Голубев Юрий Филиппович.

Лекции.

Ю. Ф. Голубев. "Основы теоретич. механики". 2000 г.

A^n - аффинное (точечно - вект.) пр-во. 10.02.09

$\mathbb{R}^n$ - лин. вект. пр-во.

A, B. Соотв. единств. вектор $\overrightarrow{AB}$.

$A, \vec{c}$. Единств. точка B.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. $\quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

$(\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n)(\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n)\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. $\quad (\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n)(\exists (-\vec{a}) \in \mathbb{R}^n)\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$\alpha \vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. $\quad \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Скал. произв. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0$, $(\vec{a}\,\vec{a} = 0) \Longleftrightarrow (\vec{a} = \vec{0})$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

$\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ - базис $\quad \vec{b} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \vec{e}_j$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.

$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_i b_j g_{ij}$

$\vec{e}_i{}' = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} \vec{e}_k$, $\quad \vec{x} = \sum\limits_i x_i \vec{e}_i = \sum\limits_i x_i' \vec{e}_i{}'$, $\quad \vec{y} = \sum\limits_i y_i \vec{e}_i = \sum\limits_i y_i' \vec{e}_i{}'$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum\limits_{i,j} x_i y_j g_{ij} = \sum\limits_{i,j} x_i' y_i' g_{ij}'$, $\quad g_{ij}' = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}'$

$e_i' \cdot e_j' = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} g_{kl} = g_{ij}'$

$\sum\limits_i x_i \vec{e}_i = \sum\limits_j x_j \vec{e}_j{}' = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j' a_{ij} e_i \quad x_i = \sum\limits_j a_{ij} x_j'$, $\quad y_i = \sum\limits_j a_{ij} y_j'$.

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i' y_j' g_{ij}' = \sum x_i' y_j' \sum a_{ki} a_{lj} g_{kl} = \sum\limits_{k,l} g_{kl} x_k y_l$.

$G = (g_{ij})$ - метрич. тензор 2-ого ранга, если $\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} g_{kl} = g_{ij}'$.

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ - ортогональность. $\quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 1$ - нормировка

Линейные операторы. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

1. $\mathcal{A}(\lambda \vec{x}) = \lambda \mathcal{A}\vec{x}$. $\quad$ 2. $\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$. $\quad \mathcal{A}\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i)$.

$\vec{e}_i = \sum_k a_{ki}\vec{e}_k$. $\mathcal{A}$ задаётся матрицей (a_{ki})

Преобразов., не меняющее метрич. тензора, назыв. движ. метрики

$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{lj}g_{kl} = g_{ij}$, $A^T G A = G$.

Возьмем такой базис, что $G = E$. $A^T A = E$. $A^T = A^{-1}$. Ортогональная матрица.

$\vec{e}_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\vec{e}_k$, $\vec{e}_i'\vec{e}_j' = \delta_{ij}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$C^T C = 1$.

$$\mathcal{A}\underbrace{\vec{e}_i'}_{=\sum_k c_{ki}\vec{e}_k} \cdot \mathcal{A}\overbrace{\vec{e}_j'}^{=\sum_k c_{kj}e_k} = \left(\sum_k c_{ki}\mathcal{A}\vec{e}_k\right)\left(\sum_k c_{kj}\mathcal{A}\vec{e}_k\right) = \sum_k\sum_l c_{ki}c_{lj}\,\mathcal{A}\vec{e}_k\cdot\mathcal{A}\vec{e}_l =$$

$$= \sum_k\sum_l c_{ki}c_{lj}\delta_{ij}.$$

Матрица ортогональна тогда и только тогда, когда она переводит ОНБ в ОНБ.

$$\mathcal{A}\vec{e}_i \cdot \mathcal{A}\vec{e}_j = \left(\sum_k a_{ki}\vec{e}_k\right)\left(\sum_k a_{kj}\vec{e}_k\right) = \sum a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$$

$\det(A^T A) = 1$, $(\det A)^2 = 1$.

Композиция $C = A \circ B \to \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x})$.

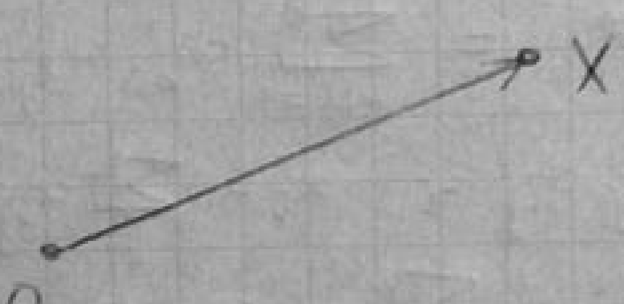
$C = AB$. $C^T C = B^T \underbrace{A^T A}_{=E} B = E$, A и B ортогональны.

O^n – группа ортогональных матриц. $O(n)$.

$SO(n)$ – группа ортогональных матриц с $\det A = 1$.

A^3. $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$.



$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = |x|\cdot|y|\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$

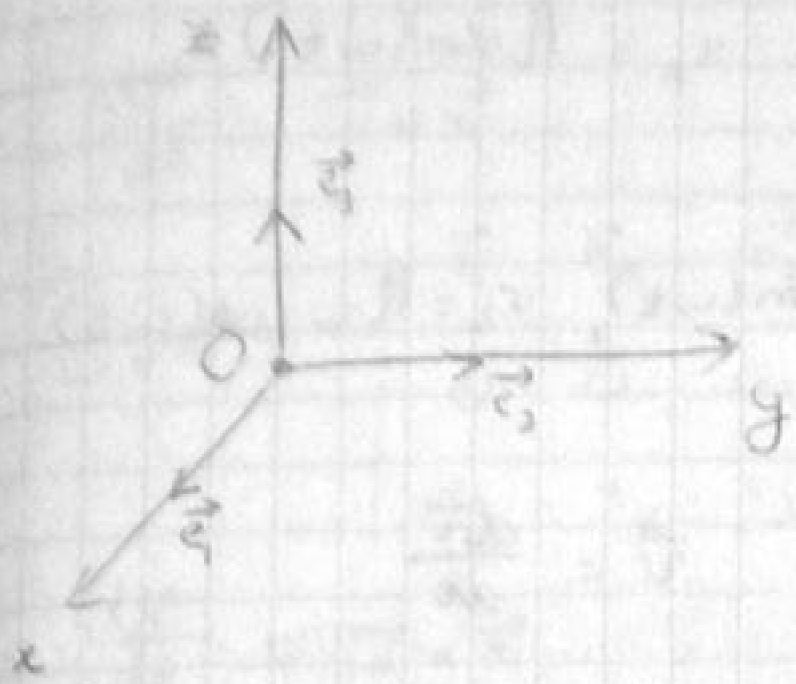
$$\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Векторное произведение. $\vec{x}\times\vec{y}$. Билин. кососимм. операция

$\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$, $\lambda\vec{x}\times\vec{y} = \lambda(\vec{x}\times\vec{y})$, $(\vec{x}+\vec{y})\times\vec{z} = (\vec{x}\times\vec{z}) + (\vec{y}\times\vec{z})$.

$\vec{x} = \sum_i x_i\vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_j y_j\vec{e}_j$. $\vec{x}\times\vec{y} = \sum_{i,j} x_i y_j(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)$

Правоориентир. сист. коорд



$$\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3 = -\vec e_2 \times \vec e_1,$$
$$\vec e_3 \times \vec e_1 = \vec e_2 = -\vec e_1 \times \vec e_3,$$
$$\vec e_2 \times \vec e_3 = \vec e_1 = -\vec e_3 \times \vec e_2.$$

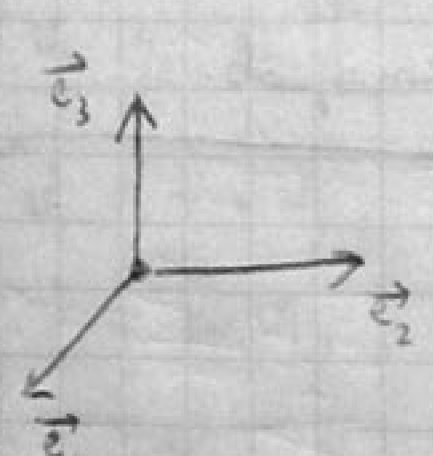
$$\vec x \times \vec y = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec x \cdot (\vec x \times \vec y) = \vec y \cdot (\vec x \times \vec y) = 0, \quad |\vec x \times \vec y| = |\vec x| \cdot |\vec y| \sin(\widehat{\vec x, \vec y})$$

$$\vec z \cdot (\vec x \times \vec y) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec z \times (\vec x \times \vec y) = \vec x (\vec z \cdot \vec y) - \vec y (\vec z \cdot \vec x).$$

$$(\mathcal A \vec x \cdot \mathcal A \vec x) = \Big(\mathcal A \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec e_i\Big)\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal A \vec e_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \ \mathcal A \text{ ортогонален.}$$



Репер

$$\vec a = a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3.$$
$$a_i = a_i(t), \ i = 1,2,3.$$
$$\frac{d\vec a}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{da_i}{dt} \vec e_i$$ – производная относит. репера $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$.

$$\frac{d}{dt}(\vec a \cdot \vec b) = \frac{d\vec a}{dt} \vec b + \vec a \frac{d\vec b}{dt}$$ (если метрика не зависит от времени)

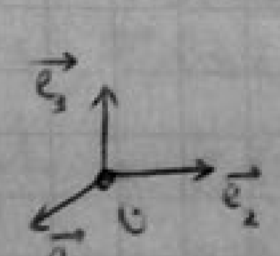
$$\frac{d}{dt}(\vec a \times \vec b) = \frac{d\vec a}{dt} \times \vec b + \vec a \times \frac{d\vec b}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\vec a \cdot \vec a) = \frac{d}{dt}(|a|^2) = 2|a| \frac{d}{dt}(|a|).$$

Кинематика точки.

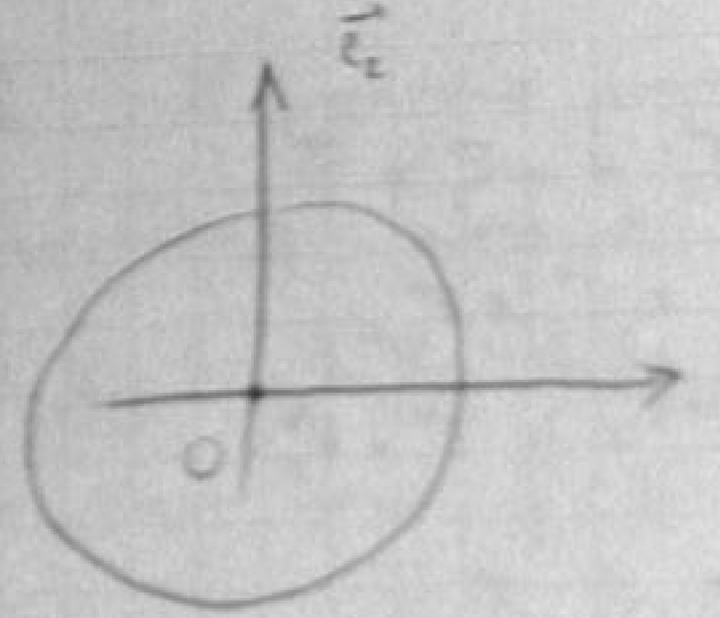
1. Точка.

$\vec r = \vec r(t)$ Пусть $O \vec e_1 \vec e_2 \vec e_3$ – неподвижный репер.



Закон движ.

$\vec r(t+\delta) - \vec r(t) = \Delta \vec r(t, \delta)$. $\vec v_{ср} = \dfrac{\Delta \vec r(t,\delta)}{\delta}$ – ср. скор. на отрезке $[t, t+\delta]$



$r_1 = R\cos(\omega t)$, $r_2 = R\sin(\omega t)$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$v_1 = -R\omega\sin(\omega t)$, $v_2 = R\omega\cos(\omega t)$

$\vec{v}_{мгн}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t,\varepsilon)}{\varepsilon}$ – мгновенная скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Скор. направл. по касат. к траект.

$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}} = \sqrt{\frac{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}{dt^2}} = \frac{ds}{dt}$, s – длина пути по дуге

Если $\vec{v}$ пост., то движ. равномерно.

$\vec{v}(t)$ задано $\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)\,d\tau + \vec{r}_0$ Для равном. движ. $\vec{r}(t) = (t-t_0)\vec{v} + \vec{r}_0$

$\vec{w}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{w}(t)$ задано

$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{w}(\tau)\,d\tau + \vec{v}(t_0)$,

$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} \vec{w}(s)\,ds\,d\tau + (t-t_0)\vec{v}(t_0) + \vec{r}(t_0)$

Годограф скорости

Годограф скоростей – множество коорд. векторов концов этих перемен. векторов

Трехгранник Френе

$\vec{v} = v\vec{\tau}$ $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$, $\vec{\tau}$ – касат. к траект. вектор

ρ – радиус кр.

$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$

$\vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{\nu}\frac{1}{\rho}$, $\vec{\nu}$ – главная нормаль

$\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0$ $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ – соприкасающаяся плоскость

ρ – радиус кривизны (радиус соприкас. плоскости)

$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\nu} + 0\vec{\beta}$

$\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu}$ $|\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$

$\vec{r} = r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + r_3\vec{e}_3$

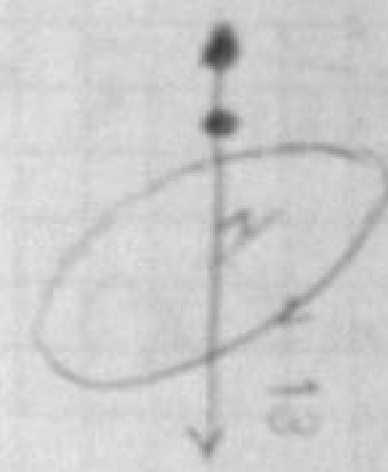
$r_1 = R\cos(\omega t)$, $r_2 = R\sin(\omega t)$, $r_3 \equiv a$

$\dot{r}_1 = v_1 = -R\omega\sin(\omega t)$, $\dot{r}_2 = v_2 = R\omega\cos(\omega t)$, $\dot{r}_3 = 0$

$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e_3}$.

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \vec{e_1}(-r_2\omega) + \vec{e_2}\,\omega r_1 + 0\,\vec{e_3}$$



$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$

$(\vec{w} \perp \vec{v}) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$.

$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\nu}$, $|\vec{w}| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \frac{v^2}{\rho}$

$$\rho = \frac{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}{v^2} = \frac{|\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}})}{v^2} = \frac{\omega}{v} \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) \leq R$$

$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e_3}$

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{e_1}(-\omega v_2) + \vec{e_2}(\omega v_1) + 0\,\vec{e_3}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\omega v_2, \\ \dot{v}_2 = \omega v_1, \\ \dot{v}_3 = 0 \end{cases} \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$$

Кинематика твердого тела

Тв. телом назыв. такое мн-во точек, расстояние между любыми двумя из которых неизменно в процессе движения.

Лемма. Законы движ. трех точек тв. тела, не лежащих на одной прямой, определяют закон движ. тв. тела.

Док-во $\vec{r_1}(t), \vec{r_2}(t), \vec{r_3}(t)$ $\vec{R_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, $\vec{R_2} = \vec{r_3} - \vec{r_1}$

$\frac{d|\vec{R_1}|}{dt} = \frac{d|\vec{R_2}|}{dt} = d(\vec{R_1}, \vec{R_2}) = 0$

$\vec{e_3} = \frac{\vec{R_1} \times \vec{R_2}}{|\vec{R_1} \times \vec{R_2}|}$.

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r_1} = \lambda_1\vec{R_1} + \lambda_2\vec{R_2} + \lambda_3\vec{e_3} \;\big|\; \cdot \vec{R_1}$

$\vec{R} \cdot \vec{R_1} = \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 \vec{R_2} \cdot \vec{R_1}$ | Определитель равен $R_1^2 R_2^2(1 - \cos^2(\widehat{\vec{R_1}, \vec{R_2}})) =$

$\vec{R} \cdot \vec{R_2} = \lambda_1 \vec{R_1} \cdot \vec{R_2} + \lambda_2 R_2^2$ | $= |\vec{R_1} \times \vec{R_2}|^2$

λ_1, λ_2 не зав. от времето, λ_3 не зависи от времето

$\vec{r}(t) = \lambda_1 \vec{R}_1 + \lambda_2 \vec{R}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 + \vec{r}_1(t)$

Теорема. Закон движ. на твърдо тяло [illegible]

$\underbrace{\vec{r}(t) = A(t)\vec{x} + \vec{\xi}(t)}_{\text{орт. преобразув.}}$, $A(t)\, A^T(t) = E$ ($A(t)$ ортогонална),

$\vec{\xi}(t)$ не зав. от точката

Док-во $\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{R}_1 \times \vec{R}_2}{|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2|}$, $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|}$, $\vec{r}(t) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 + \vec{r}_1(t)$,

$\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$

$x_1 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \cos(\widehat{\vec{R}_1, \vec{R}_2})$,

$x_2 = \lambda_2 R_2 \cos(\widehat{\vec{R}_1, \vec{R}_2})$

$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = \vec{e}_2$, $A\vec{e}_3 = \vec{e}_3$,

$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i A \vec{e}_i + \vec{\xi}(t) = A \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i + \vec{\xi}(t)$

$\vec{e}_1(t)$, $\vec{e}_2(t)$, $\vec{e}_3(t)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = A^{T}$$

$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$

$(\exists \varphi \in [0, 2\pi)) \quad a_{11} = \cos\varphi, \; a_{21} = \sin\varphi$

$$\left[\begin{array}{l} a_{12} = -\sin\varphi, \; a_{22} = \cos\varphi, \\ a_{12} = \sin\varphi, \; a_{22} = -\cos\varphi \end{array}\right.$$

$\det A = \pm 1$

1. $\det A = 1, \; \lambda = -1$

a) $$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

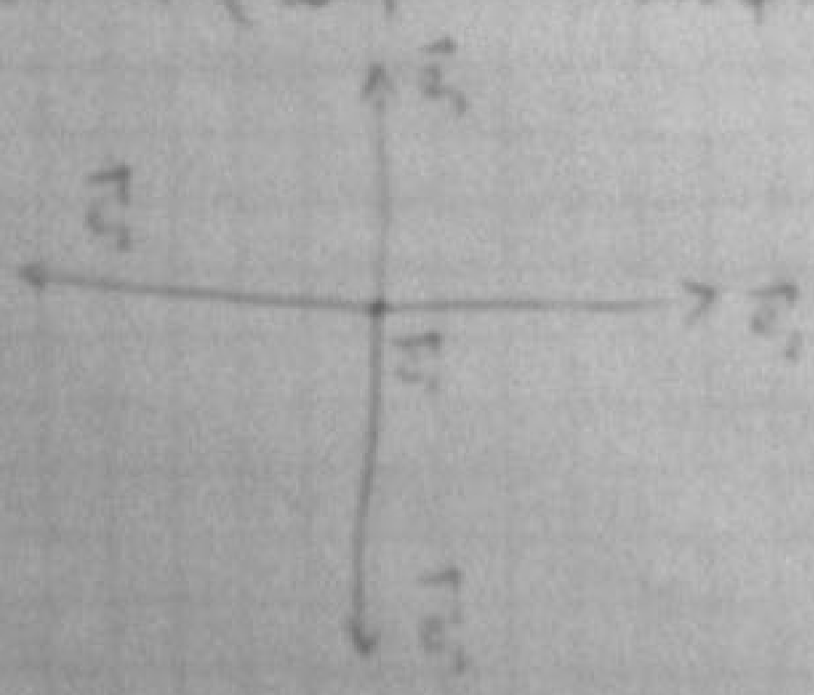
б) $\det A = 1, \; \lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

характеристическое уравнение

$(\cos\varphi - \lambda)(\cos\varphi + \lambda)(1+\lambda) + (1+\lambda)\sin^2\varphi = 0,$

$(1+\lambda)(\cos^2\varphi - \lambda^2 + \sin^2\varphi) = 0, \quad (1+\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $\det A = -1$

a) $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

зеркальное отражение

б) $\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

правая система координат переходит в левую.

Угловые координаты твердого тела

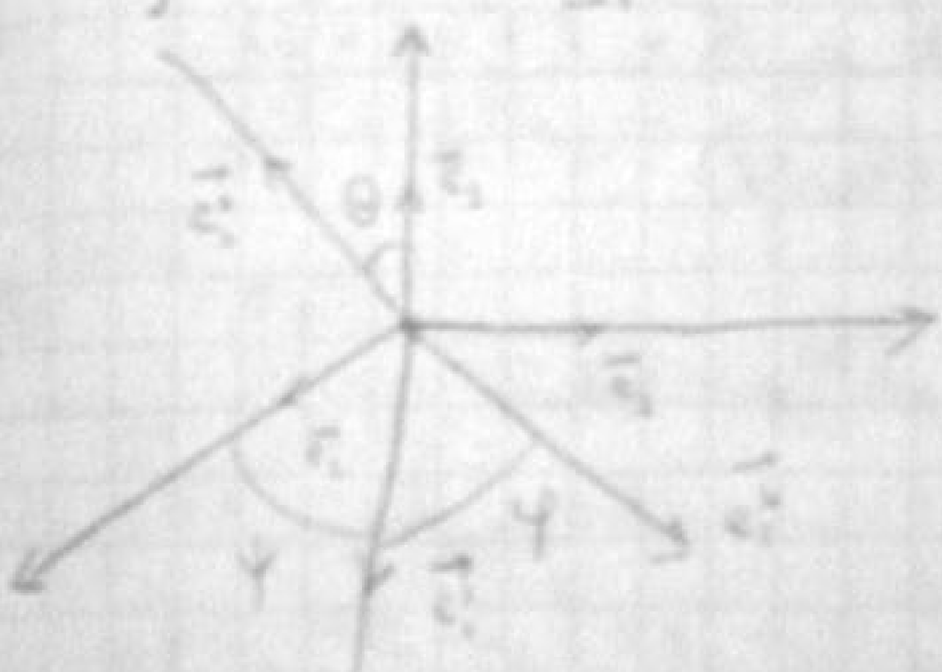
Композиция ортогональных операторов

$A_1 \circ A_2 \qquad A_1(A_2\vec{x})$

$A_1: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \longrightarrow \vec{e}^{\,1}_1, \vec{e}^{\,1}_2, \vec{e}^{\,1}_3 \qquad \vec{e}^{\,1}_k = \sum_i a^1_{ki}\vec{e}_i$

$A_2: \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \longrightarrow \vec{e}^{\,2}_1, \vec{e}^{\,2}_2, \vec{e}^{\,2}_3 \qquad \vec{e}^{\,2}_k = \sum_{i} a^2_{ki}\, e$

$A_1(A_2\vec{e}_k) = A_1\left(\sum_{i=1}^{3} a^2_{ki}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{3} a^2_{ki}\vec{e}^{\,1}_i$



Пусть $\Theta \neq 0$.

$\vec{e}^{\,1}_1 = \dfrac{\vec{e}_3 \times \vec{e}^{\,3}_3}{|\vec{e}_3 \times \vec{e}^{\,3}_3|}$, $\vec{e}^{\,1}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}^{\,1}_1$, $\vec{e}^{\,1}_3 = \vec{e}_3$,

$\vec{e}^{\,2}_1 = \vec{e}^{\,1}_1$, $\vec{e}^{\,2}_2 = \vec{e}^{\,3}_2$, $\vec{e}^{\,2}_3 = \vec{e}^{\,3}_3$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

φ, θ, ψ — углы Эйлера

φ — угол прецессии,

θ — угол нутации,

ψ — угол собств. вращ.

Теорема. Углы Эйлера определ. произв. полож. твердого тела

Кинематич. ур-я Эйлера

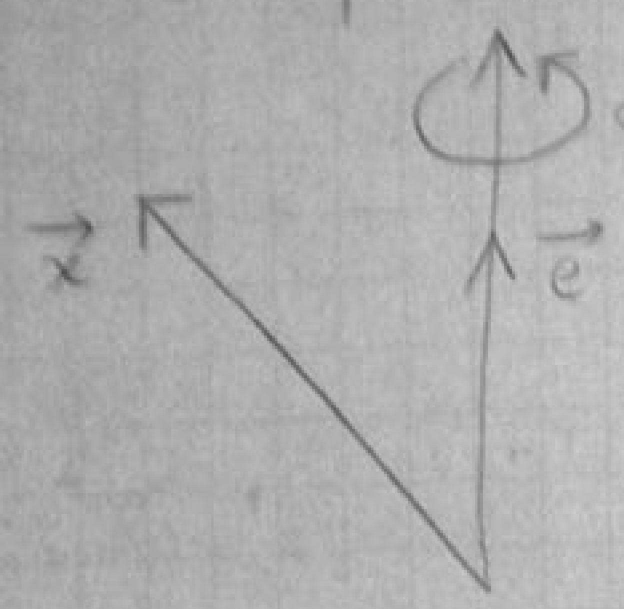
$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \dot{\theta}\vec{e}^{\,(1)}_1 + \dot{\psi}\vec{e}^{\,(3)}_3$

$\vec{\omega} = p\vec{e}^{\,3}_1 + q\vec{e}^{\,3}_2 + r\vec{e}^{\,3}_3$

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ q = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ r = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = p\cos\theta - q\sin\theta, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{1}{\sin\theta}(p\sin\theta + q\cos\theta), \\ \dot{\psi} = r - \dot{\varphi}\cos\theta. \end{cases}$$

Кватернионы

1 Эйлеров поворот



$\vec e_3 = \vec e$, $\vec e_2 = \dfrac{\vec e\times\vec x}{|\vec e\times\vec x|}$, $\vec e_1 = \dfrac{(\vec e\times\vec x)\times\vec e}{|\vec e\times\vec x|}$

$\vec r = (\vec e\cdot\vec x)\vec e + (\vec e_1\cos\alpha + \vec e_2\sin\alpha)\,|\vec e\times\vec x|$,

$\vec r = (\vec e\cdot\vec x)\vec e + (-\vec e\times(\vec e\times\vec x))\cos\alpha + (\vec e\times\vec x)\sin\alpha$

$\vec e\times(\vec e\times\vec x) = \vec e(\vec e\cdot\vec x) - \vec x$, $\quad \vec e(\vec e\cdot\vec x) = \vec x + \vec e\times(\vec e\times\vec x)$

$\vec r = \vec x + (\vec e\times\vec x)\sin\alpha + (\vec e\times(\vec e\times\vec x))(1-\cos\alpha)$

$\vec\lambda = \vec e\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\quad q_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\vec r = \vec x + 2q_0(\vec\lambda\times\vec x) + 2\vec\lambda\times(\vec\lambda\times\vec x)$

$(q_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\quad q_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = 1$

Этими четырьмя параметрами описыв. произв. движ. твёрдого тела. Параметры Эйлера.

Связь параметров Эйлера с A.

$\vec\lambda = q_1\vec e_1 + q_2\vec e_2 + q_3\vec e_3$

$\vec e_i' = \vec e_i + 2q_0(\vec\lambda\times\vec e_i) + 2(\vec\lambda\times(\vec\lambda\times\vec e_i)) \quad | \vec e_j$

$a_{ij} = \vec e_i'\cdot\vec e_j = \vec e_i\cdot\vec e_j + 2q_0\vec\lambda(\vec e_i\times\vec e_j) + 2(\vec\lambda(\vec\lambda\cdot\vec e_i) - \vec e_i\lambda^2)\vec e_j$

$i=1,\ j=1.$

$a_{ii} = 1 + 2(q_i^2 - (q_1^2+q_2^2+q_3^2)).$

$a_{11} = 1-2(q_2^2+q_3^2) = q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2-2q_2^2-2q_3^2 = q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 = q_0^2+q_1^2-1$

$a_{22} = q_0^2+q_2^2-1$

$i\neq j,\ i=1,\ j=2.$

$a_{ij} = 2q_0q_3 \qquad 2q_0(\vec\lambda\times\vec e_1)\vec e_2 = 2q_0\vec\lambda\,\vec e_1\times\vec e_2.$

$\vec r = \vec x + 2q_0[\vec\lambda, \vec x] + 2[\vec\lambda, [\vec\lambda, \vec x]]$

$\vec\lambda = q_1\vec e_1 + q_2\vec e_2 + q_3\vec e_3$, $\quad q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 = 1$

$\psi \to \vec\lambda_\psi = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\vec e_3 \qquad \theta\to\vec\lambda_\theta = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec e_1 \qquad \varphi\to\vec\lambda_\varphi = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec e_3$

Кватернионы.

$h = q_0 + q_1\vec i + q_2\vec j + q_3\vec k.$

$\vec i\circ\vec j = \vec k = -\vec j\circ\vec i, \quad \vec j\circ\vec k = \vec i = -\vec k\circ\vec j$

$\vec{k} \circ \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \circ \vec{k}, \quad \vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = -1$

$h = q_0 + h_q$

$h_q \Leftrightarrow q_1 \vec{i}_1 + q_2 \vec{i}_2 + q_3 \vec{i}_3$

$h_a \circ h_b = h_{[\vec{a}, \vec{b}]} - (\vec{a}, \vec{b}) \qquad h_a \Leftrightarrow \vec{a}, \; h_b \Leftrightarrow \vec{b}$

$h_b \circ h_a = h_{[\vec{b}, \vec{a}]} - (\vec{a}, \vec{b}) \qquad h_{[\vec{a}, \vec{b}]} = \frac{1}{2}(h_a \circ h_b - h_b \circ h_a) \quad h_b \circ h_a =$

$= h_{[\vec{b}, \vec{a}]} - (\vec{a}, \vec{b}) \qquad (\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2}(h_a \circ h_b + h_b \circ h_a)$

$\bar{h} = q_0 - h_q, \quad h_1 = q_0^{(1)} + h_{q_1}, \quad h_2 = q_0^{(2)} + h_{q_2}$

$\overline{h_1 \circ h_2} = \overline{q_0^{(1)} q_0^{(2)} + q_0^{(2)} h_{q_1} + q_0^{(1)} h_{q_2} + h_{q_1} \circ h_{q_2}} = q_0^{(1)} q_0^{(2)} - (\vec{q}_1, \vec{q}_2) - q_0^{(2)} h_{q_1} -$

$- q_0^{(1)} h_{q_2} - h_{[\vec{q}_1, \vec{q}_2]}$

$\bar{h}_2 \circ \bar{h}_1 = q_0^{(2)} q_0^{(1)} - (\vec{q}_2, \vec{q}_1) - q_0^{(1)} h_{q_2} - q_0^{(2)} h_{q_1} + h_{[\vec{q}_2, \vec{q}_1]}$

$\overline{h_1 \circ h_2} = \bar{h}_2 \circ \bar{h}_1 \qquad \bar{h}_q = -h_q$

$h \circ \bar{h} = (q_0 + h_q)(q_0 - h_q) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ – модуль кватерниона

Мн-во кватернионов с равным 1 модулем обозначим H

$h_z = h \circ h_x \circ \bar{h}, \quad \bar{h}_z = h \circ \bar{h}_x \circ \bar{h} = -h_z, \quad h \in H_1, \; h_x \in H_0$

$H_0: \; h_x \in H_0 \Leftrightarrow \bar{h}_x = -h_x$

$h_z \circ \bar{h}_z = (h \circ h_x \circ \bar{h}) \circ h \circ \bar{h}_x \circ \bar{h} = h \circ h_x \circ \bar{h}_x \circ \bar{h} = x^2$

$h_z = (q_0 + h_q) \circ h_x \circ (q_0 - h_q) = (q_0 + h_q)(q_0 h_x - h_x \circ h_q) = q_0^2 h_x + q_0(h_q \circ h_x$

$- h_x \circ h_q) - h_q^2 (h_x \circ h_q) = - h_q \circ (h_x \circ$

$h_z = 2q_0 h_{[\vec{q}, \vec{x}]} + x + \sum_{i=1} 2q_i h +$

$h_z = h \circ h_x \circ \bar{h}, \quad h \in H_1, \; h \in H_0 \qquad h_z \in H_0$

$h_1 h_2$ композиция вращений

$h_z' = h_1 h_2 \bar{h}_1, \quad h_z = h_2 h_z^{(1)} \bar{h}_2 = h_2 \circ h_1 \circ h_x \circ \bar{h}_1 \circ \bar{h}_2 \qquad h = h_2 \circ h_1, \; \bar{h} = \bar{h}_1 \circ \bar{h}_2$

$h_z = h \circ h_x \circ \bar{h}, \quad h_x = \bar{h} \circ h_z \circ h$

$h_\psi = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \vec{k}\sin\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad h_\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \vec{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad h_\varphi = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{k}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$h = h_\psi h_\theta h_\varphi$

Кватернионы.

$$h_r = h\circ h_x\circ \bar h,\quad h_v = \dot h_r = \dot h\circ h_x\circ\bar h + h\circ h_x\circ\dot{\bar h} = \dot h\circ\bar h\circ h_r\circ h\bar h +$$

$$+ h\circ\bar h\circ h_r\circ h\circ\dot{\bar h} = \dot h\circ\bar h\circ h_r + h_r\circ h\circ\dot{\bar h} = \underbrace{\dot h\circ\bar h}_{=h_\Omega}\circ h_r - h_r\circ\underbrace{\dot h\circ\bar h}_{=h_\Omega} =$$

$$= 2h_{(\Omega\times r)} = h_{[\omega\times r]}\qquad \vec\omega\to h_\omega$$

$$2\dot h\circ\bar h = h_\omega$$

$$\boxed{\dot h = \frac{1}{2}h_\omega\circ h}$$

Динамика системы матер. точек

Матер. точкой назыв. тело, для которой справедлив второй з-н Ньютона.

Принцип детерминированности.

$m_\nu,\ \vec r_\nu,\ \vec v_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots,N.$

$$\underbrace{m_\nu\ddot{\vec r}_\nu = m_\nu\dot{\vec v}_\nu = \vec F_\nu}_{\text{аксиома}}\qquad \vec F_\nu = \vec F_\nu(\vec r_1,\ldots,\vec r_N,\vec v_1,\ldots,\vec v_N,t)$$

Связи

$$\varphi_i(\vec r_1,\ldots,\vec r_N,\vec v_1,\ldots,\vec v_N,t) = 0,\ i=\overline{1,m},\ m<3N$$

Идеальн. связи (неосвобождающие связи)

$$\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right| \neq 0.$$

$$f_i(\vec r_1,\vec r_2,\ldots,\vec r_N,t)=0\qquad \frac{df_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial\vec r_\nu}\dot{\vec r}_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$$

$$m_\nu\ddot{\vec r}_\nu = \vec F_\nu + \vec R_\nu$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec r_\nu}\vec v_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec v_\nu}\dot{\vec v}_\nu + \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{m_\nu}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec v_\nu}\vec R_\nu = B_i = -\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec r_\nu}\vec v_\nu - \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} - \sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{m_\nu}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec v_\nu}\vec F_\nu$$

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec v_\nu}\right)\neq 0$$

$$m_\nu\ddot{\vec r}_\nu = \vec F_\nu + \vec N_\nu$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{m_\nu}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\vec v_\nu}\vec N_\nu = B_i,\ i=\overline{1,m},\ m<3N$$

$$\vec x = (x_1, x_2, \ldots, x_{3N})$$

$$x_i = \frac{\vec{N_\nu} \cdot \vec{e_k}}{\sqrt{m_\nu}}, \quad i = k + 3(\nu - 1)$$

$$\vec{a_i} = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,3N}), \quad a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v_\nu}} \vec{e_k}, \quad j = k + 3(\nu - 1)$$

$$\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{3N}), \quad \delta_i = \sqrt{m_\nu}\, \delta \vec{r_\nu} \cdot \vec{e_k}, \quad i = k + 3(\nu-1)$$

$$\vec{a_i}\, \vec{x} = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

Будем искать решение этой сист. в виде

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{a_j} + \vec{x_\tau}, \quad \vec{x_\tau} \cdot \vec{a_i} = 0, \quad i = \overline{1,3N}$$

$$\sum \vec{a_i} \cdot \vec{a_j}\, \lambda_j = b_i, \quad \vec{a_\tau} \cdot \vec{x_i} = 0$$

$A = (a_{ij}) = (\vec{a_i} \cdot \vec{a_j})$, $\det A \neq 0$ ($\vec{a_i}$ независимы)

Связи идеальны, если лин. оболочка $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{a_j} = \vec{0}$

$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v_\nu}} \delta \vec{r_\nu} = 0$. Вариации $\delta \vec{r_\nu}$, удовлетвор. этому равенству, назыв. виртуальными перемещениями. T - пр-во вирт перемещ.

$$\vec{x} \cdot \vec{\delta} = 0 \quad \forall \vec{\delta} \in T$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{N_\nu}\, \delta \vec{r_\nu} = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r_\nu}, \nu = \overline{1,N}\} \in T$$ идеальные связи.

Правило множит. Лагранжа.

$$\lambda_i \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v_\nu}} \delta \vec{r_\nu} = 0, \quad i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\vec{N_\nu} - \sum \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v_\nu}} \right) \delta \vec{r_\nu} = 0$$

$$\underbrace{\vec{N_\nu} = \sum \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v_\nu}}}_{\text{виртуальные перемещения}}$$

1. Геометрические связи

$$f(\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_N}, t) = 0$$

$$\varphi_i = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r_\nu}} \vec{v_\nu} + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad \sum \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r_\nu}} d\vec{r_\nu} + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v_\nu}} = \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r_\nu}}, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r_\nu}} \delta \vec{r_\nu} = 0 \quad \{d\vec{r_\nu}, \nu = \overline{1,N}\} \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$$

2. Линейные по скоростям дифференц. связи.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{A_{i\nu}}\, \vec{v_\nu} + B_i = 0, \quad \sum \vec{A_{i\nu}}\, d\vec{r_\nu} + B_i\, dt = 0$$

$\vec{A}_{i\nu} = \vec{A}_{i\nu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$, $\quad B_i = B_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} = A_{i\nu} \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{N} \vec{A}_{i\nu} \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0.$$

$$\{d\vec{r}_\nu, \ \nu = \overline{1, N}\} \in T \Rightarrow B_i = 0$$

Тв. тело.

$$\vec{r}_i, \vec{r}_j \quad (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = l_{ij}^2, \quad (\vec{r}_i - \vec{r}_j)(\delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j) = 0,$$

$$N_{ij} = \lambda(\vec{r}_j - \vec{r}_i),$$

$$N_{ji} = \lambda(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

$$N_{ij}\,\delta\vec{r}_j + N_{ji}\,\delta\vec{r}_i = \lambda(\vec{r}_j - \vec{r}_i)\,\delta\vec{r}_j + \lambda(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,\delta\vec{r}_i = \lambda(\vec{r}_j - \vec{r}_i)(\delta\vec{r}_j - \delta\vec{r}_i) =$$
$$= 0.$$

Принцип (идеальные) виртуальных перемещений.

Пусть связи обладают свойствами

1) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$,

2) $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N) = 0$, $\ \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, 0, 0, \dots, 0) = 0$,

тогда система находится в равновесии в том и только том случае, если

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu\, \delta\vec{r}_\nu = 0 \quad \forall \{\delta\vec{r}_\nu, \ \nu = \overline{1, N}\} \in T$$

"Золотое правило механики".

Док-во. Необход. $\vec{F}_\nu + \vec{N}_\nu = \vec{0} \ \big|\cdot \delta\vec{r}_\nu$. $\quad \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu\,\delta\vec{r}_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{N}_\nu\,\delta\vec{r}_\nu = 0.$

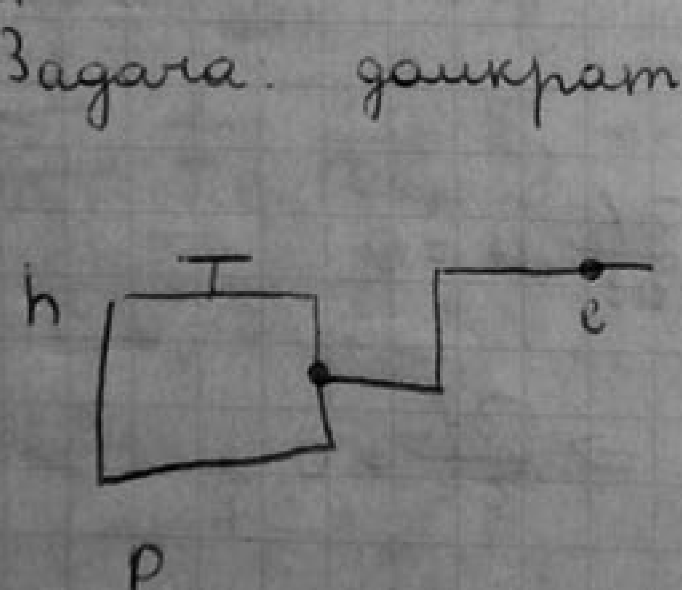
Достаточность. $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{r}_\nu}\vec{v}_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{N} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu}\vec{w}_\nu = 0$.

$$\sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu}\vec{w}_\nu = 0, \quad \delta\vec{r}_\nu = \alpha\vec{w}_\nu.$$

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{N}_\nu \ \big|\cdot\delta\vec{r}_\nu \qquad \alpha\sum m_\nu w_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\vec{N}_\nu\,\delta\vec{r}_\nu.$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{N}_\nu\,\delta\vec{r}_\nu = \alpha\sum m_\nu w_\nu^2 \neq 0.$$

Задача. домкрат.

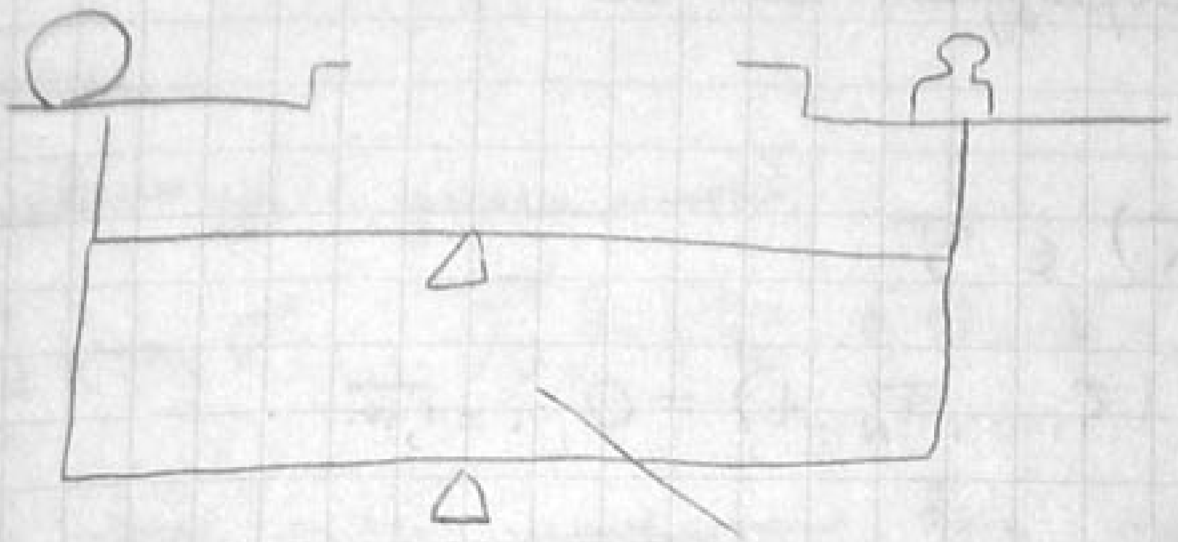


$$\boxed{\begin{matrix} h - 2\pi \\ \delta x - \delta\varphi \end{matrix}} \qquad \delta x = \frac{h\,\delta\varphi}{2\pi}$$

$$-P\,\delta x + F l\,\delta\varphi = 0,$$

$$-P\frac{h}{2\pi} + Fl, \qquad F = \frac{Ph}{2\pi l}$$

Рычажные весы.



параллелограмм

Силы потенциальные. $\exists\, U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N): \quad \vec{F}_\nu = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu}$.

$$\sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu}\, \delta \vec{r}_\nu = 0, \quad \delta U = 0.$$

Принцип Торричелли.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu}.$$ Центр масс приним. стацион. положение.

Лагранжевы координаты системы.

$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, \dots, q_n, t)$ удовлетвор. связям при любых $q_1, \dots, q_n$

$$\underbrace{\delta \vec{r}_\nu = \sum \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\, \delta q_i \quad (\forall q)}_{\text{проверить}}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu\, \delta \vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\, \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

Обобщённые силы. $Q_i = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \ i = \overline{1,n}$.

Структура виртуальных перемещений твёрдого тела.

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu, \quad \boxed{\delta \vec{r}_\nu = \delta \vec{r}_0 + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_\nu}.$$

Условия равновесия твёрдого тела (геометрич. статика).

$$\sum \vec{F}_\nu (\delta \vec{r}_0 + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_\nu) = 0;$$

$$\sum (\vec{F}_\nu\, \delta \vec{r}_0 + \delta \vec{\varphi} \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu) = 0,$$

$$\delta r_0 \sum \vec{F}_\nu + \delta \varphi \cdot \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \equiv 0.$$

$\varphi_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N, t) = 0, \; i = \overline{1,m}$

$\sum\limits_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} \delta \vec{r}_\nu = 0$ Все решения образуют мн-во T

$\sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{R}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0 \quad \forall\, (\delta \vec{r}_\nu, \nu = \overline{1,N}) \in T$

1. Геометрические связи. $f_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0, \; i = \overline{1,m}$

$n = 3N - m$

$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1, \ldots, q_n, t)$.

$f_i\left(\vec{r}_1(q_1, \ldots, q_n, t), \ldots, \vec{r}_N(q_1, \ldots, q_n, t), t\right) \equiv 0$

$\frac{\partial f_i}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_\nu} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} = 0 \; \Big| \; \delta q_k,$

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_\nu} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \delta q_k \right) = 0$$

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \delta q_k$$

квазискорости

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_\nu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n, t),$$

$\varphi_i\left(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n, t), \ldots, \vec{v}_N(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n, t)\right.$
$\left. t\right) \equiv 0$.

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \dot{\pi}_k} = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{\pi}_k} = 0 \; \Big| \; \delta \pi_k$.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{\pi}_k} \delta \pi_k = 0$$

$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$.

$\delta \vec{r}_\nu = \delta \vec{r}_0 + \delta\varphi \, \vec{e} \times \vec{r}_\nu$

$\sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0 \quad \forall\, (\delta \vec{r}_\nu, \nu = \overline{1,N}) \in T$

Для твердого тела

$$\sum \vec{F}_\nu (\delta \vec{r}_0 + \delta\varphi \, \vec{e} \times \vec{r}_\nu) = 0.$$

Для своб. тв тела. $\sum\limits_\nu \vec{F}_\nu = 0, \; \sum\limits_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{0}$.

Система S сил, система S' сил для тв тела.

$\bar{S}$ - система, в которой силы имеют противоположные направле-

...ия с S

S эквивалентна S' $(S \sim S') \Longleftrightarrow (\bar S, S')$ удовлетвор. уравнениям статики.

Основное ур-е динамики.

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu)\, \delta \vec{r}_\nu = 0 \quad \forall\, (\delta \vec{r}_\nu, \nu = 1, \dots, N) \in T \Bigg\} \text{ принцип Даламбера-Лагранжа}$$

Для того чтобы ускорения всех точек матер. системы удовлетворяли $m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu$, $\vec{F}_\nu$ – акт. силы, $\vec{R}_\nu$ – силы реакций идеальных связей, необход. и достат., чтобы был выполнен принцип Даламбера-Лагранжа.

Док-во. Необход. $m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu \;\Big|\; \delta \vec{r}_\nu$.

Достат.

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu)\, \delta \vec{r}_\nu = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{r}_\nu}\, \delta \vec{r}_\nu = 0 \quad \Big|\; \lambda_i$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{r}_\nu}\right) \delta \vec{r}_\nu = 0$$

$$m_\nu \vec{w}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{r}_\nu}$$

Основные понятия

1. $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu = \vec{Q}$ – кол-во движения.

$$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu\right) \qquad \vec{r}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu}{\underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_i}_{M}}.$$

$$\vec{Q} = M \vec{v}_c.$$

2. $\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m \vec{v}_\nu$ – кинетич. момент (момент количеств движения)

3. $T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2$ – кинетич. энергия.

4. Первый интеграл системы ОДУ.

$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t)$, $\bar{x}(t)$ – решение.

$F(\bar{x}(t), t) = c$.

Критерий

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i(\bar{x}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Основные теоремы динамики.

Внешние и внутр. силы.

1. Внешние.

2. Между точками системы + действ. равно противод.

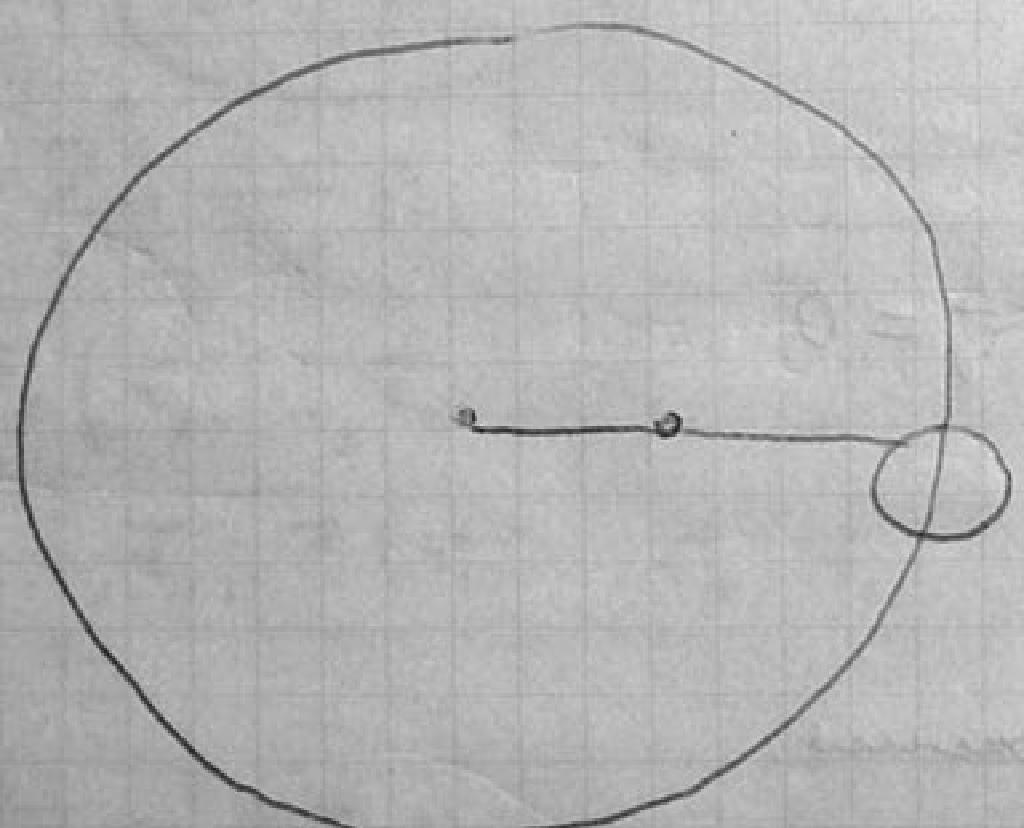
Теорема 1 (об изменении кол-ва движ.). Если связи допускают поступат. вирт. перемещ. $\delta\vec{r}_\nu = a\vec{e}$ $(\dot{\vec{e}} = 0,\ \vec{e} = \text{const})$, $\vec{Q}_e = \vec{Q}\cdot\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$

$$\frac{dQ_e}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)}\,\vec{e}$$

Док-во $\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu\vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu)\cdot a\vec{e} = a\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\vec{w}_\nu\vec{e} - \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\vec{e}_\nu\right) = 0$

$$\sum m_\nu\vec{w}_\nu\vec{e} = \sum m_\nu\frac{d\vec{v}_\nu}{dt}\vec{e} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_\nu\vec{v}_\nu\right)\vec{e}$$

Центр масс принадлежит вып. обол. тела



M, m, u - скор. относит. урави.

$$Mx = m(R - x),$$
$$x = \frac{mR}{M+m}$$

Теорема $\exists\,\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$, $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$: $\delta\vec{r}_\nu = \alpha\,\vec{e}\times\vec{r}_\nu$, $\forall\alpha$

$$\vec{K}_e = \vec{K}\,\vec{e}$$

$$\frac{dK_e}{dt} = \vec{e}\cdot\sum\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^{(e)}$$

Док-во $\alpha\sum(m_\nu\vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu)\,\vec{e}\times\vec{r}_\nu = 0,$

$$\vec{e}\,\frac{d}{dt}\left(\sum(\vec{r}_\nu\times m_\nu\vec{v}_\nu)\right) = \vec{e}\sum\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu$$

Теорема об измен. кинетич. энергии $\{ d\vec{r}_\nu, \nu = 1, \dots, N\} \in T$,

$d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu\, dt$. Связи идеальные. Тогда

Все акт. силы

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu$$

Док-во $\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu)\, \delta\vec{r}_\nu = 0 \quad \forall \{\delta\vec{r}_\nu, \nu = 1, \dots, N\} \in T$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \vec{v}_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} - \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu\right) = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu$$

мощность акт. сил

Следствие 1 $dT = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu\, d\vec{r}_\nu$

приращ. по врем.

Следствие 2. Если внутр. силы и внешн. обл. силовой функцией. $\exists\, U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_\nu)$: $\vec{F}_\nu = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu}$

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu} d\vec{r}_\nu \Rightarrow dT = dU \qquad T + \Pi = T_0 + \Pi_0$$

$$\varphi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) = 0.$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} \delta\vec{r}_\nu = 0, \ i = 1, \dots, m. \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} \vec{v}_\nu = 0, \ i = 1, \dots, m.$$

$$\varphi_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \lambda\vec{v}_1, \dots, \lambda\vec{v}_N, t)$$

$$\frac{d\varphi_i}{d\lambda} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec{v}_\nu} \vec{v}_\nu = 0$$

Коническая поверхность

Геометрич. связи.

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0.$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_\nu} \vec{v}_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}_\nu} \vec{v}_\nu = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0.$$

Линейные по скоростям связи.

$$\sum_{\nu=1}^{N} A_{i\nu} \vec{v}_\nu + B_i = 0, \quad A_{i\nu} = A_{i\nu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t), \quad B_i = B_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t).$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} A_{i\nu} \vec{v}_\nu = 0 \Rightarrow B_i = 0.$$

Теорема Кёнига

Оси Кёнига - оси, начало которых расположено в центре масс системы, которая движ. поступат. вместе с центром масс.

1. $\vec{K}_0 = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c + \vec{K}^*$, где

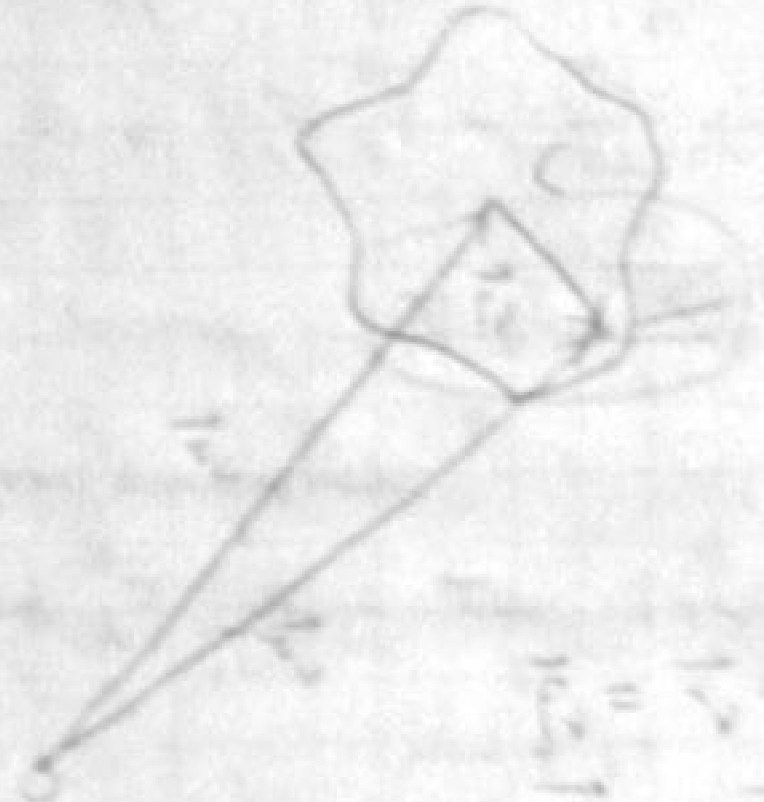
$$\vec{K}^* = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_{r\nu}$$

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{\rho}_\nu + \vec{r}_c) \times$$

$$\times\, m_\nu (\vec{v}_{r\nu} + \vec{v}_c) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_{r\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_c \times m_\nu \vec{v}_{r\nu} + \sum_{\nu=1}^{N} \rho_\nu m_\nu \vec{v}_c +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_c \times m_\nu \vec{v}_c$$



$\vec{r}_\nu = \vec{\rho}_\nu + \vec{r}_c$,

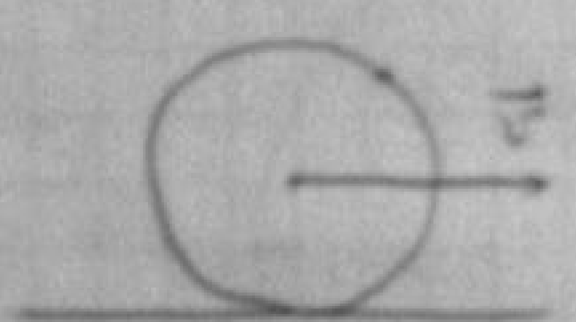
$\vec{v}_{r\nu} = \vec{v}_\nu - \vec{v}_c$

2. $T = \dfrac{m v_c^2}{2} + T^*$, $T^* = \dfrac{1}{2}$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{r\nu}^2$$

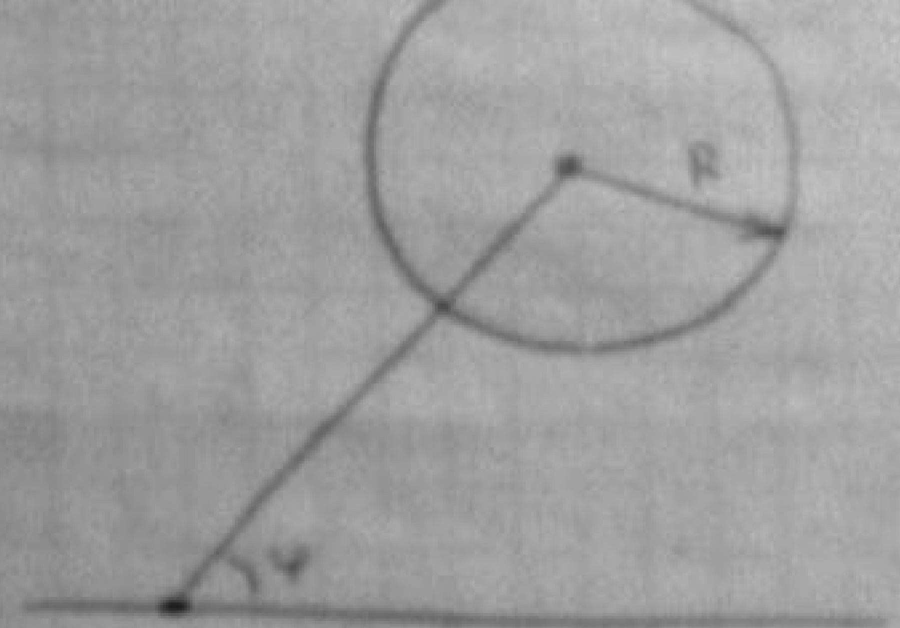
$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2.$$

Пример



$T^* = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m v^2$

$\omega = \frac{v}{r}$ $\quad T = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$



$K_z^* = m\omega R^2$

$K_{0z} = m l^2 \dot\varphi + m\omega R^2$

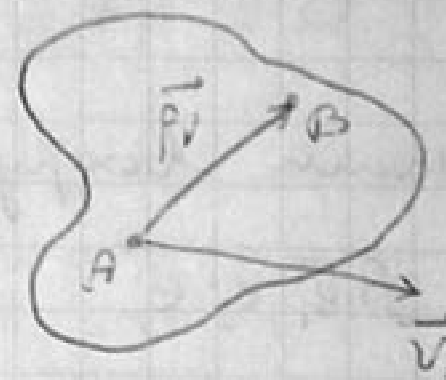
$\frac{dK_z}{dt} = -mgl\cos\varphi$

$m l^2 \ddot\varphi + m\dot\omega R^2 = -mgl\cos\varphi$

$\dot\omega = -\frac{mgl\cos\varphi}{mR^2} = -\frac{gl\cos\varphi}{R^2}$

Динамич. характер тв. тела

$\vec{v}_\nu = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu$



$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{AB}$

$\vec{v}_\nu = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu$

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{r}_A + \vec{r}_\nu) \times m_\nu (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_A \times m_\nu (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{\rho}_\nu \times m_\nu \vec{v}_A + \boxed{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{\rho}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu))} = \vec{K}_1$$

Λ - оператор инерции (линейный). $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортонормиров. базисные векторы.

$$\Lambda(\vec{e}_i) = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\rho}_\nu \times (\vec{e}_i \times \vec{\rho}_\nu)} \quad \Big| \; \vec{e}_j$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{e}_i \vec{e}_\nu^{\,2} - \vec{\rho}_\nu (\vec{e}_i \vec{\rho}_\nu))$$

$$\Lambda(\vec{e}_i)\, \vec{e}_j = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{e}_i \vec{e}_j - (\vec{\rho}_\nu \vec{e}_j) \vec{\rho}_\nu \vec{e}_i)$$

$J_{ii} = \sum_{\substack{l \ne i, \\ k \ne i}} m_\nu (\rho_{\nu k}^2 + \rho_{\nu l}^2)$ — осевые моменты инерции,

$J_{xx} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_A^2 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_A (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu)(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\omega} (\vec{\rho}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu))$$

$\Lambda = (J_{ij})$ — тензор инерции тв. тела.

$$T_1 = \frac{1}{2} \vec{\omega} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\rho}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\nu) = \frac{1}{2} \vec{\omega}\, \Lambda(\vec{\omega})$$

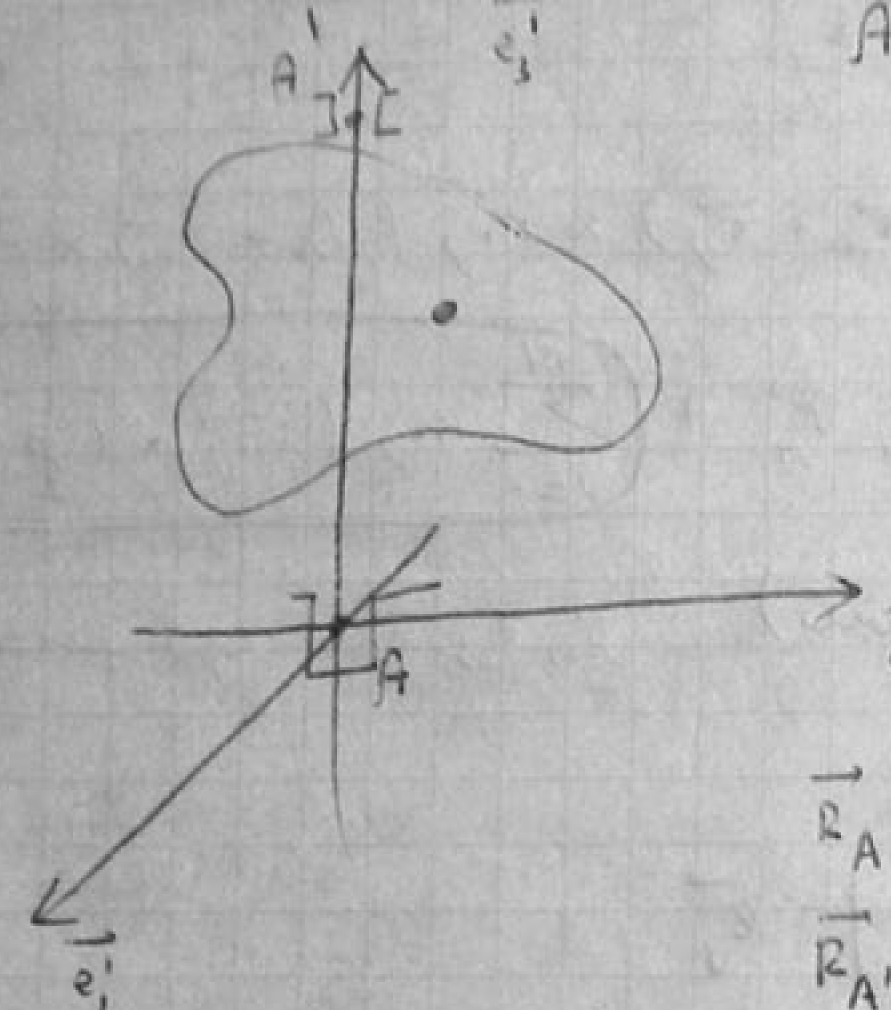
$\vec{r}\; J(\vec{r}) = 1$ — эллипсоид инерции

$J(\vec{r})$ — нормаль к эллипсоиду

Теорема Гюйгенса – Штейнера.

Движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

$A\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ $\qquad \vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_3'$



$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_c = r_{c_1}\vec{e}_1' + r_{c_2}\vec{e}_2' + r_{c_3}\vec{e}_3'$$

$$\vec{R}_A = R_1\vec{e}_1' + R_2\vec{e}_2' + R_3\vec{e}_3',$$
$$\vec{R}_{A'} = R_1'\vec{e}_1' + R_2'\vec{e}_2' + R_3'\vec{e}_3'$$

$$\vec{k} = \mathbb{J}\vec{\omega} = \omega\left(J_{13}\vec{e}_1' + J_{23}\vec{e}_2' + J_{33}\vec{e}_3'\right),$$

$\sum_\nu \vec{F}_\nu = \vec{F} = F_1\vec{e}_1' + F_2\vec{e}_2' + F_3\vec{e}_3'$ – силы.

$\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{M} = M_1\vec{e}_1' + M_2\vec{e}_2' + M_3\vec{e}_3'$.

$\vec{Q} = M\vec{v}_c$ – кол-во движения.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_c + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_c) = \dot{\omega}\,\vec{e}_3'\times\vec{r}_c + \omega^2(\vec{e}_3'\times(\vec{e}_3'\times\vec{r}_c)) = \dot{\omega}\,\vec{e}_3'\times\vec{r}_c + \omega^2\left(\vec{e}_3'(\vec{e}_3'\cdot\vec{r}_c) - \vec{r}_c\right)$$

$$\vec{e}_3'\times\vec{e}_2' = -\vec{e}_1', \quad \vec{e}_3'\times\vec{e}_1' = \vec{e}_2'$$

$$\begin{cases} -\dot{\omega} r_{c_2} - \omega^2 r_{c_1} = F_1 + R_1 + R_1', \\ \dot{\omega} r_{c_1} - \omega^2 r_{c_2} = F_2 + R_2 + R_2', \\ 0 = F_3 + R_3 + R_3' \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{k}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{k}$$

система

$$\begin{cases} \dot{\omega} J_{13} - \omega^2 J_{23} = M_1 - aR_2', \\ \dot{\omega} J_{23} + \omega^2 J_{13} = M_2 + aR_1', \\ \dot{\omega} J_{33} = M_3 \end{cases}$$

$a = AA'$.

$\omega = \dot{\varphi}$

$J_{13} = J_{23} = r_{c1} = r_{c2} = 0$ – главная центральная ось

$J_{13} = J_{23} = 0,\ r_{c1}^2 + r_{c2}^2 \neq 0$

$F_1 + R_1 + R_1' = 0,$

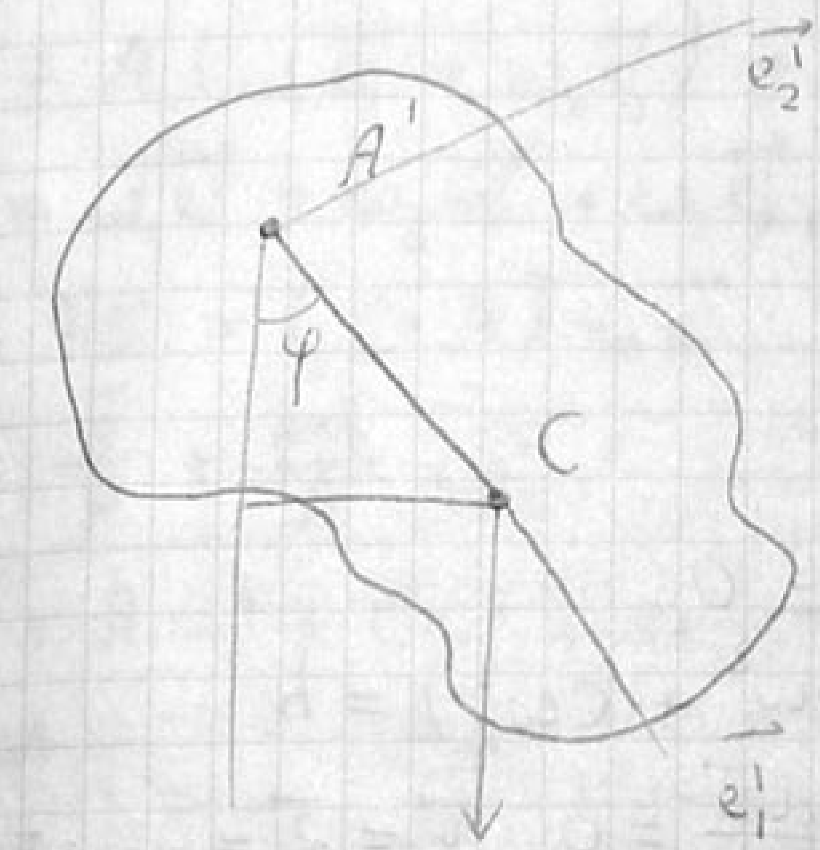
$F_2 + R_2 + R_2' = 0,$

$F_3 + R_3 + R_3' = 0$

$M_1 - aR_2' = 0,$

$M_2 + aR_1' = 0$

Физический маятник.



$\dot{\omega} J_{33} = -Mgl \sin\varphi,$

$\ddot{\varphi} J_{33} = -Mgl \sin\varphi,$

$J_{33} = Mk^2$

k – радиус инерции

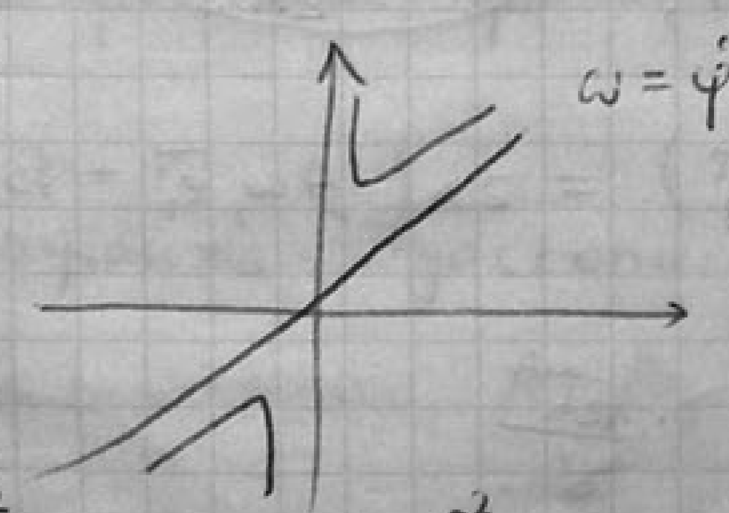
$k > 0$

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{\varphi} + \frac{gl}{k^2}\sin\varphi = 0,\\ \frac{k^2}{l} = l', \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l'}\sin\varphi = 0\end{gathered}}$$

l' – приведённая длина физич. маятника.

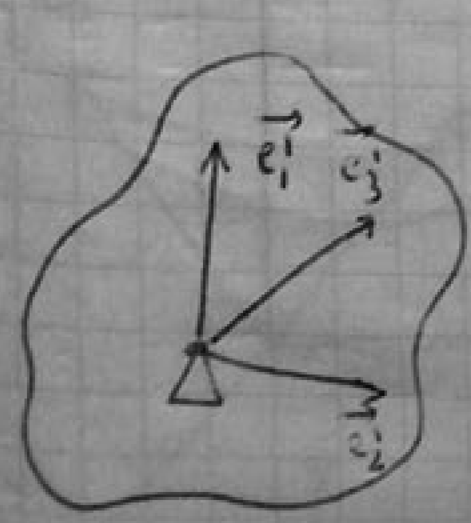
$J_{33} = Mk^2 = Ml^2 + J_c = Ml^2 + M\rho^2$

$k^2 = l^2 + \rho^2, \quad l' = l + \frac{\rho^2}{l}.$



$l' - l + \frac{\rho^2}{l' - l} = l + \frac{\rho^2}{l}$

Движение тела с одной неподв. точкой.



$O\vec{e_1'}\vec{e_2'}\vec{e_3'}$ – главные оси инерции.

$M(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r_c} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_c})) = \vec{F} + \vec{R_0}.$

$\frac{d\vec{K_0}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K_0} = \vec{M} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r_\nu} \times \vec{F}_\nu^{(e)} \quad \Big| \, \vec{e_i'}$

A, B, C – главные осевые моменты инерции

$\vec{K_0} = A\omega_1\vec{e_1'} + B\omega_2\vec{e_2'} + C\omega_3\vec{e_3'}.$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A\omega_1 & B\omega_2 & C\omega_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 = M_1, \\ B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_1\omega_3 = M_2, \\ C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases}$$

Динамические уравнения Эйлера.

Случай Эйлера. $M_1 = M_2 = M_3 \equiv 0$

1) Интеграл энергии $T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right) = h.$

2) Интеграл кинетич. момента $\frac{d\vec{K}}{dt} = 0$, $\vec{K} = \vec{G} = const.$

Интерпретация Пуансо

$$\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{K}}{G} = \frac{2h}{G}$$

Эллипсоид инерции

$$f(\vec{r}) = Ar_1^2 + Br_2^2 + Cr_3^2 = 1$$

$$|\vec{r}| = \frac{1}{\sqrt{J_e}}$$

$$\vec{r} = \lambda\vec{\omega}, \quad \lambda^2\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right) = 1, \quad \lambda^2 = \frac{1}{2h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{r}) = 2\left(Ar_1\vec{e}_1 + Br_2\vec{e}_2 + Cr_3\vec{e}_3\right) = 2\lambda\left(A\omega_1\vec{e}_1 + B\omega_2\vec{e}_2 + C\omega_3\vec{e}_3\right)$$
$$= 2\lambda\vec{K}$$

$$\delta = \frac{\vec{K}}{G}\vec{r} = \frac{\vec{K}\cdot\lambda\vec{\omega}}{G} = \frac{2h}{\sqrt{2h}\,G} = \frac{\sqrt{2h}}{G}$$

Качение без проскальзывания эллипсоида инерции по неподвижной плоскости. Это и есть интерпретация Пуансо

$Ar_1^2 + Br_2^2 + Cr_3^2 = 1$ – эллипсоид инерции,

$$A^2\cancel{r_1^2}_{\omega_1^2} + B^2\cancel{r_2^2}_{\omega_2^2} + C^2\cancel{r_3^2}_{\omega_3^2} = G^2 = D$$

$$A(A-D)r_1^2 + B(B-D)r_2^2 + C(C-D)r_3^2 = 0$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(A^2r_1^2 + B^2r_2^2 + C^2r_3^2\right) = G^2.$$

$$A^2r_1^2 + B^2r_2^2 + C^2r_3^2 = \frac{G^2}{2h} = D = \frac{1}{\delta}.$$

$A > B > C$, $A > D > C$ – условия существования решения.

$$r_1 = \pm\sqrt{\frac{C(D-C)}{A(A-D)}}\, r_3$$

Полодии.

Регулярная прецессия в случае Эйлера.

$A = B$

$$\vec{K} = A(\omega_1 \vec{e_1'} + \omega_2 \vec{e_2'}) + C\omega_3 \vec{e_3'},$$

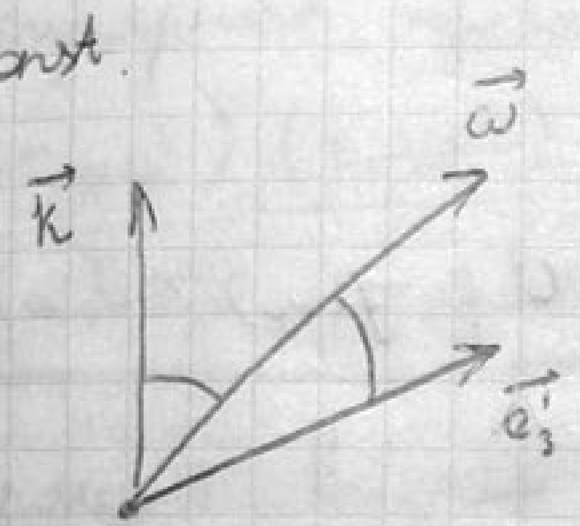
$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_1'} + \omega_2 \vec{e_2'} + \omega_3 \vec{e_3'},$$

$$\vec{K} - A\vec{\omega} = (C-A)\, r_0 \vec{e_3'}. \qquad C\dot{\omega}_3 = 0$$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{K}}{A} + \frac{A-C}{A} r_0 \vec{e_3'}$$

$$A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2h, \qquad A(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + (C-A)\omega_3^2 = 2h,$$

$\omega = const.$



$$\vec{\omega_п} = \frac{\vec{K}}{A}$$

$$\frac{\vec{K}}{6}\vec{e_3'} = \frac{C r_0}{\sqrt{A^2\omega_1^2 + A^2\omega_2^2 + C^2 r_0^2}} \xrightarrow[r_0 \to \infty]{} 1$$

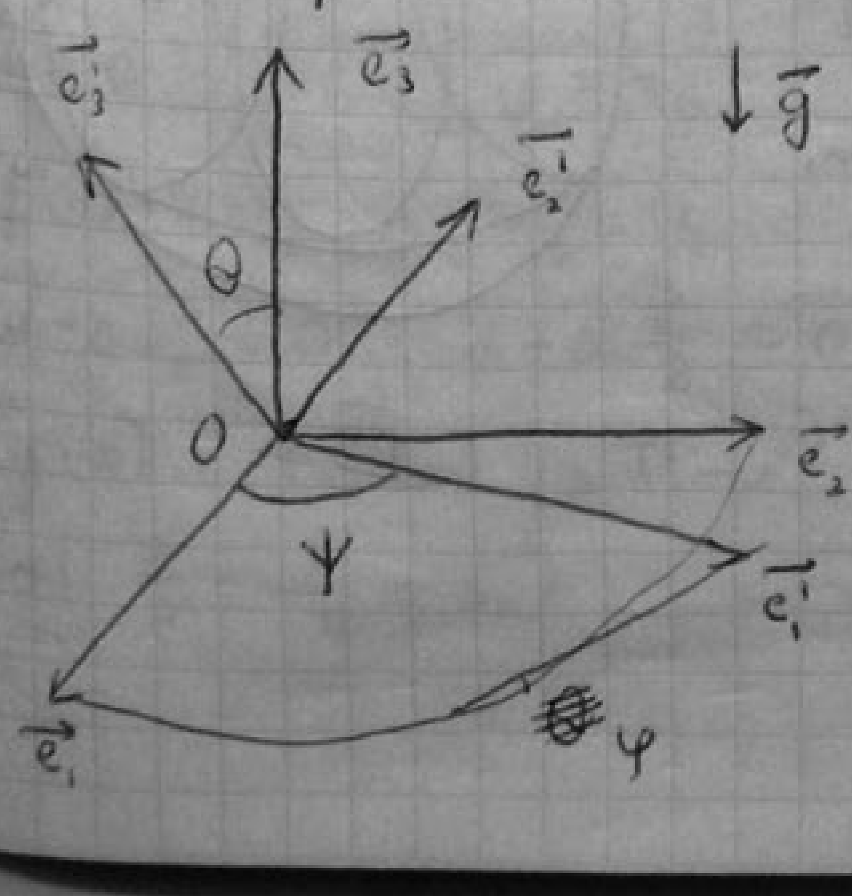
$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Регулярная прецессия происходит вокруг вектора кинетического момента.

Случай Лагранжа - Пуассона.

Поле силы тяжести, $A = B$, тело симметрично, движение вокруг неподвижной точки. $\vec{r}_c = z_0 \vec{e_3'}$

Углы Эйлера.



$\downarrow \vec{g}$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e_1'} + \omega_2 \vec{e_2'} + \omega_3 \vec{e_3'}.$$

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

$$\vec{K} = A\omega_1 \vec{e_1'} + A\omega_2 \vec{e_2'} + C\omega_3 \vec{e_3'}.$$

$$A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2 + 2mg z_0 \cos\theta = 2h.$$

$\vec{e_3} = \sin\theta \sin\varphi \, \vec{e_1'} + \sin\theta \cos\varphi \, \vec{e_2'} + \cos\theta \, \vec{e_3'}$

$\vec{K} \cdot \vec{e_3'} = A\dot{\psi} \sin^2\theta + C\omega_3 \cos\theta = A\beta$

$\vec{K} \cdot \vec{e_3'} = A\beta,$

$C\dot{\omega}_3 + (A-B)\omega_1\omega_2 = (\vec{r}_c \times m\vec{g})\vec{e_3} = 0$

$C\dot{\omega}_3 = 0, \ \omega_3 = r_0$

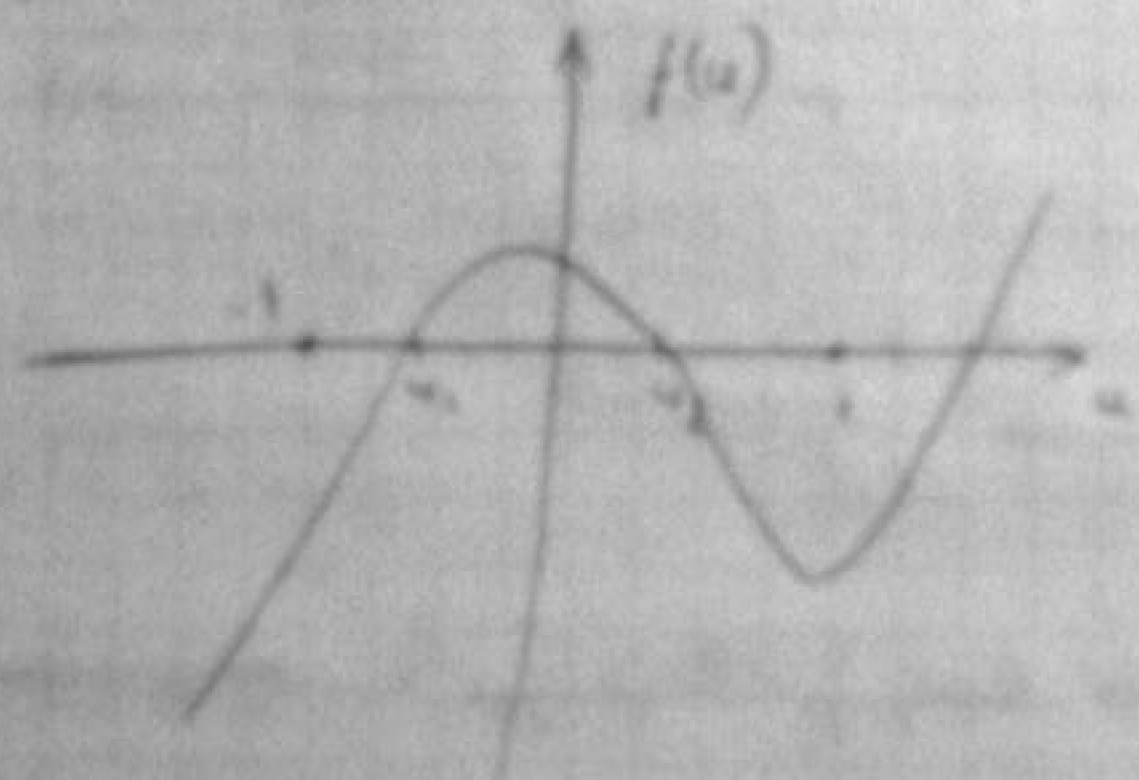
$A\alpha = 2h - Cr_0^2, \quad \alpha = \frac{2h - Cr_0^2}{A}$

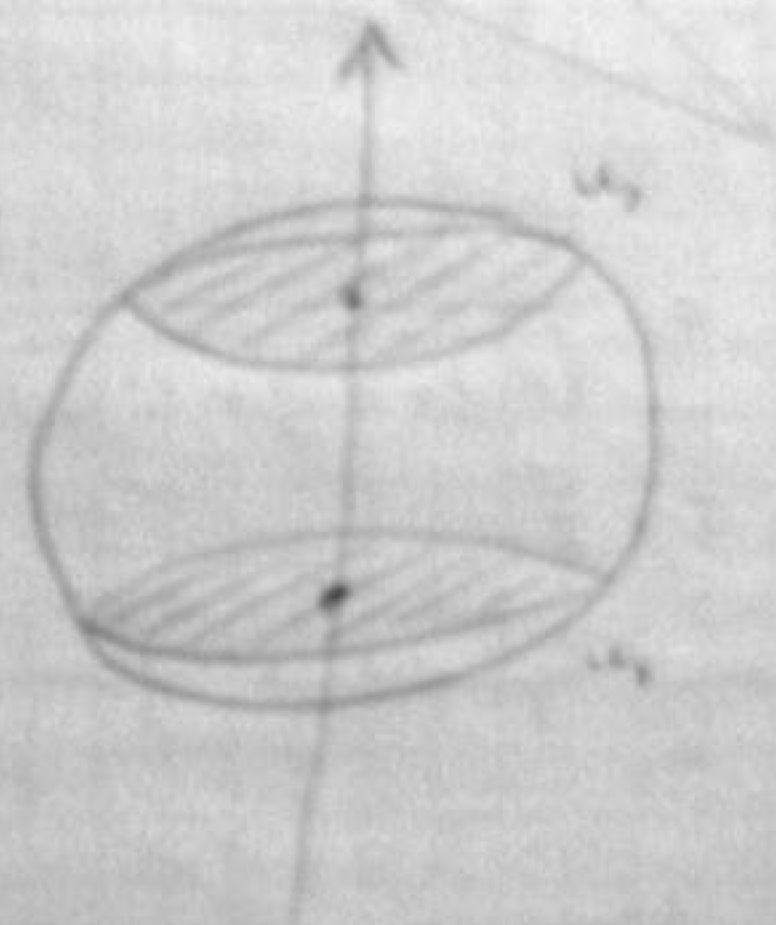
$\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 = \alpha - a\cos\theta, \quad a = \frac{2mg\,\overline{z_c}}{A}$

$\dot{\psi} \sin^2\theta = \beta - b\cos\theta, \quad \dot{\psi} = \frac{\beta - b\cos\theta}{\sin^2\theta}$

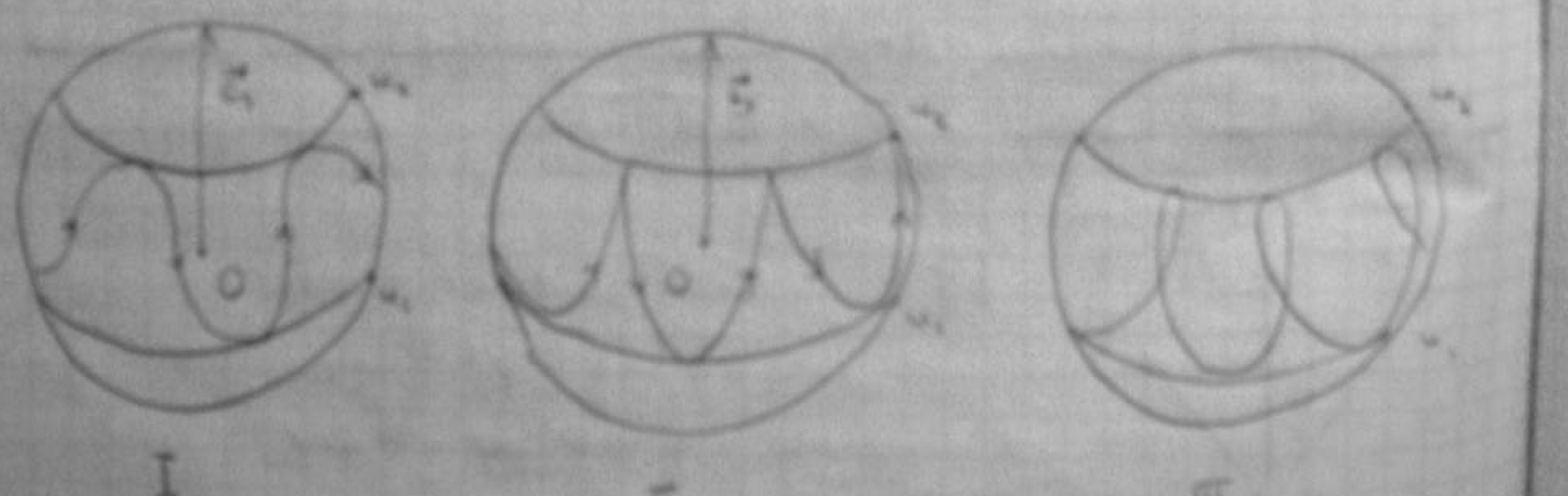
[illegible] интегралы (интеграл энергии, интеграл [illegible] момента и т. д.)

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 = (\alpha - a\cos\theta) - \dfrac{(\beta - b\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}, \quad u = \cos\theta, \\ \dot{u}^2 = (\alpha - au)(1-u^2) - (\beta - bu)^2 = f(u) > 0, \quad f(u_0) > 0 \end{cases}$$





Теорема



I II III

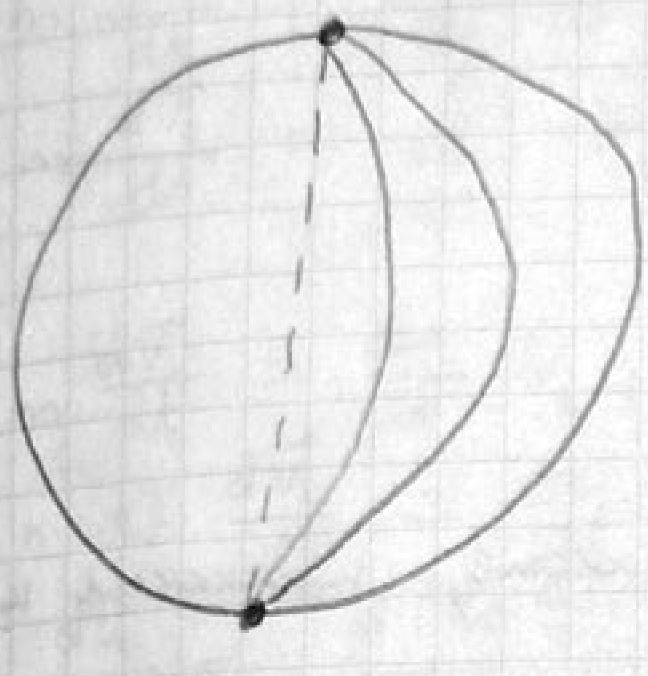
$\dot{\psi} = \frac{\beta - bu}{1-u^2}, \quad u' = \frac{\beta}{b}$

I $\left|\frac{\beta}{b}\right| > 0, \ \alpha - a\frac{\beta}{b} < 0$

II $f(u') = 0, \ \alpha > a\frac{\beta}{b}$

$$f(u) = (u'-u)\left(a(1-u^2) - b^2(u'-u)\right).$$

$$u'-u_1 > 0, \quad u' > u_1 \qquad u' = u_2.$$



$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\Theta\, d\psi}{d\Theta} = \frac{b(u'-u)}{\sqrt{(u'-u)(\dots)}} \longrightarrow 0.$$

Особые случаи.

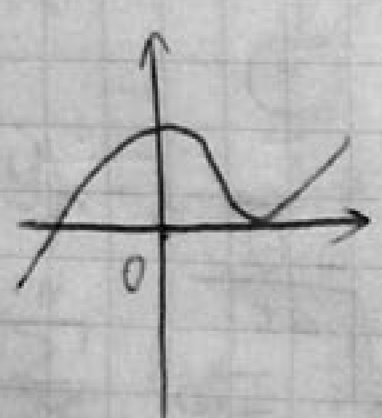
1. Регулярная прецессия. $\Theta \equiv \Theta_0, \quad \dot\psi = const$

$$(\alpha - au')(1-u'^2) - (\beta - bu')^2 = 0$$

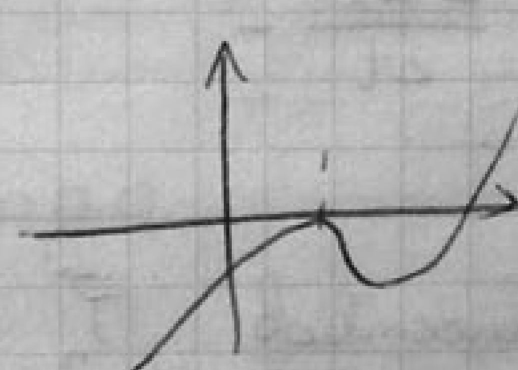
$$f'(u') = 0, \quad -a(1-u'^2) - 2(\alpha - au')u' + b(\beta - bu') = 0.$$

2. Спящий волчок.

$\theta = 0$. Кратный корень в 1.



Плохой вариант

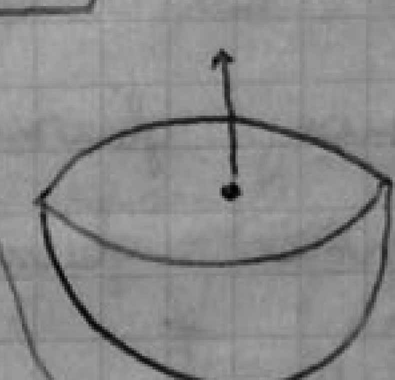


$$f(u=1) \Rightarrow \beta = b, \ \alpha = a. \qquad 2au' - 2(\alpha - au') + 2au' - b^2u' < 0$$

$$4a - b^2 < 0, \quad b^2 > 4a, \quad \frac{c^2\tau_0^2}{A^2} > \frac{4mg\zeta_0}{A}.$$

Условие Маиевского $\boxed{\tau_0^2 > \frac{4mg\zeta A}{c^2}}$

Псевдорегулярная прецессия.



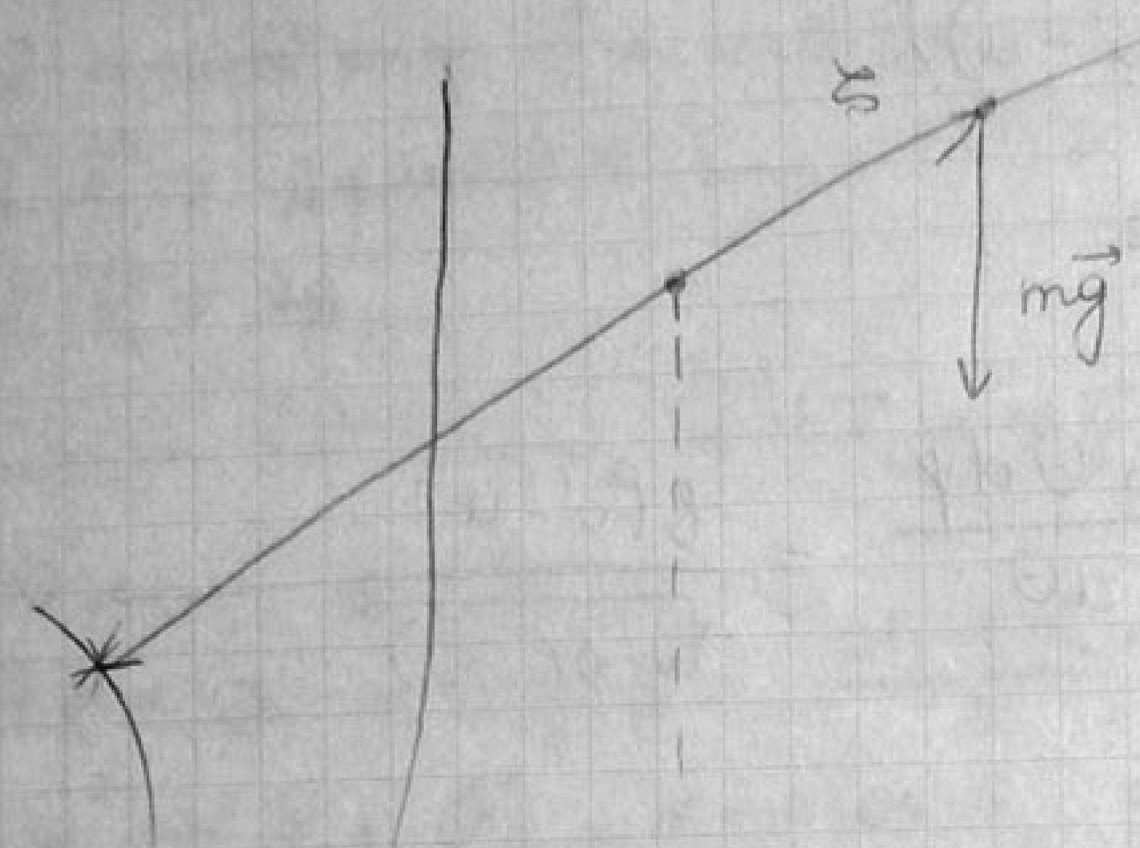
$$\dot\theta_0 = 0, \quad \dot\psi_0 = 0, \quad \dot\varphi = \tau_0$$

$$f(u_0) = 0, \quad \beta - bu_0 = 0,$$

$$\alpha - au_0 = 0, \quad \alpha - a\frac{\beta}{b} = 0,$$

$$f(u) = (u_0-u)\left(a(1-u^2) - b(u_0-u)\right), \qquad u_0 - u = \frac{a}{b}(1-u^2) = \frac{a(1-u^2)A^2}{\tau_0^2 c^2}$$

$$a\left(\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = u_0\right)$$



Закручивание по часовой стрелке. Псевдокружность, плоскость которой перпендик. вертикали.

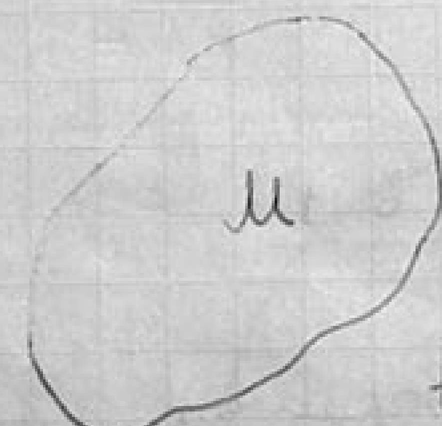
Ферми

Случай Ковалевской не рассматриваем.

Динамич. сист. перем. состава.

<u>Кол-во движения</u>

$$\Delta\vec{Q} = \vec{\tilde{Q}}(t+\Delta t) - \vec{\tilde{Q}}(t) + $$
$$+ \Delta\vec{Q}_n - \Delta\vec{Q}_y$$
$$\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\tilde{Q}}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{Q}_n}{\Delta t} - $$
$$- \frac{\Delta\vec{Q}_y}{\Delta t}$$



$t,\ t+\Delta t.$

Предположение. Существов. $\vec{F}_n = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{Q}_n}{\Delta t}$, $\vec{F}_y = \frac{\Delta\vec{Q}_y}{\Delta t}$.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)}. \quad Q = \tilde{Q} \text{ при } \Delta t = 0. \quad \frac{d\vec{\tilde{Q}}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_g,$$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_n - \vec{F}_y.$$

$$\vec{F}_g = M(\vec{v}_{(n)} - \vec{v}_{(y)}).$$

прибыв. убыв.

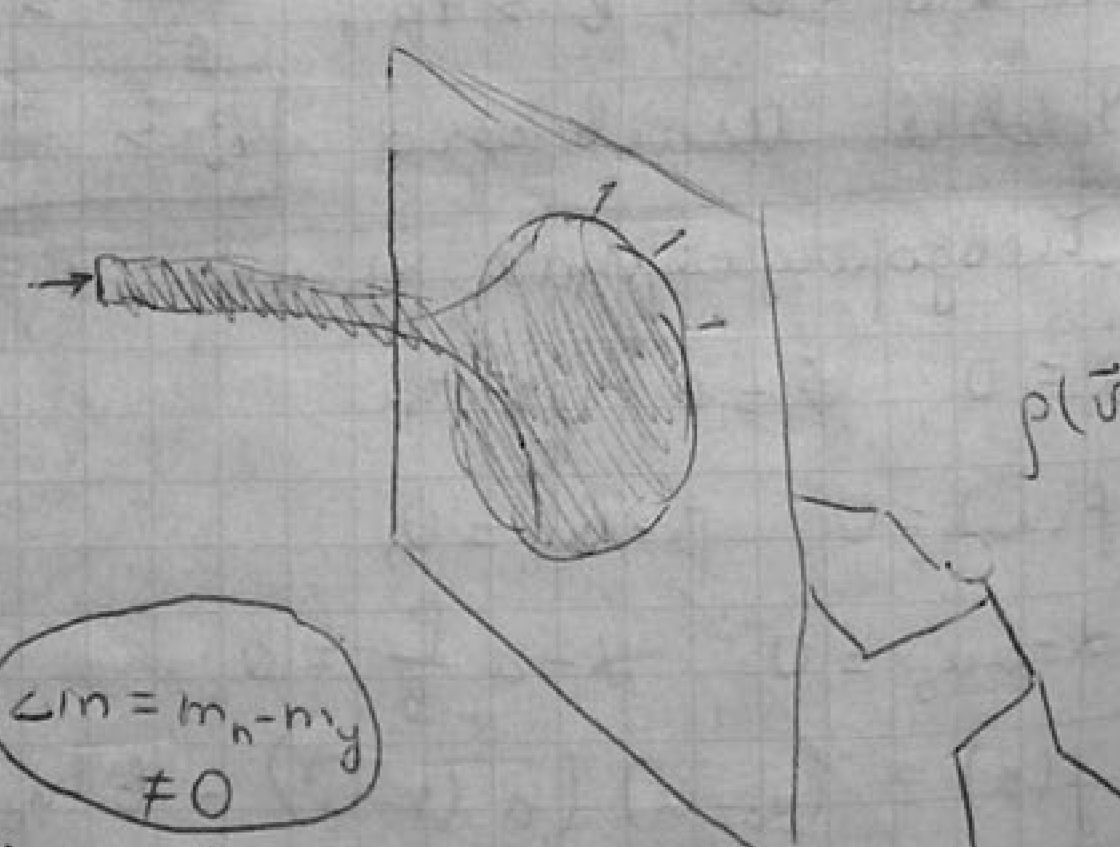
Iа. Стационарное движение.

I б. Нестационарное движение.

$\cancel{\frac{\Delta Q}{\Delta t}}$ $\quad \Delta\vec{Q}_n = m_n\vec{v}_n,$

$$\Delta\vec{Q}_y = m_y\vec{v}_y$$

$$\Delta m = m_n - m_y \neq 0$$



$$\Delta\vec{Q}_n - \Delta\vec{Q}_y = \Delta m \cdot \vec{u} \to \vec{F}_n - \vec{F}_y = \frac{dm}{dt}\vec{u}.$$
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_g,$$

Уравнение Мещерского.

$$\boxed{\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} + \frac{dm}{dt}\vec{u}}$$

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_c = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} + \frac{dm}{dt}\vec{u},$$

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} + \frac{dm}{dt}\underbrace{(\vec{u}-\vec{v}_c)}$$

скорость ~~[illegible]~~ газов
относит. ракеты

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_0,$$

$$m(t)\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_0,$$

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\left(\ln\frac{m}{m_0}\right)}{dt}\vec{v}_0,$$

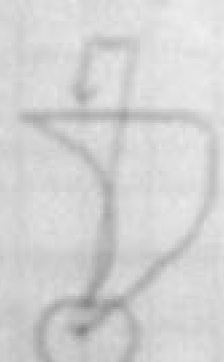
$$\vec{v}_c - \vec{v}_{c0} = \vec{v}_0 \ln\left(\frac{m}{m_0}\right), \quad \boxed{v_c - v_{c0} = -v_0 \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)}$$

Уравнение Циолковского

Кинетич. момент.

Всё аналогично тому, как и в случае кол-ва движения

Турбина



Ур-я Лагранжа 2-ого рода.

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} - \vec{F}_\nu\right)\delta\vec{r}_\nu = 0 \quad \forall \text{ вирт } \{\delta\vec{r}_\nu,\ \nu=1,2,\dots,N\} \in T$$

Связи $f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $i = 1,2,\dots,l$, $n = 3N - l$

Лагранжевы координаты обобщённые $q_1, q_2, \dots, q_n$

$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ автоматически удовлетв. ур-ям связей

$$d\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}dt \text{ — действит. перемещение,}$$

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i, \quad \delta q_i \text{ независ. и произв., } i=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu\frac{d\vec{v}_\nu}{dt} - \vec{F}_\nu\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i = 0 \quad \forall\ \{\delta q_i,\ i=1,2,\dots,n\},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\left(m_\nu\frac{d\vec{v}_\nu}{dt} - \vec{F}_\nu\right)\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0, \quad Q_i = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i} \text{ —}$$

обобщ. силы,

$$\frac{d\vec{v}_\nu}{dt}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i} \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right) - \vec{v}_\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\nu\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

$$\vec{v}_\nu = \sum_{i=1} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{dt},$$

$$\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t \partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j +$$

$$+ \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{v}_\nu).$$

$$\frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2} v_\nu^2\right)\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2} v_\nu^2\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0,$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,n}}$$

Уравнения Лагранжа второго рода

Лагранжев формализм

1. Выбрать лагранжевы координаты.

2. Написать $T(q, \dot{q}, t)$.

3. Найти Q_i. $\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i .$$

4. Выполнить дифференцирование и записать n уравнений.

Теорема. $T = T_2 + T_1 + T_0$, $T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, $T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i \dot{q}_i$, T_0 не зависит от $q_i, \dot{q}_i$.

однородная квадрат. форма по скор.

Док-во. $T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + 2 \sum_{i=1}^{n} m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \dot{q}_i + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2\right)$$

Покажем, что T_2 положит. определена

$$J = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1}\,\dfrac{\partial \vec r_1}{\partial q_1} & \sqrt{m_2}\,\dfrac{\partial \vec r_2}{\partial q_2} & \dots & \sqrt{m_N}\,\dfrac{\partial \vec r_N}{\partial q_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{m_1}\,\dfrac{\partial \vec r_1}{\partial q_n} & \sqrt{m_2}\,\dfrac{\partial \vec r_2}{\partial q_n} & \dots & \sqrt{m_N}\,\dfrac{\partial \vec r_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) = JJ^T \neq 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1,n}$$

q_i, $i=\overline{1,n}$, — лагранжевы координаты.

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{n} \vec F_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i}, \quad \vec F_\nu = \frac{\partial U}{\partial \vec r_\nu}.$$

потенц.

$$Q_i^{(п)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \vec r_\nu} \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$L = T + U$ — функция Лагранжа (лагранжиан)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \underbrace{Q_i}_{\text{непотенц. часть}}, \quad i=\overline{1,n}}$$

<u>Обобщ. интеграл энергии Якоби</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i - \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$T = T_{2} + T_{1} + T_{0} \Rightarrow L = L_{2} + L_{1} + L_{0}$$

порядок по обобщенным скоростям $\dot q_i$, $i=\overline{1,n}$

$f(\bar x)$ — однор. функция степени k.

$$f(\gamma \bar x) = \gamma^k f(\bar x).$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar x}\bar x = k f(x).}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \bar x}\bar x = k\gamma^{k-1} f(\bar x)$$

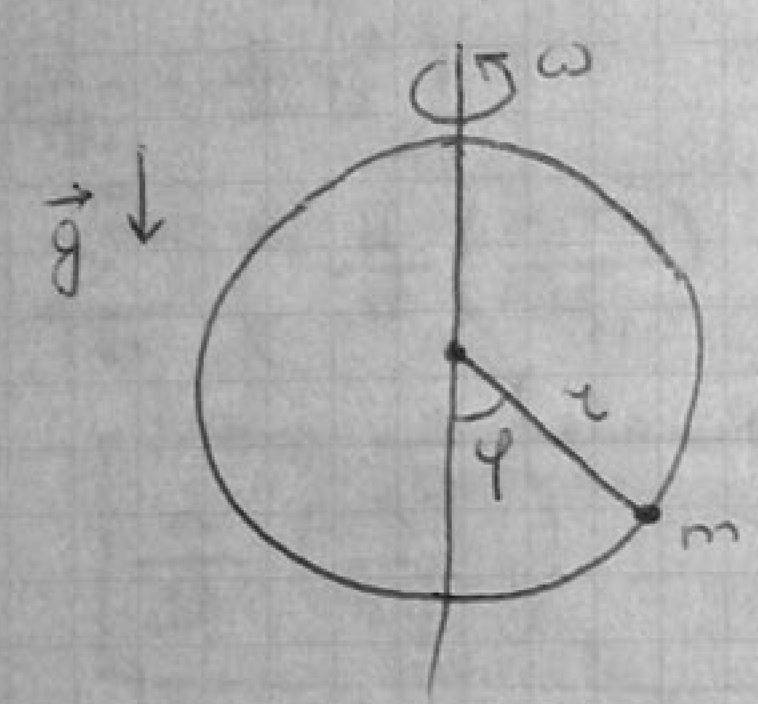
$$\frac{d}{dt}\left(2L_2 + \cancel{L_1} - L_2 - \cancel{L_1} - L_0\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i - \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(L_2 - L_0\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i - \frac{\partial L}{\partial t}}$$

<u>Теорема</u> Связи голономны, завис. от врем., $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (L от врем. не зависит, $\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot q_i = 0$ $\Rightarrow$ существ. первый интеграл $L_2 - L_0 = h = const$. гироскопич. силы (они не наруш. обобщ. интеграл энергии)

Стандартный интеграл энергии имеет вид $T - U = h$.

Пример.



$$T = \frac{m}{2}\left(r^2\dot\varphi^2 + (r\sin\varphi)^2\omega^2\right).$$

$$U = mgR\cos\varphi$$

$$L = T + U = \frac{m}{2}\left(r^2\dot\varphi^2 + (r\sin\varphi)^2\omega^2\right) + mgR\cos\varphi.$$

$$\frac{m}{2}r^2\dot\varphi^2 - \frac{m}{2}(r\sin\varphi)^2\omega^2 - mgR\cos\varphi = h$$ - обобщ. интеграл энергии Якоби.

<u>Циклич. координаты.</u>

q_l циклическая, если $\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$. Остальные коорд. позиционные.

Если $Q_l = 0$, то $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_l}\right) = 0$.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot q_l} = \beta_l}$$ - циклич. интеграл.

<u>Пример.</u>

1. $\delta\vec r_\nu = \delta q_1 \, \vec e$, $\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_1} = \vec e$.

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_1}\right) = 0.$$

$$Q_1 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \, \vec e \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu \cdot \vec e$$

2. $\delta \vec r_\nu = \delta q_2 (\vec e \times \vec r_\nu)$ (дифференциал вращения).

$$\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_2} = \vec e \times \vec r_\nu$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial q_2} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu \frac{d}{dt}\left(\vec e \times \vec r_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu (\vec e \times \vec v_\nu) = 0.$$

$$Q_2 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_2} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu (\vec e \times \vec r_\nu) = \vec e \sum_{\nu=1}^{N} \vec r_\nu \times \vec F_\nu.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_2} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial \dot q_2} = \vec e \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec r_\nu \times \vec v_\nu).$$

Метод Гауса исключ. циклич. коорд.

$q_1, \dots, q_s$ – позиционные коорд, $q_{s+1}, \dots, q_n$ – циклич. коорд.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \beta_k, \ k = s+1, \dots, n}$$

Разрешаем систему:

$$\dot q_k = \dot q_k(q_1, \dots, q_s, \dot q_1, \dots, \dot q_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n, t), \ k = s+1, \dots, n.$$

Введём функцию Гауса

$$R = L - \sum_{k=s+1}^{n} \beta_k \dot q_k = R(q_1, \dots, q_s, \dot q_1, \dots, \dot q_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n, t).$$

$$dR = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot q_i} d\dot q_i + \sum_{k=s+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \beta_k} d\beta_k + \frac{\partial R}{\partial t} dt,$$

$$dR = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i + \cancel{\sum_{k=s+1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}_{=\beta_k} d\dot q_k} -$$

$$- \cancel{\sum_{k=s+1}^{n} \beta_k d\dot q_k} - \sum_{k=s+1}^{n} \dot q_k d\beta_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \dot q_k = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad i = 1, \dots, s, \quad k = s+1, \dots, n.}$$

Уравнения Гауса:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, s$$

$$\dot q_k = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad k = s+1, \dots, n.$$

Малые колебания

Голономная, склерономная (стацион.) система.

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot q_i \dot q_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(q_1, \dots, q_n).$$

$$U = U(q_1, \dots, q_n).$$

$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ – положение равновесия. Будем считать, что это положение $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$

$|q_i| < d_i, \quad |\dot q_i| < \tilde d_i, \quad i = \overline{1,n}$. Окрестность полож. равновесия.

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0}_{= b_{ij}} q_i q_j$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = b_{ij}.$$

$B = (b_{ij})$, $A = (a_{ij})$ – постоянные матрицы (знач. в точке равновесия).

$$L = T + U = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot q_i \dot q_j + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j \right).$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \dot q_j \right) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

$A = (a_{ij})$ – положит. определ. симм. матрица, $B = (b_{ij})$ – симм. матрица.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot q_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j$$

$$A \ddot{\vec q} = B \vec q, \quad \ddot{\vec q} = A^{-1} B \vec q = C \vec q \quad C = A^{-1} B$$

$$C \vec u = \lambda \vec u, \quad (C - \lambda E)\vec u = 0, \quad \det(C - \lambda E) = 0$$

Все соответств. собств. знач. веществ.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – список собств. знач. с учётом кратности.

$\vec u_1, \vec u_2, \dots, \vec u_n$ – соответств. собств. векторы.

$$\det A \cdot \det(C - \lambda E) = \det\big(A(C - \lambda E)\big) = \det(B - \lambda A) = 0.$$

Уравнение частот. $(B - \lambda A)\vec u = 0$ – уравн. для собств. векторов.

$$\vec q = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec u_i, \quad \xi_i, \ i = \overline{1,n}, \text{ – главные координаты.}$$

$$\ddot{\vec q} = C \vec q \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ddot \xi_i \vec u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \vec u_i.$$

$$\ddot \xi_i = \lambda_i \xi_i$$

1. $\lambda_i = -\omega_i^2$ $\quad \xi_i = C_1 \cos(\omega_i t) + C_2 \sin(\omega_i t)$.
2. $\lambda_i = 0$ $\quad \ddot \xi_i = 0$, $\xi_i = C_1 t + C_2$.
3. $\lambda_i = \omega_i^2$ $\quad \ddot \xi_i - \omega_i^2 \xi_i = 0$ $\quad \xi_i = C_1 \operatorname{ch}(\omega_i t) + C_2 \operatorname{sh}(\omega_i t)$.

Численный поиск собств. вект.

$$\frac{B(\bar q, \bar q)}{A(\bar q, \bar q)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$$

$$B(\bar q, \bar q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2, \quad A(\bar q, \bar q) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

$$\lambda_{min} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \le \lambda_{max}$$

$$\lambda_{min} = \min_{q} \frac{B(\vec q, \vec q)}{A(\vec q, \vec q)}, \quad \lambda_{max} = \max_{q} \frac{B(\vec q, \vec q)}{A(\vec q, \vec q)}.$$

12.05.2009

$$\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec W_\nu - \vec F_\nu)\, \delta \vec r_\nu = 0 \quad \forall \{\delta \vec r_\nu, \nu = 1, \dots, N\} \in T.$$

$$\varphi_i(\vec r_1, \dots, \vec r_N, \vec v_1, \dots, \vec v_N, t) = 0, \quad i = \overline{1,m}$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec v_\nu} \delta \vec r_\nu = 0, \quad i = \overline{1,m}}$$ Определ. вирт. перемещений.

Принцип Гаусса.

$\vec W_\nu$, $\nu = 1, \dots, N$, – реальные (действит.) ускорения, $\vec W_\nu^*$ – возм. ускорения.

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec v_\nu} \vec W_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec r_\nu} \vec v_\nu + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec v_\nu} \vec W_\nu^* + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec r_\nu} \vec v_\nu + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0.$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vec v_\nu} (\vec W_\nu - \vec W_\nu^*) = 0$$

$$\delta \vec r_\nu = \alpha (\vec W_\nu - \vec W_\nu^*), \quad \alpha \ne 0.$$

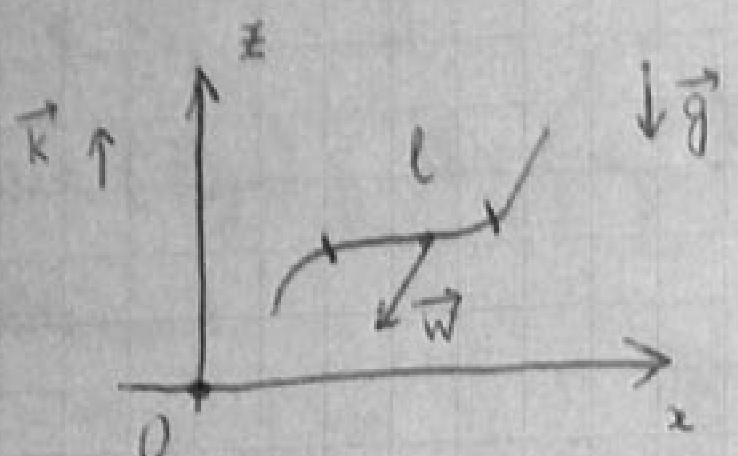
$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec W_\nu - \vec W_\nu^F)(\vec W_\nu - \vec W_\nu^*) = 0.$$

$$(\vec W_\nu - \vec W_\nu^F)(\vec W_\nu - \vec W_\nu^*) = W_\nu^2 - \vec W_\nu^F \cdot \vec W_\nu - \vec W_\nu \cdot \vec W_\nu^* + \vec W_\nu^F \vec W_\nu^* = \frac{1}{2} W_\nu^2 - \vec W_\nu \cdot \vec W_\nu^F +$$
$$+ \frac{1}{2}(\vec W_\nu^F)^2 + \frac{1}{2}\vec W_\nu^2 - \vec W_\nu \vec W_\nu^* + \frac{1}{2}(\vec W_\nu^*)^2 - \frac{1}{2}(\vec W_\nu^F)^2 + \vec W_\nu^F \vec W_\nu^* - \frac{1}{2}(\vec W_\nu^*)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(\vec W_\nu - \vec W_\nu^F)^2 + \frac{1}{2}(\vec W_\nu - \vec W_\nu^*)^2 - \frac{1}{2}(\vec W_\nu^* - \vec W_\nu^F)^2.$$

$$A_p = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec W_\nu - \vec W_\nu^*)^2, \quad A = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec W_\nu^* - \vec W_\nu^F)^2.$$

$$\{\vec W_\nu, \nu = 1, \dots, N\} = \operatorname*{argmin}_{\{W_\nu^*, \nu = 1, \dots, N\}} A.$$ A – принуждение по Гауссу.

Пример. Нитка не растяжимая.



$\vec r = \vec r(s)$ – гладкая кривая.

$\vec W = w_\tau \vec \tau + w_n \vec n$

$r(s_0+\lambda)$, $0 \le \lambda \le l$ $\quad w_n = \frac{v^2}{\rho}$

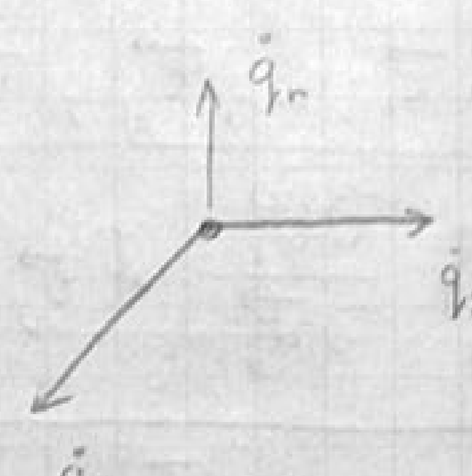
Уравнения Аппе́ля.

$\varphi_i(\vec r_1, \dots, \vec r_N, \vec v_1, \dots, \vec v_N, t) = 0$. Неголономные.

$f_j(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) = 0$. Геометрич. связи.

$\vec r_\nu = \vec r_\nu(q_1, \dots, q_n, t)$, $\vec v_\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i} \dot q_i + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}$

$\vec r_\nu = \vec r_\nu(q_1, \dots, q_n, t)$, $\vec v_\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i} \dot q_i + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t}$



$\varphi_i(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t) = 0 \to \dot q_j = \dot q_j(q_1, \dots, q_n,$
$\dot \pi_1, \dots, \dot \pi_k, t)$ – кинематич. уравнения

$$A = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec W_\nu - \vec W_\nu^F)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu W_\nu^2}_{= S \text{ – функция Аппеля (энергия ускорения)}} - \sum_{\nu=1}^{N} \vec W_\nu \cdot \vec F_\nu + \dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot \pi_l} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \vec W_\nu}{\partial \ddot \pi_l} \vec F_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial \pi_l} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial \pi_l} = Q_l^*$$

$$\frac{\partial \vec W_\nu}{\partial \ddot \pi_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_j} \frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot \pi_l}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot \pi_l} = Q_l$$

$$\dot q_j = \dot q_j$$

Энергия ускорения абсолютно твердого тела.

$$\frac{1}{2}\dot{\vec{\omega}}\, J\dot{\vec{\omega}} = \frac{1}{2}\left(A\dot{\omega}_1^2 + B\dot{\omega}_2^2 + C\dot{\omega}_3^2\right).$$