, к рекуррентной системе уравнений относительно коэффициентов разложений, а высказанные выше замечания относительно особенностей таких решений сохраняют справедливость.

Контрольные вопросы к главе 9

9.1. Найти преобразование Лежандра для функции $f(x)=x^2/2$.

9.2. Составить неравенство Юнга для функции $f(x)=\operatorname{arcsec}x$.

9.3. Найти функцию Гамильтона и написать уравнения Гамильтона для случая Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки (см. § 6.7). В качестве Лагранжевых координат принять углы Эйлера.

9.4. В примере 9.2.1 найти зависимость координат q_1, q_2 от времени.

9.5. Показать, что векторы гамильтонового векторного поля касаются поверхности уровня функции Гамильтона $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$.

9.6. Пусть функция Гамильтона $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ сохраняется на гамильтоновых фазовых потоках, определенных функциями $f(\mathbf{p},\mathbf{q})$ и $g(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Показать, что тогда скобка Пуассона $\{f,g\}$ есть первый интеграл системы уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона H.

9.7. Составить функцию действия по Гамильтону для гармонического осциллятора.

9.8. Может ли полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби не зависеть от каких-либо координат?

9.9. Может ли полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби зависеть от постоянных, число которых меньше числа степеней свободы системы?

9.10. Может ли полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби не зависеть явно от времени?

9.11. Разделить переменные по методу Ишенецкого, если функция Гамильтона выражается зависимостью

$$H=H(t,\varphi_n),$$
$$\varphi_n=\varphi_n(\varphi_{n-1}(\dots\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(q_1,p_1),q_2,p_2),q_3,p_3),\dots),q_n,p_n).$$

9.12. Написать уравнение Гамильтона-Якоби для сферического маятника (см. § 3.12). Показать, что это уравнение решается методом разделения переменных.

9.13. Получить критерий интегрируемости по методу разделения переменных для уравнений движения материальной точки в полярных координатах.

9.14. Показать, что элемент площади любой двумерной поверхности фазового пространства сохраняется в силу канонических уравнений Гамильтона.

9.15. Выписать уравнение Уиттекера для гармонического осциллятора, приняв в качестве независимой переменной координату. Какие особенности имеет это уравнение?

9.16. Показать, что если

$$\int_{\Omega}F\,d\Omega$$

— интегральный инвариант системы дифференциальных уравнений, сохраняющей любой объем Ω фазового пространства, то F — первый интеграл этой системы.

9.17. Сосуд разделен непроницаемой перегородкой на две части. В одной из них находится газ, движение молекул которого описывается системой уравнений Гамильтона, а в другой — вакуум.

В некоторый момент времени перегородку убрали, и газ начал заполнять весь объем сосуда. Следует ли из теоремы Пуанкаре о возвращении, что найдется такой момент времени, когда все молекулы газа снова соберутся в той части сосуда, где они первоначально находились?

9.18. Показать, что система уравнений движения спутника относительно центра масс на круговой орбите допускает множитель Якоби, равный единице.

9.19. Показать, что в задаче исследования движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки достаточно найти 4 независимых первых интеграла, чтобы определить траектории движения. Перечислить эти интегралы в случаях Эйлера, Лагранжа-Пуассона, Ковалевской. Какие первые интегралы являются общими для всех этих случаев?

9.20. Показать, что система канонических уравнений Гамильтона для сферического маятника (см. § 3.12) допускает первый интеграл, отличный от интеграла энергии. Каков физический смысл этого интеграла?

9.21. Пусть $G(q_1,q_2,h,\alpha)$ — функция, существование которой установлено в примере 9.6.5. Доказать, что тогда $S=ht+G$ есть полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби.

9.22. Какую форму при каноническом преобразовании приобретает интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

9.23. Показать, что каноническое преобразование будет однородным тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j}=0,\quad \eta_j=c\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial q_i}{\partial\xi_j},\quad j=1,\dots,n.$$

9.24. Показать, что преобразование

$$\xi=2q+\frac{\alpha}{3}p,\quad \eta=q+\frac{2\alpha}{3}p$$

будет каноническим валентности $c=\alpha$. Найти производящую функцию этого преобразования.

9.25. Пусть найдено каноническое преобразование к переменным действие-угол. Как найти закон движения системы в исходных канонических переменных?

9.26. Найти переменные действие-угол для системы с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{kq^2}{2},$$

где k — постоянная.

9.27. Проинтегрировать систему уравнений примера 9.6.5 с помощью теоремы 9.7.9 Лиувилля об интегралах в инволюции.

9.28. Написать систему уравнений в вариациях для физического маятника в окрестности положения равновесия.

Именной указатель

Аппель (Appell P.E. 1855–1930), 426

Бернулли (Bernoulli J. 1667–1748), 343
Бине (Binet J.F.M. 1786–1856), 254
Бобылев Д.К. (1842–1917), 492
Буняковский В.Я. (1804–1889), 53
Бэр К.М. (1792–1876), 144

Вариньон (de Varignon P. 1654–1722), 29
Воронец П.В. (1871–1923), 530

Галилей (Galilei G. 1564–1642), 154, 157
Гамильтон (Hamilton W.R. 1805–1865), 112, 612, 632, 643
Гаусс (Gauss C.F. 1777–1855), 417
Гесс (Hess W. 1858–1937), 493
Грам (Gram J.P. 1850–1916), 316, 543
Гюйгенс (Huygens Ch. 1629–1695), 52, 459

Даламбер (d'Alembert J. 1717–1783), 376, 378

Жуковский Н.Е. (1847–1921), 498

Имшенецкий В.Г. (1832–1892), 649

Кёниг (Koenig J.S. 1712–1757), 397, 428
Кардано (Cardano D. 1501–1576), 94, 494
Карно (Carnot L.N.M. 1753–1823), 436
Картан (Cartan E.J. 1869–1951), 660
Кеплер (Kepler J. 1571–1630), 255, 263
Клаузиус (Clausius R. 1822–1888), 395
Клейн (Klein F. 1849–1925), 106
Ковалевская С.В. (1850–1891), 489
Кориолис (Coriolis G.G. 1792–1843), 140, 275, 517
Коши (Cauchy Au.L. 1789–1857), 44, 53, 172
Крылов А.Н. (1863–1945), 94, 310
Кулон (Coulomb Ch.O. 1736–1806), 167
Кэли (Cayley A. 1821–1895), 106

Лагранж (Lagrange J.L. 1736–1813), 182, 201, 233, 338, 343, 378, 453, 478, 539, 570, 616, 697
Лаплас (Laplace P.S. 1749–1827), 259, 387
Леви-Чивита (Levi-Civita T. 1873–1941), 410
Лежандр (Legendre A.M. 1752–1833), 627
Лиувилль (Liouville J. 1809–1882), 653, 668, 694
Лоренц (Lorentz H.A. 1853–1928), 552
Ляпунов А.М. (1857–1918), 568

Маневский Н.В. (1823–1892), 487
Максвелл (Maxwell J.C. 1831–1879), 553
Матье (Mathieu E.L. 1835–1890), 248
Мейсснер (Meissner V.F. 1882–1974), 248
Мещерский И.В. (1859–1935), 409
Мопертюи (de Maupertuis P.L.M. 1698–1759), 616, 617

Нётер (Noether A.E. 1882–1935), 561, 638
Ньютон (Newton I. 1643–1727), 156, 160, 167, 255, 285, 293

Остроградский М.В. (1801–1862), 395, 615

Паули (Pauli V. 1900–1958), 103
Пуанкаре (Poincaré H. 1854–1912), 660, 671
Пуансо (Poinsot L. 1777–1859), 467
Пуассон (Poisson S.D. 1781–1840), 134, 478, 636, 639
Пфафф (Pfaff J. 1765–1825), 313

Раус (Routh E.I. 1831–1907), 564, 593
Резаль (Résal H.A. 1828–1896), 191, 387
Ривальс (Rivals), 141
Родриг (Rodriges B.O. 1794–1851), 112
Рэлей (Rayleigh [Strutt] J. 1842–1919), 549, 587

Сильвестр (Sylvester J.J. 1814–1897), 574
Стеклов В.А. (1864–1926), 492

Торричелли (Torricelli E. 1608–1647), 346

Уиттекер (Whittaker E.T. 1873–1956), 667

Флериэ (Fleuriais G.), 500
Флоке (Flocke K.A.), 240
Фробениус (Frobenius F.G. 1849–1917), 320
Фуко (Foucault J.B.L. 1819–1868), 285

Хилл (Hill M.J.M. 1856–1929), 245

Циолковский К.Э. (1857–1935), 410

Чаплыгин С.А. (1869–1942), 531, 533

Штейнер (Steiner J. 1796–1863), 52
Штеккель (Stäckel P. 1862–1919), 654

Эйлер (Euler L. 1707–1783), 88, 91, 97, 121, 136, 407, 414, 465, 466, 600
Эрмит (Hermite Ch. 1822–1901), 103

Юнг (Young T. 1773–1829), 629

Якоби (Jacobi K.G.J. 1804–1851), 210, 545, 616, 619, 637, 639, 643, 644, 672

Предметный указатель

Аксоид
– неподвижный, 130
– подвижный, 130
Аномалия
– истинная, 256
– эксцентрическая, 262
Апекс, 467

Баллистика, 263
Биения, 235
Бинормаль, 80

Вариация
– полная, 607
Вектор
– Лапласа, 259
– перемещения, 77
– результирующий, 29, 39
– свободный, 25
– скользящий, 25
– суммарный (главный), 37
– угловой скорости, 121
Векторы
– базисные, 325
– нормированные, 16
– ортогональные, 16
– скользящие
– – противоположные, 26
Вид канонический, 50
Винт, 39
Вириал Клаузиуса, 395
Воздействие ударное, 289
Волчок
– Лагранжа, 478
– быстрозакрученный, 488
– спящий, 487
Вращение твердого тела, 120
Вырожденный узел, 222

Гамильтониан, 609
Герполодия, 468
Гироскоп симметричный, 494
Годограф скорости, 77
Градиент функционала, 603
Группа, 20
– $O(3)$, 85
– $SO(3)$, 87
– $SU(2)$, 105
– O(n), 21
– SO(n), 21

Движение
– абсолютное, 118
– апериодическое, 224
– винтовое, 129
– метрики, 18
– относительное, 118
– переносное, 118
– плоскопараллельное, 131
– поступательное, 113
– пространства, 85
– равномерное, 78
– равноускоренное, 79
– стационарное, 593
– финитное, 395
– циклическое, 512
Действие
– по Гамильтону, 613
– по Мопертюи, 617
Декремент затухания, 220
Диск, 509
Диссипация полная, 549
Дифференоморфизм, 189
Дифференциал
– (вариация) функционала, 599
– вращения, 117, 384
– оператора, 116

Длина приведенная, 458

Жесткость системы, 587

Задача
– двух тел, 258
– динамики
– – обратная, 169
– – прямая, 169
– – смешанная, 169
– изопериметрическая, 603
– краевая, 172
– о попадании, 264
– синтеза, 611
Закон
– Ньютона
– – второй, 160
– – первый, 156
– – третий, 161
– всемирного тяготения, 257
– движения
– – твердого тела, 81
– – точки, 76
– сохранения
– – механической энергии, 392
Законы Кеплера, 255

Импульсы обобщенные, 632
Инвариант
– интегральный
– – Пуанкаре, 660
– – Пуанкаре-Картана, 660
– – абсолютный, 663
– – относительный, 662
Инварианты
– системы
– – скользящих векторов, 38
Инерция системы, 587
Интеграл
– Ковалевской, 490
– Лапласа, 259
– первый, 174
– полный, 644

Касательная к траектории, 77
Квазикоординаты, 422
Квазискорости, 422
Квазиускорения, 422
Кватернион сопряженный, 111
Класс эквивалентности, 25
Колебания гармонические, 214
Количество движения, 160, 190, 380
Коммутатор, 327
Композиция
– вращений, 88
– линейных операторов, 20
Конфигурация системы, 304
Координаты
– векторные, 26
– главные, 575
– декартовы, 21
– криволинейные, 176
– лагранжевы, 350
– плюккеровы, 28
– позиционные, 557
– полярные, 178
– сферические, 178
– циклические, 556
– цилиндрические, 178
Коэффициент
– восстановления, 293
– трения
– – вязкого, 169
– – мгновенного, 293
– – сухого, 167
Кривая
– интегральная, 313
– фазовая, 189

Лагранжиан, 555

Линия
– апсид, 262
– силовая, 164
– узлов, 92
– цепная, 370

Максимум изолированный, 570
Масса, 160
– суммарная, 42
– точечная, 42
Матрица
– косоэрмитова, 103
– линейного оператора, 17
– монодромии, 238
– ортогональная, 18
– унитарная, 103
– эрмитова, 103
Матрицы Паули, 103
Маятник
– Фуко, 285
– математический, 226
– физический, 457
– циклоидальный, 231
Метод
– Имшенецкого, 651
– вариации постоянных, 233
– оскулирующих элементов, 697
Метрика
– евклидова, 15
Мир, 154
Многочлен
– характеристический, 49
Множество
– скользящих векторов,
– – сходящееся в точке, 29
Множитель Якоби, 672
Момент
– гироскопа собственный, 495
– гироскопический, 496
– инерции
– – относительно оси, 45
– – относительно плоскости, 61
– – относительно полюса, 61
– – центробежный, 46
– кинетический, 191, 380
– количеств движения, 380
– количества движения, 191
– пары, 31
– силы, 191
– скользящего вектора, 26
– – относительно оси, 29
– суммарный(главный), 37
Моменты инерции
– главные, 50
– – центральные, 52
Мощность силы, 195
Мультипликаторы, 239

Натяжение нити, 365
Неравенство
– Коши, 44
– Коши-Буняковского, 53
– Юнга, 629
Нить, 364
Норма
– кватерниона, 111
– функционала, 599
Нормаль главная, 79

Область
– определения
– – функционала, 603
Обруч, 509
Окружность
– соприкасающаяся, 79
Оператор
– линейный, 17
– – ортогональный, 18
– монодромии, 239
Орбита, 259
Оси
– Кёнига, 397
– естественные, 80
– инерции главные, 50
– – центральные, 52
– координат

– – декартовы, 21
Основание вектора, 26
Осциллятор
– гармонический, 211
– с вязким трением, 218
– с сухим трением, 215
Ось
– винта, 39
– винтовая, 129
– вращения, 114
– – мгновенная, 133
– – постоянная, 456
– – свободная, 456
– инерции главная, 49
– кинетическая гироскопа, 497

Пара
– вращений, 127
– результирующая, 39
– скользящих векторов, 31
Парабола безопасности, 174
Параболоид безопасности, 174
Параметры
– Кэли-Клейна, 106
– Родрига-Гамильтона, 112
– Эйлера, 97
Переменные
– действие-угол, 689
– канонические, 632
– сопряженные, 609
Перемещение
– виртуальное, 199, 335
– действительное, 199
Планиметр, 309
– полярный, 310
– прямолинейный, 310
– топориковый, 310
Плечо
– пары, 31
– скользящего вектора, 26
Плоскость
– Лапласа, 387
– пары, 31
– соприкасающаяся, 79
Поверхность
– интегральная, 313
– линейчатая, 130
– уровня, 163
Поле
– векторное, 15
– – гамильтоново, 638
– – параллельных сил, 165
– – силовое, 164
– – скоростей
– – – винтовое, 128
– – – вращательное, 121
– – – поступательное, 121
– – тяготения центральное, 167
– – упругой силы, 167
– – электростатическое, 167
Полодия, 468
Положение равновесия, 189, 304
Портрет фазовый, 189
Поток
– стационарный, 406
– фазовый, 189
Правило рычага
– второго рода, 41
– первого рода, 41
Преобразование
– Лежандра, 627
– каноническое, 680
– – однородное, 682
– – свободное, 684
– – унивалентное, 680
– обобщенное точечное, 682
Прецессия
– псевдорегулярная, 488
– регулярная, 472
Принуждение по Гауссу, 418
Принцип
– Гамильтона, 612
– Гаусса, 418
– Даламбера, 376
– Даламбера-Лагранжа, 378
– Мопертюй-Лагранжа-Якоби, 616

– Остроградского, 615
– Якоби, 619
– виртуальных перемещений, 343
– детерминированности, 160
– освобождения от связей, 197
– относительности, 157
Приход массы, 407
Произведение
– векторное, 23
– векторное двойное, 23
– скалярное, 15
– смешанное, 23
Производная
– в силу уравнений, 174
– вектора
– – относительная, 24
– – внешняя, 320
– по квазикоординате, 424
Пространство
– аффинное, 14
– галилеево, 154
– евклидово, 15
– конфигурационное, 333
– нормальное, 334
– фазовое, 188, 632
Псевдовектор, 124
Псевдоскаляр, 124

Работа силы
– на пути, 162
– элементарная, 162
Равновесие системы, 304
Радиус инерции, 457
Радиус кривизны, 79
Расстояние, 154
Расход массы, 407
Реакция связи, 197
Резонанс
– параметрический, 243
– частотный, 235
Репер
– декартов, 21
– локальный, 180
Ресурс энергетический, 392

Связи, 197
– голономные, 306
– идеальные, 338
– – при ударе, 432
– неголономные, 306
Связь
– геометрическая, 204
– дифференциальная, 198, 306
– – линейная, 202, 306
– идеальная, 199
– – при ударе, 292
– неудерживающая, 291, 305
– склерономная, 307
– стационарная, 306
– удерживающая, 306
Седло, 225
Сепаратриса, 230
Сила, 160
– активная, 198
– веса, 281
– диссипативная, 214
– дополнительная, 405
– инерции, 275
– – Даламбера, 376
– кориолисова, 275
– обобщенная, 181, 351, 425
– обобщенно потенциальная, 550
– отталкивающая, 224
– пассивная, 199
– переносная, 275
– потенциальная, 163
– реактивная, 410
– средняя, 291
– удельная, 364
Силы
– внешние, 381
– внутренние, 381
– гироскопические, 531
– диссипативные, 548
Система
– Чаплыгина, 531

– вполне интегрируемая, 314
– координат
– – галилеева, 156
– – правоориентированная, 22
– линейная, 594
– – позиционная, 572
– материальных точек, 304
– механическая, 157
– – изолированная, 157
– определенно диссипативная, 549
– отсчета, 156
– – инерциальная, 156
– скользящих векторов, 29
– – параллельных, 40
– сопряженная, 609
– статически неопределимая, 357
– уравнений
– – Гамильтона, 632
– – Лагранжа второго рода, 453
– – Пуассона, 134
– – Пфаффа, 313
– – Рауса, 566
– – Эйлера, 600
– – в вариациях, 698
Системы
– сил эквивалентные, 354
– эквивалентные, 30
Скобка Пуассона, 636
Скорость
– абсолютная, 118
– движения
– – поступательного, 120
– космическая
– – вторая, 261
– – первая, 261
– относительная, 118
– отражения, 292
– падения, 292
– переменной части, 409
– – относительная, 410
– переносная, 118
– секторная, 192
– средняя, 77
– точки, 77
– угловая, 120
– циклическая, 556
Случай
– Бобылёва-Стеклова, 492
– Гесса, 493
Событие, 154
Состояние
– механической системы, 159
Статика гемометрическая, 353
Структура галилеева, 154

Тело твердое, 81
Тензор
– инерции, 45
– – центральный, 51
– метрический, 16
Теорема
– Гюйгенса-Штейнера, 52
– Кориолиса, 140
– Лагранжа, 570
– Ляпунова, 568
– Ривальса, 141
– Штеккеля, 654
Точка
– кинетическая сопряженная, 614
– материальная, 156
– мировая, 154
– подвеса, 458
Траектория
– абсолютная, 118
– относительная, 118
– точки, 76
Трение
– вязкое, 168
– скольжения, 167

Углы
– Брайнта, 94
– Крылова, 94
– Эйлера, 91
– кардановы, 94
– корабельные, 94

– самолетные, 94
Угол
– нутации, 91
– отражения, 292
– падения, 292
– прецессии, 91
– собственного вращения, 91
– трения, 168
Удар, 290
– абсолютно неупругий, 292
– абсолютно упругий, 293
– упругий, 292
Узел, 224
Умножение
– тензорное, 57
Уравнение
– Гамильтона-Якоби, 643
– Кеплера, 263
– Лагранжа
– – с множителем, 201
– Матье, 248
– Мещерского, 409
– Хилла, 245
– движения маятника
– – математического, 226
– – физического, 458
– равновесия нити, 365
– характеристическое, 49
– частот, 574
Уравнения
– Воронца, 530
– Лагранжа
– – второго рода, 182, 540
– – первого рода, 380
– Уиттекера, 667
– Чаплыгина, 532
– Эйлера
– – динамические, 465
– – кинематические, 136
– движения
– – в координатах, 170, 180
– кинематические, 426
Ускорение, 78
– действительное, 418
– допустимое, 417
Условие Маиевского, 487
Условия краевые, 365
Усреднение, 394
Устойчивость по Ляпунову, 568

Фокус, 220
Формализм Лагранжа, 540
Формула
– Циолковского, 410
– Эйлера, 121, 407
Формулы Бине, 254
Формы базисные, 325
Функции в инволюции, 692
Функционал, 598
– дифференцируемый, 599
Функция
– Гамильтона, 632
– Лагранжа, 555
– Ляпунова, 569
– Рауса, 565
– Рэлея диссипативная, 549
– действия
– – по Гамильтону, 649
– знакоопределенная, 568
– знакопостоянная, 567
– обобщенная, 291
– пертурбационная, 696
– производящая, 683
– силовая, 163
– – обобщенная, 550
– сингулярная, 290

Центр, 213
– вращения, 133
– качания, 458
– масс, 42
– системы, 40
– скоростей, 133
– удара, 463
– ускорений, 145
Центроида

– неподвижная, 133
– подвижная, 133
Цилиндр фазовый, 231

Частота циклическая, 211
Число степеней свободы, 351

Шаг винта, 129
Широта
– астрономическая, 281
– геоцентрическая, 281

Экстремаль, 600
Эллипсоид
– безопасности, 265
– инерции, 47
– – центральный, 52
Энергия
– кинетическая, 380
– – точки, 181
– полная механическая, 195
– потенциальная, 391
– ускорений, 427