Геометрия масс §1.8.

$T(\vec x, \vec y) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec r_i \times \vec x)(\vec r_i \times \vec y)$. $J_{pq} = T(\vec e_p, \vec e_q)$, $p, q = 1, 2, 3$.

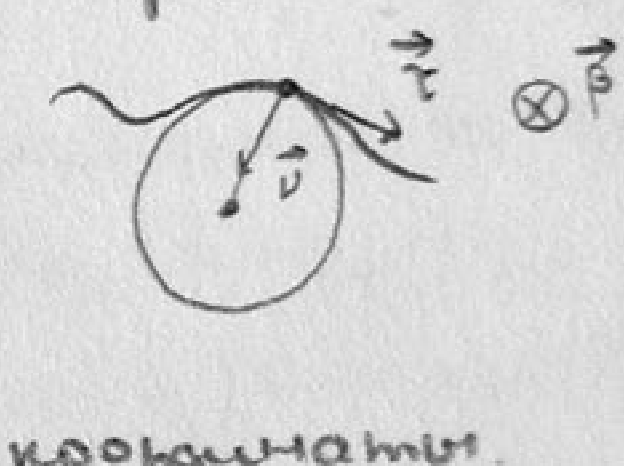
$\vec x = \frac{\vec e}{\sqrt{J_e}}$, $J_e = T(\vec e, \vec e)$. $T(x, x) = 1$. Эллипсоид инерции (он является эллипсоидом, если не все точечные массы принадлежат одной прямой). Если $\vec x$ — точка эллипсоида, то $J\vec x$ — нормаль к эллипсоиду в $\vec x$. Оператор инерции $J\vec x = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec r_i \times (\vec x \times \vec r_i))$. $T(\vec x, \vec y) = \vec y \cdot J\vec x$.

Главные оси инерции. §1.9.

Пусть для полюса O построен эллипсоид инерции. Главной осью инерции для него называется ось, которая проходит через точку O и коллинеарна нормали к эллипсоиду, взятой в точке пересечения оси с ним.

Ускорение точки. §2.2

$\frac{d\vec \tau}{ds} = \frac{\vec \nu}{\rho}$, $\vec \nu$ — единичный вектор, называемый главной нормалью к траектории, ρ — радиус кривизны в данной точке траектории. Плоскость векторов $\vec \tau$ и $\vec \nu$ называется соприкасающейся.



$\vec \beta = \vec \tau \times \vec \nu$. $\vec \tau, \vec \nu, \vec \beta$ — естественные оси.

$\vec w = w_\tau \vec \tau + w_\nu \vec \nu + w_\beta \vec \beta$, $w_\tau = \dot v = \frac{dv}{dt}$, $w_\nu = \frac{v^2}{\rho}$, $w_\beta = 0$.

Цилиндрические координаты.

$r_1 = \rho\cos\varphi$, $r_2 = \rho\sin\varphi$, $r_3 = r_3$.

$v_\rho = \dot\rho$, $v_\varphi = \rho\dot\varphi$, $v_3 = \dot r_3$.

$w_\rho = \ddot\rho - \rho(\dot\varphi)^2$, $w_\varphi = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi$

Сферические координаты.

$r_1 = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $r_2 = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $r_3 = \rho\sin\theta$.

$v_\rho = \dot\rho$, $v_\theta = \rho\dot\theta$, $v_\varphi = \rho\dot\varphi\cos\theta$.

Закон движения твёрдого тела §2.3.

Для определения закона движения твёрдого тела достаточно задать законы движения трёх его точек, не лежащих на одной прямой.

Закон произвольного движения твёрдого тела есть аффинное линейное преобразование вида $\vec r(t) = A(t)\vec x + \vec r\,'(t)$, где $\vec x$ — постоянный вектор, $A(t)$ — ортогональный линейный оператор, зависящий от времени, $\vec r\,'(t)$ — радиус-вектор фиксированного в теле полюса.

Движение вокруг неподвижной точки. §2.4.

$SO(3)$ — подгруппа ортогональных операторов в $O(3)$ с определителем 1.

Параметры Эйлера. §2.6.

Преобразование вращения абсолютно твёрдого тела вокруг оси с направляющим вектором $\vec{e}$ на угол α выражается формулой $\vec{r} = \vec{x} + 2q_0(\vec{\lambda}\times\vec{x}) + 2(\vec{\lambda}\times(\vec{\lambda}\times\vec{x}))$, где $q_0 = \cos(\frac{\alpha}{2})$, $\vec{\lambda} = \sin(\frac{\alpha}{2})\vec{e}$. $\vec{\lambda} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3$. q_0, q_1, q_2, q_3 — параметры Эйлера. $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$.

Параметры Кэли-Клейна. §2.7

$$\vec{P}_r = \begin{pmatrix} ir_1 & r_2+ir_3 \\ -r_2+ir_3 & -ir_1 \end{pmatrix}, \quad P_x = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2+ix_3 \\ -x_2+ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}.$$

Если P косоэрмитова, $\operatorname{tr} P = 0$, то $= P = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + p_3\sigma_3$, где $p_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,3$, $\sigma_1 = i\rho_3$, $\sigma_2 = i\rho_2$, $\sigma_3 = i\rho_1$, $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — унитарная матрица с $\det Q = 1$, $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $\bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta = 1$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — параметры Кэли-Клейна.

Параметры Эйлера — коэффициенты разложения $Q = q_0E + q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3$. $\alpha = q_0 + iq_1$, $\beta = q_2 + iq_3$, $\gamma = -q_2 + iq_3$, $\delta = q_0 - iq_1$.

Углы Эйлера ψ, θ, φ. $Q = Q_\psi Q_\theta Q_\varphi$, $Q_\psi = \cos(\frac{\psi}{2})E + \sin(\frac{\psi}{2})\sigma_3$, $Q_\theta = \cos(\frac{\theta}{2})E + \sin(\frac{\theta}{2})\sigma_1$, $Q_\varphi = \cos(\frac{\varphi}{2})E + \sin(\frac{\varphi}{2})\sigma_3$.

Кватернионы. §2.8.

Множество кватернионов — это пространство $\mathcal{H}$ линейных комбинаций вида $h = a + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i, j, k — некоторые линейно независимые символы.

$i \circ j = -j \circ i = k$, $j \circ k = -k \circ j = i$, $k \circ i = -i \circ k = j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

Каждому кватерниону h сопоставляется унитарная матрица $Q(h) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = aE + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3$. $Q(h_1+h_2) = Q(h_1) + Q(h_2)$.

$Q(h_1 \circ h_2) = Q(h_1)\cdot Q(h_2)$.

$h = a + bi + cj + dk$, $\bar{h} = a - bi - cj - dk$ — сопряжённый кватернион

$\overline{h_1 + h_2} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2$, $\overline{h_1 \circ h_2} = \bar{h}_2 \circ \bar{h}_1$.

$|h| = \sqrt{h \circ \bar{h}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. $|h|^2 = \det Q(h)$, $|h_1 \circ h_2| = |h_1|\cdot|h_2|$

Если $h \neq 0$, то $|h| \neq 0$ и $h^{-1} = \frac{\bar{h}}{|h|^2}$, $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = 1$.

H_1 – множество кватернионов с нормой, равной 1. Если $h \in H_1$, то $h^{-1} = \bar{h}$. H_1 – группа по умножению. $|h| = \sqrt{\det Q(h)}$, H_1 изоморфна $SU(2)$. $Q(h) = aE + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3$, $q_0 = a$, $q_1 = b$, $q_2 = c$, $q_3 = d$.

H_0 – трёхмерное пространство кватернионов x, для которых $\bar{x} = -x$. $|x|^2 = x \circ \bar{x} = -x^2$. H_0 изоморфно $\mathbb{R}^3$.

Теорема. Если $|h| = 1$, то преобразование $x \to z$, задаваемое формулой $z = h \circ x \circ \bar{h} = h \circ x \circ h^{-1}$, $x \in H_0$, есть вращение трёхмерного евклидова пространства.

Идеальные связи. Виртуальные перемещения. § 4.6.

Пространством T виртуальных перемещений называется множество наборов $\{\delta\vec{r}_\nu, \nu = \overline{1,N}\}$ векторов элементарных перемещений, удовлетворяющих системе
$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\vec{v}_\nu}\delta\vec{r}_\nu = 0,\ j = \overline{1,m}.$$

Геометрические связи $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $j = \overline{1,m}$.
$$\varphi_j = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial\vec{r}_\nu}\vec{v}_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial\vec{v}_\nu} = \frac{\partial f_j}{\partial\vec{r}_\nu}.\quad \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_j}{\partial\vec{r}_\nu}\delta\vec{r}_\nu = 0,$$
$j = \overline{1,m}$.

Связи идеальны, если $\forall \{\delta\vec{r}_\nu, \nu = \overline{1,N}\} \in T$ $\sum_{\nu=1}^{N}\vec{R}_\nu\delta\vec{r}_\nu = 0$.

Реакции m идеальных связей однозначно определяются при заданных активных силах, если $m \leq 3N$.

Принцип виртуальных перемещений. § 4.7.

Конфигурация системы N материальных точек, на которые наложены идеальные двусторонние стационарные связи, допускающие в данной конфигурации тождественное равенство нулю скоростей всех точек системы, является положением равновесия тогда и только тогда, когда в любой момент времени равна нулю сумма элементарных работ всех активных сил $\vec{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$, действующих на систему, на любом виртуальном перемещении $\{\delta\vec{r}_\nu, \nu = \overline{1,N}\}$ точек их приложения: $\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\delta\vec{r}_\nu = 0$ $\forall\{\delta\vec{r}_\nu, \nu = \overline{1,N}\} \in T$.

Если все действующие на систему силы потенциальны, то при выполнении условий принципа виртуальных перемещений необходимое и достаточное условие равновесия принимает вид $\delta U = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\nu} \delta \vec{r}_\nu = 0$, где V — силовая функция.

Принцип Торричелли: равновесие системы под действием сил тяжести достигается в тех и только тех конфигурациях, для которых центр масс системы занимает наивысшее, наинизшее или какое-либо другое стационарное положение по вертикали относительно соседних положений, переход к которым реализуется в пространстве виртуальных перемещений.

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ — голономные координаты, $Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$, $i = \overline{1,n}$, — обобщённые силы. Для равновесия системы материальных точек со стационарными голономными связями необходимо и достаточно, чтобы $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = 0$.

Уравнения равновесия абсолютно твёрдого тела. Геометрическая статика. §4.8.

Все виртуальные перемещения точек абсолютно твёрдого тела даются формулой $\delta \vec{r}\,'_\nu = \delta \vec{r}_0 + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_\nu$, где $\delta \vec{r}_0$ — произвольный вектор смещения полюса O, совпадающего с некоторой точкой тела, $\vec{r}_\nu$ — радиусы-векторы точек тела, имеющие начало в O, $\vec{r}\,'_\nu$ — радиусы-векторы точек тела в абсолютной системе координат, $\delta \vec{\varphi}$ — произвольный вектор дифференциала вращения.

Абсолютно твёрдое тело под действием активных сил $\vec{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$, будет находиться в равновесии тогда и только тогда, когда равны нулю главный (суммарный) вектор и главный (суммарный) момент этих сил относительно какого-нибудь фиксированного полюса O, выбираемого произвольно: $\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu = \vec{0}$, $\sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{0}$. Здесь имеется в виду свободное твёрдое тело.

Наложение новой связи не нарушает равновесия системы материальных точек. Отсюда вытекает, что любая система материальных точек (деформирующаяся или нет) обязана в своём положении равновесия подчиняться всем условиям, найденным для твёрдого тела.

Общее уравнение динамики системы материальных точек. Основные теоремы. § 5.1.

Двусторонние линейные дифференциальные связи (не обязательно голономные).

<u>Принцип Даламбера-Лагранжа.</u> Для того чтобы ускорения $\ddot{\vec{r}}_\nu$ материальных точек $(m_\nu, \vec{r}_\nu)$, $\nu = \overline{1,N}$, удовлетворяли второму закону Ньютона в инерциальной системе отсчёта под действием активных сил $\vec{F}_\nu$ и идеальных двусторонних связей, необходимо и достаточно выполнение общего уравнения динамики $\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu - \vec{F}_\nu)\cdot\delta\vec{r}_\nu = 0$ $\forall\ \{\delta\vec{r}_\nu,\ \nu=\overline{1,N}\} \in T$.

Уравнения Лагранжа первого рода: $m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{F}_\nu + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \vec{v}_\nu}$, $\nu = \overline{1,N}$. Их надо решать, учитывая связи, наложенные на систему.

$\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu$ (количество движения), $\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu$ (кинетический момент относительно некоторого начала отсчёта), $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu^{\,2}$ (кинетическая энергия).

$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu^{(i)} = \vec{0}$, $\sum_{\nu=1}^{N}\vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(i)} = \vec{0}$.

<u>Теорема об изменении количества движения.</u> Если связи идеальны и в каждый момент времени допускают поступательное виртуальное перемещение всей системы параллельно неподвижной оси с единичным направляющим вектором $\vec{e}$, то $\dot{Q}_e = \frac{dQ_e}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu^{(e)}\cdot\vec{e}$.

<u>Теорема об изменении кинетического момента.</u> Пусть связи идеальны и в каждый момент времени допускают дифференциал вращения $\delta\vec{r}_\nu = \delta\varphi\cdot\vec{e}\times\vec{r}_\nu$, $\nu=\overline{1,N}$, вокруг неподвижной оси с направляющим единичным вектором $\vec{e}$. Тогда $\frac{dK_e}{dt} = \vec{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^{(e)}$.

<u>Теорема об изменении кинетической энергии.</u> Допустим, что связи, наложенные на систему материальных точек, идеальны и таковы, что дифференциалы действительных перемещений при-

надлежат множеству T виртуальных перемещений. Тогда
$dT = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu d\vec{r}_\nu$, $\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu$.

Теоремы Кёнига. §5.2.

Оси Кёнига – оси движущейся поступательно системы координат с началом в центре масс тела.

$K = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c + K^*$, $K^* = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}'_\nu \times m_\nu \vec{v}_{r\nu}$, $\vec{r}'_\nu = \vec{r}_\nu - \vec{r}_c$.

$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T^*$, $T^* = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_{r\nu}^2$.

Движение систем переменного состава. §5.3.

$\vec{Q}|_{t_1} = \vec{Q}|_{t_1} + \Delta\vec{Q}_n - \Delta\vec{Q}_y$ $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{F}_n - \vec{F}_y$.

$\vec{F}_n = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{Q}_n}{\Delta t}$, $\vec{F}_y = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{Q}_y}{\Delta t}$. $\vec{F}_g = \vec{F}_n - \vec{F}_y$ – дополнительная сила.

Количество движения системы переменного состава изменяется в соответствии с уравнением $\frac{dQ}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{R}_\nu^{(e)}) + \vec{F}_g$.

$\vec{F}_n = \mu_n \vec{v}_n$, $\vec{F}_y = \mu_y \vec{v}_y$, $\mu_n = \frac{dM_n}{dt}$, $\mu_y = \frac{dM_y}{dt}$. $\vec{F}_g = \mu_n\vec{v}_n - \mu_y\vec{v}_y$. Для стационарного потока при постоянстве $\vec{v}_n, \vec{v}_y$ $\mu_n = \mu_y = \mu$ и $\vec{F}_g = \mu(\vec{v}_n - \vec{v}_y)$.

$\mu = \rho \iint_{S_n} \vec{v}\, \vec{n}\, dS$. Формула Эйлера: $\vec{R}_{no} = \vec{F}_\mu + \vec{F}_g$.

$\Delta m = m_n - m_y \neq 0$, $\Delta m \vec{u} = m_n\vec{v}_n - m_y\vec{v}_y$, $\vec{u}$ – средняя скорость переменной части системы. $\vec{F}_g = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta Q_n - \Delta Q_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{m_n\vec{v}_n - m_y\vec{v}_y}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)\vec{u} = \frac{dm}{dt}\vec{u}$. Это справедливо при $\frac{dm}{dt} \neq 0$.

Уравнение Мещерского. Пусть $\frac{dm}{dt} \neq 0$. Тогда изменение скорости $\vec{v}$ центра масс системы переменного состава описывается уравнением $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{R}_\nu^{(e)}) +$

$+(\vec{u}-\vec{v})\dfrac{dm}{dt}$. $\vec{u}-\vec{v}$ – относительная средняя скорость переменной части системы, $\vec{F}_R = \dfrac{dm}{dt}(\vec{u}-\vec{v})$ – реактивная сила.

Уравнение Леви-Чивита: если $\vec{u}=\vec{0}$, то $\dfrac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{R}_\nu^{(e)})$.

Формула Циолковского: если относительная средняя скорость переменной части системы $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}_0$ постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную ускорению центра масс системы, а внешние силы отсутствуют, то $v = u_0 \ln\dfrac{m_0}{m} + v_0$, где m_0 – начальное значение массы, v_0 – начальное значение модуля скорости.

Кинетический момент системы переменного состава относительно неподвижного полюса O.

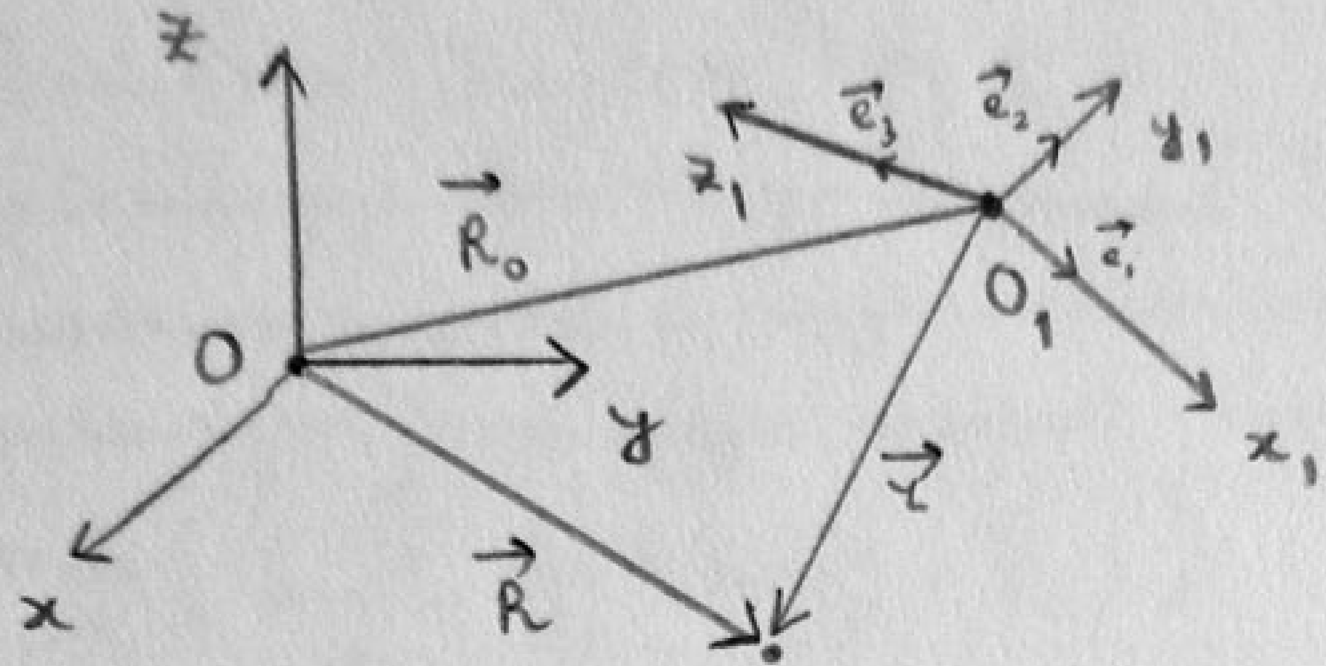
$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N}\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N}\vec{r}_\nu\times\vec{R}_\nu^{(e)} + \vec{M}_g,\quad \vec{M}_g = \vec{M}_n - \vec{M}_y,$$

$$\vec{M}_n = \frac{d\vec{K}_n}{dt},\quad \vec{M}_y = \frac{d\vec{K}_y}{dt}.$$

Произвольное движение твёрдого тела. §2.9.

Всякое перемещение твёрдого тела можно представить либо как результат поступательного движения, либо как результат винтового движения, т.е. такого, при котором поступательный сдвиг осуществляется вдоль оси вращения, определённой оператором A. Если проекция вектора $\vec{r}$ на ось вращения нулевая, то найдётся такая точка твёрдого тела, что движение сводится к повороту вокруг проходящей через неё оси.

Теорема Кориолиса.



$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$. $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$. $\frac{d\vec{e}_1}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_1]$, $\frac{d\vec{e}_2}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_2]$, $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{e}_3]$. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_r + [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

$$\vec{v}_r = \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz_1}{dt}\vec{e}_3.$$

$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{R}_0}{dt}$, $\vec{v}_a = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}] + \vec{v}_r$. $\vec{v}_e = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

$$\vec{W}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt}\left([\vec{\omega}, \vec{r}]\right) + \frac{d\vec{v}_r}{dt}.$$

$$\vec{w}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}.$$

$$\frac{d}{dt}\left([\vec{\omega}, \vec{r}]\right) = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, \vec{v}_r + [\vec{\omega}, \vec{r}]]$$

$$= \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, \vec{v}_r] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz_1}{dt}\vec{e}_3\right) = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{e}_3 +$$

$$+ \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{e}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\cdot\frac{d\vec{e}_2}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\cdot\frac{d\vec{e}_3}{dt}.$$

$$\vec{W}_r = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{e}_3.$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{W}_r + \left[\vec{\omega}, \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz_1}{dt}\vec{e}_3\right] = \vec{W}_r + [\vec{\omega}, \vec{v}_r].$$

$$\vec{W}_a = \vec{W}_0 + \vec{W}_r + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r].$$

$$\vec{W}_e = \vec{w}_0 + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

$\vec{W}_c = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$. $\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c$.

$\vec{W}_{вр} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right]$, $\vec{W}_{oc} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$. Ускорение произвольной точки твёрдого тела складывается из ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений.

Принцип Гаусса. §5.4.

Действительные ускорения $\vec{w}_\nu$, $\nu=\overline{1,N}$ системы материальных точек с идеальными связями доставляют минимум принуждению по Гауссу: $\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N}\frac{1}{m_\nu}(m_\nu\vec{w}_\nu-\vec{F}_\nu)^2 = \min\limits_{w_\nu^*}\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N}\frac{1}{m_\nu}(m_\nu\vec{w}_\nu^*-\vec{F}_\nu)^2\right)$.

Квазикоординаты. §5.5.

π_k могут служить координатами, однозначно определяющими конфигурацию системы с учётом дифференциальных связей, тогда и только тогда, когда зависимость $\dot{q}$ от квазискоростей эквивалентна линейной зависимости: $\dot{q}=\dot{q}_0+\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k\dot{\pi}_k$. Критерий - голономность данных дифференциальных связей. Но голономность ещё не означает, что любые квазикоординаты можно применять в качестве координат системы.

$$\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k}\overset{def}{=}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}.\quad \frac{\partial f}{\partial \pi_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k}\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}.$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \pi_k}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \vec{v}_\nu}\cdot\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}}_{=\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}=0,\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n-m}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \pi_k}\delta\pi_k=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \vec{v}_\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}\delta\pi_k\right).$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \varphi_j}{\partial \vec{v}_\nu}\delta\vec{r}_\nu=0,\ j=\overline{1,m}.\quad \delta\vec{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i,$$

$\delta q_i=\sum\limits_{k=1}^{n-m}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}\delta\pi_k=\sum\limits_{k=1}^{n-m}\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k}\delta\pi_k$. Пространство виртуальных перемещений.

$$A=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}Q_i\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k}\delta\pi_k=\sum_{k=1}^{n-m}\delta\pi_k\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}Q_i\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k}\right)}_{=Q_k^*}$$

Уравнения Аппеля. §5.6.

$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(\vec{q}, t)$, $\nu = \overline{1, N}$.

$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{n-m}, t)$

$S = \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \cdot \vec{w}_\nu^{\,2}$ – энергия ускорений.

$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_k} = Q_k^*$, $k = \overline{1, n-m}$, – уравнения Аппеля.

Теорема Кёнига. $S = \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{w}_\nu^{\,2} = \frac{1}{2} M \vec{w}_c^{\,2} + S^*$, $S^* = \frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu \cdot \vec{w}_{r\nu}^{\,2}$.

Для гироскопических сил $Q_i = \sum\limits_{k=1}^{p} \gamma_{ik} \dot{q}_k$, $i = \overline{1, p}$, (γ_{ik}) кососимметрична, $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$.

Позиционная линейная система.

$T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, $A = (a_{ij})$ симметрична и положительно определена; $U = -\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j$, $B = (b_{ij})$ симметрична.

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_j$, $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} q_j$.

$\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} q_j = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{q}_j = -\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} q_j$.

Для диссипативных сил $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \le 0$ (мощность принимает лишь неположительные значения).

Главные координаты. § 8.8.

$\vec{q} = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i \vec{\alpha}_i$, $\{\vec{\alpha}_i \mid i = \overline{1, n}\}$ – базис в $\mathbb{R}^n$. $A\ddot{\vec{q}} = -B\vec{q}$, $\ddot{\vec{q}} = -C\vec{q}$, $C = A^{-1}B$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ главных направлений ($\vec{q} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \vec{u}_i$), для которого $\ddot{\xi}_i = -\lambda_i \xi_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, – собственные значения самосопряжённого оператора C.

$\det(B - \lambda A) = 0$ – уравнение частот. Его решения – собственные значения C. Собственные векторы C: $(B-\lambda A)\vec{u}=\vec{0}$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\xi}_i^2,\ \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2,\ V=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2.$$

Координатная форма принципа Даламбера-Лагранжа

$$\vec{r}_\nu=\vec{r}_\nu(q_1,q_2,\dots,q_n,t),\ \nu=\overline{1,N}.\quad \dot{\vec{r}}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t},\ \nu=\overline{1,N}.$$

$$\varphi_j(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_N,t)=\varphi_j(q_1,q_2,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots,\dot{q}_n,t)=$$
$$=0,\ j=\overline{1,m},\ m<n.$$

$$\delta\vec{r}_\nu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i,\ \nu=\overline{1,N}.$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\vec{v}_\nu}\delta\vec{r}_\nu=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\vec{v}_\nu}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}}_{=\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}_i}}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\vec{v}_\nu}\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i=0,\ j=\overline{1,m}.$$

$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i\right)\delta q_i=0\right.$ для любых δq_i, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i=0$, $j=\overline{1,m}$, T - кинетическая энергия системы, $\left.Q_i=\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\right)\Leftrightarrow$ (принцип Даламбера-Лагранжа)

Уравнения Лагранжа для голономных систем. §8.1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\ i=\overline{1,n},\quad Q_i=\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i},\ i=\overline{1,n}.$$

Для склерономных систем $T=T_2$. T_2 положительно определена во всех точках, кроме особых.

Систему уравнений Лагранжа можно, за исключением тех случаев, когда координаты принимают значения, соответствующие особым точкам, разрешить относительно вторых производных обобщённых координат.

Циклические координаты. §8.4.

$L=T+U$. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i$, Q_i - обобщённые силы без силовой функции

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, q_i – циклическая координата. Нециклические координаты называются позиционными.

Если q_i – циклическая координата и $Q_i = 0$ (соответствующая ей непотенциальная сила отсутствует), то система уравнений Лагранжа допускает первый интеграл $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \beta_i$.

Метод Рауса. §8.5.

$q_1, q_2, \dots, q_s$ позиционные, $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_n$ циклические. $Q_\mu = 0$, $\mu = \overline{s+1, n}$. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = \beta_\mu$, $\mu = \overline{s+1, n}$. $\dot{q}_\mu = \dot{q}_\mu(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \dots, \beta_n, t)$. $R = L - \sum\limits_{\mu=s+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \dot{q}_\mu$. $R = R(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \dots, \beta_n, t)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, s}.$$

$$\dot{q}_\mu = -\frac{\partial R}{\partial \beta_\mu}, \quad \mu = \overline{s+1, n}$$

Энергетические соотношения. §8.2.

Для действительного элементарного перемещения $\{dq_i, i = \overline{1, n}\}$ голономной механической системы $d(T_2 - T_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \, dq_i - \frac{\partial T}{\partial t} dt$.

Пусть голономные связи, стесняющие систему материальных точек, могут зависеть явно от времени, но кинетическая энергия T от времени явно не зависит. Пусть активные силы, действующие на систему, обладают силовой функцией U, зависящей только от лагранжевых координат. Тогда уравнения Лагранжа допускают первый интеграл $T_2 - T_0 = U + h$.

$H = T + \Pi = T - U$. $\frac{dH}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}$.

Критерий гироскопических сил: $\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \equiv 0$ для любых значений обобщённых скоростей $\dot{q}_i$.

Критерий гироскопичности: $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \left(\vec{v}_\nu - \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \equiv 0.$

Критерий диссипативности: $\sum\limits_{\nu=1} \vec{F}_\nu \left(\vec{v}_\nu - \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}\right) \le 0.$

Гироскопические силы не влияют на изменение полной энергии системы. Они не нарушают интеграл энергии или обобщённый интеграл энергии Якоби. Диссипативные силы стремятся уменьшить полную энергию системы.

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{cases}$$

Движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. §6.3.

Если ось вращения служит главной и центральной осью инерции тела, то уравнения для определения реакций R_1, R_2, R'_1, R'_2 совпадают с условием равновесия твёрдого тела.

Если неподвижная ось тела служит главной и центральной осью инерции, а внешние силы отсутствуют, то при вращении тела реакции $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ в точках закрепления оси не возникают.

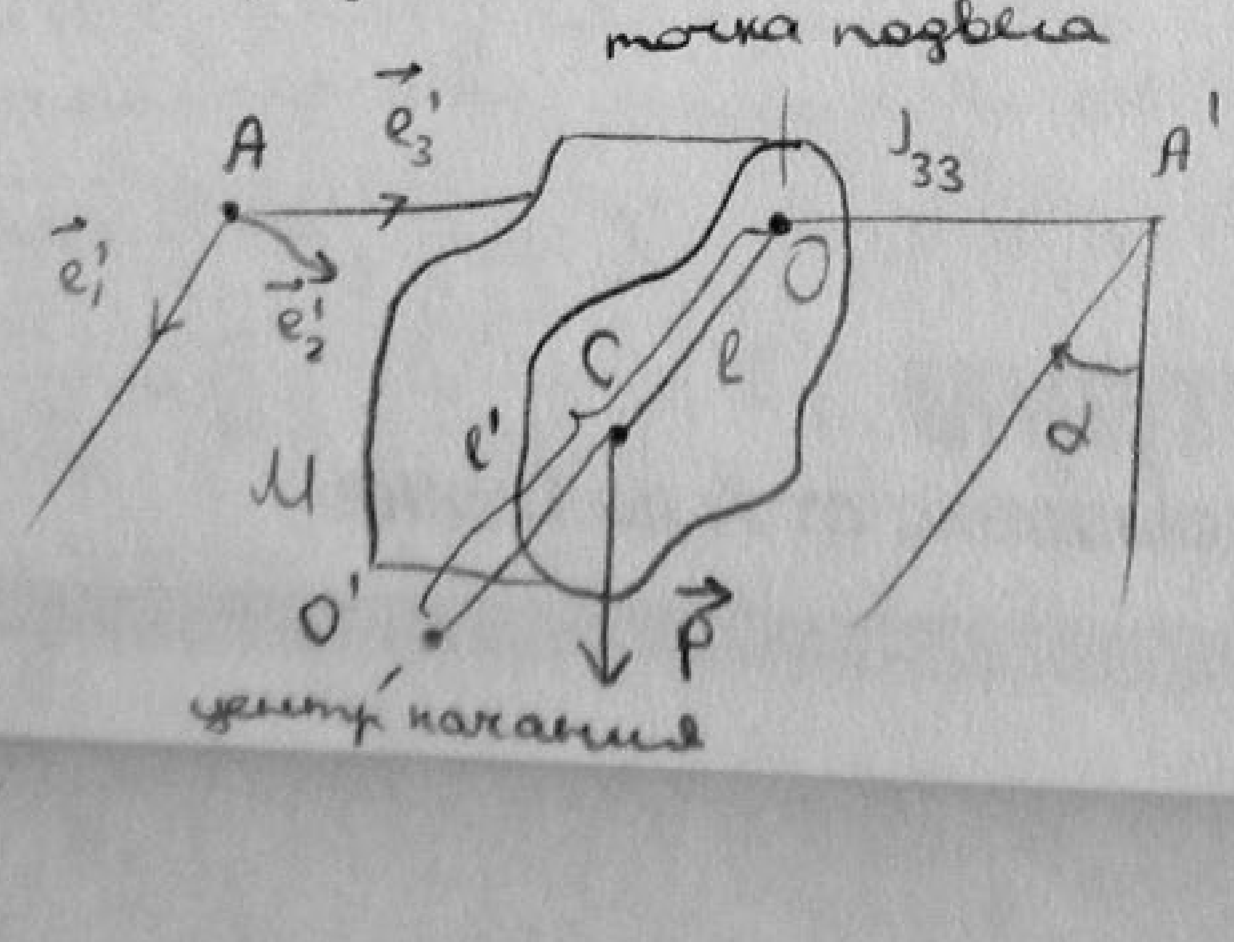
$$-(\dot\omega r'_{c2} + \omega^2 r'_{c1}) M = F_1 + R_1 + R'_1, \qquad \dot\omega J_{13} - \omega^2 J_{23} = M_1 - aR'_2,$$

$$(\dot\omega r'_{c1} - \omega^2 r'_{c2}) M = F_2 + R_2 + R'_2, \qquad \dot\omega J_{23} + \omega^2 J_{13} = M_2 + aR'_1,$$

$$0 = F_3 + R_3 + R'_3, \qquad \dot\omega J_{33} = M_3.$$

Физический маятник. §6.4.

Тяжёлое твёрдое тело, которое может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси.



Радиус инерции относительно $\vec{e}$: $k^2 = \frac{J_e}{M}$.

$\vec{r}_c = l\vec{e}'_1 + z\vec{e}'_3$

$k = \sqrt{\frac{J_{33}}{M}}$.

$M_3 = \dot{\omega} J_{33} = \ddot{\alpha} M k^2$, $M_3 = \vec{e}_3'(\vec{r}_c' \times \vec{P}) = -Mgl\sin\alpha$.

$\ddot{\alpha} = -\frac{gl}{k^2}\sin\alpha$ $\quad l' = \frac{k^2}{l}$ – приведённая длина.

ρ – центральный радиус инерции. $l' = l + \frac{\rho^2}{l}$.

$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$.

Точка подвеса и центр качания физического маятника – точки взаимные. Если центр качания принять за точку подвеса, то прежняя точка подвеса будет центром качания. Период колебаний маятника при этом не изменится.

Теорема. Кинетический момент $\vec{K}_A$ твёрдого тела, взятый относительно начала A подвижного репера, выражается формулой $\vec{K}_A = M\underset{\text{относительно } A}{\vec{r}_c'} \times \vec{v}_A + \mathbb{J}_A\vec{\omega}$, где $\mathbb{J}_A$ – взятый в точке A оператор инерции тела.

$$\vec{K}_A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu' \times m_\nu \vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu' \times m_\nu(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu') = \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu'\right)}_{=M\vec{r}_c'} \times$$
$$\times \vec{v}_A + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\vec{r}_\nu' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu'))}_{=\mathbb{J}_A\vec{\omega}}.$$

$J_{11} = \int_V ((r_2')^2 + (r_3')^2)\,dm$, $J_{22} = \int_V ((r_1')^2 + (r_3')^2)\,dm$, $J_{33} = \int_V ((r_1')^2 + (r_2')^2)\,dm$, $J_{12} = -\int_V r_1' r_2'\,dm$, $J_{13} = -\int_V r_1' r_3'\,dm$, $J_{23} = -\int_V r_2' r_3'\,dm$

$T = \frac{1}{2}Mv_A^2 + M\vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_c') + \frac{1}{2}I_\omega \omega^2 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + M\vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_c') + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{J}_A\vec{\omega}$. I_ω – момент инерции тела относительно оси, параллельной $\vec{\omega}$ и проходящей через A.

Если $A = C$, то $T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_\omega\omega^2$.

$\frac{\partial T}{\partial \vec{v}_A} = \vec{Q}$, $\frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} = \vec{K}_A$.

Движение твёрдого тела около неподвижной точки.

§6.6.

$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$, $J_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$, $\vec{\omega} = (p, q, r)$.

$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot J\vec{\omega} = \frac{1}{2}(p, q, r) \cdot (Ap, Aq, Ar)$. $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'$ связаны с телом. $\vec{K} = \frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}}$. $k_1 \doteq \frac{\partial T}{\partial p} = Ap$, $k_2 = \frac{\partial T}{\partial q} = Bq$, $k_3 = \frac{\partial T}{\partial r} = Cr$.

$$\underbrace{\frac{\tilde{d}\vec{K}}{dt}} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}.$$

$$\vec{\omega} \times \vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1\,' & \vec{e}_2\,' & \vec{e}_3\,' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = (Cqr - Bqr)\vec{e}_1\,' - \vec{e}_2\,'(Cpr - Apr) + (Bpq - Apq)\vec{e}_3\,'.$$

$$= \left(A\frac{dp}{dt}, B\frac{dq}{dt}, C\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_1, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M_2, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_3. \end{cases}$$

Динамические уравнения Эйлера.

Случай Эйлера. §6.7.

$\vec{M} = \vec{0}$.

$T = \mathrm{const}$, $\vec{K} = \mathrm{const}$ $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$, $K^2 = g^2$.

$\vec{\omega} \cdot \vec{K} = \mathrm{const}$.

Апекс – точка, в которой луч, выходящий из O коллинеарно $\vec{\omega}$, пересекает эллипсоид инерции. Расстояние от O до плоскости, касательной к эллипсоиду в апексе, не меняется при движении твёрдого тела. Плоскость P, касательная к эллипсоиду инерции в апексе, неподвижна.

Полодия описывается апексом на поверхности эллипсоида. Герполодия вычерчивается апексом на P.

Регулярной прецессией называется движение твёрдого тела около неподвижной точки, при котором оно участвует в сложном вращении с постоянной переносной угловой скоростью $\vec{\omega}_п$ и с постоянной по модулю относительной угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ при сохранении угла между $\vec{\omega}_п$ и $\vec{\omega}_r$.

Пусть $A = B > C$. Тогда в случае Эйлера возникает регулярная прецессия с $\vec{\omega}_п = \frac{\vec{K}}{A}$ и $\vec{\omega}_r = r\left(1 - \frac{C}{A}\right)\vec{e}_3\,'$.

Если $\vec{e_3} = \vec{k}$, то для регулярной прецессии $\dot\psi = \dot\psi_0 = \mathrm{const}$, $\dot\varphi = \dot\varphi_0 = \mathrm{const}$, $\underset{\sim}{\theta} = \theta_0 = \mathrm{const}$. Полодия и герполодия — окружности.

$= (\widehat{\vec{e_3}, \vec{e_3}'})$

Центр полодии лежит на наибольшей оси инерции. По ней направлена $\vec\omega$.

Случай Лагранжа - Пуассона. §6.8.

$A = B$, $\vec{r}_c' = z_0 \vec{e_3}'$, $z_0 > 0$. Ось прецессии направлена вертикально вверх. Поле силы тяжести. Ось собственного вращения задаётся $\vec{e_3}'$.

$T = \frac{1}{2}\left(A(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2\right)$, $V = -mgz_0\cos\theta$,

$\theta = (\widehat{\vec{e_3}, \vec{e_3}'})$, $\vec{e_3}$ направлен вертикально вверх.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = 0.$$

$\underline{\dot\psi \sin^2\theta = \beta - b r_0 \cos\theta}$, $\underline{\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = r_0}$.

$\dot\psi(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) + C\dot\varphi\cos\theta = \beta A$, $C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi) = Cr_0$.

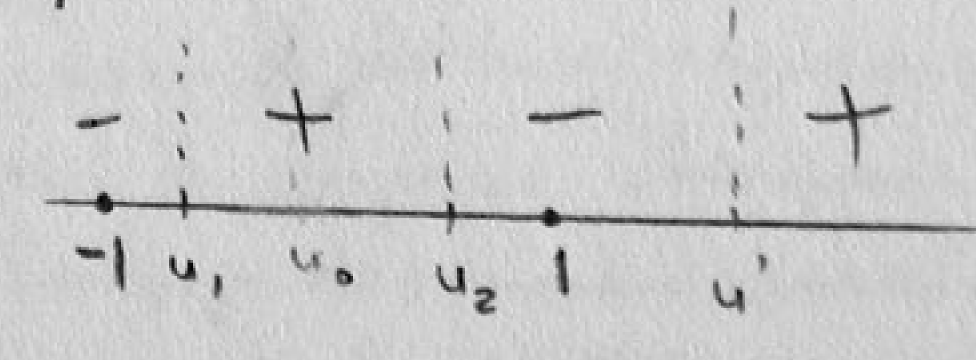
$b = \frac{C}{A}$.

Интеграл энергии $\underline{\dot\psi \sin^2\theta + \dot\theta^2 = \alpha - a\cos\theta}$, $\alpha = \frac{1}{A}(h - Cr_0^2)$, $a = \frac{2mgz_0}{A}$.

$u = \cos\theta \in [-1, 1]$.

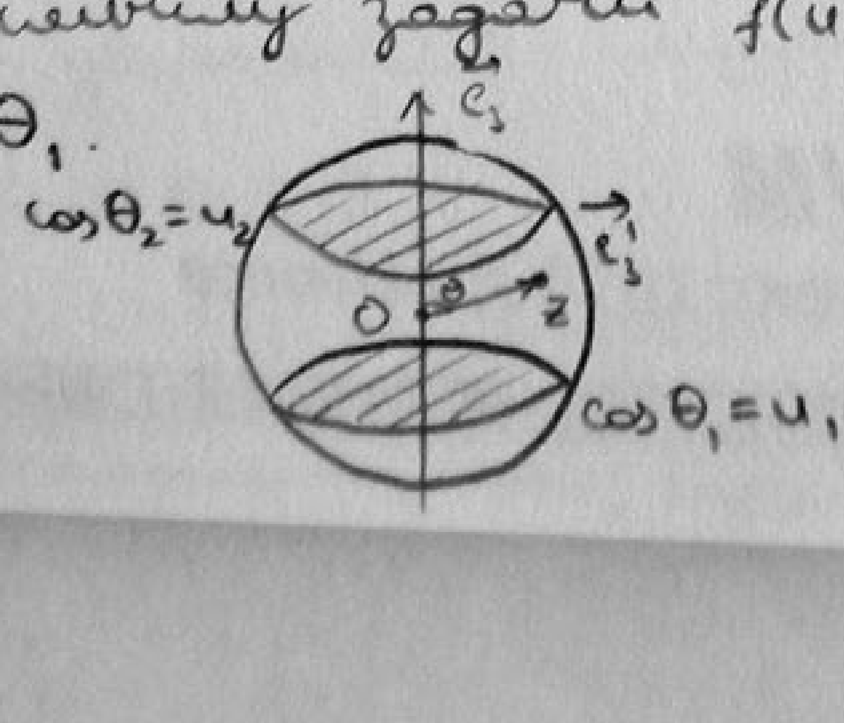
$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2 = f(u)$$

Пусть $u(t_0) = u_0$, $f(u_0) > 0$.

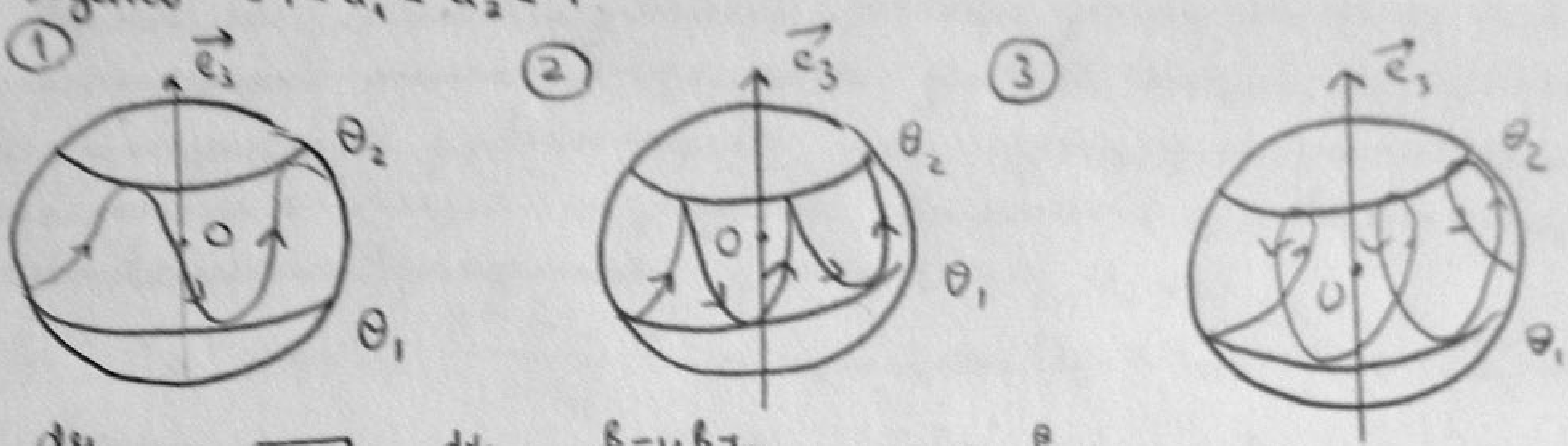


$|u_0| < 1$ (ведь $f(u_0) > 0$ и $f(u) \le 0$ при $u = \pm 1$).

По смыслу задачи $f(u) \geqslant 0$. $u_1 \le u \le u_2$. $u_1 = \cos\theta_1$, $u_2 = \cos\theta_2$, $\theta_2 \le \theta \le \theta_1$.



Пусть $-1 < u_1 < u_2 < 1$



$\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{f(u)}$, $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - u b\tau_0}{1-u^2}$. $u_\psi = \frac{\beta}{b\tau_0}$.

1. $u_\psi \notin [u_1, u_2]$. $\left|\frac{\beta}{b\tau_0}\right| \geq 1$ или $\left|\frac{\beta}{b\tau_0}\right| < 1$ и $\alpha < \frac{a\beta}{b\tau_0}$.

Угол прецессии изменяется строго монотонно, угловая скорость прецессии никогда не обращается в нуль. Кривая, описываемая точкой Z, гладко касается обеих параллелей.

2. $u_\psi \in \{u_1, u_2\}$. $u_\psi = u_1$ невозможно. $u_\psi = u_2$, $\frac{\beta}{b\tau_0} = u_2$.

Угол прецессии изменяется монотонно. Угловая скорость прецессии обращается в нуль на параллели θ_2. Кривая, описываемая концом Z вектора $\vec{e}_3'$, имеет точки возврата на параллели θ_2 и гладко касается параллели θ_1.

3. $u_1 < u_\psi < u_2$. $\left|\frac{\beta}{b\tau_0}\right| < 1$, $\alpha > \frac{a\beta}{b\tau_0}$. Угол прецессии меняется не монотонно. Угловые скорости прецессии имеют разные знаки на параллелях θ_1 и θ_2. Кривая, описываемая точкой Z, имеет петлеобразный характер с точками самопересечений и гладко касается обеих параллелей.

Теорема. Для возникновения в случае Лагранжа-Пуассона регулярной прецессии вокруг вертикальной оси необходимо и достаточно выполнение в начальный момент времени движения следующих равенств: $\dot{\theta}_0 = 0$, $2\dot{\psi}_0^2\cos\theta_0 - 2b\tau_0\dot{\psi}_0 + a = 0$

$\theta \equiv 0$ – спящий волчок.

Условие Маиевского. Волчок Лагранжа, закрученный вокруг вертикальной оси, будет спящим только при $\tau_0^2 \geq \frac{4mg\bar{l}A}{C^2}$.

Волчок Лагранжа называется быстро закрученным, если в начальный момент времени угловые скорости прецессии и нутации равны нулю, угол нутации может быть отличным от нуля и задана большая угловая скорость собственного вращения. $\dot{\psi}_0 = 0,\ \dot{\theta}_0 = 0,\ \theta_0 \neq 0$

$$\dot{\varphi}_0 = r_0 - \cos\theta_0 \frac{\beta - b r_0 u_0}{1-u_0^2} = r_0 - \underbrace{\dot{\psi}_0}_{=0} \cos\theta_0 = r_0. \quad r_0 \gg 1,\ \frac{b r_0^2}{a} \gg 1$$

Псевдорегулярной прецессией называется движение быстро закрученного волчка Лагранжа, происходящее между близкими с заданной точностью различными параллелями θ_1 и θ_2.

Для любого сколь угодно малого $\Delta\theta > 0$ существует угловая скорость собственного вращения, при которой быстро закрученный волчок Лагранжа осуществляет псевдорегулярную прецессию между параллелями θ_1 и $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$.

Кинематические уравнения Эйлера для кватернионов

§ 2.15

$P_r = Q P_x Q^*$, $P_r = -P_r^*$, $P_x = -P_x^*$, $Q Q^* = E$, $\det Q = 1$.

$P_r = r_1 \sigma_1 + r_2 \sigma_2 + r_3 \sigma_3$, $P_x = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3$.

$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, $\vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3$. Репер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ неподвижен

$Q \in SU(2)$. $Q = q_0 E + q_1 \sigma_1 + q_2 \sigma_2 + q_3 \sigma_3$.

Зафиксируем $\vec{x}$ и P_x.

$\dot{P}_r = \dot{Q} P_x Q^* + Q P_x \dot{Q}^* = \dot{Q} Q^* Q P_x Q^* + Q P_x Q^* Q \dot{Q}^* = \dot{Q} Q^* P_r + P_r Q \dot{Q}^*$.

$P_\Omega = 2 \dot{Q} Q^*$. $P_\Omega^* = 2 Q \dot{Q}^*$. $Q Q^* = E$, $\dot{Q} Q^* + Q \dot{Q}^* = E$, $P_\Omega = -P_\Omega^*$, P_Ω кососэрмитова.

$\dot{P}_r = \frac{1}{2}(P_\Omega P_r - P_r P_\Omega)$.

Пусть $\vec{\omega} = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 + \Omega_3 \vec{e}_3$, репер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ неподвижен

Тогда

$$P_\Omega = \begin{pmatrix} i\Omega_1 & \Omega_2 + i\Omega_3 \\ -\Omega_2 + i\Omega_3 & -i\Omega_1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\dot{P}_r = P_v$, сопоставим матрице $P_\Omega = 2\dot{Q}Q^*$ вектор $\vec{\omega}$, $P_v = \dot{P}_r = \frac{1}{2}(P_\Omega P_r - P_r P_\Omega) = P_{[\vec{\omega}, r]}$ значит, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ для любой точки твёрдого тела и $\vec{\omega} = \vec{\omega}$. При этом координаты $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ берутся в неподвижном репере $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

$$P_\Omega = 2\dot{Q}Q^* = \begin{pmatrix} i\Omega_1 & \Omega_2 + i\Omega_3 \\ -\Omega_2 + i\Omega_3 & -i\Omega_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \Omega_1\vec{e}_1 + \Omega_2\vec{e}_2 + \Omega_3\vec{e}_3,$$

$$h_\Omega = \Omega_1\vec{i} + \Omega_2\vec{j} + \Omega_3\vec{k}.$$

$$\dot{Q} = \frac{P_\Omega Q}{2}, \quad \dot{h} = \frac{h_\Omega \circ h}{2}.$$

$P_\Omega = 2\dot{Q}Q^*$, $P_\Omega \frac{Q}{2} = 2\dot{Q}\frac{\overbrace{Q^*Q}^{=E}}{2}$, $\dot{Q} = \frac{P_\Omega Q}{2}$.

$\dot{h} = h_\Omega \circ \frac{h}{2}$.

Для кватернионов, задающих вращение, $\bar{h} = -h$.

$Q \leftrightarrow h$, $P_\Omega \leftrightarrow h_\Omega$.

Пусть теперь репер подвижен и жёстко связан с телом

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1^{(t)} + \omega_2\vec{e}_2^{(t)} + \omega_3\vec{e}_3^{(t)}.$$

$$P_\Omega = \begin{pmatrix} i\omega_1 & \omega_2 + i\omega_3 \\ -\omega_2 + i\omega_3 & -i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad h_\omega = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}.$$

$$\dot{Q} = \frac{QP_\omega}{2}, \quad \dot{h} = \frac{h \circ h_\omega}{2}.$$

$\dot{P}_r = P_v = \dot{Q}P_x Q^* + QP_x\dot{Q}^*$ в абсолютном репере. Порейдём к координатам в $\vec{e}_1^{(k)}, \vec{e}_2^{(k)}, \vec{e}_3^{(k)}$. Умножим слева на Q^*, справа на Q. $P_V = Q^* P_v Q = Q^* \dot{Q} P_x + P_x \dot{Q}^* Q$

$P_\omega = 2 Q^* \dot{Q}$. Далее аналогично.

$P_r = Q P_x Q^*$, $Q^* P_r Q = Q^* Q P_x Q^* Q = P_x$.