Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Оптимального Управления

Задачи по методам оптимизации

лектор — доцент М. М. Потапов
решения — А. Поспелов

Москва 2003

1. Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих точных нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.

   Примеры. Интервал (a, b), $-\infty < a \leqslant b < +\infty$ на прямой, очевидно, является ограниченным, но незамкнутым множеством (ограниченность следует из того, что $(a, b) \subseteq S_{\max\{|a|,|b|\}}(0)$, а незамкнутость из того, что последовательность $\left\{\min\left\{a + \frac{1}{n}, b\right\}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b)$ имеет своим пределом точку $a \notin (a, b)$). Любая непрерывная строго монотонная функция на отрезке $[a, b]$ не достигает своих точной нижней и точной верхней граней на интервале (a, b). Действительно, если непрерывная функция f монотонно возрастает на $[a, b]$, то

   $$f(t) > f(a),\ \forall\, t \in (a, b). \tag{1}$$

   В то же время в силу непрерывности f на отрезке для любой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся к a (в том числе и для любой соответствующей последовательности элементов из интервала (a, b)), справедливо $f(t_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(a)$. По определению сходимости это означает, что

   $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad n \geqslant N \implies |f(t_n) - f(a)| < \varepsilon,$$

   откуда следует неравенство

   $$f(t_n) < f(a) + \varepsilon, \tag{2}$$

   справедливое для любой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любого сколь угодно малого ε, начиная с некоторого номера $n = n\left(\{t_k\}_{k=1}^{\infty}, \varepsilon\right)$. Из (1) и (2) по определению точной нижней грани следует равенство

   $$\inf_{t\in(a,b)} f(t) = f(a).$$

   В то же время, согласно (1) функция f это значение на интервале не принимает. Аналогично можно показать, что непрерывная и строго монотонно возрастающая на отрезке функция не принимает на интервале точной верхней грани. Теми же рассуждениями доказывается это утверждение и для непрерывной и строго монотонно убывающей на отрезке функции.

   Тривиальными примерами непрерывных функций, не достигающих своих точных граней на замкнутом, но неограниченном множестве U являются все строго монотонные функции на прямой $\mathbb{R}$, достаточно лишь положить $U = \mathbb{R}$ (как известно, $\mathbb{R}$ является замкнутым множеством). Доказательство проводится рассуждениями, похожими на приведенные выше, поэтому опускается.

   Менее тривиальными примерами служат непрерывные функции, определенные на луче $[a, +\infty)$ (или $(-\infty, b]$), имеющие на бесконечности конечный недостижимый предел. Так, например, монотонно убывающая функция $f(t)$, определенная на $[a, +\infty)$, удовлетворяющая вышеприведенному условию $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \delta$ не достигает своей нижней грани, так как по предположению $f(t) > \delta$, $\forall\, t \geqslant a$. Примером такой функции служит $f(t) = \frac{1}{t-a+1} + \delta$. $\square$

2. Доказать, что единичный шар в пространстве $C[a,b]$ является замкнутым и ограниченным, но не компактным множеством.

Доказательство. Пусть $U = \Big\{ f(t) \in C[a,b] \;\Big|\; \|f(t)\|_{C[a,b]} \leqslant 1 \Big\}$. Ограниченность U по норме $C[a,b]$ видна из определения. Для доказательства замкнутости рассмотрим произвольную последовательность $h_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{\rho} h(t)$, где $h_k(t) \in U$, $\forall\, k \geqslant 1$. По определению сходимости

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad k \geqslant N \implies \max_{t\in[a,b]} |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

или, что то же самое $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$, $\forall\, t \in [a,b]$. Из последних неравенств и неравенства $\|f_k(t)\| \leqslant 1$, следует, что $|f(t)| < 1 + \varepsilon$, $\forall\, t \in [a,b]$. Так как ε может быть выбран сколь угодно малым, $|f(t)| \leqslant 1$, $\forall\, t \in [a,b]$, или, что то же самое, $\|f(t)\| \leqslant 1$. В то же время $f(t)$ непрерывна как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Таким образом, $f(t) \in U$.

Для доказательства некомпактности достаточно привести пример последовательности функций из единичного шара пространства $C[a,b]$, всякая подпоследовательность которой не имеет предела в единичном шаре пространства $C[a,b]$. Такой последовательностью является $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 - n\frac{t-a}{b-a}, & a \leqslant t < a + \frac{b-a}{k}, \\ 0, & a + \frac{b-a}{k} \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Предположим, что $f_{k_\ell}(t) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} f(t) \in C[a,b]$, причем $\max_{t\in[a,b]} |f(t)| \leqslant 1$. Это значит, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \ell \geqslant N \implies \max_{t\in[a,b]} |f_{k_\ell}(t) - f(t)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Согласно определению $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ это значит, что

$$\forall\, t \in \left(a + \frac{b-a}{k_\ell}, b\right] \implies |f_{k_\ell}(t)| < \varepsilon \quad \iff \quad -\varepsilon < f_{k_\ell}(t) < \varepsilon \tag{4}$$

$$|f_{k_\ell}(a) - 1| < \varepsilon \quad \iff \quad 1 - \varepsilon < f_{k_\ell}(a) < 1 + \varepsilon. \tag{5}$$

Взяв в (3) $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и устремив в (4) и (5) $\ell \to \infty$, получим, что $f(t)$ имеет в точке a разрыв первого рода, что противоречит предположению о том, что $f(t) \in C[a,b]$. Таким образом, любая подпоследовательность $\{f_{k_\ell}(t)\}_{\ell=1}^{\infty}$ последовательности $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет предела в классе непрерывных функций (а следовательно, и в единичном шаре пространства $C[a,b]$), что и означает некомпактность U. $\square$

3. Доказать, что пространство $C[a,b]$ является евклидовым пространством со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$, но не является гильбертовым пространством.

Доказательство. Для доказательства того, что $C[a,b]$ — евклидово необходимо и достаточно проверить аксиомы скалярного произведение, проверка первых трех из которых не составляет труда, так как они являются прямыми следствиями соответственно коммутативности произведения функций, однородности и аддитивности интеграла Римана. Первая часть четвертой аксиомы также тривиальна и следует из того, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен. Докажем $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ на $[a,b]$. Предположим противное: пусть найдется такая точка t_0 отрезка $[a,b]$, в которой $|f(t)| \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда согласно локальным свойствам непрерывных функций найдется такая δ-окрестность U_δ этой точки (полуокрестность в случае, когда t_0 совпадает с одним из концов отрезка), в которой $f(t) > \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \geqslant \int_{U_\delta} f^2(t)\,dt > \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\delta^3}{8} > 0,$$

что противоречит $\langle f, f\rangle = 0$. Таким образом, $C[a,b]$ действительно является евклидовым пространством с указанным скалярным произведением.

Покажем теперь, что $C[a,b]$ не является гильбертовым относительно данного скалярного произведения. Для этого приведем пример фундаментальной последовательности $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a,b]$, не имеющей непрерывного предела в метрике $\rho(f,g) = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle}$. Положим, не ограничивая общности рассуждений $a=-1,\ b=1$ и

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt, & t \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \\ 1, & t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Действительно, как нетрудно проверить, эта последовательность является фундаментальной:

$$\rho(f_n, f_{n+m}(t)) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_{n+m}(t)|^2\,dt} = \sqrt{\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f_{n+m}(t)|^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\int_{-\frac{1}{n+m}}^{\frac{1}{n+m}} (nt - (n+m)t)^2\,dt + 2\int_{\frac{1}{n+m}}^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

В то же время пределом последовательности в метрике ρ, очевидно, является разрывная функция (в действительности предельная функция равна приведенной ниже почти всюду, однако, учитывая неустранимый разрыв в нуле, инвариантный относительно изменения функции на множестве точек меры нуль, непрерывной предельная функция быть не может)

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1,0)\,, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t \in (0,1]\,. \end{cases}$$

Этим показано, что пространство $C[a,b]$ не является полным относительно введенной выше метрики, что противоречит определению гильбертова пространства. Таким образом, $C[a,b]$ не является гильбертовым относительно данной метрики. $\square$

4. Доказать, что «параллелепипед» в $L_2(a,b)$ не является компактным множеством.

   Доказательство. Рассмотрим «параллелепипед»

$$U = \left\{ u(t) \in L_2(0,2\pi) \;\middle|\; -1 \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} 1, \quad t \in (0, w\pi) \right\}.$$

   Функциональная последовательность $\{\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$, очевидно, принадлежит U. Покажем, что из нее нельзя выделить сходящуюся в метрике L_2 подпоследовательность. Действительно, пусть $\{\cos n_k t\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в метрике L_2. Так как пространство L_2 полное, это означает, что функциональная последовательность $\{\cos n_k t\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной, что неверно, так как для любых $m, \ell \in \mathbb{N}$, $m \neq \ell$ выполняется (учитывая ортогональность $\cos n_m t$ и $\cos n_\ell t$)

$$\begin{aligned} \rho(\cos n_m t, \cos n_\ell t) &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(\cos n_m t - \cos n_\ell t\right)^2 \, dt} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 n_m t \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 n_\ell t \, dt - 2\int_0^{2\pi} \cos n_m t \cos n_\ell t \, dt} \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 n_m t \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 n_\ell t \, dt} = \sqrt{2\pi} > 0. \end{aligned}$$

   Таким образом, из этой последовательности, все элементы которой принадлежат «параллелепипеду» в $L_2(0,2\pi)$, нельзя выделить сходящейся подпоследовательности, что говорит о том, что «параллелепипед» в $L_2(a,b)$, вообще говоря, не является компактом. $\square$

5. Привести пример функции одной переменной, для которой в некоторой точке x справедливо представление

$$f(x+h) = f(x) + f_1 \cdot h + \frac{1}{2} f_2 \cdot h^2 + o\left(h^2\right),$$

   но которая не является дважды дифференцируемой в этой точке.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Она, как нетрудно проверить, дифференцируема на всей числовой прямой, и ее производная равна

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

В то же время, очевидно, второй производной в нуле не существует, так как по определению производной разностное отношение в нуле ($h \neq 0$)

$$g(h) = \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \frac{3h^2 \sin \frac{1}{h} - h \cos \frac{1}{h}}{h} = 3h \sin \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h}$$

при $h \to 0$ предела не имеет. Для этого достаточно рассмотреть бесконечно малую последовательность приращений $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, $h_k = \frac{1}{\pi k}$:

$$g(h_k) = -\cos \frac{1}{h_k} = (-1)^{k+1} \underset{k\to\infty}{\not\to} c, \quad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

Для завершения примера осталось заметить, что для $f(x)$ справедливо указанное представление. Действительно,

$$f(h) = o\left(h^2\right) = 0 + 0 \cdot h + \frac{0}{2} \cdot h^2 + o\left(h^2\right).$$

$\square$

6. Пусть $J(u) \in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g \rangle_H = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g \rangle_H \, dt = \langle J''(u+\theta h)h, g \rangle_H, \quad \theta \in [0,1],$$

для всех $u, h, g \in H$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{J}(v) = \langle J'(v), g \rangle_H : H \to \mathbb{R}$. Введем вспомогательную функцию $F(t) = u + th : \mathbb{R} \to H; \quad F'(t) = h$. В этих обозначениях согласно формуле Ньютона-Лейбница в силу того, что $\mathcal{J}(F(t)) \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g \rangle_H = \mathcal{J}(F(1)) - \mathcal{J}(F(0)) = \int_0^1 (\mathcal{J}(F(t)))' \, dt.$$

По теореме о производной сложной функции это равно

$$\int_0^1 \mathcal{J}'(F(t))F'(t)\,dt.$$

Теперь можно применить результат теоремы Рисса, утверждающий о том, что гильбертово пространство изоморфно своему сопряжению:

$$\mathcal{J}'(F(t)) = \left(\langle J'(F(t)), g\rangle_H\right)' \in H \simeq H^*, \qquad F'(t) = h \in H,$$

следовательно,

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g\rangle_H = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g\rangle_H \,dt. \tag{6}$$

Второе равенство получится, если к правой части (6) применить первую теорему о среднем. $\square$

7. Вычислить первые и вторые производные функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H\,, \quad A \in \mathcal{L}(H \to H), \quad f \in H,$$

в гильбертовом пространстве H.

Решение. Рассмотрим приращение J в некоторой точке пространства H.

$$\begin{aligned}
J(u+h) &= \frac{1}{2}\langle A(u+h), u+h\rangle_H - \langle f, u+h\rangle_H \\
&= \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H + \frac{1}{2}\left(\langle Au, h\rangle_H + \langle Ah, u\rangle_H + \langle Ah, h\rangle_H\right) - \langle f, h\rangle_H \\
&= J(u) + \frac{1}{2}(\langle Au, h\rangle_H + \langle h, A^*u\rangle_H) - \langle f, h\rangle_H + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle_H \\
&= J(u) + \left\langle \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)u - f, h\right\rangle_H + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle_H.
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое

$$\left|\frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle_H\right| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|_H\,\|h\|_H \leqslant \frac{1}{2}\|A\|_H\,\|h\|_H^2 = o(\|h\|).$$

Таким образом, $G(u) = J'(u) = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)u - f$. Найдем $J''(u) = G'(u)$. Для этого снова рассмотрим приращение $G(u)$:

$$\begin{aligned}
G(u+h) &= \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)(u+h) - f \\
&= \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)u - f + \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)h = G(u) + \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)h.
\end{aligned}$$

Таким образом, $G'(u) = J''(u) = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)$. $\square$

8. Вычислить первые и вторые производные функционалов $J(u) = g\left(\|u\|_H\right)$, где $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция, и $G(u) = \|u\|_H$. Дифференцируем ли второй из них в точке $u = 0$?

Решение. Исследуем сначала дифференцируемость функционалов $J(u)$ и $G(u)$ в произвольной точке $u \neq 0$. Найдем сначала градиент $G(u)$. По определению дифференцируемости его приращение равно (в дальнейшем вместо $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и $\|\cdot\|_H$ используются обозначения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ соответственно)

$$G(u+h) = \|u+h\| = \sqrt{\langle u+h, u+h\rangle} = \sqrt{\|u\|^2 + 2\langle u,h\rangle + \|h\|^2}$$
$$= \|u\|\sqrt{1 + 2\frac{\langle u,h\rangle}{\|u\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|u\|^2}}.$$

Так как второе и третье слагаемые под корнем представляют собой $o(1)$ при $\|h\| \to 0$, можно воспользоваться формулой Тейлора для корня в окрестности нуля:

$$G(u+h) = \|u\|\left(1 + \frac{\langle u,h\rangle}{\|u\|^2} + o\left(\|h\|\right)\right) = G(u) + \left\langle \frac{u}{\|u\|}, h\right\rangle + o\left(\|h\|\right).$$

Таким образом, согласно определению,

$$\mathcal{G}(u) = G'(u) = \frac{u}{\|u\|}, \quad u \neq 0.$$

Согласно теореме о производной сложной функции отсюда следует, что

$$\mathcal{J}(u) = J'(u) = g'\left(\|u\|\right) G'(u) = g'\left(\|u\|\right) \cdot \frac{u}{\|u\|}, \quad u \neq 0.$$

Исследуем теперь вопрос о наличии второй производной указанных функционалов в точке $u \neq 0$ или, что то же самое дифференцируемость $\mathcal{G}(u)$ и $\mathcal{J}(u)$. По определению

$$\mathcal{G}(u+h) = \frac{u+h}{\|u+h\|} = \frac{u+h}{\sqrt{\langle u+h, u+h\rangle}} = \frac{u+h}{\sqrt{\|u\|^2 + 2\langle u,h\rangle + \|h\|^2}}$$
$$= \frac{u+h}{\|u\|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\langle u,h\rangle}{\|u\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|u\|^2}}}.$$

Для второго сомножителя снова воспользуемся разложением Тейлора в окрестности нуля (это корректно по той же причине: вторые два слагаемых под корнем стремятся к нулю при $\|h\| \to 0$):

$$\mathcal{G}(u+h) = \frac{u+h}{\|u\|}\left(1 - \frac{\langle u,h\rangle}{\|u\|^2} + o\left(\|h\|\right)\right) = \mathcal{G}(u) + \frac{h}{\|u\|} - \frac{u\langle u,h\rangle}{\|u\|^3} + o\left(\|h\|\right).$$

Таким образом, производной $\mathcal{G}(u)$ является линейный оператор

$$G''(u)[h] = \mathcal{G}(u)'[h] = \frac{h}{\|u\|} - \frac{u\langle u, h\rangle}{\|u\|^3}, \quad u \neq 0.$$

Производную $\mathcal{J}(u)$ снова найдем по определению (существенно пользуясь непрерывной дифференцируемостью $g'(u)$ и полученными результатами):

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u+h) &= g'(\|u+h\|)\,\mathcal{G}(u+h) = g'(\|u+h\|)\left(\mathcal{G}(u) + \mathcal{G}'(u)[h] + o(\|h\|)\right) \\
&= g'\left(\|u\| + \frac{\langle u, h\rangle}{\|u\|} + o(\|h\|)\right)\left(\mathcal{G}(u) + \mathcal{G}'(u)[h] + o(\|h\|)\right) \\
&= \left(g'(\|u\|) + g''(\|u\|)\frac{\langle u, h\rangle}{\|u\|} + o(\|h\|)\right)\left(\mathcal{G}(u) + \mathcal{G}'(u)[h] + o(\|h\|)\right) \\
&= \mathcal{J}(u) + g''(\|u\|)\frac{\langle u, h\rangle}{\|u\|}\mathcal{G}(u) + g'(\|u\|)\,\mathcal{G}'(u)[h] + o(\|h\|).
\end{aligned}$$

Таким образом, согласно определению, производной $\mathcal{J}(u)$ является линейный оператор

$$\begin{aligned}
J''(u)[h] = \mathcal{J}'(u)[h] &= g''(\|u\|)\frac{\langle u, h\rangle}{\|u\|}\mathcal{G}(u) + g'(\|u\|)\,\mathcal{G}'(u)[h] \\
&= g''(\|u\|)\frac{\langle u, h\rangle}{\|u\|^2}u + g'(\|u\|)\left(\frac{h}{\|u\|} - \frac{u\langle u, h\rangle}{\|u\|^3}\right), \quad u \neq 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь вопрос дифференцируемости указанных функционалов в нуле. Предположим, что второй из них — $G(u)$ — дифференцируем в нуле. Тогда его приращение в нуле представимо в виде

$$\|h\| = G(0+h) = G(0) + \langle a, h\rangle + o(\|h\|) = \langle a, h\rangle + o(\|h\|)$$

для некоторого $a \in H$. Рассмотрим произвольный $b \in H:\ b \neq 0,\ \perp a$, то есть $\langle a, b\rangle = 0$, и будем брать последовательность приращений в виде $h_n = \frac{b}{n}$. В этом случае определение дифференцируемости влечет

$$\frac{\|b\|}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

что, очевидно, неверно, так как, поделив обе части равенства на $\frac{1}{n}$, (иными словами, умножив на n), получим, что $0 \neq \|b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что противоречит условию $b \neq 0$. Таким образом, функционал $G(u)$ в нуле не дифференцируем, следовательно, о наличии второй производной говорить некорректно. Для определения дифференцируемости $J(u)$ в нуле нельзя пользоваться теоремой о производной сложной функции.

В заключение заметим, что несмотря на то, что функционал $J(u)$, вообще говоря, в нуле не дифференцируем, при некоторых $g \in C^2(\mathbb{R})$ существует $J'(0)$. Так, например, если взять $g(t) = t^2$, то $J'(0) = 0$ и $J''(0) = 0$. $\square$

9. Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^\ell |y(x;u) - z(x)|^2 \, dx$$

в пространстве $L^2(0,\ell)$, где $y(x) = y(x;u)$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} (k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = -u(x), & 0 < x < \ell, \\ y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geqslant k_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$ — заданные функции.

Решение. Прежде всего условимся, что функции $k(x)$ и $q(x)$ (непрерывно) дифференцируемы необходимое число раз так, чтобы решение соответствующей краевой задачи существовало. Заметим, что зависимость y от u линейная, то есть $y(x;u) = L(x)[u]$, где $L(x)$ — некоторый линейный оператор, действующий в $L^2(0,\ell)$. В этом случае необходимо найти градиент функционала

$$J(u) = \int_0^\ell |y(x;u) - z(x)|^2 \, dx = \|L(x)[u] - z(x)\|^2_{L^2(0,\ell)}.$$

Как известно, его градиент равен $J'(u) = 2L^*(x)[L(x)[u] - z(x)]$. Найдем $L(x)$ и $L^*(x)$. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, при данных условиях единственное решение соответствующей однородной краевой задачи тривиально. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} G(x,s) \text{ непрерывна по } x \text{ при любом фиксированном } s, & 0 \leqslant x \leqslant \ell,\ 0 < s < \ell, \\ (k(x)G'_x(x,s))' - q(x)G(x,s) = 0, & x \in [0,\ell] \setminus \{s\}, \\ G(0,s) = G(\ell,s) = 0, & s \in [0,\ell], \\ G'(s+0,s) - G'(s-0,s) = \frac{1}{k(s)}, & s \in (0,\ell). \end{cases}$$

При вышеперечисленных условиях эта задача имеет единственное решение, называемое функцией Грина соответствующей краевой задачи. С ее помощью решение представляется в виде

$$y(x;u) = -\int_0^\ell G(x,s)u(s)\, ds = L(x)[u].$$

Легко видеть, что $L(x)$ — самосопряженный оператор. Это следует из симметричности функции Грина по переменным или из того, что он является обратным к самосопряженному оператору $M(x)[y] = (k(x)y'(x))' - q(x)y(x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} J'(u) = 2L(x)[L(x)[u] - z(x)] &= 2\int_0^\ell G(x,t)\left(\int_0^\ell G(t,s)u(s)\, ds + z(t)\right) dt \\ &= 2\int_0^\ell \int_0^\ell G(x,t)G(t,s)u(s)\, ds\, dt + 2\int_0^\ell G(x,t)z(t)\, dt, \end{aligned}$$

где $G(x,s)$ определяется из вспомогательной системы. □

10. Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое подпространство. Доказать, что оператор метрического проектирования из H на L является линейным ограниченным самосопряженным оператором (оператором ортогонального проектирования из H на L).

Доказательство. Обозначим оператор ортогонального проектирования из H на L через P. Так как подпространство L представляет собой выпуклое (в силу замкнутости по сложению и умножению на константу из основного поля) и замкнутое (по условию) множество, значения Ph определено и единственно для любого $h \in H$. Рассмотрим разложения пространства H в прямую сумму подпространства L и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$. В этих обозначениях любой элемент $h \in H$, H — гильбертово, однозначно раскладывается в сумму $h = h_1 + h_2,\ h_1 \in L,\ h_2 \in L^{\perp}$. При этом

$$\begin{aligned}\arg\min_{u\in L}\ \rho(u,h) &= \arg\min_{u\in L}\ \rho\left(u, h_1+h_2\right) = \arg\min_{u\in L}\ \sqrt{\langle u-h_1-h_2, u-h_1-h_2\rangle}\\ &= \arg\min_{u\in L}\ \langle u-h_1-h_2, u-h_1-h_2\rangle\\ &= \arg\min_{u\in L}\ \left(\|u\|^2 - 2\langle u,h_1\rangle + \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\|u\|^2 - 2\langle u,h_1\rangle + \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 = \|u-h_1\|^2 + \|h_2\|^2 \geqslant \|h_2\|^2,$$

причем равенство достигается при $u = h_1$. Таким образом,

$$h_1 = \arg\min_{u\in L}\ \rho(u,h).$$

Отсюда легко установить линейность оператора проектирования P. Ограниченность P следует из непрерывности, которая вытекает из более общего свойства метрической проекции — нестрогой сжимаемости. Покажем самосопряженность P. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\langle Pu, v\rangle = \langle u, P^*v\rangle, \quad \forall\, u,v \in H.$$

Воспользуемся разложением элементов гильбертова пространства на проекцию L и ортогональное дополнение: $u = u_1 + u_2,\ v = v_1 + v_2$, где $u_1, v_1 \in L,\ u_2, v_2 \in L^{\perp}$. Тогда, используя ранее полученный результат

$$\langle Pu, v\rangle = \langle u_1, v_1+v_2\rangle = \langle u_1, v_1\rangle = \langle u_1+u_2, v_1\rangle = \langle u, Pv\rangle.$$

Таким образом, оператор ортогонального проектирования является линейным ограниченным самосопряженным оператором. □

11. Пусть x_0 — фиксированный элемент из H, x_0+L — соответствующее замкнутое аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = pr_{x_0+L}h$ в том и только в том случае, когда $p \in x_0 + L$, $\langle p-h, \ell\rangle_H = 0$, $\forall\, \ell \in L$.

Доказательство. Сначала найдем проекцию h на x_0+L. Для этого надо найти минимум

$$\min_{u\in x_0+L} \langle u-h, u-h\rangle = \min_{g\in L} \langle x_0+g-h, x_0+g-h\rangle .$$

Раскрыв скалярное произведение, можно убедиться, что этот минимум достигается тогда и только тогда, когда достигается минимум

$$f(g) = \|g\|^2 + 2\langle g, x_0\rangle - 2\langle g, h\rangle,\ g \in L.$$

Воспользуемся для x_0 и h разложением на проекцию на L и ее ортогональное дополнение: $h = h_1 + h_2$, $x_0 = x_1 + x_2$, $h_1, x_1 \in L$, $h_2, x_2 \in L^{\perp}$. Получаем при этом, что

$$f(g) = \|g\|^2 - 2\langle g, h_1 - x_1\rangle = \|g - (h_1 - x_1)\|^2 - \|h_1 - x_1\|^2 \geqslant \|h_1 - x_1\|^2 ,$$

причем равенство в последнем случае достигается при $g = h_1 - x_1 \in L$. Таким образом, проекция на $x_0 + L$ элемента гильбертова пространства H равна

$$p = x_0 + h_1 - x_1 = x_2 + h_1.$$

Очевидна необходимость указанного выше условия: действительно,

$$\langle p-h, \ell\rangle = \langle x_2 - h_2, \ell\rangle = 0,$$

так как $x_2 - h_2 \in L^{\perp}$. Достаточность также ясна: для этого нужно применить к элементам p и h в условии разложение на проекцию и ортогональное дополнение относительно L:

$$\langle p-h, \ell\rangle = \langle x_0 + g - h, \ell\rangle = \langle x_1 + x_2 + g - h_1 - h_2, \ell\rangle = \langle x_1 - h_1 + g, \ell\rangle = 0,$$

что выполняется для всех $\ell \in L$. Это значит, что $x_1 - h_1 + g \perp L$, но $x_1 - h_1 + g \in L$, так как L — линейное подпространство H. Это значит, что $g = h_1 - x_1$. $\square$

12. Вычислить проекции точек на гиперплоскость $\{u \in H \mid \langle x, u\rangle_H = \beta\}$ в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед в $\mathbb{R}^n$

$$\{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\} .$$

Решение. Найдем проекцию h на гиперплоскость в гильбертовом пространстве. Пусть $c \neq 0$. Тогда по аналогии с трехмерным евклидовым пространством предположим, что она равна $p = h - \langle h, c\rangle \frac{c}{\|c\|^2} + \frac{\beta c}{\|c\|^2}$. Действительно,

$$\langle p, c\rangle = \langle h, c\rangle - \langle h, c\rangle \frac{\|c\|^2}{\|c\|^2} + \beta\frac{\|c\|^2}{\|c\|^2} = \beta.$$

В то же время непосредственной подстановкой проверяется, что

$$\langle p-h, u-p\rangle = 0$$

для любого u из гиперплоскости. Согласно критериальному свойству проекции на выпуклое замкнутое множество (каковым является гиперплоскость) это и означает, что p — проекция h на гиперплоскость.

Рассмотрим параллелепипед Π в $\mathbb{R}^n$. Согласно определению скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ проекцией h на него является

$$\operatorname*{arg\,min}_{u\in\Pi} \sum_{i=1}^{n}(u_i-h_i)^2$$

Отсюда непосредственно выводится следующее: пусть у точки h имеется ровно $s,\ s \leqslant n$ координат, попадающих в Π (без ограничения общности будем считать, что это ее первые s координат). В этом случае проекция равна (поскольку все координаты в некотором роде независимы)

$$p = \left(h_1, \dots, h_s, \operatorname*{arg\,min}_{u_{s+1}\in\{\alpha_{s+1},\beta_{s+1}\}} |u_{s+1}-h_{s+1}|, \dots, \operatorname*{arg\,min}_{u_n\in\{\alpha_n,\beta_n\}} |u_n-h_n|\right).$$

$\square$

13. Выписать явное выражение для шага α_k метода скорейшего спуска в задаче минимизации квадратичного функционала $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_H - \langle f, u\rangle_H$, если оператор $A^* = A \geqslant 0$.

Решение. Общий вид шага выглядит следующим образом:

$$\alpha_k = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha\geqslant 0} J(u_k - \alpha J'(u_k)).$$

Градиент (см. задачу 7) имеет вид $J'(u) = \frac{1}{2}(A+A^*)u - f$, а учитывая условие самосопряженности, $J'(u) = Au - f$. Таким образом, надо минимизировать следующий функционал:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= J(u_k - \alpha A u_k + \alpha f) \\ &= \frac{1}{2}\langle A(u_k - \alpha A u_k + \alpha f), u_k - \alpha A u_k + \alpha f\rangle - \langle f, u_k - \alpha A u_k + \alpha f\rangle. \end{aligned}$$

После раскрытия всех скобок получим,

$$\begin{aligned} &F(\alpha) = \\ &= \alpha^2\left(\tfrac{1}{2}\langle A^3u_k, u_k\rangle - \langle Au_k, Af\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Af, f\rangle\right) - \alpha\,\|Au_k - f\|^2 + \tfrac{1}{2}\langle Au_k, u_k\rangle - \langle f, u_k\rangle. \end{aligned}$$

Это выражение нужно минимизировать по α на неотрицательной полупрямой. Это можно сделать следующим образом: если выражение в скобках положительно, то, как нетрудно видеть

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \geqslant 0} F(\alpha) = \max \left\{ 0, \frac{\|Au_k - f\|^2}{\langle A^3 u_k, u_k \rangle + \langle Af, f \rangle - 2 \langle Au_k, Af \rangle} \right\}.$$

Если выражение в скобках отрицательно, то $\alpha_k = 0$. Если выражение в скобках равно нулю, то минимизировать надо линейную функцию с отрицательным тангенсом, поэтому и в этом случае $\alpha_k = 0$. $\square$

14. Найти все угловые точки множества $U = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid u \geqslant 0,\ Au = b\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и исследовать их на невырожденность.

Решение. Для данной канонической задачи линейного программирования воспользуемся критерием угловой точки. Очевидно, $\operatorname{rg} A = 2$, поэтому переберем все 6 пар столбцов матрицы A. Решениями соответствующих систем являются следующие шесть точек:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad u_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Всего, таки образом, четыре различных точки: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_5$. Точка u_3 не годится, так как имеет отрицательную координату. Остальные три (различные) точки представляют собой угловые точки множества U. При этом невырожденным являются точки $u_1,\ u_5$, так как только у них все базисные координаты строго положительны, а точка u_2 — вырожденная. $\square$

15. Доказать, что при выполнении условий теоремы о сходимости метода штрафных функций задача минимизации

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U$$

является слабо корректной.

Доказательство. Необходимо доказать следующие три утверждения:

(a) $J_* > -\infty$;
(b) $U_* \neq \varnothing$;

(c) любая слабая предельная точка любой минимальной последовательности принадлежит множеству U_*.

Докажем их в указанном порядке.

(a) Конечность нижней грани следует из того, что $U \subseteq U_0$ и

$$J_* = \inf_U J(u) \geqslant \inf_{U_0} J(u) = J_0 > -\infty.$$

(b) Покажем, что $U_* \neq \varnothing$. Для этого рассмотрим произвольную минимальную последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. В ходе доказательства теоремы о сходимости метода штрафов было показано, что начиная с некоторого момента найдется такое $\delta > 0$, что для всех k больших некоторого $K \in \mathbb{N}$ выполняется

$$u_k \in U(\delta) = \left\{u \in U_0 \mid g_i^+ \leqslant \delta,\ i = \overline{1, m+s}\right\}.$$

Обозначим новую последовательность через $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$. В силу ограниченности $U(\delta)$ и того, что H — гильбертово, у последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть слабые предельные точки. Пусть теперь $\{v_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ — такая подпоследовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) = \lim_{\ell\to\infty} J(u_{k_\ell}) \in U(\delta)$$

и u_0 — одна из слабых предельных точек $\{v_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$. Учитывая слабую полунепрерывность снизу функций $J(u)$, $g_i^+(u)$, имеем

$$J(u_0) \leqslant \varliminf_{\ell\to\infty} J(u_{k_\ell}) = J_*,$$

в то время как

$$0 \leqslant g_i^+(u_0) \leqslant \varliminf_{\ell\to\infty} g_i^+(u_{k_\ell}) = 0.$$

В силу слабой замкнутости U_0 получаем, что $u_0 \in U_0$ и выполняются указанные неравенства, то есть $u_0 \in U$. Таким образом, возможна лишь ситуация $J(u_0) = J_*$, то есть $u_0 \in U_* \neq \varnothing$.

(c) Это утверждение следует из утверждения теоремы о сходимости метода штрафных функций, а именно, если $J(u_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} J_*$, то все слабые предельные точки $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ содержатся в U_*.

$\square$

16. Доказать теорему об отделимости точки от выпуклого множества в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем, что для любого выпуклого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$, $x \notin U$ найдется такой вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$, что $\langle \psi, u \rangle \leqslant \langle \psi, x \rangle$ для любого $u \in U$. Не ограничивая общности рассуждений предположим, что $x = 0 \notin U$ и будем доказывать неравенство $\langle \psi, u \rangle \leqslant \langle \psi, 0 \rangle = 0$, $\forall\, u \in U$.

Рассмотрим множество $\overline{U}$ — замыкание U. Заметим, что $\overline{U}$ выпукло и $U \subseteq \overline{U}$, то есть если мы докажем, что $\langle \psi, u \rangle \leqslant 0$, $\forall\, u \in \overline{U}$, то будет справедливо и требуемое отношение. Как известно, функция $f(h) = \|h\|$ имеет минимальное значение на множестве $\overline{U}$, которое достигается на векторе $v = pr_U 0$ — ортогональной проекции, которая, как известно, существует и единственна для любого h в силу выпуклости и замкнутости $\overline{U}$ (обозначим ее через h_0). Возьмем теперь любое $h \in \overline{U}$ и рассмотрим функцию

$$\overline{h}(\lambda) = \lambda h + (1 - \lambda) h_0 = \lambda (h - h_0) + h_0,$$

где $\lambda \in [0, 1]$. Из выпуклости $\overline{U}$ следует, что $\overline{h} \in \overline{U}$ при любом $\lambda \in [0, 1]$. Также справедливо

$$\left\|\overline{h}(\lambda)\right\|^2 \geqslant \|h_0\|^2,$$

так как $\overline{h}(\lambda)$ — какое-то значение из $\overline{U}$, а h_0 — ближайшее к нулю. Покажем, что вектор $\psi = -h_0$ удовлетворяет условию теоремы. Обозначим

$$z(\lambda) = \left\|\overline{h}(\lambda)\right\| = \|\lambda (h - h_0) + h_0\|.$$

Возведя функцию z в квадрат, получим

$$\begin{aligned} z^2(\lambda) = \langle \lambda (h - h_0) + h_0, \lambda (h - h_0) + h_0 \rangle \\ = \lambda^2 \|h - h_0\|^2 + 2\lambda \langle h - h_0, h_0 \rangle + \|h_0\|^2 \geqslant \|h_0\|^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства получаем

$$\lambda^2 \|h - h_0\|^2 + 2\lambda \langle h - h_0, h_0 \rangle \geqslant 0.$$

Так как $\lambda \in [0, 1]$, из последнего неравенства следует:

$$\lambda \|h - h_0\|^2 + 2 \langle h - h_0, h_0 \rangle \geqslant 0.$$

Устремляя λ к нулю, получим $\langle h - h_0, h_0 \rangle \geqslant 0$ для любого $h \in \overline{U}$. Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы:

$$\langle \psi, h \rangle = \langle -h_0, h \rangle \leqslant - \langle h_0, h_0 \rangle = - \|h_0\|^2 \leqslant 0, \quad \forall\, h \in \overline{U}.$$

Это утверждение справедливо, в частности, и для всех $h \in U$. □

17. Пусть $A \in L(H \to F)$, пространства H, F — гильбертовы. Доказать, что тогда $F = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A^*$ и $H = \overline{\operatorname{Im} A^*} + \operatorname{Ker} A$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$. Действительно, условие $y \perp \operatorname{Im} A$ равносильно отношению $\langle y, Ax \rangle_F = 0$ для всех $x \in H$, а условие $y \in \operatorname{Ker} A^*$ — соотношению $\langle A^* y, x \rangle_H = 0$ для всех $x \in H$. Но $\langle y, Ax \rangle_F = \langle A^* y, x \rangle_H$. Таким образом, равенство установлено.

Покажем теперь, что если в гильбертовом пространстве F ортогональным дополнением замкнутого подпространства F_1 является подпространство F_2, то $F = F_1 \oplus F_2$. Действительно, пусть $x \in F$, x_1 — ближайшая к x точка из F_1. Положим $x_2 = x - x_1$ и покажем, что $x_2 \in F_2$. В самом деле, пусть $y \in F_1$; мы знаем, что функция вещественного переменного t $f(t) = \|x - x_1 + ty\|^2$ имеет минимум при $t = 0$. Значит $f'(0) = 0$. Но

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\|x_2 + ty\|^2 - \|x_2\|^2}{t} = \langle x_2, y \rangle_F + \langle y, x_2 \rangle_F = 2 \langle x_2, y \rangle_F = 0.$$

Итак, $\langle x_2, y \rangle_F = 0$, то есть $x_2 \in H_2$. Мы доказали, что H является суммой H_1 и H_2. То, что эта сумма прямая, вытекает из ортогональности H_1 и H_2: если $x \in H_1 \cap H_2$, то $\langle x, x \rangle_F = 0$, то есть $x = 0$.

Согласно только что доказанному факту, равенство $(\operatorname{Ker} A^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} A}$ равносильно равенству $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, доказанному в самом начале.

Аналогично можно показать и второе равенство. □

18. Множество M в $\mathbb{R}^2$ задано уравнением $M = \{x = (x_1, x_2) \mid F(x) = 0\}$, где функционал $F(x) = x_1^2 - x_2^4$. Найти множество $T_0 M$ касательных векторов к M в точке $0 = (0, 0)$ и ядро $\operatorname{Ker} F'(0)$. Верно ли равенство $T_0 M = \operatorname{Ker} F'(0)$?

Решение. По определению вектор $h = (h_1, h_2)^T$ является касательным к M в точке 0 в том и только в том случае, когда

$$th + \varphi(t) \in M; \quad \varphi(t) = o(t),$$

для некоторой функции $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$. Выпишем первое условие для данного функционала $F(t)$:

$$(th_1 + \varphi_1(t))^2 - (th_2 + 2th_2\varphi_2(t) - \varphi_2^2(t))^4 = 0.$$

Оно эквивалентно условию

$$\left[\begin{array}{l} th_1 + \varphi_1(t) = -t^2 h_2^2 - 2th_2\varphi_2(t) - \varphi_2^2(t), \\ th_1 + \varphi_1(t) = t^2 h_2^2 + 2th_2\varphi_2(t) + \varphi_2^2(t). \end{array} \right.$$

Каждое из этих уравнений можно поделить на t и устремить $t \to 0$. Отсюда следует, что касательными векторами могут являться лишь векторы вида $(0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно, для каждого такого α можно взять, например, $\varphi_2(t) = 0$, $\varphi_1(t) = \pm t^2 \alpha^2$.

Таким образом, множество касательных векторов в нуле к M непусто и представляет собой линейное подпространство. В то же время, как нетрудно проверить, градиентом функционала является $F'(x) = (2x_1, 4x_2^3)$, в нуле, представляющий собой нулевой оператор. Его ядро совпадает со всем $\mathbb{R}^2$, а образ — $\{0\} \neq \mathbb{R}$. Поэтому теорема Люстерника неприменима. $\square$

19. С помощью правила множителей Лагранжа решить задачу минимизации квадратичного функционала $J(u) = \langle Au, u\rangle_H$ на сфере $\|u\|_H = 1$ в гильбертовом пространстве H. Здесь $A \in L(H \to H)$, $A = A^* \geqslant 0$ (если $\dim H = \infty$, существование решения предполагается).

Решение. Сначала покажем существование решения в конечномерном случае ($\dim H = n$). Зафиксируем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ и будем рассматривать разложения всех векторов по этому базису. Тогда

$$J(u) = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i Ae_i, \sum_{i=1}^n u_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \langle Ae_i, e_j\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^n u_i^2 \langle Ae_i, e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n u_i u_j \langle Ae_i, e_j\rangle \geqslant 0$$

по определению неотрицательно (положительно) определенного оператора (соответствующая квадратичная форма всегда неотрицательна). В то же время, как нетрудно проверить, $J(u)$ непрерывен, а сфера в конечномерном пространстве является компактом, следовательно, $J(u)$ достигает на ней своих точных нижней и верхней граней. Из этого следует сильная корректность задачи в конечномерном пространстве.

Итак, пусть существует конечная u_*, на которой достигается условный минимум. Введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 \langle Au, u\rangle + \lambda_1 \left(\|u\|^2 - 1\right).$$

Функционал $J(u)$ дважды дифференцируем в H, а, следовательно, и непрерывно дифференцируем в как угодно большой окрестности оптимальной точки. По теореме необходимыми условиями оптимальности в данной задаче являются $\lambda_0^* \geqslant 0$ и $\mathcal{L}'(u_*, \lambda^*) = 0$. Это эквивалентно системе

$$\begin{cases} \lambda_0^* \geqslant 0, \\ \lambda_0^* \cdot 2Au_* + \lambda_1^* \cdot 2u_* = 0. \end{cases}$$

Если предположить $\lambda_0 = 0$, то необходимо $\lambda_1 = 0$, так как иначе $u_* = 0$, что не удовлетворяет постановке задачи. Но в этом случае набор коэффициентов Лагранжа оказывается тривиальным, а теорема утверждает о существовании нетривиального набора множителей Лагранжа. Итак, положим, не ограничивая общности дальнейших рассуждений $\lambda_0^* = 1$. В этом случае задача редуцируется к задаче на спектр линейного оператора:

$$Au_* = -\lambda_1^* u_*, \quad \lambda_1^* \geqslant 0.$$

Для всякого собственного значения $-\lambda_1^*$ оптимальной точкой будет являться множество единичных векторов из соответствующего этому собственному значения собственного подпространства. Однако оператор $A \geqslant 0$, следовательно, все его собственные значения неотрицательны, то есть достаточно ограничиться исследованием собственных подпространств, соответствующих неположительным λ_1. □

20. Доказать, что каноническая задача линейного программирования и двойственная к ней задача являются взаимодвойственными.

Доказательство. Каноническая задача линейного программирования в $\mathbb{R}^n$ ставится следующим образом:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf_U, \quad U = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, u \rangle = b_i,\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n} \right\}$$

Построим двойственную к ней. Введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = 1 \cdot J(u) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+i} \langle a_i, u \rangle,$$
$$u \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \Lambda_0 = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{2n} \mid \lambda_i \geqslant 0, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Обозначим $\mu = (\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n}) \in \mathbb{R}^n$. Тогда Двойственной задачей будет являться задача

$$G(\mu) = \langle b, \mu \rangle \to \sup_\Lambda, \quad \Lambda = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle a_i^T, \mu \right\rangle = c_i,\ \mu_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n} \right\}.$$

В ней поменялись местами b и c, а матрица A заменилась на транспонированную. Отсюда ясно, что двойственная к двойственной совпадет с исходной. □