Отметим, что $\frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} = \frac{p_i^\alpha}{2m} = v_i^\alpha$; $\frac{\partial H}{\partial q_i^\alpha} = \frac{\partial v_0(\vec{r}_i)}{\partial q_i^\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\partial \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial q_i^\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1(\vec{z}_1) = \cancel{\sum_{i=1}^{N}} \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \frac{p_1^\alpha}{m} \frac{\partial w_1}{\partial q_1^\alpha}(z_1) - \frac{\partial V(\vec{r}_1)}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial w_1}{\partial p_1^\alpha}(z_1) \right\} \ominus$$

(Ибо $\int \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} \frac{\partial w_N}{\partial q_1^\alpha} dq_i^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_i^\alpha} w_N \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$)

$$\ominus \sum_{i=2}^{N} V \int \frac{\partial \Phi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial w_N(z)}{\partial p_1^\alpha} dz_2 \cdots dz_N = \sum_{\alpha=1}^{3} [\ldots] - \frac{N-1}{V} \int \frac{\partial \Phi(r_1 - r_2)}{\partial q_1^\alpha}.$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial p_1^\alpha}(\vec{z}_1, \vec{z}_2)\, dz_2 \}$$

По аналогии находятся все остальные.

$\boxed{\text{КОНЕЦ}}$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#01}}$ 090210

Голубев Юрий Филиппович.

Книжка: Основы тер. механики. 2000, изд-во МГУ

(Профком мехмата, 14й этаж)

Точечно-векторное аффинное пространство A^n

Тут живут: 1. Точки и вектора.

I Каждой точке соотв. т. R^n

II Двум точкам A, B образуют $\exists!$ $\overline{AB} \in R^n$

III A, $\overset{\text{вектор}}{\overline{v}} \longrightarrow \exists! B$, лежащая на конце v (в-р приложен к A)

IV $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, то $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Вектор – это элемент нек-го пространства.

$\mathbb{R}^n$: операция $+$: 1) $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{a}+\overline{b} \in \mathbb{R}^n$

2) $\overline{a}+\overline{b} = \overline{b}+\overline{a}$

3) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}) = (\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$

4) $\exists\, 0: \overline{a}+0 = 0+\overline{a} = \overline{a}$

5) $\exists$ "$-\overline{a}$": $-\overline{a}+\overline{a} = 0$

Умножение на число:

6) $\alpha(\beta\overline{a}) = \alpha\beta\overline{a}$

7) $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$

8) $\exists\, 1: 1\cdot\overline{a} = \overline{a}$

9) $\overline{a}(\alpha+\beta) = \alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$

• Есть скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$:

1) $\overline{a}\cdot\overline{a} > 0$, если $\overline{a} \neq 0$

$\overline{a}\cdot\overline{a} = 0$, если $a = 0$

2) $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$

3) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$

• $\overline{e_i}$ – базисные в-ра, $i = \overline{1,n}$; $\overline{a} = \sum a_i \overline{e_i}$; $\overline{b} = \sum b_i \overline{e_i}$; $\overline{a}\,\overline{b} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\overline{e_i}\,\overline{e_j})$

Обозначим $g_{ij} = \overline{e_i}\cdot\overline{e_j}$; $G = [g_{ij}]$ должна быть: $G = G^T > 0$. Пусть у нас есть базис $\overline{e}'_i = \sum a_{ji}\overline{e_j}$

$g'_{ij} = \overline{e}'_i\cdot\overline{e}'_j = \sum a_{ki}\overline{e}_k a_{pj}\overline{e}_p = \sum\limits_{k,p=1}^{n} a_{ki} a_{pj} g_{kp}$

• Правило преобразования G в G' сохраняет скалярное произв-е.

Д-во $\overline{x} = \sum x'_i e'_i$; $\overline{y} = \sum y'_i e'_i$ в g'_{ij}

$\overline{x} = \sum x_i e_i$, $\overline{y} = \sum y_i e_i$ в g_{ij}

$\overline{e}'_i = \sum a_{ki}\overline{e}_k$; $x_i = \sum a_{ik} x'_k$, $y_i = \sum a_{ik} y'_k$

$\overline{x}\cdot\overline{y} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x'_i y'_j g'_{ij} = \sum\limits_{i,j} x'_i y'_j \sum\limits_{kp} g_{kp} a_{ki} a_{pj} =$

$= \sum\limits_{kp} g_{kp} \sum x'_i a_{ki} \sum y'_j a_{pj} = \sum\limits_{k,p} g_{kp} x_k y_p$ Ч.Т.Д

G наз-ся метрический тензор второго ранга.

пр Расстоянием между A, B наз-ся $\rho(A,B) = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}$

пр Ортогональность: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

Линейное преобразование.

$= A\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^n_y$, $x \in \mathbb{R}^n$. Свойства: 1) $A\lambda\overline{x} = \lambda A\overline{x}$

2) $A(\overline{x}+\overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y}$

$A\overline{x} = A\sum x_i \overline{e}_i = \sum x_i \underbrace{Ae_i}$ все определяется действием на базис

$e_i' = A\overline{e} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\, \overline{e}_j$ $\qquad A = (a_{ji})$

$g_{ij}(Ax) = g_{ij}(x)$ Хотим, чтобы преобразование не меняло метрику.

$g_{ij}' = \sum g_{kp} a_{ki} a_{pj}$

$G' = A^T G A = G$. Если $G = E$, то $\underline{A^T A = E}$ (ортогональные преобразования)

Теорема 1 Пусть A — ортогональна; тогда она орт. в любом другом орт. базисе.

Д-во $\overline{e}_i' = \sum c_{ki} \overline{e}_k$; $C^T C = E$, если $e_i' e_j' = \delta_{ij}$; $e_i e_j = \delta_{ij}$

$A\overline{e}_i' = \sum c_{ki} A\overline{e}_k = \sum c_{ki} \sum_{k=1}^{n} a_{ek} \overline{e}_e = \sum c_{ki} a_{ek} c_{ep} e_p'$

$\overline{e}_k = \sum a_{ep} e_p$; $A' = C^T A C$; $(A')^T (A') =$

$= (C^T A C)^T C^T A C = C^T A^T C C^T A C = E$. Ч.Т.Д.

Теорема 2 A-ортог. $\Leftrightarrow$ A переводит $\forall$ ортонормир. в ортонормир базис того же числа в-ров.

Д-во $\Rightarrow$ $A\overline{e}_i \cdot A\overline{e}_j = \sum a_{ki} \overline{e}_k a_{pj} \overline{e}_p = \sum a_{ki} a_{pj} \overbrace{e_k e_p}^{\delta_{kp}} = \delta_{ij}$

$(\overline{e}_i = Ae_i)$

$\Leftarrow$ Очевидно. Ч.Т.Д.

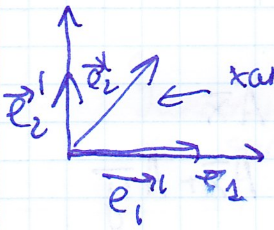
Св. Ортог. матрицы сохр. скалярное произведение.

Заметим, что $(\det A)^2 = 1$ и $\det A = \pm 1$. Вообще, они обр. группу.

$O(n)$ - группа ортогональных матриц

$SO(n)$ - группа орт. матриц с $\det A = 1$

Пространство A^3.



← хотим, что бы они были ортогональными.

$\overline{e}_2' = e_1 + \overline{e}_2$; $\overline{e}_1' = e_1$; $\overline{e}_2' \, \overline{e}_1' = \overline{e}_1 \overline{e}_1 + \overline{e}_2 e_1 = 0$

$e_1 e_1 = 1$

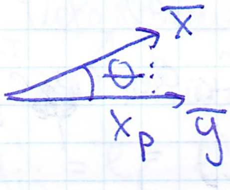
$e_2' e_2' = 1$

$$\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_1 + 2 \underbrace{\overline{e}_1 \overline{e}_2}_{g_{12}} + \underbrace{\overline{e}_2 \overline{e}_2}_{g_{22}} = 1$$

$$g_{11} + g_{22} = 0$$

Но, в общем, это неудобно. Хотим связать ортогональность с перпендикулярностью. Возьмём e_1, e_2, e_3 взаимно перпендикулярными. $G = E$. Укажем, откуда они торчат, получим репер. (декартов) Проведём через них прямые и назовём декартовой системой координат.

$\overline{x} = \sum x_i \overline{e}_i$, $\overline{y} = \sum y_i \overline{e}_i$; $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$



$$\cos\theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{|x| \cdot |y|}$$

Векторное умножение.

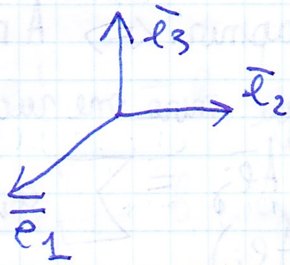
1. Билинейная кососимметрическая операция.

$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{x} \times \overline{y}$

а) $\overline{x} \times \overline{y} = -\overline{y} \times \overline{x}$

б) $\overline{x} \cdot \lambda \overline{y} = \lambda \overline{x} \times \overline{y}$

в) $\vec{x} \times (\overline{y} + \overline{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$



– правый репер

160210

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#02}}$

Определяем действие на базисе:

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = -(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)$; $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_3)$

$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1$; $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0$

Итак, $\vec{x}=\sum x_i e_i$; $\vec{y}=\sum y_i e_i$; тогда

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}; \quad |\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$$

Отсюда очевидно, что $\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})=0=\vec{y}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})$

$$\vec{z}(\vec{x}\times\vec{y})=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$ — объём параллелепипеда.

a в c

$$\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y})=[\text{бац}-\text{цаб}]=\vec{x}(\vec{z}\cdot\vec{y})-\vec{y}(\vec{z}\cdot\vec{x})$$

Итак, $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{dx_1}{dt}e_1+\frac{dx_2}{dt}e_2+\frac{dx_3}{dt}e_3$$

Рассмотрим ситуацию: $\vec{x}\cdot\vec{x}=\text{const}$; $\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{x}=0$

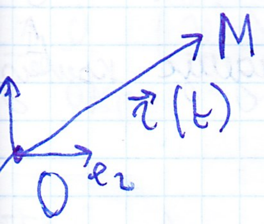
Мы везде считаем, что метрика не зависит от времени.

$\vec{x}=x\vec{e}_x$, $\vec{e}_x\vec{e}_x=1$; $\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{e}_x+x\underbrace{\frac{d\vec{e}_x}{dt}}$ ← трансверсальная компонента

КИНЕМАТИКА.

1. Кинематика точки.

Хотим считать скорости и ускорения.

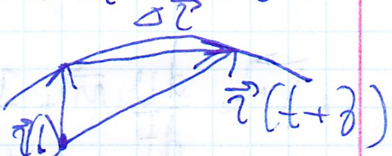


$\vec{r}(t)=r_1(t)\vec{e}_1+r_2(t)\vec{e}_2+r_3(t)\vec{e}_3$ — закон движения точки M

Траектория: другой параметр или исключено время.

$$r(t)=R\cos(\omega t)\vec{e}_1+R\sin(\omega t)\vec{e}_2+a\vec{e}_3$$

$t+\tau$; $\vec{r}(t+\tau)$, $\vec{r}(t)$; $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\tau)-\vec{r}(t)$



$\vec{v}_{ср}=\frac{\Delta\vec{r}}{\tau}$,

Опр. $\vec{v}=\lim\limits_{\tau\to 0}\vec{v}_{ср}$ (если он существует)

$\vec{v}$ — направлено по касательной траектории.

Длина дуги: $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = = \sqrt{\frac{d\vec{r}\,d\vec{r}}{dt^2}}$

$\left[\frac{ds}{dt}\right] = [м/с]$

Равномерное движение: $\vec{v} = \text{const}$

Если $v(t)$ задано, то $\vec{r}(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt + \vec{r}(t_0)$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t} \sum \vec{v}_i e_i\,dt = \sum \vec{e}_i \int\limits_{t_0}^{t} v_i(t)\,dt$$

Если $\vec{v} = v_0 = \text{const} \equiv v(t_0)$, тогда $\vec{r}(t) = (t-t_0)\vec{v}_0 + \vec{r}(t_0)$

Ускорение

$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; если $\vec{w}(t)$ - задано, то $\vec{r}(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau} \vec{w}(\tau)\,d\tau\,d\tau + \vec{v}(t_0)(t-t_0) + \vec{r}(t_0)$ ((точностью до равномерного движения)

Равноускоренное движение: $\vec{W}(t) = \vec{W}(t_0) = \vec{W}_0$

$$\vec{r} = \vec{W}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \vec{v}(t_0)(t-t_0) + \vec{r}(t_0)$$

- $\vec{\tau}$ - касательная к траектории; $\vec{v} = v\cdot\vec{\tau}$, $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\vec{\tau} = 0$$

Соприкасающаяся плоскость $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$; $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\nu}}{\rho}$

радиус кривизны

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{\nu}$$

главная нормаль

$\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu}$

получаем сопровождающий трехгранник

- $\vec{W} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\nu}$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = R\cos\omega t, \\ \vec{r}_2 = R\sin\omega t. \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = -\omega R\sin\omega t, \\ v_2 = \omega R\cos\omega t. \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = -\omega^2 R\cos\omega t \\ w_2 = -\omega^2 R\sin\omega t \end{cases}$$

Криволинейные координаты. $r_1 = r_1(x_1, x_2, x_3)$

$\vec{r} = r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + r_3\vec{e}_3$ $\quad r_2 = r_2(x_1, x_2, x_3)$

$r_3 = r_3(x_1, x_2, x_3)$

. Цилиндрические,

$r_1 = \rho\cos\varphi,\ r_2 = \rho\sin\varphi,\ r_3 = z$

. Сферические. $r_1 = \rho\cos\theta\cos\varphi$ $\quad r_3 = \rho\sin\theta$ $\quad$ в ук. системах

$r_2 = \rho\cos\theta\sin\varphi$ ← параллели. $\quad$ к-т они ортогональны.

меридианы

$x_i(t)$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial x_i}\cdot\dot{x}_i \quad \text{Введем } \vec{\tau}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right|^{-1}$$

Они образуют репер.

(Локальный репер крив. сист. к-т)

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\right|\vec{\tau}_i\,\dot{x}_i$$

$$\vec{w}\cdot\vec{\tau} = ? = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right|^{-1}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i};\quad \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right] -$$

$$- \vec{v}\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \ominus \quad v = \sum\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\dot{x}_i \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{x}_i}$$

(правило потирания точек)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x_j\partial x_i}\dot{x}_j = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

$$\ominus\ \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{x}_i}\right] - \vec{v}\frac{\partial v}{\partial x_i}.\quad \text{Итак, } \vec{w}\cdot\vec{\tau} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right|^{-1}\left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{x}_i}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right],\quad \vec{v} = \sum\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\dot{\vec{x}}_i$$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#03}}$ 020310

Тв. тело-мн-во точек, расстояние между к-ми не меняются в процессе движения.

<u>Кинематика абсолютно тв. тела.</u>

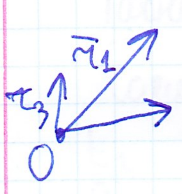
$A\in\mathbb{T},\ B\in\mathbb{T}:\ \rho(A,B) = const.$

Закон движения: нечто, что по т. тела дает ее (точки) траектории.

Лемма. Законы дв-я трёх неколлинеарных т. тела (не лежащих на одной прямой), задают з-ны движения АТТ.

Д-во. Пусть заданы $r_1(t), r_2(t), r_3(t) \in \mathbb{T}$, $\vec{r}(t)$ - ?

Р-м $\vec{R}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$; $\vec{R}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$; они неколл.



$\vec{e}_3{}' = [\vec{R}_2 \times \vec{R}_1] / |[\vec{R}_2 \times \vec{R}_1]|$. Тогда интересующий нас $\cancel{\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda \vec{R}_1}$ $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1(t) = \lambda_1 \vec{R}_1 + \lambda_2 \vec{R}_2 + \lambda_3 e_3'$

Умножим скалярно на $\vec{R}_1$: $\vec{R} \cdot \vec{R}_1 = \lambda_1 R_1^2 + \lambda_2 \vec{R}_2 R_1$

$\vec{R} \cdot \vec{R}_2 = \lambda_1 \vec{R}_1 \vec{R}_2 + \lambda_2 R_2^2$ $\qquad \theta = (\widehat{R_2, R_1})$

Положим $D = R_1^2 R_2^2 - R_1^2 R_2^2 \cos^2 \theta =$

$= R_1^2 R_2^2 \sin^2 (\widehat{R_2, R_1}) = |[\vec{R}_1 \times \vec{R}_2]|^2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ определяются однозначно и постоянны,

λ_3 - проекция, она тоже const. ЧТД

Теорема 1. $\vec{r}(t) = A(t) X + \vec{r}\,'(t)$ ← дв. полюса

вращение репера вокруг ↑ ортогональный оператор, $A \in O_3$)

$X = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$; $A\vec{X} = x_1 A\vec{e}_1 + x_2 A\vec{e}_2 + x_3 A\vec{e}_3$

(т. е. тела репер вращается)

Д-во. $R = \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{R}_1 + \lambda_2 \vec{R}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3{}'$. Ортогонализируем

$\vec{e}_2{}' = \dfrac{\vec{e}_3{}' \times R_1}{|R_2|}$, $\vec{e}_1{}' = \dfrac{|R_1|}{R_1}$. Спроецируем:

$$R = \vec{e}_1{}' \underbrace{\left(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{R_1}\right)}_{x_1} + \vec{e}_2{}' \underbrace{(\vec{R}_2 \cdot \vec{e}_2{}')\lambda_2}_{x_2} + \underbrace{\lambda_3 \vec{e}_3{}'}_{x_3}$$

$R = x_1 \vec{e}_1{}' + x_2 \vec{e}_2{}' + x_3 \vec{e}_3{}'$

Зададим $A(t)$: $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1{}'$; $A\vec{e}_2 = \vec{e}_2{}'$; $A\vec{e}_3 = \vec{e}_3{}'$.

A переводит ортон. в ортон ⇒ A-ортогональный оператор. ЧТД

	e_1'	e_2'	e_3' ← св. с тв. телом
e_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
e_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
e_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(Теорема сложения скоростей) S – исходная неподв.-я репер; S_1 – подв репер; M – двигующаяся точка. Движение M в S – абсолютное движение, в S_1 – относительное; M' – образ M в S_1. В S ск. $\vec{v}_a$, в S_1, $\vec{v}_r$, ск. S_1 $\vec{v}_e$.

Тогда $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

Д-во $r = A(t)x(t) + r'(t)$ (в абс. осях) (репер S)

$$\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\vec{v}_a} = \frac{dA}{dt}x + \underbrace{A\frac{dx}{dt}}_{\vec{v}_r} + \frac{dr'}{dt} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$\vec{v}_e$ "скорость x, если бы она была неподвижна"

Ч.Т.Д.

Угловая скорость тв. тела.

Формула Эйлера. $\exists \vec{\omega}$ (угловая скорость): $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, где $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'$

Д-во $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}' = A\underset{const}{\vec{X}}$; $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{X}$; $\vec{X} = A^T\rho$;

$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{dA}{dt}A^T\rho \ (=)$, Мы знаем, что $A^TA = E \Rightarrow$

$$0 = \frac{dAA^T}{dt} = \underline{\frac{dA}{dt}A^T} + A\frac{dA^T}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt}A^T = -\left(\frac{dA}{dt}A^T\right)^T$$

Значит, A – кососимметрическая, и может быть представлена в виде $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \\ \omega_3 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

Положим $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3$.

$(=) \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ ЧТД

Пример. $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$; $\begin{cases} \dot{\vec{e}}_1' = \vec{\omega} \times \vec{e}_1', \\ \dot{\vec{e}}_2' = \vec{\omega} \times \vec{e}_2', \\ \dot{\vec{e}}_3' = \vec{\omega} \times \vec{e}_3'. \end{cases}$ $\vec{e}_1' \times \dot{\vec{e}}_1' = \vec{e}_1' \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_1') = \vec{\omega} + (\omega, \vec{e}_1')\vec{e}_1'$

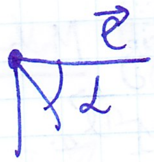
$\vec{e}_2 \times \dot{\vec{e}}_2 = \omega - (\vec{\omega} \cdot \vec{e}_2')\vec{e}_2'$

$\vec{e}_3 \times \dot{\vec{e}}_3 = \omega - (\vec{\omega}, \vec{e}_3')e_3'$

Сложим: $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 \times \dot{\vec{e}}_1 + \vec{e}_2 \times \dot{\vec{e}}_2 + \vec{e}_3\,\dot{\vec{e}}_3\right)$

$\vec\omega \times \vec\rho$ — вращательное поле скоростей

$\vec v_0$ — поступательное поле



$\omega = \dot\varphi\, \vec e$ (вращение отн. неподв. оси)

$\vec\omega$ — скользящий в-р: можно туда-сюда двигать

Упр. А что произойдет, если преобразуются координаты? Самим.

Правило сложения угловых скоростей.

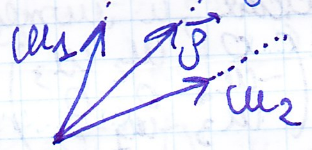
Композиция движений АТТ.

$$\left.\begin{aligned} \vec r(t) &= A_1(t)\,\bar y(t) + \vec r\,'(t) \\ \bar y(t) &= A_2(t)\,\underbrace{\bar X}_{const} + \vec a(t) \end{aligned}\right\} \quad A = A_1\circ A_2, \quad \vec r(t) = A_1\circ A_2(t)\,\bar X + \underbrace{A_1 \vec a(t) + \vec r\,'(t)}_{\xi(t)}$$

$\vec\rho = A_1\circ A_2\, \vec X$

Теорема. Если основания угл. скоростей пересекаются $\vec\omega_1 \sim A_1$, $\vec\omega_2 \sim A_2$, то результирующая угловая ск-ть $\vec\omega \sim A_1\circ A_2$ имеет вид $\vec\omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2$

Д-во

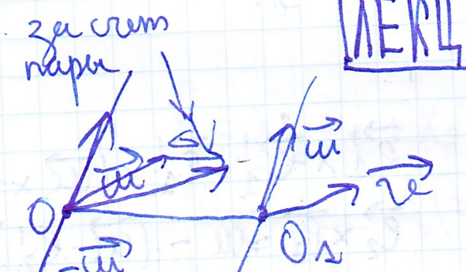


$$\left.\begin{aligned} \vec v_e &= \vec\omega_1\times\vec\rho \\ \vec v_r &= \vec\omega_2\times\vec\rho \end{aligned}\right| \quad \vec v_a = (\vec\omega_1 + \vec\omega_2)\times\vec\rho$$

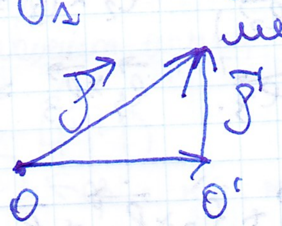
Ч.Т.Д.

090310

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#04}}$



Есть формула Эйлера: $\vec v_B = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec\rho$, $\vec\rho = \vec{OB}$. А что будет, если мы меняем O?



$$\vec v_B = \vec v_0 + \vec\omega\times(\vec{OO'} + \vec\rho\,') = \underbrace{\vec v_0 + \vec\omega\times\vec{OO'}}_{\vec v_{O'}} + \vec\omega\times\vec\rho\,'$$

$\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OO'} \parallel \vec{\omega}$; $\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OO'}) = 0$

$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \cdot \vec{OO'}) - \vec{OO'}\omega^2 = 0$

за счет $\vec{\omega} \cdot \vec{OO'} = 0$: $\vec{OO'} \perp \vec{\omega}$. Тогда $\vec{OO'} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}$,

уравнение по прямой: $\vec{r} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} + \lambda\vec{\omega}$.

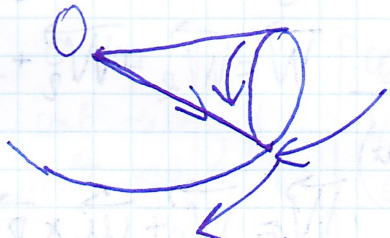
мгновенная винтовая ось в теле (шуруп-стали)

$\vec{v}_0'$, O'

$\vec{AO'} = \vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r}_0 + \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} + \lambda\vec{\omega}$; $\vec{\omega} \times \vec{r} = \dfrac{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_0)}{\omega^2}$

$\vec{\omega} \times (\vec{AO'} - \vec{r}_0) = \dfrac{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}_0)}{\omega^2}$

Пусть одна точка неподвижна:



без проскальзывания: ск-ть в точке касания $= 0$

Опр. Геометрическое место положений мгновенной винтовой оси в теле — подвижный аксоид, в абс. пр-ве — неподвижный аксоид.

Теорема. Произвольное движение тв. тела интерпретируется как качение непод. аксоида по подвижному с взаимным проскальзыванием вдоль винтовой оси (если только ПА и НА не вырождаются в прямую)

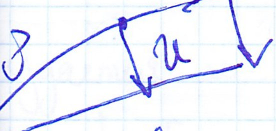
Плоскопараллельное движение.

$\mathcal{P}$: $\vec{v} \parallel \mathcal{P}$, $\vec{r} \parallel \mathcal{P}$ $\forall t$. $\vec{\omega} \perp \mathcal{P}$, аксоиды есть цилиндр; срез — центроида. (движения вдоль оси нет)

Теорема 1) $\exists\, \vec{\omega} \neq 0$, $\vec{\omega} \perp \mathcal{P}$, $\vec{v}_0 = 0$ (два варианта)

2) $\vec{\omega} = 0$, $\vec{v}_0 \parallel \mathcal{P}$

мгновенный центр скоростей.



v

мгновенный центр скоростей

$\vec{v}$, A

← акр. - подвижная центроида.

← непедв. центроида

Поле ускорений в сложном движении.

$\vec v = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec\rho + \vec v_r$ $\quad \frac{d\vec a}{dt} = \frac{\tilde d\vec a}{dt} + \vec\omega\times\vec a$ (по т. о сложении скоростей) $+\frac{d}{dt}\vec v_r =$

$$\vec W = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec v_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec\rho)$$

$$= \vec W_0 + \frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec\rho + \vec\omega\times\frac{d\vec\rho}{dt} + \frac{d\vec v_r}{dt} =, \quad \underbrace{\frac{d\vec\omega}{dt}}_{\dot{\vec\omega}} = \frac{\tilde d\vec\omega}{dt} + \vec\omega\times\vec\omega$$

$$= \vec W_0 + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times\left(\frac{\tilde d\vec\rho}{dt} + \vec\omega\times\vec\rho\right) + \underbrace{\frac{\tilde d\vec v_r}{dt}}_{W_r} + \vec\omega\times\vec v_r$$

$$\vec W = \vec W_0 + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) + 2(\vec\omega\times\vec v_r) + \vec W_r.$$

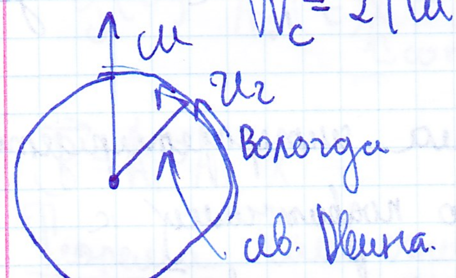
<u>Теорема</u> (слож. ускорений) $\vec W = \vec W_e + \vec W_r + \vec W_c$ — кориолисово ускорение.

$\vec W_e = \vec W_0 + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$ (переносное ускорение АТТ) (Ф-ла Ривальса)

осестремительное ускорение

вращательное ускорение.

$\vec W_c = 2(\vec\omega\times\vec v_r)$



Кор. ускорение влияет на нас.

$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) = \vec\omega(\vec\omega\cdot\vec\rho) - \vec\rho\,\omega^2 = \omega^2\left[\vec e_\omega(\vec e_\omega\cdot\vec\rho) - \vec\rho\right]$$

<u>Поле ускорений в сложном движении.</u>

Поле ускорений АТТ: $\vec W = \vec W_0 + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$

<u>Теорема.</u> Если $\dot{\vec\omega}\nparallel\vec\omega$, то мгновенное ускорение $\exists!$

16.03.10

ЛЕКЦИЯ #05

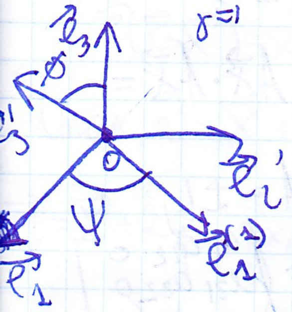
	$\vec e_1'$	$\vec e_2'$	$\vec e_3'$
$\vec e_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\vec e_2$	a_{12}	a_{22}	a_{23}
$\vec e_3$	a_{13}	a_{23}	a_{33}

$(\vec e_i'\cdot\vec e_j') = \delta_{ij}$

- $A_1\circ A_2$ — как оно работает?

$$A_1\vec e_i = \sum_{j=1}^{3} a^{(1)}_{ji}\vec e_j, \quad i=1,2,3$$

$$A_2\vec e_i = \sum_{j=1}^{3} a^{(2)}_{ji}\vec e_j; \quad A_1\circ A_2\vec e_i = A_1\Big(\sum_{j=1}^{3} a^{(2)}_{ji}\vec e_j\Big) = \sum_{j=1}^{3} a^{(2)}_{ji}\vec e_j^{\,(1)}$$



$\sin\theta \neq 0$, $B_1 = \{\vec e_1' = \vec e_3 \times \vec e_3' \cdot \dfrac{1}{|\vec e_3\times\vec e_3'|},$

$\vec e_2^{\,(1)} = (\vec e_3 \times \vec e_1^{\,(1)}),\ \vec e_3^{\,(1)} = \vec e_3\}$

$B_2 = \{\vec e_1^{\,(2)} = \vec e_1^{\,(1)},\ \vec e_2^{\,(2)} = (\vec e_3' \times \vec e_1^{\,(1)}),\ \vec e_3^{\,(2)} = \vec e_3'\}$

$B_0 \xrightarrow[\psi]{} B_1 \xrightarrow[\theta]{} B_2 \xrightarrow[\varphi]{} B'$ (углы Эйлера)

округ e_3 $\quad e_1 \quad e_3'$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \quad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

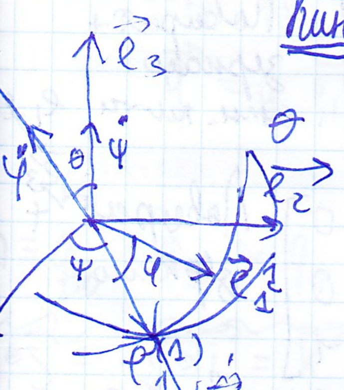
$A_\psi A_\theta A_\varphi$ (т.е. есть углы)

ψ — угол прецессии

φ — истинная аномалия для спутника

При $\theta = 0$ однозначно углы не определить...

Кинематические уравнения Эйлера.



$\omega_1 = \vec\omega\cdot\vec e_1',\ \omega_2 = \vec\omega\cdot\vec e_2',\ \omega_3 = \vec\omega\,\vec e_3'$

$\omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi$

$\omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi$ $\qquad \cancel{A_\psi A_\theta A_\varphi}$

$\omega_3 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi$

Удастся ли вернуться обратно?

$\dot\psi = \dfrac{1}{\sin\theta}\left[\omega_1\sin\theta + \omega_2\cos\theta\right]$ ← не всегда.

Кинематические уравнения Пуассона.

$\dot{\vec e}_i' = \vec\omega\times\vec e_i'$

Теорема. Что бы совместить два произвольных положения АТТ, достаточно одного поворота. $(\det A = 1)$

Д-во 1) Неподвижная ось. $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $|A-\lambda E|=0$

Есть одна вещ. корень; чему равно λ? $A\vec{x}\cdot A\vec{x} =$

$=\lambda\vec{x}\cdot\lambda\vec{x}=\lambda^2x^2=x^2 \Rightarrow \lambda=\pm1$; $\det A=\pm1$;

$\vec{e}_3=\vec{e}_x$ – вектор неподв. репера. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{bmatrix}$

$a_{11}^2+a_{21}^2=1$

$a_{12}^2+a_{22}^2=1$ $\quad a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$ (ортогональность)

$a_{11}=\cos\varphi$, $a_{12}=\sin\varphi$

$a_{12}=-\sin\varphi$, $a_{22}=\cos\varphi$ или $a_{12}=\sin\varphi$, $a_{22}=-\cos\varphi$.

а) $\lambda=1$, $\det A=1$. $A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

б) $\lambda=-1$, $\det A=1$. $A\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ А что делает эта матрица?

$\lambda_3=-1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_1=1$.

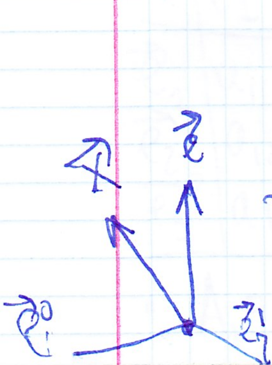
$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – поворот на π вокруг -1.

в) $\lambda=1$, $\det A=-1$. $A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Поворот + зеркало отн. пл-ти $e_1 e_3$

г) $\lambda=-1$, $\det A=-1$. $A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Поворот $\vec{e}_3$ + зеркало

А т.к. детер. не меняется, то "зеркало" – это вопрос отображения, выбора репера. Ч.Т.Д.

Параметры Эйлера.
(Родрига-Гамильтона)



Хотим описать поворот на угол α.

$\vec{e}_2^{\,1}=\frac{\vec{e}\times\vec{x}}{|\vec{e}\times\vec{x}|}$ $\quad \vec{e}_1^{\,\omega}=\frac{[\vec{e},\vec{x}]\times\vec{e}}{|\vec{e}\times\vec{x}|}$

$\vec{r} = (\vec{X}\cdot\vec{e})\vec{e} + |\vec{e}\times\vec{X}|(\vec{e}_1^{(1)}\cos\alpha + e_2^{(1)}\sin\alpha) = (\vec{X}\vec{e})\vec{e} + (\vec{e}\times\vec{X})\sin\alpha -$

$- \underbrace{\vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{X})}_{\vec{e}(\vec{e}\vec{X})-X}\cos\alpha = \vec{X} + (\vec{e}\times\vec{X})\sin\alpha + \vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{X})(1-\cos\alpha)$

Итак, $\vec{r} = \vec{X} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(\vec{e}\times\vec{X}) + 2\sin^2\alpha/2\,(\vec{e}\times(\vec{e}\times X))$; $\vec{q} = \sin\frac{\alpha}{2}\vec{e}$,

$\vec{r} = \vec{X} + 2q_0(\vec{q}\times\vec{X}) + 2(\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{X}))$ $\quad q_0 = \cos\alpha/2$

$\vec{q} = \sum q_i\vec{e}_i$; $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ – параметры Эйлера.

$\vec{e}_i' = \vec{e}_i + 2q_0(\vec{q}\times\vec{e}_i) + 2(\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{e}_i))$; $\vec{q} = \sum q_j\vec{e}_j$

$\vec{e}_i' = \vec{e}_i + 2q_0\sum q_j(\vec{e}_j\times\vec{e}_i) + 2[\vec{q}q_i - q^2\vec{e}_i]$

Значит, $a_{ii} = 1 + 2(q_i^2 - q^2)$ ~~...~~ $\quad a_{11} = 1 - 2(q_2^2 + q_3^2)$

$a_{ij} = 2q_iq_j - 2q_0q_{\text{чего}}$ $\quad a_{22} = 1 - 2(q_3^2 + q_1^2)$

$a_{33} = 1 - 2(q_1^2 + q_2^2)$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 06}}$

230310

Итак, $\vec{r} = \vec{x} + 2q_0(\vec{q}\times\vec{X}) + 2(\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{X}))$.

$q_0 = \cos\frac{\alpha}{2}$, $\vec{q} = \vec{e}\sin\alpha/2$

$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

$\vec{q} = q_1\bar{e}_1 + q_2\bar{e}_2 + q_3\bar{e}_3$

Кватернионы

$h = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$; $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. $(*)$ — Это очень похоже на векторные произвед

$i\circ j = -j\circ i = k$; $j\circ k = -k\circ j = i$; $k\circ i = -i\circ k = j$

$q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$; $\vec{q} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3 \longleftrightarrow h_q =$
$= q_1 i + q_2 j + q_3 k$

Сопряженный кватернион: $\bar{h} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$; $\bar{h}_q = -h_q$

$h = q_0 + h_q$

$\bar{h}_x = -h_x$, $\bar{h}_y = -h_y$; $\begin{cases} h_x \circ h_y = h_{[\vec{x}\times\vec{y}]} - (\vec{x},\vec{y}) \\ h_y \circ h_x = h_{[\vec{y}\times\vec{x}]} - (\vec{x},\vec{y}) \end{cases}$

$h_{[\vec{x}\times\vec{y}]} = \frac{1}{2}(h_x \circ h_y - h_y \circ h_x) \Leftarrow$

$(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(h_x \circ h_y + h_y \circ h_x)$

$h_{z\times(x\times y)} = h_x \cdot (\vec{z}\cdot\vec{y}) - h_y(\vec{x}\cdot\vec{z})$

$\overline{h'h''} = \overline{(q_0' + h_{q'})\circ(q_0'' + h_{q''})} = q_0'q_0'' - (\vec{q}'\cdot\vec{q}'') - q_0''h_{q'} - q_0'h_{q''} - h_{[\vec{q}'\times\vec{q}'']}$

$\bar{h}'\bar{h}'' = (q_0' - h_{q''})\circ(q_0'' - h_{q'}) = q_0'q_0'' - (\vec{q}'\cdot\vec{q}'') - q_0''h_{q'} - q_0'h_{q''} + h_{[\vec{q}''\times\vec{q}']}$

Итак, $\overline{h' \circ h''} = \bar{h}'' \circ \bar{h}'$

$\|h\|^2 = h \circ \bar{h} = (q_0 + h_q)\circ(q_0 - h_q) = q_0^2 - h_q \circ h_q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$

Берём $\|h\| = 1$.

$h_r = h \cdot h_x \bar{h} = (q_0 + h_q)\circ h_x \circ (q_0 - h_q) =$

$= (q_0 h_x + h_q \circ h_x)\circ(q_0 - h_q) = q_0^2 h_x + q_0[h_q \circ h_x - h_x \circ h_q] -$

$-(h_q \circ h_x)\circ h_q = q_0^2 h_x + 2q_0 h_{(\vec{q}\times\vec{x})} - (h_{[q\times\vec{x}]} + (\vec{q}\cdot\vec{x}) h_q) \circledcirc$

$h_{\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{x})} = h_{\vec{q}}(\vec{q}\cdot\vec{x}) - h_x q^2$

$h_{\vec{q}}(\vec{q}\cdot\vec{x}) = h_{\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{x})} + h_x q^2$

$h_{[\vec{q}\times\vec{x}]} \circ h_q = -h_{\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{x})}$

На удивление похоже на (*)

$\circledcirc\ h_x + 2q_0 h_{[\vec{q}\times\vec{x}]} + 2h_{\vec{q}\times(\vec{q}\times\vec{x})}$.

Значит, $h_r = h \circ h_x \circ \bar{h}$ описывает все ортогональные преобразования.

$h_y = h_1 \circ h_x \circ \bar{h}_1$, $\quad h_r = h_2 \circ h_1 \circ h_x \circ \bar{h}_1 \circ \bar{h}_2 = (h_2 \circ h_1)\circ h_x \circ \overline{(h_2 \circ h_1)}$

$h_r = h_2 \circ h_y \bar{h}_2$.

…язь с углами Эйлера

$q_{0\psi} = \cos\psi/2$; $\vec{q}_{\psi} = \sin\psi/2\, \vec{e_3}$ (прецессия)

$q_{0\theta} = \cos\theta/2$; $\vec{q}_{\theta} = \sin\frac{\theta}{2}\vec{e_1}$ (нутация)

$q_{0\varphi} = \cos\varphi/2$; $\vec{q}_{\varphi} = \sin\varphi/2\, \vec{e_3}$

$h_{\psi} = \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\bar{k}$, $h_{\theta} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} i$; $h_{\varphi} = \cos\varphi/2 + \sin\varphi/2\, k$

$h = h_{\psi} h_{\theta} h_{\varphi}$.

…имер. $h_x = i$; $h_{\psi} = \cos\psi/2 + k\sin\psi/2$; $h_z = (\cos\psi/2 + k\sin\psi/2)\circ i \circ (\cos\frac{\psi}{2} - k\sin\frac{\psi}{2})$

$= i\cos^2\frac{\psi}{2} + j\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + j\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2} - i\sin^2\frac{\psi}{2}$ И - всё сошлось.

Хотим написать

Кинематические уравнения для кватернионов.

$h_z = h\circ h_x \bar{h}$; $\dot{h}_z = \dot{h}\circ h_x \circ \bar{h} + h\circ h_x \circ \dot{\bar{h}} = \dot{h}\circ\bar{h}\circ h_z\, h\circ\bar{h} +$

$h_x = \bar{h}\circ h_z h$ $\quad + h\circ\bar{h}\circ h_z \circ h\circ\dot{\bar{h}} \ominus$

$h\circ\bar{h} = 1$

$\dot{h}\circ\bar{h} + h\circ\dot{\bar{h}} = 0$

$h\cdot\dot{\bar{h}} = -\dot{h}\circ\bar{h}$

$\ominus\, h_{\Omega}\circ h_z - h_z\circ h_{\Omega} = 2h_{[\Omega\times z]} = h_{[\omega\times z]}$ та самая УС

$h_{\Omega} = \dot{h}\bar{h} = \frac{1}{2}h_{\omega}$

$\dot{h} = \frac{1}{2}h_{\omega}\circ h$ Можно расписать. $\dot{h} = \frac{1}{2}h_{\omega}\circ h = \frac{1}{2}h_{\omega}\circ(q_0 + h_q)$

$\dot{q}_0 = h_{\vec{\omega}+q} - \vec{\omega}\cdot\vec{q}$

$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 q_0 + q_2\omega_3 - q_3\omega_2)$

$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(\omega_3 q_0 + \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1)$

ДИНАМИКА.

Считаем, что динамику точки мы знаем.

Система материальных точек.

$m_{\nu}\vec{W}_{\nu} = m_{\nu}\frac{d^2\vec{r}_{\nu}}{dt^2} = \vec{F}_{\nu}$; $(r_{\nu}, \vec{v}_{\nu}, \nu = 1, \dots, N)$ - фаз. пр-во.

$i=1,..,m.$ Связи: $\phi_i(\vec{r}_1,..,\vec{r}_N,\vec{v}_1,...,\vec{v}_N,t)=0$ - дифференц. связи.

$(f_i(\vec{r}_1,..,\vec{r}_N,t)=0$ - геометрические связи$)$.

паг. условия + $\phi_i=\sum\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\vec{v}_j+\frac{\partial f}{\partial t}=0$ $\left(\text{где } \frac{\partial f}{\partial r_j}=\frac{\partial f}{\partial r_{j_1}}e_1+...+\frac{\partial f}{\partial r_{j_3}}e_3\right)$

И, вообще говоря $m_j\frac{d^2r_j}{dt^2}=\vec{F}_j+\vec{N}_j$ ← реакции связей; мы их не знаем.

$$\frac{d\phi_i}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\phi_i}{\partial\vec{r}_j}\vec{v}_j+\sum\frac{\partial\phi_i}{\partial\vec{v}_j}\vec{W}_j+\frac{\partial\phi_i}{\partial t}=0.$$

$$\vec{W}_j=\frac{1}{m_j}(\vec{F}_j+\vec{N}_j)$$

(*) $i=1,..,m$ $$\sum\frac{\partial\phi_i}{\partial r_j}\cdot\vec{N}_j\frac{1}{m_j}=-\sum\frac{\partial\phi_i}{\partial r_j}\cdot\partial\vec{v}_j-\sum\frac{1}{m_j}\frac{\partial\phi}{\partial r_j}\cdot\vec{F}_j-\frac{\partial\phi}{\partial t}=b_i$$

30.03.10

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 07}}$

Требуем, чтобы $m<3N$. (иначе силы не влияют)

$X=(x_1,..,x_{3N})$. (Надо бы требовать $rk\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=m$: нет лишних связей)

$x_j=\frac{1}{\sqrt{m_j}}\vec{N}_j\vec{e}_k$; $\gamma=j+3(k-1)$; $\vec{a}_i=(a_{i1}...a_{i3N})$

$\delta=(\delta_1.....\delta_{3N})$ $\qquad a_j=\frac{1}{\sqrt{m_j}}\frac{\partial\phi_i}{\partial\vec{v}_j}\vec{e}_k$

$\delta=\sqrt{m_j}\,\delta\vec{r}_j\,\vec{e}_k$

Итак, (*) принимает вид: $\overline{a}_i\cdot\overline{X}=b_i$, $i=1....m$

$\vec{X}=\sum x_j\overline{a}_j+\overline{X}_{\perp}$, $\overline{a}_j\cdot\overline{X}_{\perp}=0$ $\forall j$ ← вообще никак не найти.

↑ не покрывают всё пространство.

$$\sum_{j=1}^{m}(\overline{a}_i\cdot\overline{a}_j)x_j=b_i,\quad i=1..m.$$

↑ это т матрица Грама!

$X_{\perp}=0$: идеальные связи. ↙ касат. пр-во

Введём пр-во: $\delta\in T\perp \mathrm{lin}(\overline{a}_1,...,\overline{a}_m)$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\phi_i}{\partial v_j}\delta\vec{r}_j=0.$$ $\forall i$ — такие перемещения точек есть виртуальные перемеще-

ния.

$\overline{X} \cdot \delta = 0 \ \forall \delta \in \mathcal{X}$

$\sum \vec{N_\nu} \delta \vec{r_\nu} = 0$

$\forall (\delta \vec{r_\nu}, \nu = 1 \dots N) \in \mathcal{X}$.

Опр Связи наз-ся идеальными, если сумма работ на любом виртуальном перемещении равна нулю.

Техника получения виртуальных перемещений.

Геометрические связи: $f_j(\vec{r_1}, \dots, \vec{r_N}, t) = 0$.

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r_\nu}} v_\nu + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r_\nu}} \delta \vec{r_\nu} = 0.$$ При фикс. времени

Пример. $x^2 + y^2 = R(t) \Rightarrow 2x\delta x + 2y \delta y = 0$. – ур-я на вирт. перем.

$\sum A_{i\nu} \vec{v_\nu} + B_i = 0$; $A_{ij} = A_{ij}(\vec{r_1}, \dots, \vec{r_N}, t)$

$B_i = B(\vec{r_1}, \dots, \vec{r_N}, t)$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{A}_{i\nu} \delta \vec{r_\nu} = 0$$ (Сервосвязь)

$\vec{v_\nu} = \vec{v_\nu}(\vec{r_1}, \dots, \vec{r_N}, p_1, \dots, p_k, t)$, $k = 3N - m$. (параметрическая зависимость)

$$\delta \vec{r_\nu} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial v_\nu}{\partial p_l} \delta p_l$$ – д-м, что они уд-т нужным уравнениям.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial p_l} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{v_\nu}} \cdot \frac{\partial \vec{v_\nu}}{\partial p_l} = 0 \ \Big| \cdot \delta p_l$$ (произвольные числа)

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \phi_i}{\partial v_\nu} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \vec{v_\nu}}{\partial p_l} \delta p_l}_{\delta r_\nu} = 0 \ ; \ \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \phi_i}{\partial v_\nu} \delta r_\nu = 0.$$

Для геометр. связей $q_1, \dots, q_n$ – можем выбрать ($n = 3N - m$ – минимальное число) лагранжевы координаты.

$\vec{r_\nu} = \vec{r_\nu}(q_1, \dots, q_n, t)$

$f_j(\vec{r_1}(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \vec{r_N}(q_1, \dots, q_n, t)) = 0$.

Тогда ВП: $\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$

- Параметризация: $\begin{cases} x = x(p,t) \\ y = y(p,t) \end{cases}$ $\begin{cases} \delta x = \frac{\partial x}{\partial p}\delta p \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial p}\delta p \end{cases}$

$f(\vec{r}, t) = 0$ – точка лежит на поверхности

$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r}_i = 0.$

Упр. Д-ть, что АТТ – тело с идеальными связями.

Принцип Д'Аламбера – Лагранжа.

"Для того, что бы закон движения удовлетв. ур-ям

идеальных связи и ур-ю Ньютона, $\Leftrightarrow \sum (m_j \vec{W}_j - \vec{F}_j)\delta \vec{r}_j = 0.$

$\forall (\delta \vec{r}_j, j = 1 \dots N) \in \mathcal{T}$"

Мы заменим нахождение реакций исследованием геометрии связей

Д-во Необходимость. $\Rightarrow m_j \vec{W}_j = \vec{F}_j + \vec{N}_j \quad | \cdot \delta \vec{r}_j, \sum$

$\sum (m_j \vec{W}_j - \vec{F}_j)\delta r_j = \sum \vec{N}_j \delta r_j = 0.$

Принцип освобождения от связей.

Достаточность. $\sum \vec{N}_j \cdot \delta \vec{r}_j = 0$

$\sum \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{r}_j} \cdot \delta \vec{r}_j = 0.$

Метод множителей Лагранжа.

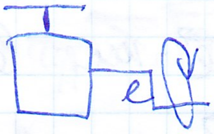
$\sum (\vec{N}_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{r}_j})\delta r_j = 0.$ Подбор λ.

$N_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{r}_j}$

Итак, $\sum (m_j \vec{W}_j - \vec{F}_j)\delta \vec{r}_j = 0 \quad \forall (\delta \vec{r}_j, j = 1, 2, \dots, N)$

$\lambda_i \sum \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{r}_j}\delta \vec{r}_j = 0$; $\sum (m_j \vec{W}_j - \vec{F}_j - \sum \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{r}_j})\delta \vec{r}_j$

$m_j \vec{W}_j - \vec{F}_j - \sum \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec{r}_j} = 0$ Однозначно находим λ_i

Домкрат:  $\varphi = 2\pi$, тарелка поднялась на $2h$. Какую силу надо приложить, что бы поднять авт. весом P?

$\delta h = \frac{\delta\varphi \cdot h}{2\pi}$, $P\delta h - Fl\delta\varphi = 0$

$P\frac{\delta\varphi h}{2\pi} - Fl\delta\varphi = 0 \Rightarrow F = \frac{Ph}{2\pi l}$.

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \# 08}}$

06.04.10

Основные теоремы динамики.

Основные динамические характеристики.

- Количество движения: $\vec{Q} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu$; $\vec{r}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu} \Rightarrow \vec{v}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu}{\underbrace{\sum m_\nu}_{=M}}$

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c$$

($\vec{r}_c$ всегда лежит в вып. оболочке системы)

- Кинетический момент (angular moment): $\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu$

- Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu^2$

① $\exists\ \delta\vec{r}_\nu = \vec{e}\,\delta q$, $\vec{e}$ пост. вектор, $\delta q \neq 0$. (Тогда:) ?

Утв. $\frac{dQ_e}{dt} = \vec{e}\cdot\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)}$, $Q_e = \vec{e}\cdot\vec{Q}$ (e — от external)

Д-во $\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{w}_\nu - \vec{F}_\nu)\,\vec{e}\,\delta q = 0$. (Внутр. силы взаимно уничтож. в силу 3го з. Ньютона.)

$$\frac{dQ_e}{dt} = \vec{e}\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu = \vec{e}\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{e}. \text{ Ч.Т.Д.}$$

Следствие. Интеграл количества движения: если $\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} = 0$, то $\frac{dQ_e}{dt} = 0$, $Q_e = const$, $\vec{v}_c\cdot\vec{e} = const$.

② Теорема об изменении кинет. момента.

Тогда $\exists\ \delta\vec r_\nu = \delta q\, \vec e\times\vec r_\nu$, $\delta q\neq 0$, $|\vec e|=1$, $\vec e$ – пост. вектор

Ут-в. $\frac{dK_e}{dt} = \vec e\cdot\sum_{\nu=1}^N \vec r_\nu\times\vec F_\nu^{(e)}$, $K_e = \vec e\cdot\vec K$

Д-во. $\delta q\sum_{\nu=1}^N m_\nu(\vec W_\nu - \vec F_\nu)(\vec e\times\vec r_\nu) = \delta q\,\vec e\sum m_\nu(\vec r_\nu\times\vec W_\nu) - \sum \vec r_\nu \vec F_\nu =$

$\left(\vec r_\nu\times\frac{d\vec v_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec r_\nu\times\vec v_\nu)\right)$ $\quad = \delta q\left[\vec e\cdot\frac{d\vec K}{dt} - \vec e\cdot\sum(\vec r_\nu\times\vec F_\nu^{(e)})\right] = 0$

(в силу произв. δq) Ч.Т.Д.

Замечание. Если таких напр. два, то спр. для каждого.

Скорость ц.м. $=0$. Все вокруг него вращается

Упр. Довести до конца!

однородное кольцо.

③ Теорема об изменении кинетической энергии

$\{\vec v_\nu\, dt,\ \nu=1\ldots N\}\in T$

Ут-в. $\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec F_\nu\cdot\vec v_\nu$ — мощность сил. (всех, не только внешних)

Д-во. $\sum m_\nu \vec W_\nu\cdot\vec v_\nu\, dt - \sum \vec F_\nu\vec v_\nu\, dt = 0$. ЧТД

Вообще, если сущ. силовая ф-я U: $\vec F_\nu = \frac{\partial U}{\partial \vec r_\nu}$, то

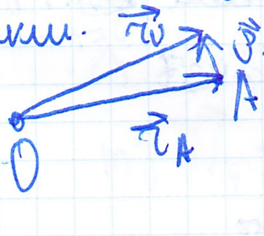
$$\frac{dT}{dt} = \sum \vec F_\nu\cdot\frac{d\vec r_\nu}{dt} = \sum\frac{\partial U}{\partial\vec r_\nu}\cdot\frac{d\vec r_\nu}{dt} = \frac{dU}{dt} \Rightarrow T-U=h$$

интеграл энергии.

$V=-U$: потенциальная энергия,

$T>0 \Rightarrow h-V>0$ (область существования движения)

Хотим записать кин. момент относит. подвижной точки.



$$K_0 = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec r_\nu\times\vec v_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu(\vec r_A+\vec\rho_\nu)\times\vec v_\nu$$

$$= \vec r_A\times\vec Q + \vec K_A;\quad \frac{dK_0}{dt} = \vec v_A\times\vec Q + \vec r_A\times\frac{d\vec Q}{dt} + \frac{d\vec K_A}{dt}$$

$\sum \vec{e_\nu} \times \vec{F_\nu}^e + \vec{r}_A \sum \vec{F_\nu}$; $\frac{d\vec{K_A}}{dt} + \vec{v_A} \times \vec{Q} = \sum \vec{e_\nu} \times \vec{F_\nu}^{(e)}$

Динамические характеристики АТТ.

$\omega \times \vec{r_2}$

$\omega \times \vec{r_1}$

$\omega(\vec{r_1} - \vec{r_2})$ ← мало.

Всегда можно свести к интегралам.

$\vec{v_\nu} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{r_\nu}$

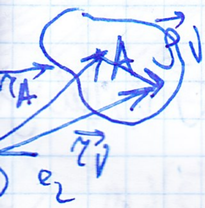
$\bar{Q} = \sum m_\nu \vec{v_\nu} = \sum m_\nu \vec{v_A} + \sum m_\nu \omega \times \vec{r_\nu} =$

$= M \vec{v_A} + M \vec{\omega} \times \vec{r_c} = M(\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{r_c})$

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#09}}$

13.04.10

$\vec{v_\nu} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho_\nu}$



1. Кинет. момент относительно O: $\vec{K_0} =$

$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{r_\nu} \times \vec{v_\nu}) = \sum m_\nu (\vec{r_A} + \vec{\rho_\nu}) \times (\vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho_\nu}) =$

(в непр. $\int \ldots dm$)

$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r_A} \times \vec{v_A} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{\rho_\nu} \times \vec{v_A} +$

$M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$

$+ \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r_A} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho_\nu}) + \sum m_\nu \vec{\rho_\nu} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho_\nu}) =$

$= \underline{M \left[\vec{r_A} + \frac{1}{M} \sum m_\nu \vec{\rho_\nu}\right] \times \vec{v_A} + \vec{r_A} \times \left(\vec{\omega} \times \sum m_\nu \vec{\rho_\nu}\right)} + \vec{K_A}$

это сводится к ЦМ и потому неинтересно

Изучаем $\vec{K_A} = \sum m_\nu \vec{\rho_\nu} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho_\nu}) \doteq \underset{J\vec{\omega}}{\text{этот}}$ оператор что-то делает, запишем на единичных векторах:

$J e_1 = \sum J_{\gamma 1} \vec{e_\gamma}$; $J_{11} = \vec{e_1} \sum m_\nu \vec{\rho_\nu} \times (\vec{e_1} \times \vec{\rho_\nu}) =$

$= \vec{e_1} \sum m_\nu [\vec{e_1} \rho_\nu^2 - \vec{\rho_\nu} (\vec{\rho_\nu} \cdot \vec{e_1})] = \sum m_\nu [\rho_\nu^2 - (\vec{\rho_\nu} \cdot \vec{e_1})]^2 =$

$= \sum m_\nu (\rho_{\nu_2}^2 + \rho_{\nu_3}^2)$, где вместо $2 = e$, вместо $3 = m$, $e \neq i$, $m \neq v$,

получаем матрицу: $J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$

Аналогично, $J_{ij} = -\sum m_\nu (\vec{e}_i \cdot \vec{\rho}_\nu)(\vec{e}_j \cdot \vec{\rho}_\nu) \Rightarrow$

$\Rightarrow J_{ij} = J_{ji}$ – центробежные моменты инерции.

J – оператор инерции.

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{21} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

Тензор это или не тензор?

Кинетическая энергия.

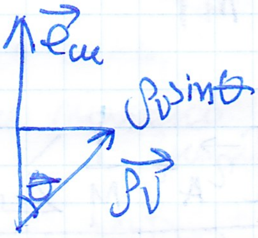
$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu [\vec{v}_A + (\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu)]^2 = \frac{1}{2}\sum m_\nu v_A^2 + \vec{v}_A \cdot \sum m_\nu (\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu) +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_\nu (\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu)^2}_{T_A}; \quad T_A = \frac{1}{2}\sum m_\nu (\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega} \underbrace{\sum m_\nu \vec{\rho}_\nu (\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\nu)}_{K_A} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot J\vec{\omega} \leftarrow \text{инвариант!}$$

J – тензор инерции $2^{го}$ ранга.

$$T_A = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}_\nu)^2$$



$J_e = \sum m_\nu (\vec{e}\times\vec{\rho}_\nu)$; $J_e = \vec{e}\,(J\vec{e})$

$\vec{r} = \vec{e}/\sqrt{J_e}$ (на практике J_e – не ноль)

$1 = \vec{r}(J\vec{r})$ – мы получили эллипсоид (единственные для тела)

↑ эллипсоид инерции

Р-м $\vec{r}\cdot(J\vec{r}) = f(\vec{r})$

1. $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 2J\vec{r}$ (нормаль к эллипсоиду)

$J\vec{r} = \lambda\vec{r}$, $|J - \lambda E| = 0$, а J – симметричная полож. опр.

⇓

Все λ – действительны

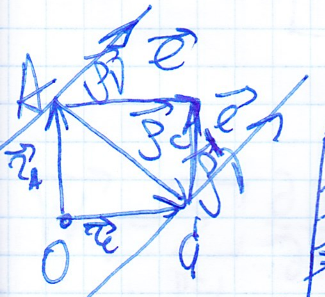
1. $\lambda_1 \ne \lambda_2, \lambda_2 \ne \lambda_3, \lambda_1 \ne \lambda_3 \Rightarrow$ имеем 3 собств. в-ра, и они вз. перпенд. вектора. $A r_1^2 + B r_1^2 + C r_3^2 = 1$

A, B, C – глав. моменты инерции

2) $\lambda_1 = \lambda_2 \ne \lambda_3$: $A r_1^2 + A r_2^2 + C r_3^2 = 1$ эллипсоид вращения.

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Сфера.

Т. Г-Ш.



← как связаны моменты инерции?

$$\cancel{J^A_e = \sum (m_\nu \vec\rho_\nu \times (\vec e \times \vec\rho_\nu)) = \vec e \sum m_\nu (\vec\rho_c + \vec\rho'_\nu) \times [\vec e \times (\vec\rho_c + \vec\rho'_\nu)] = \vec e \sum m_\nu \vec e (\vec\rho_c + \vec\rho'_\nu)^2}$$

$$J^A_e = \sum m_\nu [\vec e \times (\vec\rho_c + \vec\rho'_\nu)]^2 = \sum m_\nu (\vec e \times \vec\rho_c)^2 + \cancel{2 \sum m_\nu (\vec e \times \vec\rho_c)(\vec e \times \vec\rho'_\nu)} + J^C_e$$

ибо центр масс...

Получаем т. Гюйгенса-Штейнера: $J^A_e = M(\vec e \times \vec\rho_c)^2 + J^C_e = J^C_e + Md^2$, где d^2 – расстояние между осями.

авные (центральные)

и инерции.

***

Д'Аламбер-Лагранж: $\sum (m_\nu \vec W_\nu - F_\nu)\delta \vec r_\nu = 0 \quad \forall \{\delta r_\nu\}$

$\phi_i(\vec r_1, \ldots, \vec r_N, \vec v_1, \ldots, \vec v_N, t) = 0$, $i = \overline{1, N}$

В системе возникают реальные ускорения $W_\nu^{(r)}$, $\nu = 1 \ldots N$.

$$\sum \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec r_\nu} \dot{\vec r}_\nu + \sum \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec r_\nu} + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = 0.$$

$$\sum \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec v_\nu} (W_\nu - W_\nu^{(r)}) = 0. \; ; \sum \frac{\partial \phi_i}{\partial \vec v_\nu} \delta \vec r_\nu = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec W_\nu^{(r)} - \vec W_\nu(F))(\vec W_\nu - \vec W_\nu^{(r)}) = 0.$$

$$(\vec W^r - \vec W^F)(\vec W_\nu - \vec W^r_\nu) = \vec W^r \vec W_\nu - \vec W^F \vec W_\nu - (W^r)^2 + \vec W^F \frac{W^2}{\ldots} =$$

$$= -\frac{1}{2}(W_\nu^r)^2 + W^F W^r - (W^F)^2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(W^F)^2 - W^F W + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}W^2$$

$$+ W^r W - \frac{1}{2}(W^r)^2 = -\frac{1}{2}(W^r - W^F)^2 + \frac{1}{2}(W^F - W)^2 - \frac{1}{2}(W - W^r)^2$$

(A) $$\frac{1}{2}\sum m_\nu (w_\nu - w_\nu^F)^2 = \frac{1}{2}\sum m_\nu (w_\nu^r - w_\nu^F)^2 + \frac{1}{2}\sum m_\nu (\vec w_\nu^r - \vec w_\nu)^2$$

(Принцип наименьших квадратов)

(A) - принуждение по Гауссу. (принцип Гаусса)

$$\{\vec W_\nu^r, \nu = 1, \dots, N\} = \underset{W_\nu, \nu = 1, \dots, N}{\arg\min} A$$

20.04.10

ЛЕКЦИЯ #10

Теоремы Кёнига.

Оси Кёнига - оси, т.ч. начало в центре масс системы, и они движутся поступательно.

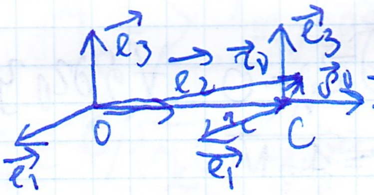
$\vec K^*$ - кинетический момент относит. осей Кёнига.

T^* - кин. энергия относительно осей Кёнига.

$$\vec Q = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec v_\nu = M\vec v_c; \quad 1.\ \vec K_0 = M\vec r_c \times \vec v_c + \vec K^*$$

$$2.\ T = \frac{mv_c^2}{2} + T^*$$

Д-во. $\vec r_\nu = \vec\rho_\nu + \vec r_c$; $\vec v_\nu = \vec v_\nu^* + \vec v_c$



$$1)\ K_0 = \sum m_\nu \vec r_\nu \times \vec v_\nu = \sum(\vec\rho_\nu + \vec r_c)\times m_\nu(\vec v_\nu^* + \vec v_c) = \underbrace{\sum \vec\rho_\nu \times m_\nu \vec v_\nu^*}_{\vec K^*} +$$

$$+ \cancel{\sum \vec\rho_\nu m_\nu \times \vec v_c} + \sum m_\nu \vec r_c \times \vec v_c + \vec r_c \times \cancel{\left(\sum m_\nu v_\nu^*\right)}$$

2) Аналогично для кин. энергии.

$$T = \frac{1}{2}\sum m_\nu(\vec v^* + \vec v_c)^2 = \frac{1}{2}\sum m_\nu (v_\nu^*)^2 +$$

$$+ \sum m_\nu v^* v_c + \frac{1}{2}\sum m_\nu v_c^2. \quad \text{Ч.Т.Д.}$$

Пример:  (обруч) $\omega = \frac{v}{R}$ $\quad T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} = Mv^2$

Вернемся к принципу Гаусса. Выведем еще более общие ур-я динамики.

$A=\sum m_\nu (\vec W_\nu - \vec W_\nu^F)^2 \longrightarrow \min$; $W_\nu^F = \dfrac{\vec F_\nu}{m_\nu}$

$\varphi_i(\vec r_1 \dots \vec r_N, \vec v_1 \dots \vec v_N, t)=0$, $i=1..m<3N$

$\vec v_\nu = \vec v(\vec r_1,\dots,\vec r_N, \xi_1,\dots,\xi_k, t)$ (ξ_i: если подставить, (квазискорость)

$\varphi_i(\vec r_1 .. \vec r_N, v_1(\vec r_1 .. \vec r_N, \xi_1 \dots \xi_k, t), \dots, \vec v_N(\vec r_1, \dots, \vec r_N, \xi_1, \dots, \xi_k, t)) \equiv 0$
$i=1..m$

$$\vec W_\nu = \sum_{p=1}^{k} \frac{\partial v_\nu}{\partial \xi_p}\dot\xi_p + \sum \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial r_\mu}\vec v_\mu + \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial t}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_\nu \vec W_\nu^2}_{S} - \sum \vec F_\nu \vec W_\nu + \underbrace{\dots\dots}$$

S ф-я Аппеля (энергия ускорения) от ускорений не зависит.
Сила от ускорений зависеть не может!

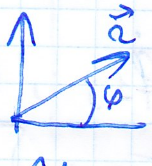
$$\frac{\partial A}{\partial \dot\xi_p} = \frac{\partial S}{\partial \dot\xi_p} - \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial W_\nu}{\partial \dot\xi_p} = 0.$$

(Уравнение Аппеля) (Самые общие ур-я динамики)

$$\frac{\partial S}{\partial \dot\xi_p} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial \xi_p} = Q_p$$

+ кинематические уравнения.

Пример.



$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot\varphi$; $\dot\varphi = \dfrac{2\sigma}{r^2}$

Уравнения Лагранжа 2го рода.

1. Связи голономные и идеальные. ($f_i(\vec r_1, \dots, \vec r_N, t) = 0$ — только такие связи!)
2. $\vec r_\nu = \vec r_\nu(q_1, \dots, q_n, t)$, $q_1 \dots q_n$ — лагранжевы координаты
$n = 3N - m$

$f_i(\vec r_1(q_1 .. q_n, t), \vec r_N(q_1 .. q_n, t), t) \equiv 0 \ \forall q_1, \dots q_n$.

$$\vec v_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial t} \longrightarrow \vec W_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i}\ddot q_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec r_\nu}{\partial q_i \partial q_j}\dot q_i \dot q_j + \sum \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i \partial t} \cdot \dot q_i + \frac{\partial \vec r_\nu}{\dots}$$

Аналогично, $\delta \vec{r}_\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i$

$$\sum (m_\nu \vec{W}_\nu - \vec{F}_\nu) \delta \vec{r}_\nu = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\nu=1}^{N} (m_\nu \vec{W}_\nu - \vec{F}_\nu) \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 \quad \forall \delta q_i, \ i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow [\dots] = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{W}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q} = Q.$$

$$\frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right] - \vec{v}_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_i} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_\nu^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2} v_\nu^2 \right)$$

Получаем уравнение $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = \sum \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$

Лагранжа 2$^{\text{го}}$ рода:

Лагранжев формализм.

1. Выбрать лагранжевы координаты.
2. Записать выражение для T через $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$.
3. Составить выражение для виртуальной работы:

$$A = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

4. Выполнить в указ. порядке опер. дифференцирования.

А что, если силы потенциальны, т.е. $\exists\, U(r_1, \dots, r_\nu)$

$$F_\nu = \frac{\partial U}{\partial r_\nu} \ ? \quad \sum F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} + Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad L = T + U \text{ — ф-я Лагранжа.}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\right)}_{a_{ij}}\dot{q}_i\dot{q}_j+$$

$$\sum_i\underbrace{\sum m_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}}\dot{q}_i+\frac{1}{2}\sum m_\nu\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$$

Итак, $T=T_2+T_1+T_0$, b_i; $T_2=\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$; $T_1=\sum_i b_i\dot{q}_i$;

$T_0=\frac{1}{2}\sum m_\nu\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}\right)^2$. Если $\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t}=0$, то $T_1=T_0=0$

Значит, $L=L_2+L_1+L_0$, $L_0=T_0+U$. $(L_2=T_2,\ L_1=T_1)$

+в. Наша ЗК решается хорошо.
Д-во

$$\frac{d}{dt}\left(\sum a_{ij}\dot{q}_j+b_i\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i$$

$\sum a_{ij}\ddot{q}_j+\dots=Q_i$ — если можно разрешить относит. $\ddot{q}_j$, то мы не противоречим принципу детерминированности.

Т.е. надо д-ть, что T_2 — положит. опр. квадр. форма.

$$J=\begin{bmatrix}\sqrt{m_1}\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial q_1} & \dots & \sqrt{m_N}\frac{\partial\vec{r}_N}{\partial q_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \sqrt{m_1}\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial q_n} & \dots & \sqrt{m_N}\frac{\partial\vec{r}_N}{\partial q_n}\end{bmatrix}$$

Столбцы линейно независимы, если мы действительно взяли 3N-т.

$A=J^TJ$ (Матр. Грама, по-сути). $\Rightarrow A$ — хорошая. ЧТД

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=Q_i\ \Big|\cdot\dot{q}_i,\ \sum$$

$$\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_i-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i=\sum Q_i\dot{q}_i$$

$$\left(\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i=\sum Q_i\dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right) = \underbrace{\sum Q_i \dot q_i}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0}$$

Пусть С гироскопические силы.

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i = 2L_2 + L_1.$$

<u>Теорема</u> Если $\sum Q_i \dot q_i = 0$, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то

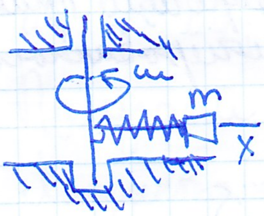
(Обобщ. интеграл энергии Якоби) $L_2 - L_0 = const$ на траекториях.

27.02.10

ЛЕКЦИЯ #11

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i\ ;\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0;\ \sum Q_i \dot q_i = 0$$

$L_2 - L_0 = h.$ Пример.



$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot x^2 + \omega^2 x^2\right]$$

Силовая функция: $V = -\frac{c}{2}(x - x_0)^2$

c — жесткость пружинки.

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot x^2 + \omega^2 x^2\right) - \frac{c}{2}(x - x_0)^2\ ;\ L_2 = \frac{1}{2}m\dot x^2$$

$$L_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{c}{2}(x - x_0)^2$$

$$L_2 - L_0 = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot x^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{} + \frac{c}{2}(x - x_0)^2 = h$$

Неявная зависимость от времени!

$$\vec F_\nu = -m(\vec\omega \times \vec v_r)\ ;\ \vec v_r = \sum \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i}\dot q_i$$

$$Q_i = \cancel{-\sum(\vec\omega \times \vec v)} - \sum(m\vec\omega \times \vec v_{i\nu})\frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i}$$

$$\sum Q_i \dot q_i = -\sum m\vec\omega \times \vec v_{i\nu}\sum \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i}\dot q_i = 0.$$

<u>Циклические координаты.</u>

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, q_i — циклическая к-та

Пусть $Q_i = 0$. Имеем циклический интеграл: $\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \beta_i$

понижаем порядок системы от на два порядка.

примеры. 1) $\partial \vec r_\nu = q \cdot \vec e$ $(\exists \delta \vec r_\nu = \dots)$, $\nu = 1 \dots N$

выберем как лагранжеву к-ту.

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \sum m_\nu \vec v_\nu \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial q} = \sum m_\nu \vec v_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec r}{\partial q} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q} = \sum m_\nu \vec v_\nu \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial \dot q} = \sum m_\nu \vec v_\nu \frac{\partial \vec r_\nu}{\partial q_i} = \vec e \sum m_\nu \vec v_\nu = Q_L$$

$$\delta \vec r_\nu = \delta q (\vec e \times \vec r_\nu) \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \sum m_\nu \vec v_\nu \cdot \frac{\partial \vec v_\nu}{\partial q} =$$

$$= \sum m_\nu \vec v_\nu \cancel{(\vec e \times \vec v_\nu)} \frac{d}{dt}(\vec e \times \vec r_\nu) = 0.$$ (Кандидат на циклическую координату)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q} = \sum m_\nu \vec v_\nu (\vec e \times \vec r_\nu) = \vec e \sum m_\nu (\vec r_\nu \times \vec v_\nu)$$

Метод Рауса игнорирования цикл к-т.

$q_1 \dots q_k$ – позиционные к-ты

$q_{k+1} \dots q_n$ – циклические.

$\frac{\partial L}{\partial q_\mu} = 0$, $\mu = k+1, \dots, n$. Для простоты, $Q_i = 0$, $i = 1 \dots n$.

$$R = -\sum_{\mu=k+1}^{n} \beta_\mu \dot q_\mu + L.$$ Р-и ур-я $\frac{\partial L}{\partial \dot q_\mu} = \beta_\mu \Rightarrow$

$$\dot q_\mu = \dot q_\mu (q_1 \dots q_k, \dot q_1, \dots, \dot q_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n, t)$$

Подставляя в R, имеем: $R = R(q_1 \dots q_k, \dot q_1, \dots, \dot q_k, \beta_{k+1} \dots \beta_n, t)$. Ф-я Раусa

$$dR = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial \dot q_i} d\dot q_i + \sum_{\mu=k+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \beta_\mu} d\beta_\mu + \frac{\partial R}{\partial t} dt$$

$$dR = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i + \cancel{\sum_{k+1} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\mu} d\dot q_\mu} + \frac{\partial L}{\partial t} - \cancel{\sum \beta_\mu d\dot q_\mu} - \sum \dot q_\mu d\beta_\mu$$

$i=1\dots k$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i};\quad \frac{\partial R}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i};\quad \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t},\quad \dot q_\nu = -\frac{\partial R}{\partial \beta_\nu}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = Q_i,\quad i=1\dots k$$

и — система независимо интегрируется

Находим циклические к-ты: $\dot q_\nu = -\frac{\partial R}{\partial \beta_\nu}$

$$q_\nu = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial R}{\partial \beta_\nu}\,dt + q_\nu(t_0)$$

Движение лагранжевой системы вблизи положения равновесия.

Пусть V имеет ~~минимум~~ максимум в $q_1,\dots,q_n=0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_i} \neq 0 \text{ при } \|q\|<\delta & \text{(изолированный минимум)} \\ \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q=0} = 0 \end{cases}$$

Теорема (Лагранжа о устойч.) Если при $q_1=0,\dots,q_n=0$ V имеет изолир. макс, и система консервативна и склерономна (т.е. связи не зав. явно от времени), то это положение устойчиво по Ляпунову

Д-во. $H = T - V$ ← ибо с т.ч. констан.

↑ кв. форма от скоростей

$H_0 = 0$

$H > 0,\ \|\dot q\ q\| \neq 0$

а кому оно нужно?

$H = h$, $\frac{d}{dt}H = 0 \Rightarrow H$ — ф-я Ляпунова. Ч.Т.Д.

Линеаризация.

$$V = \cancel{V_0} + \sum \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2}\sum \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}}_{b_{ij}} q_i q_j + \dots$$

$B = (b_{ij})$, $B = B^T$, $B \leq 0$. $\qquad A = A^T > 0$.

$$V = \frac{1}{2}\sum b_{ij} q_i q_j;\quad T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot q_i \dot q_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j \quad \text{(уравнение Лагранжа)}$$

$\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$

$A\ddot{\bar{q}} = B\bar{q}$ Р-м оператор $\ddot{\bar{q}} = \underline{A^{-1}B\bar{q}}$

это о-самосопр. $\Rightarrow$ все $\lambda \in \mathbb{R}$.

хорошо бы попасть на соб. зн. ? $|A^{-1}B - \lambda E| = 0$

Теорема. 1) Все $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

2) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — расп. с учётом кратн., и каждому λ соотв. собств. в-р., и все в-ра взаимно $\perp$ по метрике A.

Д-во

$A^{-1}Bv_1 = \lambda_1 v_1$ $Bv_1 = \lambda_1 Av_1$ | $\cdot v_2^T$

$A^{-1}Bv_2 = \lambda_2 v_2$ $Bv_2 = \lambda_2 Bv_2$ | $\cdot v_1^T$ и вычтем:

$(\lambda_1 - \lambda_2)\underbrace{v_2^T A v_1}_{=0} = 0$. Ч.Т.Д.

$\Rightarrow v_1 \perp v_2$.

$\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{v}_i$, v_i — собств. в-ра. $\sum_{i=1}^{n} \ddot{\xi}_i \bar{v}_i = \sum \lambda_i \xi_i \bar{v}_i$

И — распадение на независим. ур-е: $\ddot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i$, $i = 1, \dots, n$.

Случаи: 1) $\lambda_i = -\omega_i^2 < 0$; $\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$

$\xi_i = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$

2) $\lambda_i = 0$. $\xi_i = c_1 t + c_2$

3) $\lambda_i = \omega_i^2 > 0$ $\xi_i = c_1 \operatorname{ch}\omega t + c_2 \operatorname{sh}\omega t$.

$|A| \cdot |A^{-1}B - \lambda E| = 0 \Rightarrow |B - \lambda A| = 0$. (уравнение Сильвестра)

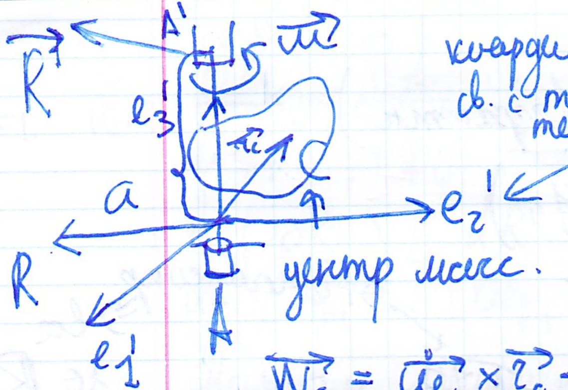
$(B - \lambda A)\bar{v} = 0$.

$\bar{q} = \sum \xi_i v_i$; $\ddot{\xi}_i = \lambda \xi_i$ и подставляем.

ЛЕКЦИЯ # 12

04.05.10

Движение тв. тела вокруг неподв. оси.



$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$; $\vec\omega = \omega \vec e_3' = (0,0,\omega)^T$

$\dot{\vec\omega} = \dot\omega \vec e_3$

$\vec Q = m\vec v_c$; $\dot{\vec Q} = m\vec W_c$

$$\vec W_c = \dot{\vec\omega}\times\vec r_c + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r_c)$$

$$\dot{\vec\omega}\times\vec r_c = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot\omega \\ r_1 & r_2 & r_{c_3} \end{bmatrix} = -r_{c_2}\dot\omega\,\vec e_1' + r_1\dot\omega\,\vec e_2' + 0\cdot\vec e_3' \ \ominus$$

$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r_c) = -r_{c_1}\omega^2\vec e_1' - r_2\omega^2\vec e_2' + 0\vec e_3'$$

$$\ominus\begin{cases} -r_{c_2}\dot\omega - r_{c_2}\omega^2 = F_1' + R_1 + R_1' \\ r_{c_1}\dot\omega - r_{c_2}\omega^2 = F_2' + R_2 + R_2' \\ 0 = F_3 + \underline{R_3 + R_3'} \end{cases}$$

по отдельности мы их ~~хот~~ не узнаем...

$\vec K = J\vec\omega = (J_{13}\omega, J_{23}\omega, J_{33}\omega)$ | $\vec\omega\times\vec K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \\ J_{13}\omega & J_{23}\omega & J_{33} \end{bmatrix}$

$$\frac{d\vec K}{dt} + \vec\omega\times\vec K = \vec M + \underset{a\vec e_3'}{\vec a}\times\vec R'$$

$$\begin{cases} J_{13}\dot\omega - \omega^2 J_{23} = M_1 - aR_2' \\ J_{23}\dot\omega + J_{13}\omega^2 = M_2 + aR_1' \\ J_{33}\dot\omega + 0 = -M_3 \end{cases}$$

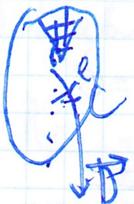
Хотим мы минимизировать реакции (надёжность!)

Требуем $J_{13} = J_{23} = 0 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$ третья ось — главная ось инерции.

$R_{C_1} = R_{C_2} = 0 \Rightarrow$ ЦМ на Оси.

Физ. маятник – тв. тело, к-е под действием силы тяжести дв. в гр. оси.

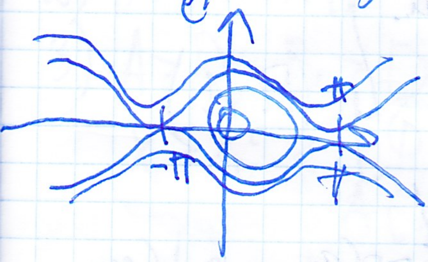
Физический маятник.



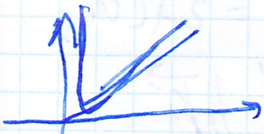
$\vec{P}=m\vec{g}$; $J_{33}\ddot{\alpha} = -lmg\sin\alpha$ (плечо рычага)

Введем $J_{33} = k^2 m$ — радиус инерции

$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l'}\sin\alpha\right) = 0$; $l' = k^2/l$ $\quad l_1 > l$



По т. Гюйгенса-Штейнера, если ρ — центральный момент ин., $k^2 = \rho^2 + l^2$; $l' = \frac{\rho^2}{l} + l$.



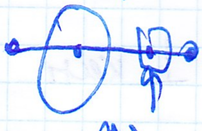
~~$l'-l$~~

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$ (малые колебания)

$l'' = \frac{\rho^2}{l'-l} + l' - l$ (привед. длина)

$T = 2\pi\sqrt{l'/g}$; $g = \frac{T^2}{4\pi^2 l'}$

Подвешиваем, качаем. Находим T, T'; если все хорошо, ~~так~~ $T = T'$, и есть l'. Находим g :)



J'_{33} известно

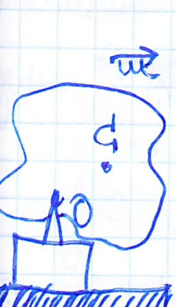
$\omega^2 = \frac{g l m}{J_{33}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{33}}{glm}}$; $J_{33} = \frac{(4\pi^2)T^2}{glm}$

$J_{33} + J'_{33} = \frac{g l_1 (m+m_1) T_1^2}{4\pi^2}$

$ml + 0m_1 = l(m_1+m)$ $\quad l_1 = \frac{ml}{m_1+m}$

$\frac{J_{33}+J'_{33}}{J_{33}} = \frac{T_1^2}{T^2}$

Движение тяжелого твердого тела.



$\vec{K}_0$, $m\vec{v}_c = \vec{Q}$; $m\vec{W}_c = m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)) = \vec{F} + \vec{R}$

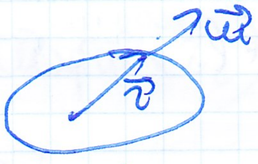
$\frac{d\vec{K}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_0 = \vec{M}$ — момент внешних сил (динам. ур-е Эйлера)

Пусть $\vec{M} = 0$; (случай Эйлера) $\quad \frac{d\vec{K}_0}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_0 = 0$

A, B, C – главные моменты инерции

$\vec{K_0} = A\omega_1\vec{e}_1' + B\omega_2\vec{e}_2' + C\omega_3\vec{e}_3'$; $\begin{cases} A\dot\omega_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 = 0 \\ B\dot\omega_2 + (A-C)\omega_1\omega_3 = 0 \\ C\dot\omega_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} Ar_1^2 + Br_2^2 + Cr_3^2 = 1 \text{ – эллипсоид инерции.} \\ A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2h \text{ (кинет. энергия)} \\ A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = \gamma^2 \text{ (П. И.)} \end{array}\right\}$ (П. И.)



$\frac{\partial f}{\partial r_1} = 2Ar_1 = 2\lambda A\omega_1$; $\frac{\partial f}{\partial r_2} = 2Br_2 = 2\lambda B\omega_2$; $\frac{\partial f}{\partial r_3} = 2Cr_3 = 2\lambda C\omega_3$

$\vec r = \lambda\vec\omega$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \vec r} \parallel \vec K_0$

$\frac{\vec K_0 \cdot \vec r}{\gamma} = \frac{A\omega_1 r_1 + B\omega_2 r_2 + C\omega_3 r_3}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = \cancel{\frac{\lambda 2h}{\gamma}}$

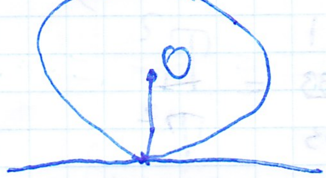
$\lambda^2(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = 1$; $\lambda^2 = 1/2h$

$\frac{\vec K_0 \cdot \vec r}{\gamma} = \sqrt{2h}/\gamma$ – расстояние до пл-ти, ⊥ кин моменту, постоянно.

Тело перекатывается по пл-ти.

11.05.10

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ \#13}}$



$\vec r = \lambda\vec\omega$; $\lambda = 1/\sqrt{2h}$; $d = \frac{\sqrt{2h}}{\gamma}$

$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = \gamma^2 = \text{const}$.

$\frac{1}{\lambda^2}(A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2) = \gamma^2$

$A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2x_3^2 = \frac{\gamma^2}{2h} = D = 1/d^2$

$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = 1 \quad |\cdot D$

$A(A-D)x_1^2 + B(B-D)x_2^2 + C(C-D)x_3^2 = 0$ – это конус! (ур-е подвижного аксоида)

Считаем, что $A > B > C$.

1) Возьмём $B<D$, $C<D$: $x_2^2+x_3^2 \le \frac{A(A-D)}{B(D-C)} x_1^2$

Получим конус Эйлера, крутящийся вокруг наименьшей из осей инерции.

2) $B=D$; $A(A-D)x_1^2 = C(D-C)x_3^2$; $x_1 = \pm\sqrt{\frac{C(D-C)}{A(A-D)}}\, x_3$

3) $A>D$, $B>D$, $C<D$.

$x_1^2+x_2^2 < \frac{C(D-C)}{A(A-D)} x_3^2$

Симметрия, получим кривые – полодии / не ду

уд. → 

Регулярная прецессия в сл. Эйлера.

$A=B\ne C$; $\vec{K} = (A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3)$ $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$

$\vec{K} - A\vec{\omega} = (0,0,(C-A)\omega_3) = (C-A)\omega_3\vec{e}_3'$

Выпишем динам. ур-я Эйлера: $C\dot\omega_3 - (B-A)\omega_1\omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_3=\omega_{30}=const$

$\vec{\omega} = \frac{\vec{K}}{A} + (1-C/A)\,\omega_{30}\,\vec{e}_3'$; $A\omega_1^2+A\omega_2^2+A\omega_3^2+(C-A)\omega_3^2 = 2h$

$\Downarrow$ $\omega = const$ $\quad \vec{K}, \vec{\omega}, \vec{e}_3' \Rightarrow \theta = const$

$\gamma = const$

Случай Лагранжа

Положим $A=B$, $\vec{r}_C = l\vec{e}_3'$, $\vec{P}=m\vec{g}$

Интегралы энергии: 1) $T-U=h$; 3) $c\,K\vec{k}_3' = 0$

2) $K_\gamma = 0$

Вспомним ур-ния Эйлера:
$$\begin{cases}\omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi\\ \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi\\ \omega_3 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\end{cases}$$
Кинематические ур. Эйлера.

$L = \frac{1}{2}\left(A(\dot\psi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)+C\omega_3^2\right) - mgl\cos\theta$ (Лагранжиан)

L не зав. от ψ и φ; $\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = A\dot\psi\sin^2\theta + C\omega_3\cos\theta = \ell A$

$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = C\omega_3 = C\omega_{30}$

$b = \frac{C\omega_3}{A}$

$\dot\psi = (\beta - b\cos\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}$

$\frac{1}{2}\left[A\left(\frac{(\beta - b\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \dot\theta^2\right) + C\omega_3^2 + 2mg\xi\cos\theta = h\right]$

$\alpha - a\cos\theta$

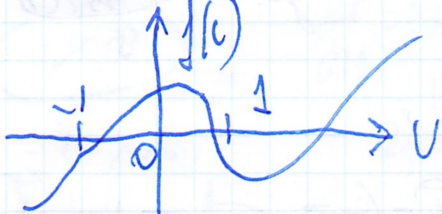
$\alpha = \frac{h - C\omega_3^2}{A}$

$a = \frac{mg\xi}{A}$

$\dot\theta^2\sin^2\theta = \left(\frac{h - C\omega_3^2}{A} - \frac{2mg\xi}{A}\cos\theta\right) - \frac{(\beta - b\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

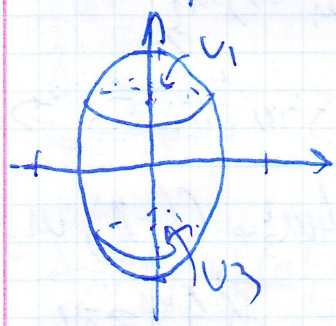
$v = \cos\theta;\quad \dot v^2 = f(v),$ ~~$f(v) = (\alpha - a v)(\ldots f(v) = \ldots$~~

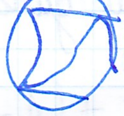
$f(v) = (\alpha - av)(1 - v^2) - (\beta - bv)^2;\quad f(v) \geq 0$ — условие существ. решения.



Нас интересует случай трех действительных корней

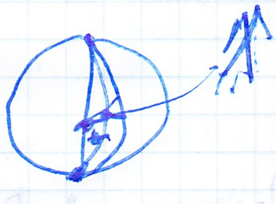
$\dot\psi = \frac{\beta - b\cos\theta}{\sin^2\theta};\quad \dot\psi = \frac{v^* - v}{1 - v^2};\quad v^* = \beta/b$



Три случая движения. 1) 

2) $\alpha - av^* = 0;\ \alpha = av^*$

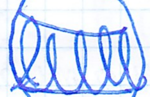
$f(v^*) = 0 \Rightarrow \alpha = av^*$

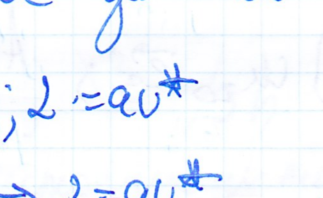


$f(v) = a(v^* - v)(1 - v^2) - b^2(v^* - v)^2;$

$f(v) = (v^* - v)\left[a(1 - v^2) - b(v^* - v)\right],\quad v^* > v$

$\operatorname{tg}\chi = \frac{d\psi\sin\theta}{d\theta} = \frac{\dot\psi\sin\theta}{\dot\theta} = \frac{(v^* - v)}{\sin\theta\sqrt{f(v)}} = \frac{v^* - v}{v} = \frac{v^* - v}{\sqrt{f(v)}}$

3) 

Регулярная прецессия. 

Нужно. $f(v) = 0$, $f'(v) = 0$.

Псевдорегулярная прецессия (быстро, быстро закрученный волчок)

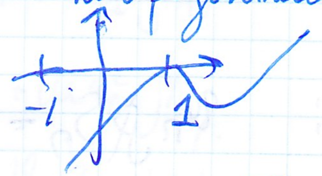
$f(v) = (v^* - v)\left[a(1 - v^2) - b^2(v^* - v)\right]$

Сблизим корни... получим 2 ч.

$v^* - v = \frac{a}{b^2}(1 - v^2) = \frac{a(1 - v^2)A}{C^2\omega_3^2}$

Волчок будет как бы по горизонтали он гудит.

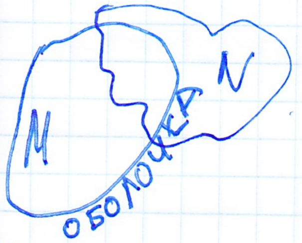
3) "Спящий волчок":



18.05.10

$\boxed{\text{ЛЕКЦИЯ } \#14}$

Движение систем переменного состава.



$t+\Delta t$ ← Система как-то переместилась! Применим теорему об изменении количества движения

t

$$\Delta \vec{Q}_M = \Delta \vec{Q}_N + \underset{\text{пришло}}{\Delta \vec{Q}_п} - \underset{\text{ушло}}{\Delta \vec{Q}_у}$$

$$\frac{\Delta \vec{Q}_M}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{Q}_N}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{Q}_п}{\Delta t} - \frac{\Delta \vec{Q}_у}{\Delta t}$$

Пусть $\exists\ \vec{F}_п = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{Q}_п}{\Delta t}$, $\vec{F}_у = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{Q}_у}{\Delta t}$;

$$\frac{d\vec{Q}_M}{dt} = \frac{d\vec{Q}_N}{dt} + \vec{F}_д$$

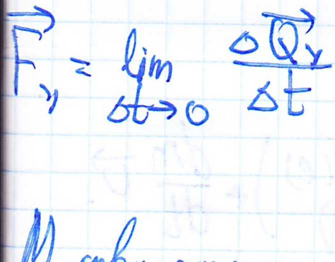
дополнительные $= \vec{F}_п - \vec{F}_у$

M совпадает с N при $\Delta t = 0$: $M \infty N$.

$$\frac{dQ_M}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{R}_\nu^{(e)}\right) + \vec{F}_д$$

реакция тех связей, что мешают поступ. движ. в $\forall$ направлении.

1) Стационарное движение – в $\forall$ точке системы скорость одна и та же, не зав. от времени



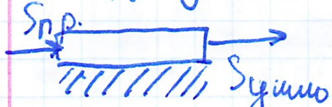
$$\Delta \vec{Q}_п = \underbrace{\Delta t\, v_{пр} \cdot \rho \cdot n}_{\text{пришедшая масса}}\, \vec{v}_п = \Delta m\, \vec{v}_п$$

; $\vec{F}_д = \mu \vec{v}_п$, $\mu_п = \lim \frac{\Delta m_п}{\Delta t} = v_п n_п \rho S$

$\vec{F}_у = \mu_у \vec{v}_у$, $\mu_у = \lim \frac{\Delta m_у}{\Delta t} = v_у n_у \rho S$

$\mu_у = \mu_п$ (ибо стацион., иначе взорвётся)

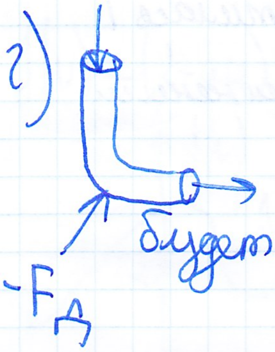
$$\vec F_Д = \dot m(\vec v_п - \vec v_y)$$

1) 

$\vec F_Д = 0$: $\quad v_п \rho S_п = v_y \rho S_y$.

$$v_y = v_п \frac{S_п}{S_y} \Leftarrow v_п S_п = v_y S_y$$

$$\vec F_Д = \dot m\left(\vec v_п - \vec v_п \frac{S_п}{S_y}\right) = \dot m \vec v_п \left(1 - \frac{S_п}{S_y}\right)$$

2) 

$$\dot m(\vec v_п - \vec v_y) = F_п$$

будет искривляться

② Движение нестационарное

(Считаем, что измен. масс ≠ 0)

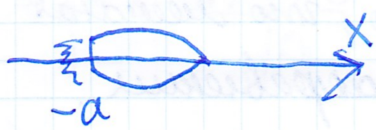
$\vec F_Д = \vec F_п - \vec F_y$; $\quad \Delta Q_п - \Delta Q_y = \Delta m \cdot \vec U$

$\Delta Q_п - \Delta Q_y = \Delta m \vec U$; $\quad \frac{d\vec Q}{dt} = \sum\left(\vec F_\nu^{(e)} - \vec R_\nu^{(e)}\right) + \frac{dm}{dt}\vec U$.

$\vec Q = m\vec v$; $\quad \frac{dm}{dt}\vec v + m\frac{d\vec v}{dt} = \sum\left(\vec F_\nu^{(e)} - \vec R_\nu^{(e)}\right) + \frac{dm}{dt}\vec U$

(Мещерский)

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \sum\left(\vec F_\nu^{(e)} - \vec R_\nu^{(e)}\right) + \vec v_r \frac{dm}{dt}; \quad \vec v_r = \vec U - \vec v$$

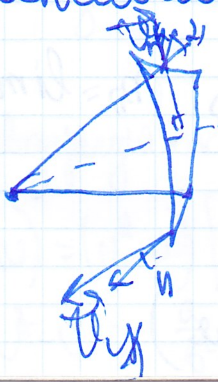


$$m\frac{dv}{dt} = -a\frac{dm}{dt}$$

$$v - v_0 = -a \log\frac{m_0}{m}$$

Скорость в конце не зав. от способа сжигания топлива.

Аналогично - про кинет. момент:



$M_п = \dot m_п r_1 \sin\alpha_1 v_п$; $\quad M_y = \dot m_y r_2 \sin\alpha_2 v_y$.

относительные скорости: турбина крутится!!!

$$M_П = \mu_П r_1 \sin\alpha_1 \upsilon_П + \omega r_1^2 \mu_П$$

$$M_У = \mu_У r_2 \sin\alpha_2 \upsilon_y + \omega r_2^2 \mu_У.$$

(Считаем, что $\mu_П = \mu_y = \mu$)

$$M_D = \mu(\upsilon_П r_1 \sin\alpha_1 - \upsilon_y r_2 \sin\alpha_2 + \omega(r_1^2 - r_2^2))$$

$$\omega = \frac{\upsilon_П r_1 \sin\alpha_1 - \upsilon_y r_2 \sin\alpha_2}{r_1^2 - r_2^2}$$ (предельные значение для турбины)

$\boxed{\text{КОНЕЦ}}$