Решения некоторых задач по курсу методов оптимизации

Month

21 апреля 2010 г.

Аннотация

Представленный документ представляет собой собрание решений некоторых задач, которые давались по ходу течения лекций по методам оптимизации, читаемых в 2009-2010 гг. на втором потоке факультета ВМиК МГУ Потаповым М.М. Полный список задач, как и программу курса, можно найти на сайте кафедры оптимального управления (`oc.cs.msu.su`).

Большинство решений ссылается только на факты, приведенные на лекциях, и на другие задачи. Использование сторонних фактов всегда оговаривается.

1 Сведения из функционального анализа (Задачи 1-5)

1. *Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замнутом, но не ограниченном множестве.*

   Первым примером служит $-1/x$ на $(0, 1)$, вторым - $1/x$ на $[1;\ +\infty)$.

2. *Доказать, что единичный шар в $C[a, b]$ не является компактным множеством.*

   Не умаляя общности, рассмотрим сегмент $[0, 1]$. (Произвольный отрезок $[a, b]$ сводится к $[0, 1]$ линейным преобразованием $(x-a)/(b-a)$.) На нем рассмотрим последовательность функций—“зубцов”

$$f_n(x) = \begin{cases} 1,\ x = \dfrac{1}{2^n}, \\ 0,\ x \in \left[0, \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2^{n-1}}, 1\right], \\ \text{линейна, иначе.} \end{cases}$$

   Из нее нельзя вычленить даже фундаментальную последовательность. Действительно, $\sup\limits_{x\in[0,1]} ||f_n(x) - f_m(x)|| = 1$, причем точная верхняя грань достигается в точках вида $\dfrac{1}{2^{\min(m,n)}}$.

3. *Показать, что пространство $C[a, b]$ со скалярным проивзедением $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)\ dt$ не является гильбертовым.*

   Не умаляя общности, рассмотрим сегмент $[0, \pi]$. На нем рассмотрим последовательность $f_n(x) = \sin(nx)$. Покажем, что из нее нельзя вычленить даже фундаментальную последовательность. И действительно,

$$\rho^2(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|^2 = \langle f_n - f_m, f_n - f_m\rangle = \langle f_n, f_n\rangle - 2\langle f_m, f_n\rangle + \langle f_m, f_m\rangle = \pi,$$

   ибо $\int_0^\pi \sin(nx)\ dx = \int_0^\pi \sin(mx)\ dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\ dx = 0$.

4. *Доказать, что “параллелепипед” в $L^2[a,b]$ с постоянными границами $\alpha(t)$, $\beta(t)$ не является компактным множеством.*

   Опять-таки рассмотрим сегмент $[0,\pi]$, рассмотрим $\alpha=-1,\ \beta=1$. Тогда система функций из предыдущей задачи является примером последовательности, из котрой нельзя вычленить даже фундаментальную.

5. *Доказать, что множество $U=\{x\in\ell_2:\ x_n\leqslant 2^{-n},\ n=1,2,...\}$ (“Гильбертов кирпич”) является компактом в ℓ_2.*

   Как известно из курса функционального анализа[1], для того, что бы U было компактом, необходимо и достаточно, что бы были выполнены два условия:

   (a) U было вполне ограничено;

   (b) U было полно.

   Для начала покажем вполне ограниченность гильбертова кирпича, что по определению означает возможность накрытия U конечной ε-сетью, т.е. что для любого $\varepsilon>0$ существует **конечный** набор точек $A\subset U$ такой, что для любого $u\in U$ найдется такой $a\in A$, что $\rho(u,a)\leqslant\varepsilon$.

   Выберем такое n, что $2^{1-n}<\varepsilon/2$. Каждой точке $x=(x_1,\ldots,x_n\ldots)$ сопоставим её “полномочного представителя“ $x'=(x_1,\ldots,x_n,0,\ldots 0,\ldots)$. При этом

$$\rho(x,x')=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty}x_k^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{4^k}}<\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

   Пусть U' - множество всех "полномочных представителей". Ясно, что $U'\subset R^n$ и что U' ограничено; значит, существует достаточно большой n-мерный куб, содержащий U'. Разобьем его на подкубики с ребром ε. Они будут образовывать конечную $\frac{\sqrt{n}}{2}\varepsilon$ сеть. Таким образом, на U' всегда можно задать конечную ε-сеть.

   Итак, пусть на U' задана $\varepsilon/2$-сеть A_ε, т.е. для любого $x'\in U'$ существует такое a, что $\rho(x',a)\leqslant\varepsilon/2$. Но, по неравенству треугольника для расстояния, $\rho(x,a)\leqslant\rho(x,x')+\rho(x',a)=\varepsilon$. Значит, A - конечная ε-сеть на U.

   Теперь докажем полноту U, т.е. что в случае, когда произвольная последовательность $x^k\in U$ является фундаментальной, она сходится к некоторому элементу $x\in U$. Так как пространство ℓ_2 полно, то существует предел $x^k\to x\in\ell_2$. Принадлежность x гильбертову кирпичу доказывается предельным переходом в покомпонентных соотношениях[2] для $x^k=(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k,\ldots)$:

$$|x_n^k|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

   Таким образом, U вполне ограничено и полно, что и гарантирует нам компактность.

2 Дифференциальное исчисление в гильбертовых пространствах (Задачи 6-12)

6. *Привести пример функции одной переменной f, не являющейся дважды дифференцируемой в точке x, в окрестности которой справедливо соотношение $f(x+h)=f(x)-f_1h+f_2\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)$.*

[1] См., например, Колмогорова-Фомина, Глава II, параграф 7.

[2] В ℓ_2 сходимость $x^k\to x$ влечет покомпонетную сходимость $x_n^k\to x_n$. См., например, Колмогорова-Фомина, глава II, параграф третий.

Таковой является функция $\frac{\sin(x^3)}{x^2}$ в окретсности точки ноль. Проверяется прямой проверкой (разложением синуса в ряд).

7. *Пусть $J \in C^2(H)$; показать справедливость формулы конечных приращений $\langle J'(u+h) - J'(u), g\rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g\rangle\ dt$.*

   Как и в лекциях, введем вспомогательную функцию $F(t) = u + th$. Тогда:

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g\rangle = \langle J'F(1) - J'F(0), g\rangle = \left\langle \int\limits_0^1 (J'F)'(t)\ dt, g \right\rangle.$$

   Вынося интеграл из-под скалярного произведения, учитывая[3], что $F'(t) = h$ и пользуясь формулой для дифференцирования композиции операторов, получим искомое выражение.

8. *Найти J', J'' для $J = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle$, $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, $f \in H$.*

   Отметим для начала, что $J:\ H \to \mathbb{R}$, означающее[4], что $J':\ H \to \mathcal{L}(H \to \mathbb{R}) \sim H$, и $J'':\ H \to \mathcal{L}(H \to \mathcal{L}(H \to \mathbb{R}))$, т.е. с точностью до изоморфизма $J'':\ H \to \mathcal{L}(H \to H)$.

   Наша задача - выписать приращение функционала в виде

$$J(u+h) - J(u) = J'h + o(\|h\|). \tag{1}$$

   Попробуем это сделать:

$$J(u+h) - J(u) = \frac{1}{2}\left(\langle A(u+h), u+h\rangle - \langle Au, u\rangle\right) - \langle f, u+h, +\rangle\langle f, u\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle Au, h\rangle + \langle Ah, u\rangle\right) - \langle f, h\rangle.$$

   Как в (1), отдельно сгруппируем члены, действующие на h, и член, “подозрительный” на то, что бы быть o-малым:

$$J(u+h) - J(u) = \left\langle \frac{1}{2}(A + A^*)u - f, h \right\rangle + \frac{\langle Ah, h\rangle}{2}.$$

   Покажем, что второе слагаемое — это действительно o-малое, записав $h = \|h\|\, e_h$, где $\|e_h\| = 1$:

$$\frac{|\langle Ah, h\rangle|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2\, |\langle Ae_h, e_h\rangle|}{\|h\|} = \|h\|\, |\langle Ae_h, e_h\rangle|,$$

   что в силу ограниченности A стремится к нулю при $\|h\| \to 0$. Таким образом, оператор, действующий на h, и есть искомая J':

$$J'(u) = \frac{1}{2}(A + A^*)u - f.$$

   Первая производная — линейная по u функция, что влечет $J''(u) = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$.

   Замечание. При решении подобных задач полезно проверять себя, подставляя вместо абстрактного гильбертового пространства H вещественную прямую: скалярное произведение на ней – это обычное произведение двух чисел, для любого линейного оператора $A = A^*$, ибо сами “линейные операторы” - это привычные нам действительные числа. Производная по Фреше в таком случае совпадает с обыкновенной производной. Конкретно наша задача принимает вид: $(\frac{1}{2}Au^2 - fu)'' = (Au - f)' = A$, что согласуется с полученным ответом.

[3] Производная берется по t. Формально, конечно, стоило бы писать как-то $F_u(t)$ вместо $F(u)$.

[4] Сия запись означает, что для того, чтобы найти оператор-производную, нам достаточно найти лишь вектор L из H, ибо действие производной будет описываться как $J'h = \langle L, h\rangle$.

9. *Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u) = g(\|u\|_H)$, где g – дважды дифференцируемая числовая функция. Дифференцируем ли функционал в точке 0, если $g(t) = t$? в случае $g(t) = t^3$?*

По формуле производной сложной функции имеем $(g(\|u\|))' = g'(\|u\|)(\|u\|)'$. Найдем $(\|u\|)'$:

$$(\|u\|)' = \left(\sqrt{\|u\|^2}\right)' = \frac{1}{2\,\|u\|}(\|u\|^2)' = \frac{u}{\|u\|},$$

в последнем переходе использовано установленное на лекциях соотношение $(\|Au - f\|^2)' = 2A^*(Au - f)$. Окончательно,

$$J'(u) = \frac{u}{\|u\|},\ g(t) = t;\ J'(u) = \frac{3\,\|u\|^2\,u}{\|u\|} = 3u\,\|u\|\,,\ g(t) = t^3.$$

Очевидно, что во втором случае функционал диффиренцируем на всем H; покажем, что в случае один функционал не диффиренцируем при $u = 0$. Предположим противное – пусть существует такой элемент $J' \in H$, что

$$\|u + h\| - \|u\| = \langle J', h\rangle + o(\|h\|) \iff \|h\| = \langle J', h\rangle + o(\|h\|).$$

Положим $h = \frac{-J'}{\|J'\|}$. Получаем:

$$1 = -\,\|J'\| + o(1)$$

Переходя к пределу, получаем $\|J'\| = -1$.

10. *Вычислить градиент функционала $J(u) = \int_0^l \rho(x)|y(x;u) - z(x)|^2dx$ в пространстве $L^2(0,l)$, где $y(x) = y(x,u)$ - решение краевой задачи*

$$\begin{cases}(k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = -u(x),\ 0 < x < l,\\ y(0) = 0,\end{cases} \tag{2}$$

где $k(x) \geqslant k_0 > 0,\ q(x) \geqslant 0,\ \rho(x) \geqslant 0$ - заданные функции.

Отметим, что $J = \|Au - f\|^2_{L^2(0,l)}$, где $Au = \sqrt{\rho(x)}y(x;u),\ f = \sqrt{\rho(x)}z(x)$. Нам известен ответ в случае линейного и ограниченного оператора A:

$$J'(u) = 2A^*(Au - f). \tag{3}$$

Очевидно, что $A : L^2(0,l) \to L^2(0,l)$ линеен; докажем ограниченность в предположении некоторой гладкости заданных функций. Пользуясь формулой Грина и непрерывностью функции Грина[5], получаем:

$$\begin{aligned}\|y\|^2 = \int\limits_0^l y^2(x)dx = \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^l G(x,\xi)u(\xi)d\xi\right)^2 dx \leqslant \{\text{Коши-Буняковский}\}\\ = \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^l G^2(x,\xi)d\xi \int\limits_0^l u^2(\xi)d\xi\right) dx \leqslant \max_{(x,\xi)\in[0,l]\times[0,l]} G^2(x,\xi)\,\|u\|^2_{L^2}\,,\end{aligned}$$

что и влечет ограниченность оператора A.

[5] Подробнее о ней см. в любой книжке по ОДУ.

Найдем оператор A тем же методом, что это делалось на лекции[6]: попробуем записать выражение $\langle Au, v\rangle$ в виде $\langle u, A^*v\rangle$ (выбор ψ будет описан ниже):

$$\langle Au, v\rangle = \langle\sqrt{\rho}y, v\rangle = \langle y, \sqrt{\rho}v\rangle = \int\limits_0^l y\sqrt{\rho}v\ dx + 0 = \int\limits_0^l y\sqrt{\rho}v\ dx + \langle (ky')' - qy + u, \psi\rangle =$$
$$= \int\limits_0^l y\sqrt{\rho}v\ dx + \int\limits_0^l (ky')'\psi\ dx - \int\limits_0^l qy\psi\ dx + \int\limits_0^l u\psi\ dx. \quad (4)$$

Последний интеграл в этом соотношение как раз имеет вид типа $\langle u, A^*v\rangle$. Выберем ψ так, что бы сумма прочих интегралов занулилась. Для этого распишем второй интеграл, два раза применим интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^l (ky')'\psi\ dx = \int\limits_0^l ky'\psi'\ dx = \int\limits_0^l y(k\psi)'\ dx.$$

Подстановки при первом интегрировании по частям обратятся в ноль за счет выбора ψ: потребуем, что бы $\psi(0) = \psi(l) = 0$; вторые же подстанвоки обнуляются за счет краевых условий задачи (2).

Объединяя первые три интеграла в последнем соотношении (4), получим

$$\int\limits_0^l y(\sqrt{\rho(x)}v(x) + (k\psi)' - q\psi)\ dx,$$

что окончательно формирует нам условия, однозначно позволяющие восстнавоить ψ:

$$\begin{cases} (k\psi)' - q\psi = -\sqrt{\rho(x)}v(x), \\ \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Итак, $A^*v = \psi(x)$, где ψ находится из (5). Подставляя это в (3), получаем окончательный ответ.

11. Задача 11 является дискретным вариантом задачи 10 и решается в полной аналогии с ней и лекциями.

12. *Найти градиенты функционалов* $J(u) = \iint\limits_Q [y(t,x;u) - f(t,x)]^2\ dtdx$ *и* $J(u) = \int\limits_0^l |y(T,x;u) - f(x)|^2 dx$*, где* $y(t,x;u)$ *- решение второй краевой задачи для уравнения теплопроводности:*

$$\begin{cases} y_t = u_{xx},\ (t,x) \in Q = (0,T)\times(0,l), \\ y_x(t,0) = y_x(t,l) = 0,\ t \in (0,T), \\ y(0,x) = u(x),\ x \in (0,l). \end{cases}$$

Линейность и ограниченность функционалов, по-сути, была доказана на лекциях; случай терминального функционала[7] был рассмотрен на лекции, так что рассмотрим интегральный функционал $J(u) = \iint\limits_Q [y(t,x;u) - f(t,x)]^2\ dtdx = \|Au - f\|^2_{L^2_Q}$, где $Au = y(t,x;u)$, $f = f(t,x)$. Градиент определяется из соотношения (3); найдем A^*:

$$\langle Au, v\rangle = \iint_q yv\ dxdt + \langle y_t - u_{xx}, \psi\rangle = \iint_q yv\ dxdt + \iint_q y_t\psi\ dxdt - \iint_q y_{xx}\psi\ dxdt.$$

[6] Отметим, что сведение одного типа задач (“нового” типа) к другому (который мы уже умеем решать) с помощью сопряженного оператора – дело естественное. Например, метод Римана в курсе уравнений матфизики использовал ту же идею.

[7] Правда, для первой краевой задачи; но отличия минимальны.

Расписывая интегралы, найдем ограничения, определяющие ψ:

$$\iint_q y_t\psi\ dxdt = \int_0^l \left(y(x,T)\psi(x,T) - u(x)\psi(x,0) - \int_0^T y\psi_t\ dt \right) dx,$$

откуда получаем требование $\psi(x,T) = 0$. Два раза беря по частям второй интеграл, совершенно аналогично из требования обращения в ноль подстановки при первом интегрировании получаем требования $\psi_x(t,0) = \psi_x(t,l) = 0$. Окончательно получим, что $A^*v = \psi(0,x)$, где $\psi(t,x)$– решение системы

$$\begin{cases} v = \psi_t - \psi_{xx}, \\ \psi_x(t,0) = \psi_x(t,l) = 0, \\ \psi(x,T) = 0 \end{cases} .$$

Окончательный ответ получается подстановкой в (3).

3 Метрические проекции (Задачи 13-15)

13. *Пусть H - гильбертово пространство, L - его замкнутое подпространство; доказать, что проектор $pr(h) = Ph$ на L линеен, ограничен и самосопряжен.*

Линейность очевидна с привличением второго пункта теоремы о свойствах проекторов в гильберотвых пространствах[8]:

$$\langle Ph_1 - h_1, u - Ph_1\rangle \geqslant 0;\ \langle Ph_2 - h_2, u - Ph_2\rangle \geqslant 0, \forall u \in L,$$

и, складывая, получаем

$$\langle (Ph_1 + Ph_2) - (h_1 + h_2), 2u - (Ph_1 + Ph_2)\rangle \geqslant 0, \forall u \in L.$$

(Появление двойки перед u никакой роли не играет в силу того, что L – подпространство.) Ограниченность следует из третьего пункта той же теоремы (достаточно положить $g = 0$).

Докажем самосопряженность. Так как $P^2 = P$, то $\operatorname{Im} P \perp \ker P$ и $Ph - h \in \operatorname{Ker} P$. Тогда имеем:

$$\langle Pg, h\rangle = \langle Pg, h\rangle + \langle Pg, Ph - h\rangle = \langle Pg, Ph\rangle\,,$$

и, аналогично, $\langle g, Ph\rangle = \langle Pg, Ph\rangle$. Это и влечет $P = P^*$.

14. *Пусть H – гильбертово, L – его замкнутое подпространство, $x_0 \in H$, $U = x_0 + L$. Доказать, что $p = Ph$ есть проектор на U тогда и только тогда, когда выполнены два условия: $p \in U$ и $\langle p - h, l\rangle = 0\ \forall l \in L$.*

Необходимость. Пусть $P_U h$ - проектор H на U. По определению проектора имеем:

$$P_U h = \operatorname{Argmax}_{u\in U} \langle h - u, h - u\rangle = x_0 + \operatorname{Argmax}_{v\in L} \langle h - x_0 - v, h - x_0 - v\rangle = x_0 + P_L(h - x_0),$$

где $P_L h$ – проектор H на L. Тогда

$$P_U h - h = x_0 + P_L(h - x_0) - h = (x_0 - P_L(x_0)) - (h - P_L(h)).$$

По результатам предыдущей задачи, для любого вообще вектора $x \in H$ верно, что $x - P_L(x) \in \operatorname{Ker} P_L$, что и доказывает соотношение $\langle p - h, l\rangle = 0\ \forall l \in L$.

[8] Очевидно, что всякое подпространство выпукло.

Достаточность. Пусть Ph – "настоящий" проектор H на L. Тогда для него выполнено необходимое условие:

$$\langle Ph - h, l\rangle = 0\ \forall l \in L,$$

$$\langle p - h, l\rangle = 0\ \forall l \in L.$$

Положим в этих соотношениях $l = Ph - p$ и вычтем:

$$\langle Ph - h, Ph - p\rangle - \langle p - h, Ph - p\rangle = 0 \iff \langle Ph - p, Ph - p\rangle = 0,$$

что неизбежно влечет $Ph = p$.

15. *Вычислить проекции точек на гиперплоскость* $\{u \in H :\ \langle c, u\rangle = \beta\}$ *в гильбертовом пространстве* H *и на параллелепипед* $\{u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n :\ \alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

    Решение этих задач можно найти в книге: Васильев Ф.П. "Численные методы решения экстремальных задач", которую выдавали в библиотеке. См. глава 4, §4, Примеры 2 и 3. Хотя пример 2 в этой книге берется не в гильбертовом пространстве, а в $\mathbb{R}^n$, легко заметить, что единственное место, где используется конечномерность - это в ссылке на соответствующую теорему; не лекциях же аналогичная теорема доказывалась в гильбертовых пространствах.

4 Итерационные методы (Задачи 16-17)

16. *Выписать явное выражение для шага* α_k *в методе скорейшего спуска в задачи минимизации квадратичного функционала* $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle$, *где* $A = A^* \geqslant 0$.

17. *Найти и исследовать на невырожденность все угловые точки множества* $U = \{u \in \mathbb{R}^4 :\ u \geqslant 0, Au = b\}$, *где*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 Методы снятия ограничений (Задачи 18-24)

18. *Доказательство теоремы отделимости точки от непустого множества в* $\mathbb{R}^n$.

    Доказательство смотри во все той же книжке "Численные методы решения экстремальных задач",глава 4, §5. Интересующиеся вопросом глубже могут также посмотреть следующую книгу: Половинкин Е.С., Балашов М.В., "Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа", М.: Физматлит, 2007. Смотри главу 1, §1.9.

19. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(H \to F)$, H, F*−гильбертовы. Доказать, что тогда* $F = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \ker A^*$, $H = \overline{\operatorname{Im} A^*} \oplus \ker A$.

    Поскольку $\overline{\operatorname{Im} A}$– замкнутое линейное подпространство в F, то по теореме Леви, известной нам из курса функционального анализа[9], имеем: $F = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus (\overline{\operatorname{Im} A})^\perp$. Имеем:

$$y \in (\overline{\operatorname{Im} A})^\perp \iff \langle y, Ax\rangle = 0\ \forall x \in H \iff \langle A^* y, x\rangle = 0\ \forall x \in H \iff A^* y = 0,$$

что и означает, что $y \in \ker A^*$.

Второе соотношение вытекает из того факта, что в гильбертовом пространстве $(A^*)^* = A$.

[9] См. Колмогоров-Фомин, Глава III, §4, Теорема 7.

20. *Пусть H - гильбертово пространство; отображение $G(U): H \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо по Фреше и $G'(u) = [g_1(u), g_2(u), \ldots, g_n(u)]^T \in \mathcal{L}(H \to \mathbb{R}^n)$ - его первая производная. Доказать, что оператор $(G'(u))^*$ действует по правилу*

$$(G'(u))^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k'(u), \;\; \lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^T \in \mathbb{R}^n \,.$$

Прежде всего заметим, что, записывая опеделение производной Фреше,

$$\begin{bmatrix} g_1(u+h) \\ g_2(u+h) \\ \vdots \\ g_n(u+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_1'(u))(h) \\ (g_2'(u))(h) \\ \vdots \\ (g_n'(u))(h) \end{bmatrix} + o(\|h\|),$$

получаем, что $g_k \in \mathcal{L}(H \to \mathbb{R})$, что, с учетом отождествления по Риссу, дает $(g_k'(u))(h) = \langle g_k'(u), h \rangle$, $g_k'(u) \in H$. Тогда имеем:

$$\langle (G'(u))h, \lambda \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle g_k'(u), h \rangle \lambda_k = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k'(u), h \right\rangle = \langle (G'(u))^* \lambda, h \rangle \,,$$

что и требовалось доказать.