

Упражнения по курсу **Методы оптимизации**

5–6 семестры, 2007/2008 уч. год

(В скобках рядом с порядковым номером задачи указан ее уровень по пятибальной шкале.)

- 1.(3) Привести примеры непрерывных функций, не достигающих своих нижних граней на ограниченном, но незамкнутом множестве; замкнутом, но неограниченном множестве.
- 2.(3) Доказать, что единичный шар в пространстве $C[a, b]$ не является компактным множеством.
- 3.(3) Доказать, что пространство $C[a, b]$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ не является гильбертовым.
- 4.(3) Доказать, что "параллелепипед" в $L^2(a, b)$ с постоянными границами $\alpha(t) \equiv \alpha < \beta \equiv \beta(t)$ не является компактным множеством.
- 5.(5) Доказать, что "гильбертов кирпич"

$$U = \left\{ x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq 2^{-n}, n = 1, 2, \dots \right\}$$

является компактным множеством в пространстве ℓ^2 .

- 6.(4) Привести пример функции одной переменной, для которой в некоторой точке x справедливо представление

$$f(x+h) = f(x) + f_1 \cdot h + f_2 \cdot \frac{h^2}{2} + \bar{o}(h^2),$$

но которая не является дважды дифференцируемой в этой точке.

- 7.(3) Пусть $J(u) \in C^2(H)$. Доказать справедливость формулы конечных приращений

$$\langle J'(u+h) - J'(u), g \rangle = \int_0^1 \langle J''(u+th)h, g \rangle dt \quad \forall u, h, g \in H.$$

- 8.(3) Вычислить первые и вторые производные квадратичного функционала в гильбертовом пространстве H :

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H, \quad A \in L(H \rightarrow H), \quad f \in H.$$

- 9.(4) Вычислить первые и вторые производные функционала $J(u) = g(\|u\|_H)$, где $g : R^1 \rightarrow R^1$ – дважды дифференцируемая функция. Дифференцируем ли он в точке $u = 0$ в случае $g(t) = t$? в случае $g(t) = t^3$?

- 10.(5) Вычислить градиент функционала

$$J(u) = \int_0^\ell \rho(x) |y(x; u) - z(x)|^2 dx$$

в пространстве $L^2(0, \ell)$, где $y(x) = y(x; u)$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} (k(x)y'(x))' - q(x)y(x) = -u(x), & 0 < x < \ell, \\ y(0) = 0, & y(\ell) = 0, \end{cases}$$

$k(x) \geq k_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) \geq 0$ – заданные функции.

11.(5) (дискретный вариант предыдущей задачи для случая $k(x) = 1$, $q(x) = 1$, $\rho(x) = 1$). Вычислить градиент функционала $J(u) = \sum_{i=1}^{N-1} |y_i(u) - z_i|^2 h$ в пространстве R^{N-1} сеточных функций $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h$. Здесь $h > 0$ – шаг разностной сетки, $z = (z_1, z_2, \dots, z_{N-1})$ – заданная дискретная траектория, а $y_i = y_i(u)$ – решение разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = -u_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, & y_N = 0. \end{cases}$$

12.(5) Пусть H – гильбертово пространство, L – его замкнутое подпространство. Доказать, что оператор метрического проектирования из H на L является линейным ограниченным самосопряженным оператором (оператором ортогонального проектирования из H на L).

13.(4) Пусть x_0 – фиксированный элемент из H , $x_0 + L$ – соответствующее замкнутое линейное аффинное многообразие. Доказать, что тогда $p = pr_{x_0+L}h$ в том и только в том случае, когда

$$p \in x_0 + L, \quad \langle p - h, \ell \rangle_H = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

14.(3) Вычислить проекции точек на гиперплоскость $\{u \in H \mid \langle c, u \rangle_H = \beta\}$ в гильбертовом пространстве H и на параллелепипед $\{u = (u_1, \dots, u_n) \in R^n \mid \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$ в R^n .

15.(3) Выписать явные выражения для шага α_k метода скорейшего спуска в задаче минимизации квадратичного функционала $J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \langle f, u \rangle_H$ ($A^* = A \geq 0$).

16.(3) Найти все угловые точки множества $U = \{u \in R^4 \mid u \geq 0, Au = b\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и исследовать их на невырожденность.

17.(5) Доказательство теоремы отделимости точки от непустого выпуклого множества в R^n .

18.(5) Пусть $A \in L(H \rightarrow F)$, пространства H, F – гильбертовы. Доказать, что тогда $F = \text{Im}A \oplus \ker A^*$, $H = \text{Im}A^* \oplus \ker A$.

19.(3) Пусть H – гильбертово пространство, отображение $G(u) = (g_1(u), \dots, g_n(u)) : H \rightarrow R^n$ дифференцируемо по Фреше и $G'(u) = (g'_1(u), \dots, g'_n(u)) \in L(H \rightarrow R^n)$ – его первая производная. Доказать, что сопряженный к $G'(u)$ оператор $(G'(u))^* \in L(R^n \rightarrow H)$ действует по правилу

$$(G'(u))^* \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i g'_i(u), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n.$$

20.(4) Множество M в R^2 задано уравнением $M = \{x = (x_1, x_2) \mid F(x) = 0\}$, где $F(x) = x_1^2 - x_2^4$. Найти множество T_0M касательных векторов к M в точке $0 = (0, 0)$ и ядро $\text{Ker}F'(0)$. Верно ли равенство $T_0M = \text{Ker}F'(0)$?

21.(4) С помощью правила множителей Лагранжа решить задачу минимизации квадратичного функционала $J(u) = \langle Au, u \rangle_H$ на сфере $\|u\|_H = 1$ в гильбертовом пространстве H . Здесь $A \in L(H \rightarrow H)$, $A = A^* \geq 0$ (если $\dim H = \infty$, существование решения предполагается).

22.(4) Построить вторую двойственную задачу к канонической задаче линейного программирования и показать, что она совпадает с исходной задачей.

23.(4) Построить двойственную задачу к задаче минимизации

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 \rightarrow \inf, \quad Au = f,$$

где $A \in L(H \rightarrow R^n)$, $f \in R^n$, H – гильбертово пространство.

24.(4) Решить задачу оптимального управления

$$J(u) = \int_0^T (-x(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf, \\ x'(t) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = x_0; \quad |u(t)| \leq a.$$

Рассмотреть случаи а) $T > 2a > 0$ и б) $0 < T < 2a$.

25.(4) В пространстве R^2 найти нормальное решение u_* системы линейных уравнений $Au = f$, где $u = (u_1, u_2)$, $Au = (2u_1 + u_2, 2u_1 + u_2)$, $f = (5, 5)$. Для системы с приближенным оператором $\tilde{A}u = (2u_1 + u_2, (2 - \delta)u_1 + u_2)$, $\delta > 0$, найти экстремали

$$\tilde{u} = \operatorname{argmin}_{u \in R^2} T_\alpha(u)$$

функционала Тихонова $T_\alpha(u) = \|\tilde{A}u - f\|^2 + \alpha\|u\|^2$ и исследовать их на сходимость к u_* при $\delta \rightarrow 0$ и значениях параметра регуляризации а) $\alpha = 0$ (регуляризация не проводится), б) $\alpha = \delta$.

Некоторые задачи из письменных контрольных работ 2007/2008 уч. года

1.(5) Пусть $x(t) = x(t; u)$ – решения краевой задачи

$$x''(t) = u(t), \quad 0 < t < T; \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 0.$$

Указать правило вычисления первой производной Фреше $J'(u)$ функционала

$$J(u) = |x(T/2; u) + 3|^2$$

в пространстве $u = u(t) \in L^2(0, T)$, найти явное значение $J'(0)$ в точке $u(t) \equiv 0$ и исследовать функционал $J(u)$ на выпуклость и сильную выпуклость.

2.(5) В бесконечномерном гильбертовом пространстве H поставлена задача минимизации с двумя ограничениями-неравенствами:

$$J(u) = \langle f + 4g, u \rangle \rightarrow \inf, \quad \|u - \langle f, u \rangle f\|^2 \leq \langle f, u \rangle, \quad \langle f, u \rangle \leq 1.$$

Здесь f, g – заданные элементы из H , такие, что $\|f\| = 1$, $\|g\| = 1$, $\langle f, g \rangle = 0$.

Поставьте соответствующую двойственную задачу максимизации вида

$$\psi(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda,$$

с приведением явных выражений для функции $\psi(\lambda)$ и допустимого множества $\Lambda \subset R^2$.

Найдите оптимальное решение двойственной задачи λ^* и соответствующее ему значение функции $\psi^* = \psi(\lambda^*)$.

Используя полученные значения λ^* и ψ^* , найдите оптимальное решение u_* исходной задачи минимизации и соответствующую ему нижнюю грань функционала J_* .

3.(5) В пространстве $L^2(0, l)$ поставлена следующая задача минимизации с ограничением:

$$J(u) = \|u\|_{L^2(0, l)}^2 \rightarrow \inf, \quad y(l/2) \leq -l^3/8.$$

Здесь $y(x) = y(x; u)$ – решение краевой задачи

$$y''(x) = u(x), \quad 0 < x < l, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

соответствующее выбранной функции $u = u(x) \in L^2(0, l)$. С помощью правила множителей Лагранжа найдите нижнюю грань функционала J_* , множество оптимальных решений U_* и значение множителя Лагранжа λ^* , отвечающего за ограничение. Представьте объяснения по поводу регулярности задачи и возможности выбора $\lambda_0^* = 1$.

4.(5) В гильбертовом пространстве H ($\dim H = \infty$) поставлена задача минимизации без ограничений:

$$J(u) = (\langle a, u \rangle - 3 \langle b, u \rangle - 10)^2 \rightarrow \inf, \quad u \in H,$$

где $a, b \in H$, $\|a\| = 1$, $\|b\| = 1$, $\langle a, b \rangle = 0$.

Найдите нижнюю грань J_* функционала, множество U_* оптимальных решений и решение u_* с минимальной нормой.

Для задачи с возмущенными данными

$$\tilde{J}(u) = J(u) + \left(\delta \langle a, u \rangle + \sqrt{\delta} \right)^2 \rightarrow \inf, \quad u \in H \quad (\delta > 0),$$

найдите экстремали \tilde{u} функционала Тихонова

$$T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha \|u\|^2, \quad \alpha > 0,$$

и исследуйте поведение их уклонений $\|\tilde{u} - u_*\|$ от нормального решения u_* при $\delta \rightarrow 0$ и выборе параметра регуляризации по правилам а) $\alpha = \delta$ и б) $\alpha = \delta^2$.