МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Курс лекций по классической механике

Лектор — Евгений Иванович Кугушев

IV курс, 7 семестр, поток математиков

Москва, 2007 г.

Оглавление

Предисловие

Это лекции по классической механике для математиков IV курса. Здесь изложено всё, что есть в программе (кое-что было в лекциях, но не внесено в программу — этого здесь нет). Набирал сиё Степан Кузнецов (skuzn@inbox.ru). Исправление ошибок как всегда приветствуется. За обнаружение ошибок наборщик благодарит Александра Кашева, Владимира Щура, Константина Голубева и Наталью Харитонову.

Последняя компиляция: 25 января 2008 г.
Обновления документа — на сайтах http://dmvn.mexmat.net,
http://dmvn.mexmat.ru.
Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.

Механика у нас классическая, так что мы рассматриваем обычное евклидово пространство E^3 ($\mathbb{R}^3$ с метрикой $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$) и обычное ньютоновское время t (оно течёт вне зависимости от движений).

Основные объекты: материальные точки и твёрдые тела. *Материальная точка* задаётся радиус-вектором r и массой m. Система материальных точек — множество материальных точек + *связи* (ограничения). Частный случай системы материальных точек: $r_1, \ldots, r_N$ со связями $|r_i - r_j| = \mathrm{const}(t)$ называется *твёрдым телом.*

Наша задача — исследовать движение. Это сводится к исследованию ОДУ особого вида. Механика разделяется на кинематику и динамику. *Кинематика* изучает свойства движения вне зависимости от причин. *Динамика* рассматривает причины (силы). Прямая задача динамики: найти движение по силам, обратная: найти силы по движению.

1. Кинематика

1.1. Кинематика точки

Пусть фиксирован ортонормированный базис e_x, e_y, e_z. Движение материальной точки: $r(t) = x(t)e_x + y(t)e_y + z(t)e_z$. Первая производная $\boldsymbol{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y + \dot{z}e_z$ называется *скоростью*, а вторая $a(t) = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z$ — *ускорением* точки (как обычно, $\dot{} = \frac{d}{dt}$).

1.1.1. Движение по окружности

Материальная точка движется по окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\varphi(t) \\ y(t) = R\sin\varphi(t) \end{cases}$$

В каждой точке окружности определён *касательный вектор* $\tau = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ ($|\tau| = 1$) и *вектор внутренней нормали* $n = (-\cos\varphi, -\sin\varphi)$.

Дифференцируя соотношение $r(t) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$, получаем $\boldsymbol{v} = \dot{r} = R(-\sin\varphi, \cos\varphi)\dot{\varphi} = R\dot{\varphi}\tau$. Пусть $\boldsymbol{v} = v\tau$; $v = \pm|\boldsymbol{v}| = R\dot{\varphi}$ (скалярное значение скорости).

Дифференцируя равенство $\langle\tau, \tau\rangle = 1$, получаем: $\langle\dot{\tau}, \tau\rangle = 0$, то есть вектор $\dot{\tau}$ направлен по нормали к окружности. $\dot{\tau} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}n$. $k = 1/R$ — *кривизна* окружности. В этих обозначениях $\dot{\tau} = kvn$.

Ускорение $a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{v}\tau + v\dot{\tau} = \dot{v}\tau + kv^2n$. Первое слагаемое $a_\tau = \dot{v}\tau$ называется *касательным*, а второе $a_n = kv^2n$ — *нормальным* ускорением.

NB. $\dot{\varphi}$ **не следует** на экзаменах называть угловой скоростью! Это скорость изменения угловой координаты.

1.1.2. Движение по кривой

Задана пространственная кривая $r = \gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. $\gamma(\mathbb{R})$ — траектория. Точка $r(t)$ — *неособая*, если $\dot{r}(t) \neq 0$. Мы будем рассматривать движение только в неособых точках. В окрестности неособой точки отображение r взаимно-однозначно. Можно ввести натуральный параметр s (равный длине дуги кривой) со свойством $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$. Далее обозначаем $' = \frac{d}{ds}$, $\dot{} = \frac{d}{dt}$.

$\tau = r'$ — *касательный вектор*, $|\tau| = 1$. Имеем $\boldsymbol{v} = \dot{r} = r'\dot{s} = \dot{s}\tau = v\tau$. $v = \dot{s}$. Итак, скорость при движении по кривой такая же, как и при движении по любой окружности, касающейся данной кривой в данной точке.

Дифференцируя по s соотношение $\langle\tau, \tau\rangle = 1$, получаем $\langle\tau', \tau\rangle = 0$. $k = |\tau'|$ — *кривизна* кривой в данной точке. Вектор $n = \frac{\tau'}{k}$ называется *вектором главной нормали* к кривой. Плоскость $\Pi = \{r(t) + \lambda\tau + \mu n \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ называется *соприкасающейся плоскостью.* Окружность радиуса $\rho = 1/k$, лежащая в соприкасающейся плоскости и касающаяся кривой в данной точке, называется *соприкасающейся окружностью.*

Вычислим ускорение: $a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{v}\tau + v\dot{\tau} = \dot{v}\tau + kv^2n$ (последнее равенство верно в силу $\dot{\tau} = \tau'\dot{s} = \tau'v = kvn$). Ускорение лежит в соприкасающейся плоскости. Ускорение такое же, как при движении по соприкасающейся окружности.

Кривизна вычисляется по формуле $k = \frac{|[a, \boldsymbol{v}]|}{v^3}$ ($[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение): $[a, \boldsymbol{v}] = kv^3[n, \tau]$, $|[n, \tau]| = 1$, значит $|[a, \boldsymbol{v}]| = kv^3$.

Вектор $\beta = [\tau, n]$ называется *вектором бинормали.* Вектора τ, n и β образуют ортонормированный репер, называемый *трёхгранником Френе.* Из книжек по дифференциальной геометрии можно узнать *формулы Френе* (первую мы уже доказали):

$$\begin{cases} \tau' = kn \\ n' = -k\tau + \eta\beta \\ \beta' = -\eta n \end{cases}$$

Здесь η — *кручение* кривой — определяется из этих самых формул Френе. Для η есть вычислительная формула (её мы тоже доказывать не будем): $\eta = \frac{\langle[a, \boldsymbol{v}], \dot{a}\rangle}{|[a, \boldsymbol{v}]|^2}$.

1.2. Кинематика твёрдого тела

Твёрдое тело — система точек, расстояния между которыми неизменны.

1.2.1. Мгновенная угловая скорость. Формулы Пуассона

Пусть в твёрдое тело вморожен ортонормированный репер O', e_ξ, e_η и e_ζ (этот репер, в отличие от исходного, зависит от времени). Новые базисные векторы выражаются через старые:

$$\begin{pmatrix} e_\xi(t) \\ e_\eta(t) \\ e_\zeta(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

Эта странная запись означает всего лишь, что

$$\begin{cases} e_\xi = a_{11}e_x + a_{12}e_y + a_{13}e_z \\ e_\eta = a_{21}e_x + a_{22}e_y + a_{23}e_z \\ e_\zeta = a_{31}e_x + a_{32}e_y + a_{33}e_z \end{cases}$$

Здесь $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^3$ Матрица A (зависящая от времени) ортогональна ($AA^T = E$, то есть $A^T = A^{-1}$) и сохраняет ориентацию ($\det A = 1$). Обратное преобразование записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = A^T(t) \begin{pmatrix} e_\xi(t) \\ e_\eta(t) \\ e_\zeta(t) \end{pmatrix}$$

Дифференцируя, получаем:

$$\begin{pmatrix} \dot e_\xi \\ \dot e_\eta \\ \dot e_\zeta \end{pmatrix} = \dot A \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \underbrace{\dot A A^T}_{\Omega} \begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{pmatrix}$$

Ω — кососимметрическая матрица: $0 = \frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}(AA^T) = \dot A A^T + A\dot A^T = \dot A A^T + (\dot A A^T)^T = \Omega + \Omega^T$, то есть имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ (в базисе e_ξ, e_η, e_ζ) называется *мгновенной угловой скоростью* твёрдого тела.

$\dot e_\xi = \omega_3 e_\eta - \omega_2 e_\zeta = [\omega, e_\xi]$ (последнее равенство проверяется явно в базисе e_ξ, e_η, e_ζ: $e_\xi = (1,0,0)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$). Записывая аналогичные соотношения для $\dot e_\eta$ и $\dot e_\zeta$, получаем *формулы Пуассона*:

$$\dot e_\xi = [\omega, e_\xi]$$
$$\dot e_\eta = [\omega, e_\eta]$$
$$\dot e_\zeta = [\omega, e_\zeta]$$

Из формул Пуассона следует (легко проверить), что

$$\omega = \langle \dot e_\xi, e_\eta\rangle e_\zeta + \langle \dot e_\eta, e_\zeta\rangle e_\xi + \langle \dot e_\zeta, e_\xi\rangle e_\eta.$$

Отсюда получается, в частности, что ω в самом деле вектор (меняется при заменах координат так, как надо).

1.2.2. Распределение скоростей в твёрдом теле. Формула Эйлера

Пусть в твёрдом теле заданы две точки A и B, в точке A вморожен репер e_ξ, e_η, e_ζ. R — радиус-вектор точки A, r — радиус-вектор точки B, $\rho = \overrightarrow{AB}$. Очевидно, $r = R + \rho$.

$\rho = \xi e_\xi + \eta e_\eta + \zeta e_\zeta$. ξ, η и ζ — константы (B не движется относительно твёрдого тела). $\boldsymbol{v}_A = \dot R$, $\boldsymbol{v}_B = \dot r = \dot R + \dot\rho = \boldsymbol{v}_A + \dot\rho$.

$\dot\rho = \xi\dot e_\xi + \eta\dot e_\eta + \zeta\dot e_\zeta = \xi[\omega, e_\xi] + \eta[\omega, e_\eta] + \zeta[\omega, e_\zeta] = [\omega, \xi e_\xi + \eta e_\eta + \zeta e_\zeta] = [\omega, \rho] = [\omega, \overrightarrow{AB}]$.

Мы доказали *формулу Эйлера*:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + [\omega, \overrightarrow{AB}].$$

Заметим, что эта формула не зависит от выбора базиса e_ξ, e_η, e_ζ.

Покажем, что вектор ω такой, что для любых A и B верна формула Эйлера, единствен. Пусть их два: $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + [\omega, \overrightarrow{AB}]$, $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + [\omega_1, \overrightarrow{AB}]$. Отсюда для любого вектора $\overrightarrow{AB}$ $[\omega - \omega_1, \overrightarrow{AB}] = 0$, поэтому $\omega = \omega_1$.

Пример. Вращение вокруг неподвижной оси.

Пусть ось $l = OO_1$ — неподвижная. Из формулы Эйлера получаем, что для двух точек A и B $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} \parallel \omega$. Т.к. $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_{O_1} = 0$, $\omega \parallel OO_1$.

По формуле Эйлера для произвольной точки B получаем $\boldsymbol{v}_B = [\omega, \overrightarrow{OB}]$. В частности, если $OB \perp \omega$ ($OB \perp l$), то $\boldsymbol{v}_B = |\omega||OB|\tau$, где τ — вектор, перпендикулярный как $\overrightarrow{OB}$, так и l.

В силу формулы для скорости движения по окружности $\pm|\omega| = \dot{\varphi}$, то есть в данном случае $|\omega|$ и есть скорость изменения угловой координаты (ω оправдывает название „угловая скорость").

1.2.3. Распределение ускорений в твёрдом теле. Формула Ривальса

$a_B = \dot{\boldsymbol{v}}_B = \dot{\boldsymbol{v}}_A + [\dot{\omega}, \overrightarrow{AB}] + [\omega, (\overrightarrow{AB})^{\cdot}]$. $(\overrightarrow{AB})^{\cdot} = \dot{\rho} = [\omega, AB]$. Получили *формулу Ривальса*:

$$a_B = a_A + \underbrace{[\dot{\omega}, \overrightarrow{AB}]}_{\substack{\text{угловое}\\ \text{ускорение}}} + \underbrace{[\omega, [\omega, \overrightarrow{AB}]]}_{\substack{\text{центростремительное}\\ \text{ускорение}}}$$

Применяя формулу „бац минус цаб": $[a, [b, c]] = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$, получаем выражение для центростремительного ускорения: $a_c = [\omega, [\omega, \overrightarrow{AB}]] = \omega\langle\omega, \overrightarrow{AB}\rangle - \overrightarrow{AB}\langle\omega, \omega\rangle$.

1.2.4. Мгновенная ось винта при движении твёрдого тела

Пусть $\omega \neq 0$. Покажем, что существует O т.,ч. $\boldsymbol{v}_O \parallel \omega$. В этом случае назовём прямую $l = \{O + \lambda\omega\}$ *мгновенной осью винта* (для любой $B \in l$ $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_O \parallel \omega$: точки из l движутся вдоль этой прямой, а остальные (локально) совершают винтовое движение: $\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_O + [\omega, \overrightarrow{OS}]$).

Пусть такая точка существует. Тогда пусть S — произвольная точка твёрдого тела с $\overrightarrow{OS} \perp l$. По формуле Эйлера $\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_O + [\omega, \overrightarrow{OS}]$. Далее,

$$[\omega, \boldsymbol{v}_S] = \underbrace{[\omega, \boldsymbol{v}_O]}_{=0} + [\omega, [\omega, \overrightarrow{OS}]] = \omega \underbrace{\langle\omega, \overrightarrow{OS}\rangle}_{=0} - \overrightarrow{OS}|\omega|^2,$$

откуда

$$\overrightarrow{OS} = \frac{-[\omega, \boldsymbol{v}_S]}{|\omega|^2}.$$

Теперь поступим так: зададим произвольно точку S в твёрдом теле и с помощью этой формулы определим точку O. Проведя выкладки в обратном порядке, получим требуемое: положим O такой, что

$$\overrightarrow{OS} = -\frac{[\omega, \boldsymbol{v}_S]}{|\omega|^2}.$$

Ясно, что $\overrightarrow{OS} \perp \omega$. Проверим, что O — та точка, которая нам нужна (т.е. что $\boldsymbol{v}_O \parallel \omega$):

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_S - [\omega, \overrightarrow{OS}] = \boldsymbol{v}_S + \frac{[\omega, [\omega, \boldsymbol{v}_S]]}{|\omega|^2} = \boldsymbol{v}_S + \frac{\omega\langle\omega, \boldsymbol{v}_S\rangle}{|\omega|^2} - \frac{\boldsymbol{v}_S|\omega|^2}{|\omega|^2} = \frac{\langle\omega, \boldsymbol{v}_S\rangle}{|\omega|^2}\omega \parallel \omega.$$

Из формулы Эйлера вытекает *единственность* оси винта. Действительно, пусть существуют две точки O' и O'' со свойством $\boldsymbol{v}_{O'} \parallel \omega$ и $\boldsymbol{v}_{O''} \parallel \omega$. Тогда по формуле Эйлера $\boldsymbol{v}_{O''} = \boldsymbol{v}_{O'} + [\omega, \overrightarrow{O'O''}]$, откуда $[\omega, \overrightarrow{O'O''}] = \boldsymbol{v}_{O''} - \boldsymbol{v}_{O'} \parallel \omega$. С другой стороны, $[\omega, \overrightarrow{O'O''}] \perp \omega$, поэтому $[\omega, \overrightarrow{O'O''}] = 0$, то есть $\overrightarrow{O'O''} \parallel \omega$. Значит, $l' = \{O' + \lambda\omega\} = \{O'' + \lambda\omega\} = l''$, что и требовалось.

В данный момент времени произвольная точка S твёрдого тела совершает движение такое же, как точка винта с осью l (вращение + поступательное движение). Но сама ось l движется. В абсолютной системе координат она заметёт некоторую поверхность, называемую *неподвижным аксоидом*, а в относительной — *подвижным аксоидом*.

Частные случаи.

1) Если $\boldsymbol{v}_A = 0$, то $A \in l$, т.к. $\boldsymbol{v}_A = 0 \parallel \omega$. Пример: *качение без проскальзывания.* Тело с границей Σ_{TT} скользит по поверхности Σ, соприкасаясь с ним в точке контакта P. Отсутствие проскальзывания (по определению; это мы ещё обсудим подробнее) означает, что $\boldsymbol{v}_P = 0$, то есть $P \in l$. В частности, если имеются 3 точки контакта, то они лежат на одной прямой (а именно, l).

2) Если твёрдое тело вращается относительно неподвижной оси, то эта ось и есть ось винта. В этом случае аксоиды вырождаются в эту ось.

1.2.5. Плоско-параллельное движение твёрдого тела

Движение называется *плоско-параллельным* (ППД), если существует плоскость Π такая, что для любой точки A твёрдого тела $\boldsymbol{v}_A \parallel \Pi$. Обычно кинематику ППД рассматривают на плоскости.

При ППД $\omega \perp \Pi$: для всех A, B $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + [\omega, \overrightarrow{AB}]$; $\boldsymbol{v}_A \parallel \Pi$, $\boldsymbol{v}_B \parallel \Pi$, поэтому $[\omega, \overrightarrow{AB}] \parallel \Pi$. Если вдруг $\omega \not\perp \Pi$, возьмём $\overrightarrow{AB}$ неколлинеарным с ортопроекцией ω на Π, получаем, что $[\omega, \overrightarrow{AB}] \not\parallel \Pi$.

Существует винтовая ось l, перпендикулярная Π. Положим $C = l \cap \Pi$. $\boldsymbol{v}_C \parallel \Pi$, $\boldsymbol{v}_C \parallel \omega$, откуда $\boldsymbol{v}_C = 0$. Итак, если $\omega \neq 0$, то существует такая точка C, что $\boldsymbol{v}_C = 0$ (*мгновенный центр скоростей* — определён только для ППД).

При движении C описывает траекторию: в абсолютных координатах — *неподвижную центроиду*, в системе координат твёрдого тела — *подвижную центроиду*. Вторая катится по первой. В точке контакта C скорость равна нулю, то есть это (по определению) *качение без проскальзывания*.

Для произвольной точки A имеем $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_C + [\omega, \overrightarrow{CA}] = [\omega, \overrightarrow{CA}]$, откуда $\boldsymbol{v}_A \perp \overrightarrow{CA}$, то есть направление к центру скоростей перпендикулярно скорости. Из этих соображений C легко построить: берём две точки A и B, находим их скорости и берём точку пересечения перпендикулярных им прямых.

1.3. Относительное движение

1.3.1. Теорема о сложении скоростей

$Oxyz$ — неподвижная (абсолютная) система координат, орты (e_x, e_y, e_z) не зависят от времени.

$O'\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, орты (e_ξ, e_η, e_ζ) зависят от времени.

Пусть S — произвольная точка. Положим $R = \overrightarrow{OO'}$, $\rho = \overrightarrow{O'S}$, $r = \overrightarrow{OS}$. Ясно, что $R + \rho = r$. Разложим ρ по ортам подвижной системы координат: $\rho = \xi e_\xi + \eta e_\eta + \zeta e_\zeta$.

Абсолютная скорость точки: $\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \dot r$ ($r = xe_x + ye_y + ze_z$, $e_x, e_y, e_z = \text{const}$).

Относительная скорость точки (по определению): $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot\xi e_\xi + \dot\eta e_\eta + \dot\zeta e_\zeta$.

Переносная скорость $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ — это скорость точки твёрдого тела, связанного с подвижной системой координат, которая в данный момент совпадает с S.

По формуле Эйлера $\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{v}_{O'\,\text{абс}} + [\omega, \rho] = \dot R + [\omega, \rho]$.

Теорема 1.1 (о сложении скоростей). $\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{\text{пер}}$.

□ Дифференцируем соотношение $r = R + \rho$ по времени:

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \dot r = \dot R + \dot\rho = \boldsymbol{v}_{O'\,\text{абс}} + \xi\dot e_\xi + \eta\dot e_\eta + \zeta\dot e_\zeta + \underbrace{\dot\xi e_\xi + \dot\eta e_\eta + \dot\zeta e_\zeta}_{=\boldsymbol{v}_{\text{отн}}} =$$

$$= \boldsymbol{v}_{O'\,\text{абс}} + \xi[\omega, e_\xi] + \eta[\omega, e_\eta] + \zeta[\omega, e_\zeta] + \boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{v}_{O'\,\text{абс}} + [\omega, \rho] + \boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \boldsymbol{v}_{\text{отн}}.$$

■

1.3.2. Теорема о сложении ускорений

Абсолютное ускорение: $a_{\text{абс}} = \ddot r = \ddot x e_x + \ddot y e_y + \ddot z e_z$.

Относительное ускорение: $a_{\text{отн}} = \ddot\xi e_\xi + \ddot\eta e_\eta + \ddot\zeta e_\zeta$.

Переносное ускорение $a_{\text{пер}}$ — это ускорение точки, в данный момент совпадающей с S и фиксированной в подвижной системе координат ($\xi, \eta, \zeta = \text{const}$).

Кориолисово ускорение: $a_{\text{кор}} = 2[\omega, \boldsymbol{v}_{\text{отн}}]$ (ω — угловая скорость подвижной системы координат как твёрдого тела).

Теорема 1.2 (о сложении ускорений).

$$a_{\text{абс}} = a_{\text{отн}} + a_{\text{пер}} + a_{\text{кор}}$$

□ Из формулы Ривальса получаем:

$$a_{\text{пер}} = a_{O'\,\text{абс}} + [\dot\omega, \rho] + [\omega, [\omega, \rho]].$$

Имеем

$$r = R + \rho = R + \xi e_\xi + \eta e_\eta + \zeta e_\zeta.$$

Дифференцируем два раза по времени (многоточие обозначает слагаемые с η и ζ, аналогичные (выписанным) слагаемым с ξ):

$$\ddot r = \ddot R + \xi\ddot e_\xi + \ldots + 2\dot\xi\dot e_\xi + \ldots + \underbrace{\ddot\xi e_\xi + \ldots}_{=a_{\text{отн}}} = \ddot R + \xi([\omega, e_\xi])^{\cdot} + \ldots + 2\dot\xi[\omega, e_\xi] + \ldots + a_{\text{отн}} =$$

$$= \ddot R + \xi[\dot\omega, e_\xi] + \ldots + \xi[\omega, \dot e_\xi] + \ldots + \underbrace{2[\omega, \boldsymbol{v}_{\text{отн}}]}_{=a_{\text{кор}}} + a_{\text{отн}} = \underbrace{\ddot R + [\dot\omega, \rho] + [\omega, [\omega, \rho]]}_{=a_{\text{пер}}} + a_{\text{отн}} + a_{\text{кор}}.$$

■

…Далее была стандартная сказка про то, какой берег у реки обрывистый и почему это происходит.

1.3.3. Ускорение в полярных координатах

Точка движется в плоскости. На плоскости задана система координат Oxy. А мы рассмотрим полярные координаты r и φ. В каждой точке движения нашей кривой задан локальный базис e_r, e_φ, где e_r — единичный вектор, направленный по радиусу, $e_\varphi \perp e_r$. Наша цель — выразить ускорение в терминах r, φ и их производных.

Мы воспользуемся теоремой о сложении ускорений. e_r, e_φ — базис подвижной системы координат (с центром в том же начале координат). Эта система координат вращается вокруг оси Oz: $\omega = \dot\varphi e_z$. Имеем: $a_{\text{отн}} = \ddot r e_r$ (в базисе e_r, e_φ точка имеет координаты $(r, 0)$); $a_{\text{пер}} = -\dot\varphi^2 r e_r + \ddot\varphi r e_\varphi$ (это ускорение движения по окружности: точка, закреплённая на подвижной системе координат, как раз совершает такое движение); $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot r e_r$, $a_{\text{кор}} = 2[\omega, \boldsymbol{v}_{\text{отн}}] = 2\dot\varphi\dot r[e_z, e_r] = \dot\varphi\dot r e_\varphi$. По теореме о сложении ускорений

$$a_{\text{абс}} = a_{\text{отн}} + a_{\text{пер}} + a_{\text{кор}} = \ddot r e_r - \dot\varphi^2 r e_r + \ddot\varphi r e_\varphi + 2\dot\varphi\dot r e_\varphi.$$

Упрощая, получаем *формулу для ускорения в полярных координатах*:

$$a_{\text{абс}} = (\ddot r - \dot\varphi^2 r)e_r + (\ddot\varphi r + 2\dot\varphi\dot r)e_\varphi.$$

1.3.4. Теорема о сложении угловых скоростей

Пусть у нас есть неподвижная система координат $Oxyz$, подвижная система координат $O_1\xi\eta\zeta$ и, наконец, твёрдое тело с вмороженной в него системой координат $O_2\alpha\beta\gamma$ (итого три системы координат: I, II и III).

Нас интересует угловая скорость твёрдого тела, то есть угловая скорость III по отношению к I: $\omega_{\text{абс}} = \omega_{\mathrm{III/I}}$. Известны: относительная угловая скорость $\omega_{\text{отн}} = \omega_{\mathrm{III/II}}$ (наблюдаем твёрдое тело в системе II) и переносная угловая скорость $\omega_{\text{пер}} = \omega_{\mathrm{II/I}}$ (скорость твёрдого тела, в данный момент совпадающего с нашим и неподвижным относительно системы II).

Теорема 1.3 (о сложении угловых скоростей). $\omega_{\text{абс}} = \omega_{\text{отн}} + \omega_{\text{пер}}$.

□ Возьмём в твёрдом теле две произвольные точки A и B. По теореме о сложении скоростей получаем:

$$\boldsymbol{v}_{A\,\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{A\,\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{A\,\text{пер}}$$
$$\boldsymbol{v}_{B\,\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{B\,\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{B\,\text{пер}}.$$

Запишем формулу Эйлера:

$$\boldsymbol{v}_{B\,\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{A\,\text{абс}} + [\omega_{\text{абс}}, \overrightarrow{AB}]$$
$$\boldsymbol{v}_{B\,\text{отн}} = \boldsymbol{v}_{A\,\text{отн}} + [\omega_{\text{отн}}, \overrightarrow{AB}]$$
$$\boldsymbol{v}_{B\,\text{пер}} = \boldsymbol{v}_{A\,\text{пер}} + [\omega_{\text{пер}}, \overrightarrow{AB}]$$

Отсюда получаем, что для всех A, B

$$[\omega_{\text{абс}} - \omega_{\text{отн}} - \omega_{\text{пер}}, \overrightarrow{AB}] = 0,$$

поэтому $\omega_{\text{абс}} - \omega_{\text{отн}} - \omega_{\text{пер}} = 0$, что и требовалось. ■

1.3.5. Цепочка подвижных систем координат

Пусть теперь у нас есть $n+1$ систем координат $(0, 1, \ldots, n)$ и бедная точка, которая во всём этом беспорядке всё-таки движется. Пусть $\boldsymbol{v}_n$ — скорость этой точки относительно n-й системы, а $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 0, \ldots, (n-1))$ — переносная скорость $(i+1)$-й системы относительно i-й. Тогда (это можно доказать индукцией по n, применяя на каждом шаге теорему о сложении скоростей)

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_{n-1} + \boldsymbol{v}_n.$$

Если же вместо точки у нас движется целое твёрдое тело, то имеет место аналогичная формула для угловых скоростей:

$$\omega_{\text{абс}} = \omega_{1/0} + \omega_{2/1} + \ldots + \omega_{n/n-1} + \omega_{\mathrm{TT}/n}.$$

1.4. Углы и кинематические формулы Эйлера

1.4.1. Углы Эйлера

Предупреждаю сразу: картинку мне рисовать лень — С.К.

Пусть у нас есть неподвижная система координат $Oxyz$ и твёрдое тело с неподвижной точкой O, в которое вморожена (подвижная) система координат $O\xi\eta\zeta$.

Считаем, что $O\zeta \not\parallel Oz$ (иначе наступит вырождение — об этом позже). Тогда плоскости Oxy и $O\xi\eta$ пересекаются по некоторой прямой, называемой *линией узлов* (обозначение: Oi, единичный направляющий вектор — e_i). Угол ψ от Ox до Oi называется *углом прецессии*, угол θ от Oz до $O\zeta$ — *углом нутации*, а угол φ от Oi до $O\xi$ — *углом собственного вращения*. Вместе эти три угла называются *углами Эйлера*.

Углы Эйлера (в невырожденном случае) однозначно определяются по положению твёрдого тела. Верно и обратное: положение твёрдого тела однозначно определяется углами Эйлера. Дело в том, что система $O\xi\eta\zeta$ получается из неподвижной тремя поворотами ($\mathrm{I} = Oxyz$):
1. вокруг Oz на ψ: получаем $Oi \ldots z = \mathrm{II}$;
2. вокруг Oi на θ: получаем $Oi \ldots \zeta = \mathrm{III}$;
3. вокруг $O\zeta$ на φ: получаем $O\xi\eta\zeta = \mathrm{IV}$.

1.4.2. Кинематические формулы Эйлера

Если твёрдое тело движется, то углы Эйлера суть функции времени. ω — тоже функция времени. На самом деле $\omega(t) = f(\varphi, \psi, \theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta)$. Наша цель: найти p,q и r в разложении

$$\omega = pe_\xi + qe_\eta + re_\zeta.$$

Имеем:

$$\omega = \omega_{\mathrm{II/I}} + \omega_{\mathrm{III/II}} + \omega_{\mathrm{IV/III}}.$$

Каждый переход есть просто вращение, поэтому

$$\omega_{\mathrm{II/I}} = \dot\psi e_z; \qquad \omega_{\mathrm{III/II}} = \dot\theta e_i; \qquad \omega_{\mathrm{IV/III}} = \dot\varphi e_\zeta.$$

Осталось разложить e_z и e_i по e_ξ, e_η, e_ζ. Это делается так: $e_i = \cos\varphi e_\xi - \sin\varphi e_\eta$, $e_z = \cos\theta e_\zeta + \sin\theta\sin\varphi e_\xi + \sin\theta\cos\varphi e_\eta$ (аналитическая геометрия, 1-й курс).

Собирая всё вместе в ω, получаем *кинематические формулы Эйлера*:

$$\begin{aligned} p &= \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi \\ q &= \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi \\ r &= \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \end{aligned}$$

2. Динамика

2.1. Аксиомы ньютоновой механики

2.1.1. Принцип детерминизма

Замкнутая система — это система материальных точек, на движение которых не влияет ничто извне (на практике небольшими силами пренебрегают).

Принцип детерминизма: *движение замкнутой системы точек однозначно определяется их начальными положениями и скоростями.*

Пусть у нас есть n точек с радиус-векторами $r_1(t)$, $\ldots$, $r_n(t)$. Обозначим $r = (r_1, \ldots, r_n)$. Тогда принцип детерминизма запишется в виде:

$$r(t) = \Phi(r(t_0), \dot r(t_0), t_0, t).$$

Найдём ускорение:

$$\ddot r(t) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(r(t_0), \dot r(t_0), t_0, t).$$

Полагая $t_0 = t$, получаем:

$$\ddot r(t) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(r(t), \dot r(t), t, t) = f(r(t), \dot r(t), t).$$

Движение системы описывается системой ОДУ 2 порядка:

$$\ddot r = f(r, \dot r, t).$$

Если выполнены условия существования и единственности решения (f достаточно гладкая), то это уравнение даст нам однозначную зависимость от t. Таким образом, принцип детерминизма можно переформулировать так: *система описывается системой ОДУ 2 порядка.*

2.1.2. Принцип относительности Галилея

1. Существует *инерциальная* система отсчёта (координат и времени). Именно в ней верен принцип детерминизма.
2. Всякая система, движущаяся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, время в которой течёт с той же скоростью (сдвиг на константу), что и в инерциальной, сама является инерциальной.
3. Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта, то есть если у нас в одной инерциальной системе $\ddot{r} = f(r, \dot{r}, t)$, а в другой $\ddot{\tilde{r}} = \tilde{f}(\tilde{r}, \dot{\tilde{r}}, \tilde{t})$, то $f = \tilde{f}$.

Преобразования, сохраняющие инерциальность (и, следовательно, законы механики), имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{r} = Ar + b + \boldsymbol{v}_0 t \\ \tilde{t} = t - t_0 \end{cases}$$

(A — ортогональная матрица, первое равенство рассматривается по каждой компоненте r в отдельности) и образуют *галилееву группу преобразований.* Мы постулируем, что законы механики (функция f) инвариантны относительно этих преобразований. Если взять другую группу, получим другую механику.

Следствия из принципа относительности:
1. «Силы» (правые части уравнения движения) не зависят от времени. Действительно, рассмотрим преобразование Галилея с $A = E$, $b = \boldsymbol{v}_0 = 0$ и некоторым t_0. Получим:

$$f(r, \dot{r}, t) = f(r, \dot{r}, t - t_0).$$

Это имеет место для всех $t_0 \in \mathbb{R}$. Полагая $t_0 = t$, получаем требуемое.
2. f зависит только от взаимного расположения точек (т.е. величин $r_i - r_j$, а не самих r_i). Действительно, положим $A = E$, $\boldsymbol{v}_0 = 0$, b — произвольный вектор. Тогда

$$f(r, \dot{r}) = f(r + b, \dot{r}),$$

что и требовалось.
3. f зависит только от разностей скоростей, а не самих $\boldsymbol{v}_i$. Полагаем $A = E$, $b = 0$, $\boldsymbol{v}_0$ — некоторый вектор.

Частные случаи:
1. *Изолированная точка* ($N = 1$ — замкнутая система из одной точки). $f = f(0, 0) = \text{const}$. Далее, $Af = f$ для любой ортогональной матрицы A, значит $f = 0$. Уравнение движения изолированной точки:

$$\ddot{r} = 0.$$

Получили *первый закон Ньютона.*
2. Замкнутая система из *двух точек.*

$$\ddot{r}_i = f_i(r_1 - r_2, \dot{r}_1 - \dot{r}_2)$$

($i = 1, 2$, $f = (f_1, f_2)$).

Пусть силы не зависят от скоростей: $f = f(r_1 - r_2)$. Тогда для любой ортогональной матрицы A имеем $Af(r_1 - r_2) = f(A(r_1 - r_2))$. Полагая A матрицей поворота вокруг $r_1 - r_2$, получаем, что $Af(r_1 - r_2) = f(r_1 - r_2)$ (поскольку $A(r_1 - r_2) = r_1 - r_2$). Значит, $f \parallel r_1 - r_2$: силы направлены по линии, соединяющей точки.

В связи с этим постулируется ещё
Третий закон Ньютона: *сила действия равна силе противодействия* ($f_1 + f_2 = 0$). Такие силы называются *внутренними.*

2.1.3. Принцип суперпозиции сил

Обычно уравнение движения домножают на масштабирующий коэффициент m_i и получается

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r, \dot{r}, t).$$

F_i называется *силой*, действующей на i-ю точку. Принцип суперпозиции сил утверждает, что существует такой коэффициент $m_i > 0$, называемый *массой* точки, что если в первой системе на точку действует сила F_1, а во второй — F_2, то в объединении этих систем на неё будет действовать сила $F_1 + F_2$.

2.2. Вывод формулы для гравитационной силы из законов Кеплера

Рассматривается движение планеты вокруг Солнца (действием других тел пренебрегаем). Точку, где находится центр Солнца, обозначим S, где центр планеты — P. Из опыта Кеплер в своё время вывел следующие *законы*:

I. Движение планет — периодическое по эллипсам с одним из фокусов в центре Солнца.

II (закон площадей). За равные промежутки времени вектор $\overrightarrow{SP}$ заметает сектора одинаковой площади.

III. Пусть T — период движения, a — большая полуось эллипса. Тогда

$$\frac{a^3}{T^2} = \mathrm{const} \quad \text{(одна и та же для всех планет).}$$

Выведем из этих законов ньютоновскую формулу притяжения.

Пусть в момент времени t_0 планета находилась в *перицентре* (точке, где эллипс пересекается с той из больших полуосей, которая проходит через S; точка, где пересекает эллипс другая большая полуось, зовётся *апоцентром*). Обозначим через $S(t)$ площадь сектора, заметаемого вектором $\overrightarrow{SP}$ за время от t_0 до t.

В силу второго закона Кеплера $\dot{S} = c/2 = \mathrm{const}$. С другой стороны, S можно записать в полярных координатах (r, φ) с центром в центре Солнца:

$$S(t) = \int\limits_0^{\varphi(P)} \int\limits_0^{r(P)} r\,dr d\varphi = \int\limits_0^{\varphi(P)} \frac{r^2}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} r^2 \dot{\varphi}\,d\varphi.$$

Отсюда $c = 2\dot{S} = r^2\dot{\varphi}$. Всюду на эллипсе $r \neq 0$, поэтому можно делить:

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \text{откуда } \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}.$$

Вспомним формулу для ускорения в полярных координатах:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)e_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})e_\varphi = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)e_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$

Но $r^2\dot{\varphi} = c = \mathrm{const}$, поэтому второе слагаемое равно нулю, и

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)e_r = f e_r.$$

Сила направлена вдоль радиуса и равна $f = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r$. Вычислим f. Имеем

$$f = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r = \ddot{r} - \frac{c^2}{r^3}.$$

Далее,

$$\frac{d}{d\varphi} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{r^2}{c},$$

откуда

$$\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\dot{r}\cdot\frac{r^2}{c} = \frac{\dot{r}}{c}$$

и

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\dot{r}}{c}\right) = \frac{\ddot{r}}{c}\frac{r^2}{c} = \frac{r^2\ddot{r}}{c^2}.$$

Отсюда

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(-\frac{1}{r}\right),$$

следовательно,

$$f = \ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right).$$

Вспомним уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \quad (e \in (0,1) \text{ — эксцентриситет}).$$

Из этого уравнения

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi; \quad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\cos\varphi.$$

Далее

$$f = -\frac{c^2}{r^2}\left(-\frac{e}{p}\cos\varphi + \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi\right) = -\frac{c^2}{pr^2}.$$

Итак, мы получили формулу для ускорения:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{c^2}{pr^2}e_r.$$

Ускорение направлено к Солнцу и обратно пропорционально квадрату расстояния. Осталось разобраться с константой $\mu = c^2/p$.

Для эллипса у нас есть формула $p = b^2/a$ (b — малая полуось, a — большая полуось). Отсюда $\mu = c^2a/b^2$, $c = 2\dot{S}$. За период T заметётся весь эллипс: $2S(T) = 2\pi ab = cT$. Поэтому

$$c = \frac{2\pi ab}{T}; \quad \mu = \frac{c^2 a}{b^2} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}.$$

Но в силу третьего закона Кеплера a^3/T^2 не зависит от планеты, а значит, и μ для всех планет одна и та же. Отсюда получаем (второй закон Ньютона), что

$$F = m_P\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{-\mu m_P}{r^2},$$

где m_P — масса планеты. Это и есть *формула ньютоновского притяжения.*

Закон Ньютона (постулат): так устроено взаимодействие между любыми двумя телами (эта формула носит общий характер). Кроме того, Ньютон постулирует, что $\mu = m_S\gamma$, где γ — мировая константа.

2.3. Учение о связях

2.3.1. Голономные связи

У нас есть система точек $r_1, \ldots, r_N$. *Связями* мы называем условия, накладываемые на эту систему уравнениями

$$f_i(r_1, \ldots, r_N, \dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_N, t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

Если функции f_i не зависят от скоростей, соответствующие связи называются *голономными* или *геометрическими.*

Простейший пример системы с голономными связями — твёрдое тело. Там связи имеют вид

$$\|r_j - r_l\|^2 - c_{jl} = 0$$

(всего $\frac{N(N-1)}{2}$ соотношений).

Связи называются *независимыми*, если f_i функционально независимы, то есть ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\right)$ максимален (равен k).

Наши голономные связи в каждый момент времени t задают *конфигурационное многообразие* (*конфигурационное пространство*)

$$\Sigma_t = \{(r_1, \ldots, r_N) \mid \forall i\ f_i(r_1, \ldots, r_N, t) = 0\}$$

У нас Σ_t — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^{3N}$. Из независимости связей следует, что $\dim\Sigma_t = \dim T_P\Sigma_t = 3N - k$. Размерность касательного пространства ($\dim T_P\Sigma_t$) называется *числом степеней свободы* системы со связями. Локальные координаты на Σ_t называются *обобщёнными координатами* положения системы (требуется также, чтобы обобщённые координаты были гладкими по времени).

2.3.2. Неголономные связи

Начнём с голомных связей вида $f(r,t) = 0$. Пусть наша система движется в соответствии со связями по траектории $r = r(t)$. Дифференцируя соотношения для связей по времени, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Это *дифференциальная форма записи голономных связей.* (При дифференцировании мы потеряли аддитивную константу; эта константа определяется из начального положения r_0). Связи (функции f_i) будут первыми интегралами полученной системы ДУ.

Теперь рассмотрим обобщение: вместо $\frac{\partial f}{\partial r}$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$ рассмотрим произвольную $k \times 3N$ матрицу $A = A(r,t)$ и вектор $b = b(r,t) \in \mathbb{R}^k$ и наложим на систему *связи в дифференциальной форме общего вида*:

$$A(r,t)\dot{r} + b(r,t) = 0.$$

Если эти связи не приводятся к форме $\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ для некоторой функции f, они называются *неголономными (неинтегрируемыми).* Заметим, что для этого недостаточно, отсутствия функции f такой, что $A = \frac{\partial f}{\partial r}$ и $b = \frac{\partial f}{\partial t}$: дифференциальную форму ещё можно домножать на интегрирующий множитель.

2.3.3. Конёк Чаплыгина

Конёк (твёрдое тело) движется в плоскости, в точке C есть лезвие. Конёк может поворачиваться и двигаться, но в любой момент скорость точки C должна быть параллельна лезвию.

Обобщённые координаты: (x, y, φ) ((x, y) — координаты точки C, φ — угол между осью Ox и лезвием). $e_{\text{лезвия}} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, ортогонально ему $e_\perp = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. У нас есть связь $\langle \boldsymbol{v}_C, e_\perp \rangle = 0$. Вспоминая, что $\boldsymbol{v}_C = (\dot{x}, \dot{y})$, записываем уравнение связи в дифференциальной форме:

$$-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi = 0.$$

Докажем *неголономность* этой связи[1]. От противного. Если бы была голономной, то она бы записывалась в виде

$$f(x, y, \varphi) = \mathrm{const}\,.$$

(Заметим в скобках, что незамкнутости соответствующей дифференциальной формы недостаточно, ведь ещё бывает интегрирующий множитель.)

Конфигурационное многообразие Σ_t расслаивается на поверхности уровня (соответствующие значениям $f(x, y, \varphi)$), и конёк не может переехать с одного уровня на другой. С другой стороны, конёк может переместиться из любого положения в любое. Противоречие.

Комментарий: здесь константа, которая выделяет поверхность уровня, определяется начальным условием (вообще говоря, голономная связь имеет вид не $f = 0$, а $f = \mathrm{const}$, причём константа подбирается из н.у.). Пока не понял, как это нормально написать — С.К.

2.3.4. Виртуальные и действительные перемещения

Связь, не зависящая от времени, называется *стационарной* (в дифференциальной форме: $b = 0$).

Виртуальным перемещением в точке r в момент времени t называется вектор δr со свойством $A\delta r = 0$. Виртуальные перемещения (в фиксированный момент t) образуют линейное пространство (в голономном случае это касательное пространство к Σ_t); его размерность называется *числом степеней свободы* неголономной системы.

Действительным перемещением называется вектор δr со свойством $A\delta r + b = 0$ (т.е. скорость, которую может иметь система при движении в соответствии со связями). Разность действительных перемещений есть виртуальное перемещение.

Для стационарных связей виртуальные и действительные перемещения суть одно и то же.

Элементарной работой силы F на виртуальном перемещении δr называется скалярное произведение $\langle F, \delta r \rangle$.

2.3.5. Аксиома освобождения от связей

Пусть на систему наложены связи в дифференциальной форме:

$$A(\boldsymbol{r}, t)\dot{\boldsymbol{r}} + b(\boldsymbol{r}, t) = 0.$$

Аксиома: можно убрать эти связи, но добавить силы $R = (R_1, \ldots, R_N)(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ так, что движение будет таким же. (По сути здесь постулируется, что в реальной жизни за связями стоят некоторые силы загадочной природы. Утверждается, что $R = m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i - F_i$ ведут себя как силы, т.е. зависят только от $\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$, t)

«Силы» R_i называются *реакциями связей.*

После освобождения от связей уравнения движения примут вид:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = F_i + R_i.$$

[1] Говорят, что в учебнике А. П. Маркеева «Теоретическая механика» есть более понятное доказательство этого факта. Можете попробовать заботать оттуда.

Мы запишем это в виде одного уравнения:

$$M\ddot{\boldsymbol{r}} = F + R,$$

где $M = \operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \ldots, m_N, m_N, m_N)$. Отсюда получаем, что $R = M\ddot{\boldsymbol{r}} - F$.

Связи называются *идеальными*, если для любого виртуального перемещения δr имеет место $\langle R, \delta r\rangle = 0$ (вектор R не имеет касательной к конфигурационному многообразию компоненты; элементарная работа реакций на виртуальных перемещениях равна нулю).

2.4. Принцип Даламбера – Лагранжа

Теорема 2.1 (Принцип Даламбера – Лагранжа). *Пусть связи идеальны. Кривая $\boldsymbol{r}(t)$ является действительным движением системы тогда и только тогда, когда в любой момент времени для любого виртуального перемещения δr выполняется условие*

$$\langle M\ddot{\boldsymbol{r}} - F, \delta r\rangle = 0.$$

$\square$ *Необходимость.* По аксиоме освобождения от связей получаем $R = M\ddot{\boldsymbol{r}} - F$ и далее $\langle R, \delta r\rangle = 0$ в силу идеальности связей.

Достаточность. Пусть на кривой $\boldsymbol{r}(t)$ в любой момент времени для любого виртуального перемещения δr имеет место $\langle M\ddot{\boldsymbol{r}} - F, \delta r\rangle = 0$.

Напомним *принцип множителей Лагранжа*:

Лемма 2.2. *Даны $k \times n$ матрица A ($k \leqslant n$) и $a \in \mathbb{R}^n$. Пусть для любого вектора $b \in \mathbb{R}^n$ такого, что $Ab = 0$, имеем $\langle a, b\rangle = 0$. Тогда существует $\lambda \in \mathbb{R}^k$, для которого $a = A^T\lambda$.*

$\square$ Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ строки матрицы A. Для всех i имеем $b \perp \alpha_i$ (если $Ab = 0$). Пусть Π — плоскость, натянутая, на $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Тогда для любого $b \in \Pi^\perp$ $a \perp b$. Значит, $a \in \Pi$, то есть для некоторого $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ $a = \sum \lambda_i \alpha_i$, то есть $a = A^T\lambda$. $\blacksquare$

Обозначим $a = M\ddot{\boldsymbol{r}} - F$, $b = \delta r$. Для любого b — виртуального перемещения (т.е. $Ab = 0$) имеем $\langle a, b\rangle = 0$. Можно применить принцип множителей Лагранжа: существует $\lambda = \lambda(t)$, для которого $a = M\ddot{\boldsymbol{r}} - F = A^T\lambda$.

Итак, получилася система (здесь b — это уже не то b, что в лемме 2.2 ($b = \delta r$), а то, которое в условии дифференциальной связи):

$$\begin{cases} M\ddot{\boldsymbol{r}} - F = A^T\lambda \\ A\dot{\boldsymbol{r}} + b = 0, \end{cases}$$

называемая *уравнениями Лагранжа 1-го рода.*

Продифференцируем связи по времени: $A\ddot{\boldsymbol{r}} + g(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = 0$ (в g загнали всё про младшие производные). Поскольку $\det M \neq 0$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = M^{-1}A^T\lambda + M^{-1}F$. Подставляем:

$$AM^{-1}A^T\lambda + h(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = 0.$$

Покажем, что $\det AM^{-1}A^T \neq 0$. Для любого $u \in \mathbb{R}^k$ имеем $\langle AM^{-1}A^Tu, u\rangle = \langle M^{-1}A^Tu, A^Tu\rangle$. Далее, $A^Tu \neq 0$ (ранг A равен k), а значит, $\langle AM^{-1}A^Tu, u\rangle \neq 0$, что и требовалось.

Отсюда λ определяется однозначно: $\lambda = -(AM^{-1}A^T)^{-1}h$. Значит, однозначно определяется и ускорение. На настоящей траектории движения тоже выполняется принцип Даламбера – Лагранжа. Значит, $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ — одно и то же для нашей траектории и для настоящего движения. Поэтому (т.к. кривая однозначно определяется $\boldsymbol{r}(0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$), наша траектория и есть действительное движение. $\blacksquare$

2.5. Идеальность связей в твёрдом теле

Утверждение 2.3. *Если связи твёрдого тела обеспечиваются внутренними силами, то они идеальны.*

$\square$ Связи твёрдого тела имеют вид

$$f_{ij} = \langle \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\rangle = c_{ij} = \text{const}\,.$$

Реакции R_{ij} суть внутренние силы, значит, удовлетворяют 3-му закону Ньютона. $R_{ij} \parallel \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$, $R_{ij} = -R_{ji}$. Виртуальное перемещение δr удовлетворяет условию

$$\sum \left\langle \frac{\partial f_{ij}}{\partial r_k}, \delta r_k \right\rangle = 0.$$

f_{ij} зависит только от $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}_j$, поэтому в сумме слева останется только два слагаемых (пользуемся тем, что $\frac{\partial}{\partial x}\langle x, x\rangle = 2x$ и $\frac{\partial}{\partial x}\langle x, y\rangle = y$):

$$\langle 2\boldsymbol{r}_i - 2\boldsymbol{r}_j, \delta r_i\rangle + \langle 2\boldsymbol{r}_j - 2\boldsymbol{r}_i, \delta r_j\rangle = 0.$$

Отсюда
$$\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \perp \delta r_i - \delta r_j.$$

Вычислим элементарную работу реакций R на виртуальном перемещении (помним, что $R_{ij} = -R_{ji}$):
$$\sum_i \langle R_i, \delta r_i\rangle = \sum_i \sum_{j\neq i} \langle R_{ij}, \delta r_i\rangle = \sum_j \sum_{i<j} (\langle R_{ij}, \delta r_i\rangle + \langle -R_{ij}, \delta r_j\rangle) = \sum_j \sum_{i<j} \langle R_{ij}, \delta r_i - \delta r_j\rangle = 0,$$
т.к. $R_{ij} \parallel \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \perp \delta r_i - \delta r_j$. Значит, связи идеальны. ■

2.6. Общие законы динамики для систем с идеальными связями

2.6.1. Динамические переменные

1. *Импульс i-й точки: $p_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$. Импульс системы точек: $P = \sum p_i = \sum m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$.* Проекцию импульса на ось Oe обозначим P_e: $P_e = \langle P, e\rangle$.

2. *Кинетический момент.* Пусть вектор $\boldsymbol{u}$ приложен в точке P и ещё дана точка O. Тогда по определению $\mathrm{mom}_O\, \boldsymbol{u}_P = [\overrightarrow{OP}, \boldsymbol{u}]$ — это момент вектора $\boldsymbol{u}$ в точке P относительно центра O.

Пусть теперь дана ось Oe. Тогда по определению полагаем $\mathrm{mom}_{Oe}\, \boldsymbol{u}_P = \langle \mathrm{mom}_O\, \boldsymbol{u}_P, \overrightarrow{e}\rangle$ — момент относительно оси Oe.

Момент импульса i-й точки относительно начала отсчёта (точки O): $k_i = [\boldsymbol{r}_i, p_i]$ (это момент вектора p_i, приложенного в точке r_i, относительно O).

Момент импульса системы: $K = \sum k_i = \sum [\boldsymbol{r}_i, p_i] = \sum m_i [\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i]$.

3. *Кинетическая энергия.* $\tau_i = \dfrac{m_i |\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2}{2}$ — кинетическая энергия i-й точки. $T = \sum \tau_i = \sum \dfrac{m_i |\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2}{2}$ — кинетическая энергия системы..

4. *Центр масс* системы точек — это точка с радиус-вектором
$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}.$$
Заметим, что положения центра масс не зависит от выбранной системы отсчёта.

2.6.2. Теорема об изменении импульса

Теорема 2.4. *Пусть связи идеальны и допускают сдвиг всей системы как единого целого вдоль неподвижной оси Oe. Тогда*
$$\frac{dP_e}{dt} = \sum F_e^{\textit{внеш.}}$$
(справа стоит сумма проекций всех внешних сил на ось Oe).

□ Связи допускают сдвиг вдоль Oe, поэтому среди виртуальных перемещений есть вектор e (точнее, $\delta r = (e, e, \ldots)$). Подставим его в принцип Даламбера – Лагранжа:
$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - F_i, e\rangle = 0,$$
откуда
$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, e\rangle = \sum \langle F^{\text{внеш.}}, e\rangle$$
(сумма проекций внутренних сил равна нулю в силу третьего закона Ньютона).

Вектор e неподвижен, поэтому
$$\frac{d\langle p_i, e\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\langle m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i, e\rangle = \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, e\rangle,$$
поэтому
$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, e\rangle = \frac{dP_e}{dt},$$
что и требовалось. ■

В частности, если $\sum F_e^{\text{внеш.}} = 0$, то $P_e = \mathrm{const}$ — это первый интеграл уравнения движения.

Ясно, что для центра масс имеет место соотношение $m\dot{\boldsymbol{r}}_C = P$ (центр масс в проекции движется так же, как двигалась бы точка массы m под действием суммы внешних сил).

Пусть дана система свободных точек (связей нет). Допускается сдвиг вдоль любого направления. Применяя нашу теорему к e_x, e_y и e_z, получаем
$$\frac{dP}{dt} = \sum F^{\text{внеш.}}.$$

В лекциях тут была формула Мещёрского, но в программу она не вошла.

2.6.3. Закон изменения кинетического момента

Теорема 2.5. *Пусть связи идеальны и в любой момент времени допускают поворот системы как единого целого вокруг неподвижной оси Oe (точка O тоже неподвижна). Тогда*

$$\frac{dK_e}{dt} = \sum \left(\mathrm{mom}_O\, F^{\textit{внеш.}}\right)_e.$$

□ Система может вращаться вокруг Oe. По формуле Эйлера это означает (полагаем $\omega = e$), что $\dot{\boldsymbol{r}}_i = [e, \boldsymbol{r}_i]$. Условие нашей теоремы означает, что $\delta r = ([e, \boldsymbol{r}_1], \ldots, [e, \boldsymbol{r}_N])$ — виртуальное перемещение. Подставим его в принцип Даламбера – Лагранжа:

$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - F_i, [e, \boldsymbol{r}_i]\rangle = 0,$$

то есть

$$\sum \langle m_i e, [\boldsymbol{r}_i, \ddot{\boldsymbol{r}}_i]\rangle = \sum \langle e, [\boldsymbol{r}_i, F_i^{\text{внеш.}}]\rangle + \sum \langle e, [\boldsymbol{r}_i, F_i^{\text{внутр.}}]\rangle.$$

Внутренние силы у нас встречаются парами: между точками i и j будут силы F_{ij} и F_{ji}, коллинеарные вектору $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$, противоположные по направлению и равные по модулю (3-й закон Ньютона). Значит, $[\boldsymbol{r}_i, F_{ij}] + [\boldsymbol{r}_j, F_{ji}] = [\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, F_{ij}] = 0$. Итак, второе слагаемое в правой части равно нулю (а первое — как раз то, что обещали).

Разберёмся с левой частью: $[\boldsymbol{r}_i, \ddot{\boldsymbol{r}}_i] = [\boldsymbol{r}_i, \ddot{\boldsymbol{r}}_i] + [\dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i] = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i]$, откуда

$$\langle m_i e, [\boldsymbol{r}_i, \ddot{r}_i]\rangle = \frac{d}{dt}\langle m_i e, [\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i]\rangle = \frac{d}{dt}\langle e, k_i\rangle$$

— слева получили то, что хотели: $\frac{dK_e}{dt}$. ■

Отсюда следует, что сумма моментов сил относительно любой точки на оси Oe — одна и та же.

В случае

$$\sum \left(\mathrm{mom}_O\, F^{\text{внеш.}}\right)_e = 0$$

получаем первый интеграл $K_e = \mathrm{const}$.

Для свободной системы точек получаем

$$\frac{dK}{dt} = \sum \mathrm{mom}_O\, F^{\text{внеш.}}.$$

2.6.4. Теорема об изменении кинетической энергии

Если к i-й точке приложена сила F_i, то величина $\langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, F_i\rangle$ называется *мощностью* этой силы (смысл: работа за единицу времени).

Теорема 2.6. *Пусть связи идеальны и действительные перемещения находятся среди виртуальных (в частности, это так для стационарных связей). Тогда скорость изменения кинетической энергии равна сумме мощностей* **всех** *сил:*

$$\frac{dT}{dt} = \sum \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, F_i\rangle.$$

□ Пусть $\boldsymbol{r}(t)$ — действительное движение системы. Тогда вектор $\delta r = (\dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N)$ — действительное (следовательно, виртуальное) перемещение. Значит, его можно употребить в принципе Даламбера – Лагранжа:

$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - F_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle = 0,$$

то есть

$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle = \sum \langle F_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle.$$

Справа стоит нужная нам сумма мощностей сил. Рассмотрим левую часть:

$$\langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle\right) = \frac{d\tau_i}{dt},$$

то есть слева стоит желаемое $\frac{dT}{dt}$. ■

2.6.5. Потенциальные силы. Интеграл энергии

Силы F_i называются *потенциальными*, если существует *силовая функция* $U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$, для которой

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}.$$

$V = -U$ — *потенциальная энергия* (*потенциал*).

Силы потенциальны тогда и только тогда, когда работа по переводу системы из состояния $\boldsymbol{r}^*$ в $\boldsymbol{r}^{**}$ не зависит от пути:

$$A = \int\limits_{\boldsymbol{r}^*}^{\boldsymbol{r}^{**}} \langle F, dr\rangle = U(\boldsymbol{r}^{**}) - U(\boldsymbol{r}^*),$$

Пусть связи стационарны. Тогда (по теореме об изменении кинетической энергии)

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}\dot{\boldsymbol{r}}_i = -\sum \langle F_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle = -\frac{dT}{dt}.$$

Отсюда $T + V = h = \mathrm{const}$. h — *интеграл энергии.*

2.7. Общие теоремы динамики в относительном движении

2.7.1. Кёнигова система координат. Формулы Кёнига

Рассмотрим такую систему координат: начало — в центре масс нашей системы точек, а оси движутся параллельно самим себе. Это и будет *кёнигова система координат.* (Можно так выбрать неподвижные (абсолютные) оси, что оси Кёнига будут им параллельны.)

Импульс в кёниговой системе координат равен нулю (т.к. центр масс здесь неподвижен).

Кинетический момент и кинетическая энергия в кёниговой системе координат:

$$K_K = \sum m_i [\rho_i, \dot\rho_i]$$

$$T_K = \frac{1}{2} \sum m_i \langle \dot\rho_i, \dot\rho_i \rangle$$

Имеют место *формулы Кёнига* (проверяются явно):

$$K = M[\boldsymbol{r}_C, \dot{\boldsymbol{r}}_C] + K_K$$

и

$$T = \frac{1}{2} M \langle \dot{\boldsymbol{r}}_C, \dot{\boldsymbol{r}}_C \rangle + T_K.$$

2.7.2. Теорема об изменении кинетического момента в кёниговой системе координат

Теорема 2.7. *Пусть связи идеальны и в любой момент времени допускают поворот системы как единого целого вокруг оси Ce для некоторого постоянного вектора e. Тогда*

$$\frac{d}{dt} \langle K_K, e \rangle = \sum \langle \mathrm{mom}_C\, F^{\text{внеш.}}, e \rangle$$

(здесь $\mathrm{mom}_C\, F_i = [\rho_i, F_i]$).

□ Воспользуемся принципом Даламбера – Лагранжа: рассмотрим виртуальное перемещение с компонентами $\delta r_i = [e, \rho_i]$ (оно соответствует вращению с угловой скоростью $\omega = e$):

$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, [e, \rho_i] \rangle = \sum \langle F_i, [e, \rho_i] \rangle.$$

Справа применяем циклическую перестановку:

$$\sum \langle F_i, [e, \rho_i] \rangle = \sum \langle e, [\rho_i, F_i] \rangle = \sum \langle \mathrm{mom}_C\, F_i, e \rangle.$$

Сумма моментов внутренних сил равна нулю, поэтому справа получаем то, что надо.

Слева пользуемся соотношением $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_C + \ddot\rho_i$:

$$\sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i, [e, \rho_i] \rangle = \sum \langle m_i \ddot\rho_i, [e, \rho_i] \rangle + \sum \langle m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_C, [e, \rho_i] \rangle =$$

$$= \sum m_i \langle e, [\rho_i, \ddot\rho_i] \rangle + \langle \ddot{\boldsymbol{r}}_C, [e, \underbrace{\sum m_i \rho_i}_{=0}] \rangle = \sum m_i \left\langle e, \frac{d}{dt} [\rho_i, \dot\rho_i] \right\rangle = \frac{dK_K}{dt}.$$

■

2.7.3. Теорема об изменении кинетической энергии в кёниговой системе координат

Теорема 2.8. *Пусть связи идеальны, стационарны и в любой момент времени допускают сдвиг всей системы как единого целого вдоль осей Ox, Oy и Oz (а значит, вдоль любой оси Oe). Тогда*

$$\frac{dT_K}{dt} = \sum \langle \dot\rho_i, F_i \rangle.$$

Справа стоят мощности сил, посчитанные в осях Кёнига.

□ По теореме об изменении импульса (вдоль каждой из осей):

$$\frac{dP}{dt} = \sum F_i^{\text{внеш.}} = \sum F_i.$$

Кроме того, $P = m\dot{\boldsymbol{r}}_C$, $m\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \sum F_i$. Связи стационарны, значит любое действительное перемещение является виртуальным. По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt} = \sum \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, F_i \rangle.$$

Вторая формула Кёнига:

$$\frac{m|\dot{\boldsymbol{r}}_C|^2}{2} + T_K = T.$$

Отсюда

$$m\langle \ddot{\boldsymbol r}_C, \dot{\boldsymbol r}_C\rangle + \frac{dT_K}{dt} = \frac{dT}{dt} = \sum \langle \dot{\boldsymbol r}_i, F_i\rangle = \sum \langle \dot{\boldsymbol r}_C + \dot\rho_i, F_i\rangle,$$

а потому

$$\frac{dT_K}{dt} = \sum \langle \dot\rho_i, F_i\rangle.$$

■

2.8. Динамика и статика свободного твёрдого тела

2.8.1. Твёрдое тело с неподвижной точкой

Пусть точка O твёрдого тела закреплена, т.е. наложена связь $\boldsymbol v_O = 0$, причём эта связь считается идеальной. Считаем точку O началом неподвижной системы координат. По формуле Эйлера $\dot{\boldsymbol r}_i = [\omega, \boldsymbol r_i]$. Рассмотрим кинетический момент:

$$K = \sum m_i[\boldsymbol r_i, \dot{\boldsymbol r}_i] = \sum m_i[\boldsymbol r_i, [\omega, \boldsymbol r_i]] = \sum m_i(\omega r_i^2 - \boldsymbol r_i\langle \boldsymbol r_i, \omega\rangle)$$

(последний переход сделан по формуле «бац минус цаб»). K зависит от ω линейно, значит существует матрица J (размера 3×3) такая, что $K = J\omega$. Задаваемый этой матрицей оператор $J\colon \omega \mapsto K$ называется *оператором инерции*.

Оператор инерции можно разложить в сумму по точкам системы: $J = \sum J_i$,

$$J_i\omega = m_i(\omega r_i^2 - \boldsymbol r_i\langle \boldsymbol r_i, \omega\rangle).$$

Матрицу J_i можно вычислить явно (например, заметив, что её столбцы суть результаты применения оператора J_i к ортам осей). Получится

$$J_i = m_i\begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & x_i^2+z_i^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2 \end{pmatrix}.$$

J — это симметричная матрица. На главной диагонали стоят *моменты инерции* относительно осей координат: моментом инерции относительно оси Oe называется

$$J_e = \sum m_i d_i^2,$$

где d_i — расстояние от i-й точки до оси Oe. Внедиагональные элементы называются *центробежными моментами*.

Выразим с помощью оператора инерции кинетическую энергию:

$$T = \sum \frac{m_i}{2}\langle \dot{\boldsymbol r}_i, \dot{\boldsymbol r}_i\rangle = \sum \frac{m_i}{2}\langle \dot{\boldsymbol r}_i, [\omega, \boldsymbol r_i]\rangle = \sum \frac{m_i}{2}\langle \omega, [\boldsymbol r_i, \dot{\boldsymbol r}_i]\rangle = \frac12\left\langle \omega, \sum m_i[\boldsymbol r_i, \dot{\boldsymbol r}_i]\right\rangle = \frac12\langle\omega, K\rangle = \frac12\langle J\omega, \omega\rangle.$$

Итак, $T = \frac12\langle J\omega,\omega\rangle$. При ортогональной замене координат ω изменяется как вектор, а T (это скаляр) вообще не меняется, поэтому J изменяется как квадратичная форма[2]: $\tilde J = A^TJA$. Поскольку $T > 0$ (всегда), квадратичная форма J положительно определена. J — *тензор инерции*. В некоторых осях (называемых *главными осями инерции*; если O — центр масс, то *главными центральными осями инерции*) J примет диагональный вид: $J = \operatorname{diag}(A, B, C)$, где $A, B, C > 0$. Числа A, B и C (моменты инерции относительно главных осей) называются *главными моментами инерции* твёрдого тела. Главные оси инерции неподвижны относительно твёрдого тела.

Утверждение 2.9 (неравенство треугольника). $A + B \geqslant C$, $A + C \geqslant B$, $B + C \geqslant A$.

□ В главных осях

$$A + B = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2 + x_i^2 + z_i^2) \geqslant \sum m_i(y_i^2 + x_i^2) = C.$$

■

Эллипсоид инерции: $\{r \mid \langle Jr, r\rangle = 1\}$ (в главных осях задаётся уравнением $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$). Вместе с главными осями этот эллипсоид вморожен в твёрдое тело.

Утверждение 2.10. $J_e = \langle Je, e\rangle$.

□ Положим $\omega = e$ (пусть тело вращается вокруг оси Oe). Тогда скорость i-й точки равна $v_i = d_i$ (d_i — расстояние до оси Oe): точка вращается по окружности. Получаем

$$\frac12\langle Je, e\rangle = T = \sum\frac{m_iv_i^2}{2} = \sum \frac{m_id_i^2}{2} = \frac12 J_e,$$

что и требовалось. ■

[2] Полностью доказательство этого факта выглядит так: при ортогональной замене координат с матрицей A имеем $\omega = A\tilde\omega$ (ω — вектор), $\tilde T = T$, поэтому для матрицы $\tilde J$ имеем $\langle A^TJA\tilde\omega, \tilde\omega\rangle = \langle JA\tilde\omega, A\tilde\omega\rangle = \langle J\omega,\omega\rangle = T = \tilde T = \langle \tilde J\tilde\omega, \tilde\omega\rangle$, откуда $\tilde J = A^TJA$.

2.8.2. Теорема Гюйгенса – Штейнера

e — неподвижный вектор, O — начало неподвижной системы координат, C — центр масс твёрдого тела, J_C — тензор инерции для твёрдого тела (в кёниговой системе относительно неподвижного C), J_{Ce} — момент инерции относительно оси Ce, J_{Oe} — относительно Oe, d — расстояние от C до оси Oe, $m = \sum m_i$ — суммарная масса твёрдого тела.

Теорема 2.11 (Гюйгенс – Штейнер). *В этих условиях* $J_{Oe} = md^2 + J_{Ce}$.

□ Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг оси Oe ($\omega = e$). Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}J_{Oe}$. С другой стороны, у нас есть формула Кёнига:

$$T = \frac{1}{2}md^2 + \frac{1}{2}J_{Ce}$$

($\omega_{\text{отн.}} = \omega_{\text{абс.}}$: оси-то кёниговы и не вертятся). ■

Перепишем это в следующем виде: $\langle J_O e, e\rangle = md^2 + \langle J_C e, e\rangle$. $md^2 = \langle J_{\text{ЦМ}} e, e\rangle$, где $J_{\text{ЦМ}}$ — тензор инерции центра масс как точки массы m относительно O. Отсюда $J_O = J_{\text{ЦМ}} + J_C$.

2.8.3. Уравнение равновесия свободного твёрдого тела

Уравнения движения твёрдого тела:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = \sum \operatorname{mom}_C F^{\text{внеш.}} \\ m\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \sum F^{\text{внеш.}} \end{cases}$$

Положение твёрдого тела описывается вектором $q = (x_C, y_C, z_C, \varphi, \psi, \theta)$. Силы ньютоновские: $F^{\text{внеш.}} = F^{\text{внеш.}}(q, \dot{q}, t)$. Говорят, что твёрдое тело находится *в положении равновесия*, если для всех его точек $\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$.

Теорема 2.12 (условия равновесия твёрдого тела). *Пусть при* $t = t_0$ *скорости всех точек твёрдого тела равнялись нулю. Твёрдое тело находится в положении равновесия при* $t > t_0$ *тогда и только тогда, когда* $\sum F^{\text{внеш.}} = 0$ *и для любой точки* O $\sum \operatorname{mom}_O F_i^{\text{внеш.}} = 0$.

Заметим, что выбор O при условии $\sum F = 0$ несущественен, т.к. сумма моментов (легко проверить) останется той же самой.

□ *Необходимость.* Твёрдое тело покоится $\Rightarrow K = 0 \Rightarrow \sum \operatorname{mom}_O F^{\text{внеш.}} = 0$. Центр масс покоится $\Rightarrow \sum F_i = 0$.

Достаточность. Правые части уравнения движения обращаются в ноль. Значит, равновесие. ■

2.9. Динамика точки

Связи будут у нас голономные: $f_i(\boldsymbol{r}, t) = 0$. Пусть сначала точка движется по кривой — система имеет одну степень свободы.

Уравнение движения точки по прямой имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t).$$

Рассмотрим частный случай: силы не зависят от времени:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}).$$

Общий случай системы сводится к этому выбором обобщённой координаты q на конфигурационном многообразии (кривой): $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q)$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'_q \dot{q}$. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2,$$

где $a(q) = |\boldsymbol{r}'_q|^2 > 0$. Делаем замену переменной $q \longrightarrow \xi$, где

$$\xi = \int\limits_{q_0}^{q} \sqrt{a(q)}\, dq.$$

В новых переменных $a(q)\dot{q}^2 = \dot{\xi}^2$ и $T = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2$.

Теорема об изменении кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = \sum \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, F_i\rangle = \sum \dot{q}\langle (\boldsymbol{r}_i)'_q, F_i\rangle.$$

Более компактно, $\frac{d}{dt}T = \dot{q}Q$. Здесь Q называется *обобщённой силой*, а $\dot{q}Q$ — *мощность обобщённой силы.*

Теперь возьмём в качестве обобщённой координаты ξ. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\xi}^2\right) = \dot{\xi}Q$$

(разумеется, после замены обобщённой координаты с q на ξ обобщённая сила Q тоже изменится).

Итак, теорема об изменении кинетической энергии даёт нам уравнение

$$\dot{\xi}(\ddot{\xi} - Q) = 0.$$

Если $\dot{\xi} \neq 0$, это уравнение совпадает по форме с уравнением движения точки массы 1 по прямой под действием силы Q: $\ddot{\xi} = Q$.

Фазовое пространство — плоскость координат ξ и $\dot{\xi}$. *Фазовая кривая* — траектория системы на фазовой плоскости.

Ещё упростим задачу: считаем $F = F(x)$ — не зависит от $\dot{x}$. F — достаточно гладкая функция. Уравнение движения имеет вид: $m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x}$.

Утверждение 2.13. *F потенциальна.*

□ В качестве силовой функции сойдёт

$$U(x) = \int\limits_{x_0}^{x} F(u)\, du.$$

■

Из уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}V,$$

поэтому на траекториях движения имеет место интеграл энергии $T + V = h$:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = h,$$

откуда

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{h - V}.$$

В каждой точке фазовой плоскости задан вектор $\mathrm{v} = (\dot{x}, \ddot{x}) = (\dot{x}, -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{1}{m})$, т.е. задано векторное поле. Если $\dot{x} \neq 0$, то и $\mathrm{v} \neq 0$, т.е. в окрестности любой точки вне оси Ox поле можно выпрямить. Вне Ox v нигде не вертикален.

Фазовый портрет — набор всевозможных фазовых кривых. Обычно требуется изобразить только характерные кривые. Принято указывать также направление движения (выше Ox — направо, ниже — налево).

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{h - V(x)}$$

— это уравнение фазовой кривой в виде $\dot{x} = \dot{x}(x)$. Это уравнение фазовой кривой при $\dot{x} \neq 0$. Оно имеет смысл только при $h \geqslant V(x)$ (ежу ясно, что иначе движения не бывает). При заданной константе h интеграла энергии множество $D_h = \{x \mid V(x) \leqslant h\}$ называется *областью возможного движения (ОВД)*.

Положение равновесия: $V' = 0$ (критическая точка V). В точке x_0 $m\ddot{x} = 0$, и $x(t) = x_0$ — решение. x_0 называется *положением равновесия*, а точка фазового пространства $(x_0, 0)$ — *состоянием равновесия*.

Изучим фазовый портрет в окрестности положения равновесия (в остальных случаях фазовый портрет ясен — см. выше). Будем рассматривать случай *невырожденного* положения равновесия: $V''(x_0) \neq 0$. (Про вырожденный случай есть отдельная большая наука.)

Утверждение 2.14 (лемма Морса для одномерного случая). *Пусть $\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = h$, $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) \neq 0$. Тогда в окрестности x_0 существует невырожденная замена переменных $x \longrightarrow z$, после которой $V(z) = \pm z^2$ и уравнение имеет вид*

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} \pm z^2 = h$$

(знак «+», если $V'' > 0$ и «−» иначе).

□ Нам потребуется следующая

Лемма 2.15 (Адамар). *Пусть $f \in \mathbf{C}^\infty$ и $f(x_0) = 0$. Тогда существует $g \in \mathbf{C}^\infty$ такая, что $f(x) = (x - x_0)g(x)$.*

□ Без ограничения общности полагаем $x_0 = 0$. Имеем

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))\, dt = \int\limits_0^1 f'(tx)\frac{d(tx)}{dt}\, dt = \int\limits_0^1 xf'(tx)\, dt = x\int\limits_0^1 f'(tx)\, dt.$$

Осталось положить

$$g(x) = \int\limits_0^1 f'(tx)\, dt.$$

■

$f(x) = V(x) - h$, $V(x_0) = h$, $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) > 0$. Считаем $h = x_0 = 0$. Тогда $V(0) = V'(0) = 0, V''(0) > 0$. Применяем лемму Адамара к функции V: $V(x) = xg(x)$. $V'(0) = (g(x) + xg'(x))|_{x=0} = g(0) = 0$. Опять применяем лемму

Адамара: $g(x) = x\tilde{g}(x)$, откуда $V(x) = x^2\tilde{g}(x)$. Совершаем замену переменной $z = x\sqrt{\tilde{g}(x)}$. В окрестности точки $x = 0$ замена гладкая (т.к. $\tilde{g} > 0$). Вычислим производную

$$z' = \sqrt{\tilde{g}(x)} + \frac{x\tilde{g}'(x)}{\sqrt{\tilde{g}(x)}}.$$

В точке $x = 0$ $z'|_{x=0} = \sqrt{\tilde{g}(0)} > 0$, значит замена невырожденная. В этих координатах $V = z^2$.

Если $V'' < 0$, то аналогичные рассуждения приводят к замене $z = x\sqrt{-\tilde{g}(x)}$, $V = -z^2$. ■

Итак, в окрестности невырожденной особенности фазовый портрет гладко эквивалентен набору кривых 2-го порядка.

2.9.1. Период колебаний

Пусть точка движется от положения $x = a$ до положения $x = b$, при этом $\dot{x} \neq 0$ в каждой точке траектории (без ограничения общности будем считать $\dot{x} > 0$). Вычислим время движения $t_b - t_a$. Из интеграла энергии имеем

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}} = dt,$$

откуда

$$t_b - t_a = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt = \int\limits_a^b \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}.$$

Это называется *квадратурной формулой* для времени движения.

Теперь рассмотрим замкнутую фазовую кривую, соответствующую уровню энергии h. Пусть она пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. По квадратурной формуле

$$t_{x_2} - t_{x_1} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{h - V}}.$$

Заметим, что здесь стоит несобственный интеграл, но это нас не пугает, т.к. $V'(x_i) \neq 0$ (это не положения равновесия), а значит $h - V(x) \approx V'(x_i)(x - x_i)$, и интеграл сходится точно так же, как и $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, так что запись обоснована.

Отсюда получаем, что период движения по кривой с уровнем энергии h равен

$$T(h) = 2(t_{x_2} - t_{x_1}) = \sqrt{2m}\int\limits_{x_1(h)}^{x_2(h)}\frac{dx}{\sqrt{h - V(x)}}.$$

2.9.2. Линеаризованные уравнения движения

Пусть x_0 — устойчивое положение равновесия ($V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) > 0$). Тогда

$$V'(x) = V''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Если оставить только первый член разложения (отбросить o-малое), получится *линеаризованное* уравнение:

$$m\ddot{x} = -V''(x_0)(x - x_0)$$

— это линейное уравнение с постоянными коэффициентами (решение пишется в явном виде). В рассматриваемом нами случае $V'' > 0$ это уравнение называется *уравнением малых колебаний*. Решим это уравнение:

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0), \qquad \text{где } \omega^2 = \frac{V''(x_0)}{m}.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Общее решение:

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

— это гармонические колебания. Их период равен

$$T_{MK} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}$$

и называется *периодом малых колебаний*. Заметим, что при $V'' \to 0$ $T_{MK} \to \infty$.

2.9.3. Асимптотика $T(h)$

Естественно предположить, что при малых h $T(h)$ близок к T_{MK}. Точный результат даёт следующее

Утверждение 2.16. $T(h) = T_{MK} + O(h)$ *при* $h \longrightarrow 0+$.

☐ Совершим замену по лемме Морса: $V(x) = z^2$. Тогда $z_i^2 = h$ (это точки, где $\dot{x} = 0$, а значит $V = h$), $z_{1,2} = \pm\sqrt{h}$. Отсюда

$$T(h) = \int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \frac{\frac{dx}{dz}dz}{\sqrt{h - z^2}}.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа: $x'_z = x'_z(0) + x''_{zz}(0)z + \frac{x'''(\xi)}{2}z^2$. Соответственно, интеграл для $T(h)$ тоже раскладывается на три слагаемых: $T(h) = \sqrt{2m}(I_1 + I_2 + I_3)$. В I_2 функция под интегралом нечётная, значит $I_2 = 0$. Далее,

$$I_3 = \int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \frac{\frac{x'''(\xi)z^2}{2}}{\sqrt{h - z^2}}dz \leqslant Bh \int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \frac{dz}{\sqrt{h - z^2}} \leqslant B\pi h = O(h),$$

где $B = \frac{1}{2}\|x'''\|_{\mathbf{C}[-\sqrt{h},\sqrt{h}]}$.

Теперь вычислим I_1. Имеем: $x'_z(0) = \sqrt{\frac{2}{V''(0)}}$, откуда

$$\sqrt{2m}\, I_1 = 2\sqrt{\frac{m}{V''(0)}} \int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} \frac{dz}{\sqrt{h^2 - z^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{V''(0)}} \arcsin \frac{z}{\sqrt{h}}\Bigg|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(0)}} = T_{MK},$$

что и требовалось. ■

2.10. Небесная механика

2.10.1. Движение в центральном поле сил

Рассматривается движение материальной точки под действием силы, направленной к началу координат и зависящей только от длины радиус-вектора: $F = f(r)e_r$. Такая сила является потенциальной:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad V = -\int\limits_{r_0}^{r} f(s)\, ds.$$

Действительно, поскольку $\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}} = e_r$ (явно проверяется), то

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}} = -f(r)e_r = -F,$$

что и требовалось[3].

Первые интегралы:

1. Связи не зависят от времени, силы потенциальны, значит есть интеграл энергии:

$$\frac{m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}{2} + V(\boldsymbol{r}) = h = \mathrm{const}\,.$$

2.

$$\frac{dK}{dt} = \mathrm{mom}_O\, F = [\boldsymbol{r}, f(r)e_r] = 0,$$

откуда $K = \mathrm{const}$ — получили 3 первых интеграла K_x, K_y и K_z.

Поскольку K — постоянный вектор и для всех t имеем $\boldsymbol{r}(t) \perp K$, движение совершается в плоскости Π, перпендикулярной вектору K. Выберем базис так, чтобы $e_z \perp \Pi$. $\Pi = Oxy$. Зададим положение точки в плоскости Π полярными координатами. $\boldsymbol{r} = re_r$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}e_r + r\dot{\varphi}e_\varphi$. $K = [\boldsymbol{r}, m\dot{\boldsymbol{r}}] = r^2\dot{\varphi}me_z = \mathrm{const}$, откуда $r^2\dot{\varphi} = C = \mathrm{const}$ — это *интеграл площадей.*

$S(t)$ — площадь сектора, заметаемого радиус-вектором за время от t_0 до t.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{C}{2}$$

— эти соотношения получаются из выкладки Кеплера, которую мы уже проводили.

В полярной системе координат $|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, поэтому интеграл энергии запишется так:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + V(r) = h.$$

[3]Здесь жирное $\boldsymbol{r}$ обозначает радиус-вектор, а $r = |\boldsymbol{r}|$. Такого соглашения я старался придерживаться во всём конспекте.

Подставляя $\dot\varphi = \frac{C}{r^2}$, получаем
$$\frac{m\dot r^2}{2} + \frac{mC^2}{2r^2} + V(r) = h.$$

Последние два слагаемых обозначим через $V^*(r)$ — это *приведённый потенциал* (потенциал приведённой системы). Окончательно получаем
$$\frac{m\dot r^2}{2} + V^*(r) = h.$$

Уравнение совпадает по форме с уравнением движения точки по прямой. Пусть имеется периодическое решение r: r меняется от r_1 до r_2. Изменение φ за период r (т.е. на куске траектории, на котором r меняется от r_1 до r_2 и обратно до r_1) — это *апсидальный угол* Φ.

Период:
$$T = \sqrt{2m}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{h - V^*}}.$$

Вспоминая, что $r^2\dot\varphi = C$, а значит $d\varphi = \frac{C}{r^2}dt$, получаем:
$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{r_1}^{r} \frac{Cdr}{r^2\sqrt{h - V^*}}$$

— это *квадратурная формула для угла.*

Апсидальный угол:
$$\Phi = \sqrt{2m}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{Cdr}{r^2\sqrt{h - V^*}}.$$

$\dot\varphi(t)$ — функция T-периодическая, поэтому (проверьте сами)
$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + A(t - t_0) + g(t),$$

где g — некоторая T-периодическая функция, а A есть среднее значение $\dot\varphi$ на периоде:
$$A = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \frac{C}{r^2}\,dt.$$

2.10.2. Задача Кеплера

Задача Кеплера — это задача о движении точки в поле притягивающего центра.

Итак, на точку действует сила
$$F = -\gamma\frac{M_0 m}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

В обозначениях центрального поля сил:
$$f_r = -\gamma\frac{M_0 m}{r^2}.$$

Введём обозначения $e_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\mu = \gamma M_0$.

Уравнения движения (как в центральном поле сил):
$$\begin{cases} r^2\dot\varphi = C \\ m\ddot r = \dfrac{mC^2}{r^3} - \dfrac{\mu m}{r^2} \end{cases}$$

Приведённый потенциал:
$$V^* = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mu m}{r}.$$

Можно считать $m = 1$ (всё равно сократится).

Найдём траекторию движения:
$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\dot r}{r^2}\cdot\frac{dt}{d\varphi} = -\frac{\dot r}{C}; \qquad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\ddot r r^2}{C^2}.$$

Подставим $\ddot r$ из второго уравнения:
$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{\mu}{C^2}.$$

Положим $u = 1/r$. Получаем линейное неоднородное уравнение
$$u'' = -u + \frac{\mu}{C^2}.$$

Общее решение:

$$u = A\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\mu}{C^2}.$$

Полагая $e = \frac{AC^2}{\mu}$, $p = \frac{C^2}{\mu}$, получаем

$$u = \frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{p}.$$

Итак, общий вид траектории:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

— это кривая второго порядка (коническое сечение). e — эксцентриситет (выбором φ_0 делаем $e \geqslant 0$), p — фокальный параметр.

График $V^*(r)$ выглядит так: сначала убывание от $+\infty$ до h_{K_1}, потом рост и асимптотически стремление к 0 (Ox — асимптота). Картинку лень рисовать.

$h < h_{K_1} \Rightarrow$ движения нет.

$h = h_{K_1}$ — одно допустимое движение: $r = r_0$ (равновесие приведённой системы) $\Rightarrow$ круговая орбита.

$0 > h > h_{K_1} \Rightarrow$ эллиптическое движение (другого не будет, поскольку эллипс — единственное замкнутое коническое сечение). $0 < e < 1$.

$h = 0$ — параболическое движение. $e = 1$.

$h > 0$ — гиперболическое движение. $e > 1$.

Особый случай: $p = e = 0$ — нет изменения угла (падение по радиусу).

Теперь докажем третий закон Кеплера. Итак, $TC = 2S_{\text{эллипса}} = 2\pi ab$ (т.к. $C = 2\dot{S}$). Отсюда $T^2 = 4\pi^2 a^2 b^2 / C^2$. Далее, $p = C^2/\mu$ (по определению p, см. выше), а с другой стороны $p = b^2/a$ (аналитическая геометрия, 1-й курс). Значит, $b^2 = aC^2/\mu$, откуда

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu},$$

то есть T^2/a^3 не зависит от планеты.

Введём ещё несколько определений: значение скорости, соответствующее уровню энергии h_{K_1}, называется *первой*, а уровню $h = 0$ — *второй космической скоростью*. Положение $r_\pi = \frac{p}{1+e}$ (минимальное удаление от притягивающего центра) — это *перицентр*. Для эллиптической орбиты определяется ещё и *апоцентр*: $r_\alpha = \frac{p}{1-e}$ — удалённейшая точка траектории. В астрономии приняты ещё такие названия: если притягивающий центр — Солнце — то *апогелий*, *перигелий*; если Земля, то *…гей*, если Луна — *…селений*.

Вектор Лапласа — это такой вектор:

$$I = [\dot{\boldsymbol{r}}, [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]] - \mu e_r.$$

Докажем, что $I = \mathrm{const}$ (это первый интеграл) и что I смотрит из фокуса в сторону перицентра. Заметим, что $[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}] = K/m$, и в силу закона сохранения кинетического момента $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}] = 0$. Кроме того, $e_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ (а значит, $\dot{e}_r = \frac{d}{dt}(\frac{\boldsymbol{r}}{r}) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2}$). Отсюда

$$\frac{dI}{dt} = [\ddot{\boldsymbol{r}}, [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]] - \frac{\mu\dot{\boldsymbol{r}}}{r} + \frac{\mu\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2}.$$

Из уравнения движения $\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3}$, поэтому первое слагаемое есть (применяем формулу «бац минус цаб», а также замечаем, что $\langle \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}} \rangle = r\dot{r}$ — это проверяется явно)

$$\left[-\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3}, [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]\right] = -\mu\frac{\boldsymbol{r}\langle \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}\rangle}{r^3} + \mu\frac{\dot{\boldsymbol{r}}r^2}{r^3} = -\frac{\mu\boldsymbol{r}r\dot{r}}{r^3} + \frac{\mu\dot{\boldsymbol{r}}}{r} = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \frac{\mu\boldsymbol{r}\dot{r}}{r^2},$$

то есть в точности второе и третье слагаемые, но с обратным знаком. Значит, $\dot{I} = 0$.

Перицентр есть точка с минимальным расстоянием до притягивающего центра, значит, в ней вектор скорости ортогонален радиус-вектору: $\langle \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}} \rangle = 0$. Поэтому в выражении для $\langle I, \dot{\boldsymbol{r}} \rangle$ второе слагаемое будет равно нулю и получится $\langle I, \dot{\boldsymbol{r}} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{r}}, [\dot{\boldsymbol{r}}, [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]] \rangle = 0$, т.к. $\dot{\boldsymbol{r}} \perp [\dot{\boldsymbol{r}}, \ldots]$. Итак, в перицентре $I \perp \dot{\boldsymbol{r}}$, значит $I \parallel \boldsymbol{r}_\pi$ (I лежит в плоскости Π).

Теперь оценим знак $\langle I, \boldsymbol{r}_\pi \rangle$ (убедимся, что вектор Лапласа смотрит *на*, а нет *от* перицентра):

$$\langle I, \boldsymbol{r} \rangle = \langle \boldsymbol{r}, [\dot{\boldsymbol{r}}, [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]] \rangle - \langle \boldsymbol{r}, \mu e_r \rangle = |[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]|^2 - \mu r = \frac{K^2}{m^2} - \mu r.$$

Получается, что $\langle I, \boldsymbol{r} \rangle$ достигает максимума при наименьшем r, т.е. при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\pi$, откуда $\langle I, \boldsymbol{r}_\pi \rangle > 0$.

В задаче Кеплера апсидальный угол равен 2π (за период возвращаемся к перицентру).

2.10.3. Задача двух тел

Задача двух тел — это задача о движении пары материальных точек $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ масс m_1 и m_2 соответственно под действием ньютоновской силы притяжения.

Уравнения движения:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\dfrac{\gamma m_1 m_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} = F_{12} \\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\dfrac{\gamma m_1 m_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} = F_{21} = -F_{12} \end{cases}$$

Силы потенциальны:
$$V = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \text{ — потенциал}$$
(это проверяется явно дифференцированием V). Значит, имеется интеграл энергии $T + V = h$.

Применима теорема об изменении импульса системы (существует интеграл импульса $P = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = (m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_C = \mathrm{const}$). Центр масс движется с постоянной скоростью $\Rightarrow$ кёнигова система инерциальна.

Применима теорема об изменении кинетического момента: $K = [\boldsymbol{r}_1, m\dot{\boldsymbol{r}}_1] + [\boldsymbol{r}_2, m\dot{\boldsymbol{r}}_2] = \mathrm{const}$.

Итак, есть три группы первых интегралов движения: h, P и K.

Задачу двух тел можно свести к задаче Кеплера. Перейдём в кёнигову систему координат. Там $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$ ($\boldsymbol{r}_C = 0$) и $m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 = 0$ ($\dot{\boldsymbol{r}}_C = 0$). Отсюда
$$\boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{r}_1; \qquad \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\boldsymbol{r}_1.$$

Подставляем в первое уравнение движения:
$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{\gamma m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_1|^3}.$$

Получили для $\boldsymbol{r}_1$ уравнение такого же вида, как и для движения вокруг неподвижного центра массы $M_0 = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$, т.е. для задачи Кеплера. Аналогично для $\boldsymbol{r}_2$. Итак, обе точки движутся в одной плоскости (той, что перпендикулярна K и проходит через C) по кеплеровским орбитам (причём одинакового вида: эти кривые подобны в силу $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$) с общим фокусом C. Например, точки могут двигаться в диаметрально противоположных точках окружности.

2.10.4. Задача N тел

Система N точек. Уравнение движения:
$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j \neq i} F_{ij},$$
где
$$F_{ij} = -\frac{\gamma m_i m_j (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^3}.$$

Эти силы потенциальны (как и в задаче двух тел): потенциал
$$V = \sum_{i<j} -\frac{\gamma m_i m_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}.$$

Потенциальная энергия в задаче N тел — однородная функция степени -1: при $\lambda > 0$ имеем $V(\lambda\boldsymbol{r}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{r}_N) = \lambda^{-1}V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$.

Первые интегралы: 1. Интеграл энергии $T + V = h$.
2. Интеграл импульса $\sum m_i\boldsymbol{r}_i = \mathrm{const}$.
3. Кинетический момент $K = \sum[\boldsymbol{r}_i, m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i] = \mathrm{const}$.

Устойчивость по Якоби: движение $\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)$ устойчиво по Якоби, если:
1) движение существует для всех $t \in (-\infty, +\infty)$;
2) $\boldsymbol{r}_i(t) \neq \boldsymbol{r}_j(t)$ для всех t (нет столкновений);
3) существует $C > 0$ такое, что для всех t $\sum_{i,j} |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2 \leqslant C$ (точки не разбегаются).

Константа h интеграла энергии зависит от выбора системы координат. Перейдём в кёнигову систему.

Теорема 2.17. *Необходимым условием устойчивости по Якоби является условие $h \leqslant 0$.*

$\square$ Во всё время движения $\sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i = 0$ (оси-то кёниговы — центр масс не движется). Положим
$$J = \sum_{i,j} |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2; \qquad I = \sum_i m_i r_i^2; \qquad M = \max m_i.$$

Докажем, что $J > BI$ для некоторого $B > 0$ (при всех t). Действительно (в кёниговой системе $\sum m_i\boldsymbol{r}_i = 0$),
$$J \geqslant \sum_{i,j} \frac{m_i}{M}|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2 = \sum_j \left(\sum_i \frac{m_i}{M}r_i^2\right) - 2\sum_j \left(\sum_i \left\langle \frac{m_i}{M}\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j \right\rangle\right) + \sum_{i,j} \frac{m_i}{M}r_j^2 \geqslant \frac{1}{M}\sum_j \sum_i m_i r_i^2 = \frac{N}{M}I.$$
(полагаем $B = N/M$).

Пусть $h > 0$. Покажем, что тогда $I \longrightarrow \infty$ либо при $t \longrightarrow +\infty$, либо при $t \longrightarrow -\infty$ (а значит, движение неустойчиво по Якоби). Итак, поехали.

Сначала вычислим $\dot{I}$:
$$\dot{I} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i\langle \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_i\rangle\right) = 2\sum m_i\langle \boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i\rangle.$$

Теперь $\ddot{I}$ (помним, что $m\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}$):
$$\ddot{I} = 2\sum m_i|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 + 2\sum m_i\langle \boldsymbol{r}_i, \ddot{\boldsymbol{r}}_i\rangle = 4T - 2\sum \left\langle \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \boldsymbol{r}_i \right\rangle.$$

Чтобы завершить вычисление, нам потребуется следующая

Лемма 2.18 (Эйлера об однородных функциях). *Пусть $f(x_1, \dots, x_k)$ — однородная функция степени k, т.е. $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ при $\lambda > 0$ ($x = (x_1, \dots, x_k)$). Тогда*

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, x \right\rangle = kf(x).$$

□

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, x \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x), \frac{\partial(\lambda x)}{\partial \lambda} \right\rangle\Big|_{\lambda=1} = \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=1} = \frac{\partial(\lambda^k f(x))}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=1} = k\lambda^{k-1} f(x)\Big|_{\lambda=1} = kf(x).$$

■

Поскольку потенциальная энергия — однородная функция степени -1, второе слагаемое равно $2V$, и окончательно получаем $\ddot{I} = 4T + 2V = 2h + 2T \geqslant 2h > 0$. Значит, I — строго выпуклая функция, а из анализа мы знаем, что в этом случае либо при $t \longrightarrow +\infty$, либо при $t \longrightarrow -\infty$ $I \longrightarrow +\infty$. ■

2.11. Силы инерции

Наблюдаем движение в неинерциальной системе координат. Движется точка массы m. Имеем:

$$ma_{\text{абс}} = F; \qquad a_{\text{абс}} = a_{\text{отн}} + a_{\text{пер}} + a_{\text{кор}}.$$

Отсюда получаем:

$$ma_{\text{отн}} = F - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}} =: F^*.$$

В подвижной системе наблюдается движение как будто под действием F^*.

$F_{\text{пер}} := -ma_{\text{пер}}$ — *переносная сила инерции.*

$F_{\text{кор}} := -ma_{\text{кор}}$ — *кориолисова сила инерции.*

F — активные силы.

По формуле Ривальса ($\varepsilon = \dot{\omega}$, O_1 — центр подвижной системы)

$$a_{\text{пер}} = a_{O_1} + [\varepsilon, \rho] + [\omega, [\omega, \rho]].$$

В подвижной системе $a_{\text{кор}} = 2[\omega, \boldsymbol{v}_{\text{отн}}]$, $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $a_{\text{отн}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. ($\omega$ — мгновенная угловая скорость)

2.11.1. Движение в равномерно вращающейся системе координат

Рассмотрим частный случай: $\omega = \text{const}$, $\omega \parallel Oz$ (подвижная система вращается вокруг Oz). $\omega = (0, 0, \omega)$. $a_{O_1} = 0$, $\varepsilon = 0$, значит $a_{\text{пер}} = [\omega, [\omega, \rho]]$. Вычисляя явно векторное произведение, получаем $a_{\text{пер}} = (-x\omega^2, -y\omega^2, 0)$ (в подвижной системе), $a_{\text{кор}} = (-2\dot{y}\omega, 2\dot{x}\omega, 0)$. Запишем закон движения $ma_{\text{отн}} = F - ma_{\text{пер}} - ma_{\text{кор}}$ по координатам:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y} \\ m\ddot{y} = F_y + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

— это уравнения движения в равномерно вращающейся системе.

Пусть силы потенциальны: $F = -\frac{\partial V}{\partial(x,y,z)}$. Полагая $V_\omega = V + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$, получаем

$$F + F_{\text{пер}} = -\frac{\partial V_\omega}{\partial(x, y, z)}.$$

Мощность кориолисовых сил равна нулю ($F_{\text{кор}} \perp \boldsymbol{v}_{\text{отн}}$) — это *гироскопические силы*, поэтому есть закон сохранения энергии (*обобщённый интеграл энергии Якоби*):

$$\frac{mv_{\text{отн}}^2}{2} + V_\omega = h.$$

2.11.2. Ограниченная плоская круговая задача трёх тел

Есть три точки: S — Солнце, J — Юпитер, A — астероид, и они движутся под действием сил тяготения. Уравнения движения:

$$\begin{cases} m_S\ddot{\boldsymbol{r}}_S = -\dfrac{\gamma m_S m_J(\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_J)}{|\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_J|^3} - \dfrac{\gamma m_S m_A(\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_A)}{|\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_A|^3} \\ m_J\ddot{\boldsymbol{r}}_J = -\dfrac{\gamma m_J m_S(\boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_S)}{|\boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_S|^3} - \dfrac{\gamma m_J m_A(\boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_A)}{|\boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_A|^3} \\ m_A\ddot{\boldsymbol{r}}_A = -\dfrac{\gamma m_A m_S(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_S)}{|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_S|^3} - \dfrac{\gamma m_A m_J(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_J)}{|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_J|^3} \end{cases}$$

Ограниченная задача: считаем массу астероида очень малой. Упрощаем задачу: выкидываем из правых частей первых двух уравнений вторые слагаемые. Для S и J получаем задачу двух тел.

Далее для удобства будем считать $m_A = 1$.

В кёниговой системе S и J движутся как в задаче Кеплера. S и J движутся в плоскости, ортогональной вектору K. А астероид, вообще говоря, движется как угодно.

Плоская задача: в начальный момент времени A и $\boldsymbol{v}_A$ лежат в этой плоскости ($\Rightarrow$ вся траектория астероида лежит в этой плоскости). В кёниговой системе плоскость SJA неподвижна.

Круговая задача: S и J движутся по круговым орбитам.

Рассмотрим систему координат (неинерциальную) в плоскости Π с центром в центре масс, SJ направлена вдоль оси Ox. Эта система координат вращается с постоянной угловой скоростью ω. В ней S и J неподвижны. Нас интересует уравнение движения A.

$\boldsymbol{r}_A = (x, y)$, $\boldsymbol{r}_S = (-r_s, 0)$, $\boldsymbol{r}_J = (r_J, 0)$.

Потенциальная энергия гравитационного притяжения астероида:

$$V_{\text{грав}} = -\frac{\gamma m_S}{|\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_A|} - \frac{\gamma m_J}{|\boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_A|}.$$

Уравнения движения ($V_\omega = V_{\text{грав}} + V_{\text{пер}}$):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\partial V_\omega}{\partial x} + 2\dot{y}\omega \\ \ddot{y} = -\dfrac{\partial V_\omega}{\partial x} - 2\dot{x}\omega \end{cases}$$

Интеграл энергии Якоби: $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V_\omega = h$.

Относительные положения равновесия ($x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$) называются *точками либрации*. В этих точках имеем $\ddot{x} = \dot{x} = \ddot{y} = \dot{y} = 0$, значит $\frac{\partial V_\omega}{\partial x} = \frac{\partial V_\omega}{\partial y} = 0$. Обозначим $d_S = |\boldsymbol{r}_S - \boldsymbol{r}_A|$, $d_J = |\boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_A|$. Тогда

$$V_\omega = -\frac{\gamma m_S}{d_S} - \frac{\gamma m_J}{d_J} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} \omega^2 x = \dfrac{\gamma m_S(x + r_S)}{d_S^3} + \dfrac{\gamma m_J(x - r_J)}{d_J^3} \\ \omega^2 y = \dfrac{\gamma m_s y}{d_S^3} + \dfrac{\gamma m_J y}{d_J^3} \end{cases}$$

Точки либрации, лежащие на оси $y = 0$, называются *точками либрации Эйлера* (*коллинеарными точками либрации*). Пусть $y = 0$. Тогда первое уравнение перепишется в виде:

$$\omega^2 x = \frac{\gamma m_S(x + r_S)}{|x + r_S|^3} + \frac{\gamma m_J(x - r_J)}{|x - r_J|^3} =: f(x)$$

На интервалах $(-\infty; -r_S)$, $(-r_S, r_J)$, $(r_J, +\infty)$ функция f монотонно убывает, на бесконечности стремится к нулю, значит, уравнение $f(x) = \omega^2 x$ имеет три решения (видно на графике). Эти три решения обозначаются L_1, L_2, L_3 — это и есть точки либрации Эйлера.

Пусть теперь $y \neq 0$. Умножаем первое уравнение на y, второе на x и вычитаем:

$$0 = \frac{\gamma m_S r_S}{d_S^3} + \frac{\gamma m_J(-r_J)}{d_J^3}.$$

Поскольку C — центр масс, $m_J r_J = m_S r_S$. Отсюда получаем

$$0 = \gamma m_S r_S \left(\frac{1}{d_S^3} - \frac{1}{d_J^3}\right),$$

то есть $d_S = d_J =: d$: A лежит на серединном перпендикуляре к SJ (треугольник ASJ равнобедренный).

Сократим второе уравнение на y:

$$\omega^2 = \frac{\gamma(m_S + m_J)}{d^3}.$$

Мы находимся в положении равновесия, значит для J силы инерции и гравитации должны компенсироваться:

$$\frac{\gamma m_S m_J}{(r_S + r_J)^2} = r_J \omega^2 m_J;$$

аналогично для S:

$$\frac{\gamma m_J m_S}{(r_S + r_J)^2} = r_S \omega^2 m_S.$$

Складывая, получаем

$$\frac{\gamma(m_S + m_J)}{(r_S + r_J)^3} = \omega^2 = \frac{\gamma(m_S + m_J)}{d^3},$$

откуда $r_S + r_J = d$ — треугольник ASJ равносторонний.

Получили ещё две точки либрации: L_4 и L_5 — это *точки либрации Лагранжа* (*треугольные*).

2.11.3. Движение на поверхности Земли

Рассмотрим систему координат $Oxyz$, связанную с Землёй. O — центр Земли, Oz смотрит на Северный Полюс. Земля, как известно, вращается с угловой скоростью $\omega = \Omega e_z$, считаем $\Omega = \text{const}$. На поверхности Земли разместим точку в радиус-вектором $\boldsymbol{r} = re_r$, считая, что в начальный момент времени она лежит в плоскости Oxz. Угол θ между плоскостью экватора Oxy и $\boldsymbol{r}$ называется *географической широтой.* Орт проекции $\boldsymbol{r}$ на Oxy назовём e_1. На точку действуют: 1) сила притяжения (считаем, что Земля притягивает как центр массы M); 2) активные силы $F_{\text{акт}}$; 3) силы инерции — переносная и кориолисова. Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{mM\gamma e_r}{r^2} + m\Omega^2 r\cos\theta e_1 - 2m[\omega, \dot{\boldsymbol{r}}] + F_{\text{акт}}.$$

Пусть точка находится в (относительном) равновесии на поверхности Земли: $\dot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = 0$. Запишем *условия равновесия*:

$$-F_{\text{акт}} = \frac{-\gamma Mm}{r^2}e_r + m\Omega^2 r\cos\theta e_1.$$

То, что стоит в правой части, называется *весом* точки и обозначается буквой P. *Ускорение свободного падения:* $g = P/m$.

$$g = -\frac{\gamma M}{r^2}e_r + \Omega^2 r\cos\theta e_1.$$

Нормированный вектор g называется *местной вертикалью*: $e_n = -\frac{g}{|g|}$, а угол φ между e_1 и e_n — *астрономической широтой.* На полюсе и на экваторе $e_n = e_r$ и $\theta = \varphi$. Для Земли $|\varphi - \theta| \leqslant 0{,}02$ радиан. φ измеряется как угол между направлением на Полярную звезду и отвесом.

Свободно брошенное тело движется по кеплеровской (эллиптической) орбите и «обгоняет» Землю, сдвигаясь на юго-восток. Теперь оценим количественно. Запишем уравнение движения:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = mg - 2m[\Omega e_z, \dot{\boldsymbol{r}}]$$

— это линейное ОДУ:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = g - 2[\Omega e_z, \dot{\boldsymbol{r}}].$$

Сделаем два допущения: 1) время движения τ мало (будем рассматривать уравнения в приближённом виде): $\Omega\tau \ll 1$; 2) считаем $g = \text{const}$.

Начальные условия: $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = 0$ (свободное падение).

Правая часть аналитична по Ω, следовательно (по теореме об аналитической зависимости решения ОДУ по параметру) r аналитически зависит от Ω. Разложим в ряд:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0(t) + \Omega\boldsymbol{r}_1(t) + \Omega^2\boldsymbol{r}_2(t) + \ldots \\
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_0(t) + \Omega\dot{\boldsymbol{r}}_1(t) + \Omega^2\dot{\boldsymbol{r}}_2(t) + \ldots \\
\ddot{\boldsymbol{r}}(t) &= \ddot{\boldsymbol{r}}_0(t) + \Omega\ddot{\boldsymbol{r}}_1(t) + \Omega^2\ddot{\boldsymbol{r}}_2(t) + \ldots
\end{aligned}$$

Подставляем в уравнение движения:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_0 + \Omega\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + \Omega^2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + \ldots = g - 2\Omega[e_z, \dot{\boldsymbol{r}}_0] - 2\Omega^2[e_z, \dot{\boldsymbol{r}}_1] - \ldots$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях Ω: $\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = g$, $\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -2[e_z, \dot{\boldsymbol{r}}_0]$, $\ddot{\boldsymbol{r}}_k = -2[e_z, \dot{\boldsymbol{r}}_{k-1}]$ $(k \geqslant 1)$. Отсюда $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = gt$, и поэтому $\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -2t[e_z, g]$ — в первом порядке отклоняемся на восток. Далее, $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(0) + \frac{2t^3}{3}e_{\text{восток}} \cdot G$ $(G = \text{const})$, $\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \alpha t^3 e_{\text{восток}}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}_2$ пропорционально $-[e_z, e_{\text{восток}}]$ — во втором порядке отклонение на юг.

2.11.4. Маятник Фуко

Сферический маятник — это система с идеальной голономной связью $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, проще говоря, камень на верёвке. Движется в поле сил F.

Маятник Фуко — это сферический маятник, закреплённый на поверхности Земли. Точка подвеса: $\boldsymbol{r}_0$, радиус-вектор (относительно $\boldsymbol{r}_0$): ρ. Освободимся от связей: $m\ddot{\rho} = F + R$. Виртуальное перемещение $\delta r = (\delta x, \delta y, \delta y)$ в точке (x, y, z): $x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$ (δr касается сферы). Связи идеальны: для любого виртуального перемещения $\langle R, \delta r\rangle = 0$ (реакция ортогональна сфере): $R = T\frac{\rho}{|\rho|}$ (T — скаляр; $T = T(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$). Уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = F + T\dfrac{\rho}{|\rho|} \\ x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \end{cases}$$

— 4 неизвестных, 4 уравнения. Эта система называется уравнениями с множителем (T — множитель).

Маятник Фуко на полюсе. Подвес неподвижен, маятник качается в плоскости как математический маятник. Но наблюдатель-то движется. Мы едем на восток, значит относительно нас плоскость колебаний сдвигается на запад. На Южном полюсе мы бы наблюдали противоположное вращение (значит, на Экваторе этот эффект исчезнет).

Теперь оценим количественно. В Землю вморожена система координат $O\xi\eta\zeta$, $O\zeta$ — на север. В точке подвеса маятника возьмём систему $O'xyz$, Oz — местная вертикаль. В этих координатах (в северном полушарии) $\omega = (0, -\Omega\cos\varphi, \Omega\sin\varphi)$. Уравнение движения:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = mg - 2m[\omega, \dot{\boldsymbol{r}}] + T\frac{\rho}{|\rho|}.$$

Считаем $g = (0, 0, -g) = \text{const}$. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \rho$, $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\rho}$. Уравнение движения:

$$m\ddot{\rho} = mg - 2m[\omega, \dot{\rho}] + T\frac{\rho}{|\rho|}.$$

Связь: $|\rho^2| = l^2$, в дифференциальной форме: $\langle\rho, \dot{\rho}\rangle = 0$.

$\rho_0 = (0, 0, -l)$ — положение равновесия ($\rho(t) = \rho_0$ — решение дифференциального уравнения).

Умножая скалярно уравнения движения на $\dot{\rho}$, получаем интеграл энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m|\dot{\rho}|^2}{2} + mgz\right) = 0; \qquad \frac{m|\dot{\rho}|^2}{2} + mgz = h$$

Положение равновесия устойчиво. ОВД: $mgz \leqslant h$. Можно рассмотреть линеаризованную систему (z и $\dot{\rho}$ мало отклоняются в силу $mgz \leqslant h$).

Уравнения движения в координатах:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\Omega\sin\varphi\dot{y} + 2m\Omega\cos\varphi\dot{z} + T\dfrac{x}{l} \\ m\ddot{y} = -2m\Omega\sin\varphi\dot{x} + T\dfrac{y}{l} \\ m\ddot{z} = -mg - 2m\Omega\cos\varphi\dot{x} + T\dfrac{z}{l} \end{cases}$$

Линеаризуем в окрестности состояния равновесия $(0, 0, -l, 0, 0, 0)$. Нас интересует линейное приближение для x и для y. $\sigma = |x| + |y| + |z + l| + |\dot{x}| + |\dot{y}| + |\dot{z}|$ — отклонение. $T = T_0 + O(\sigma)$, $T_0 = -mg$. $z = -\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}$, $\dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}} = O(\sigma^2)$, значит при линеаризации слагаемое $2m\Omega\cos\varphi\dot{z}$ можно отбросить. Линейные приближения 1-го и 2-го уравнений имеют вид:

$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}x + 2m\Omega\sin\varphi\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = -m\frac{g}{l}y - 2m\Omega\sin\varphi\dot{x}$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнениями движения тела в системе координат, равномерно вращающейся вокруг оси Oz с $\omega = \Omega\sin\varphi$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V_\omega}{\partial x} + 2m\omega\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V_\omega}{\partial y} - 2m\omega\dot{x} \end{cases}$$

Здесь $V_\omega = V - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$. Отсюда найдём потенциал V:

$$V = \frac{m}{2}\underbrace{\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right)}_{=:k}(x^2 + y^2).$$

Точка движется как бы в поле сил с таким потенциалом.

Рассмотрим $O'xy$ как систему координат, вращающуюся со скоростью ω относительно «неподвижной» системы $O'\alpha\beta$. В этой новой системе уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\alpha} = -mk\alpha \\ m\ddot{\beta} = -mk\beta \end{cases}$$

— т.е. в линейном приближении получаются гармонические колебания по каждой из осей. Если запустить движение к центру — получим колебания по прямой. В исходной системе $O'xy$ наблюдаем колебание и одновременно вращение.

Кстати, по частоте колебаний (её можно наблюдать) можно найти угол φ.