1 Теоремы существования

Определение. Множество $\mathbf{M}$ называется *метрическим*, если на нём задано отображение $\rho: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}^1_+$, называемое *метрикой* и удовлетворяющее трём аксиомам:

1) $\rho(u, v) = \rho(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbf{M}$ (симметричность);

2) $\rho(u + v, w) \leqslant \rho(u, w) + \rho(v, w) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{M}$ (неравенство треугольника);

3) $\rho(u, v) \geqslant 0\ \forall u, v \in \mathbf{M}$, $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (неотрицательность).

Определение. Последовательность $\{u_k\}$ *сходится по метрике* ρ ($u_k \xrightarrow{\rho} u$) в метрическом пространстве $\mathbf{M}$, если $\rho(u_k, u) \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение. Последовательность $\{u_k\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\rho(u_i, u_j) \to 0 \text{ при } i, j \to \infty.$$

Определение. Метрическое пространство $\mathbf{M}$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится к элементу из $\mathbf{M}$.

Определение. Функция $J(u)$ называется *непрерывной* [*полунепрерывной снизу*] (*полунепрерывной сверху*) в точке u_0, если для любой сходящейся к u_0 последовательности элементов $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J(u_0)$ $\left[\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u_0)\right]$ $\left(\varlimsup\limits_{k\to\infty} J(u_k) \leqslant J(u_0)\right)$ (см. рис. 1.)

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *компактным* (*ρ-компактом*) в $\mathbf{M}$, если у любой последовательности $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует сходящаяся к элементу из $\mathbf{U}$ подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$.

Введём ряд обозначений:

$$\inf_{u\in\mathbf{U}} J(u) = J_*, \quad \sup_{u\in\mathbf{U}} J(u) = J^*;$$

$$\mathbf{U}_* = \{v \in \mathbf{U} | J(v) = J_*\};$$

$$u_* = \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbf{U}} J(u) \in \mathbf{U}_*.$$

Теорема 1 (метрический вариант теоремы Вейерштрасса). *Пусть $\mathbf{M}$ — метрическое пространство, множество $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{M}$ — компакт, функция $J(u)$ полунепрерывна снизу на $\mathbf{U}$. Тогда:*

1) $J_* > -\infty$;

2) $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$;

3) из того, что $\begin{cases} J(u_k) \to J_* \text{ при } k \to \infty, \\ u_k \in \mathbf{U} \end{cases}$ *следует, что* $\rho(u_k, \mathbf{U}_*) \to 0$.

Определение. Задачи, удовлетворяющие условиям (выводам) Теоремы 1 называют *корректно поставленными* в метрическом пространстве $\mathbf{M}$.

Определение. Линейное пространство L называется *нормированным*, если существует такая функция $\|u\| : \mathbf{L} \to \mathbb{R}^1$, называемая *нормой*, что:

1) $\|\alpha u\| = |\alpha|\cdot\|u\| \quad \forall u \in \mathbf{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (неотрицательная однородность);

2) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{L}$ (неравенство треугольника);

3) $\|u\| \geqslant 0\ \forall u \in \mathbf{L},\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (неотрицательность).

Если в пункте 3) выполнено лишь условие $u = 0 \Rightarrow \|u\| = 0$, то $\|u\|$ называют *полунормой*.

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется ограниченным в $\mathbf{M}$, если существует $u_0 \in \mathbf{M}$ и $R < 0$ такие, что для всех u из $\mathbf{U}$ выполняется условие $\rho(u, u_0) \leqslant R$.

Определение. Нормированное линейное пространство $\mathbf{L}$, полное относительно метрики $\rho(u, v) = \|u - v\|$, называется *ба́наховым.*

Определение. Линейное пространство $\mathbf{L}$ называется *евклидовым*, если на нём задано *скалярное произведение* $\langle u, v\rangle : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbb{R}^1$:

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L}$ (симметричность);

2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in \mathbf{L}$ (линейная аддитивность);

3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (линейная однородность);

4) $\langle u, u\rangle \geqslant 0,\ \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (неотрицательность).

В любом евклидовом пространстве $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ является нормой (*евклидовой нормой*), а $\rho(u, v) = \|u - v\|$ — метрикой.

Определение. Евклидово пространство $\mathbb{H}$, полное относительно метрики

$$\rho(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle_{\mathbb{H}}},$$

называется *ги́льбертовым.* В дальнейшем буквой $\mathbb{H}$ будем обозначать гильбертовы пространства.

Определение. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{H}$ называется *слабо сходящейся* к элементу $u_0 \in \mathbb{H}(u_k \overset{\text{слабо}}{\to} u_0)$, если $\forall h \in \mathbb{H}\ \langle u_k, h\rangle_{\mathbb{H}} \to \langle u_0, h\rangle_{\mathbb{H}}$ при $k \to \infty$.

Замечание. Из сходимости в метрике $\mathbb{H}$ следует слабая сходимость, но не наоборот.

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *слабо компактным* (*слабым компактом*), если у любой последовательности $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, слабо сходящаяся к точке $u_0 \in \mathbf{U}$.

Замечание. Из того, что множество $\mathbf{U}$ является компактом, следует, что оно является слабым компактом, но не наоборот. Например единичный шар в $\mathbb{H}$ представляет слабый компакт, но компактом не является.

Определение. Функция $J(u)$ называется *слабо непрерывной* (*слабо полунепрерывной снизу*) в точке u_0, если для любой слабо сходящейся к u_0 последовательности $\{u_k\}$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J(u_0)$$

$$(\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u_0))$$

Замечание. Из слабой непрерывности функции $J(u)$ следует её "обычная" непрерывность, но не наоборот.

Теорема 2 (слабый вариант теоремы Вейерштрасса). *Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, $\mathbf{U}$ — слабый компакт в $\mathbb{H}$, функция $J(u)$ слабо полунепрерывна снизу на $\mathbf{U}$. Тогда:*

1) $J_* > -\infty$;
2) $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$;
3) *любая слабая предельная точка любой минимальной последовательности принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$ (минимальная последовательность есть такая последовательность $\{u_k\}$, что $J(u_k) \overset{k\to\infty}{\to} J_*$).*

Определение. Задачи, удовлетворяющие условиям Теоремы 2 называют *слабо корректно поставленными* в $\mathbf{M}$.

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *выпуклым*, если точка $\alpha u + (1-\alpha)v$ принадлежит множеству $\mathbf{U}$ для любых u и v из $\mathbf{U}$ и любого α из отрезка $[0,1]$.

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве $\mathbf{U}$, если для любых точек u и v из множества $\mathbf{U}$ и для любого α из отрезка $[0,1]$ выполняется неравенство $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$.

Достаточное условие слабой компактности в $\mathbb{H}$

Если множество $\mathbf{U}$ выпукло, замкнуто и ограничено, то $\mathbf{U}$ слабо компактно (без доказательства).

Достаточное условие слабой полунепрерывности снизу в $\mathbb{H}$

Если функция $J(u)$ выпукла и полунепрерывна снизу на множестве $\mathbf{U}$, то $J(u)$ слабо полунепрерывна снизу на этом множестве (без доказательства).

Определение. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — нормированные пространства, $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Отображение F называется *дифференцируемым по Фреше́* [Frechet] в точке x_0, если

$$F(x_0+h) = F(x_0) + F'(x_0)h + o(\|h\|_{\mathbf{X}}) \quad \forall h \in \mathbf{X},$$

где $F'(x_0) \in \mathbf{L}(\mathbf{X} \to \mathbf{Y})$ — линейный оператор (*производная Фреше*), причём

$$\frac{\|o(\|h\|_{\mathbf{X}})\|_{\mathbf{Y}}}{\|h\|_{\mathbf{X}}} \to 0 \text{ при } \|h\|_{\mathbf{X}} \to 0.$$

В случае, когда $\mathbf{X} = \mathbb{H}$ — гильбертово, $\mathbf{Y} = \mathbb{R}^1$, имеем:

$$J(u_0+h) = J(u_0) + J'(u_0)h + o(\|h\|_{\mathbb{H}}).$$

$J'(u_0) \in \mathbb{H}^* = \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{R}^1)$ — пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathbb{H}$, *сопряжённое* к $\mathbb{H}$.

Теорема (Рисс). [КФ, гл. IV, §2, п.3]

Пространство $\mathbb{H}$ изоморфно сопряжённому пространству $\mathbb{H}^*$: $\mathbb{H} \backsimeq \mathbb{H}^*$, т.е. для любого элемента f из $\mathbb{H}^*$ существует единственный элемент h_f из $\mathbb{H}$ такой, что

$f(h) = \langle h_f, h \rangle_{\mathbb{H}}$ $\forall h \in \mathbb{H}$, причём $\|f\|_{\mathbb{H}^*} = \|h_f\|_{\mathbb{H}}$

Замечание. Если у функции $J(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$ существует вторая производная $J''(u)$, то приращение функции $J(u)$ в точке u_0 представимо в виде:

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + \langle J'(u_0), h \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u_0)h, h \rangle + o(\|h\|^2).$$

Теорема (о производной сложной функции). [КФ, гл.X]

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ — нормированные пространства, F: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}, G$: $\mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, существует производная функции F в точке x_0, существует производная функции G в точке $y_0 = F(x_0)$. Тогда существует производная сложной функции GF: $\mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ в точке x_0, причём

$$(GF)'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$$

Формулы конечных приращений

Введём ряд обозначений:

$\mathbf{C}(\mathbf{U})$ — класс непрерывных на $\mathbf{U}$ функций;

$\mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ — класс Липшиц-непрерывных на $\mathbf{U}$ функций (т.е. функций, для которых выполняется условие $|f(u) - f(v)| \leqslant L \cdot \|u - v\|_{\mathbb{H}}$, где L — константа Липшица);

$\mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ — класс непрерывно дифференцируемых функций;

$\mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ — класс дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Утверждение. Для функции $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ и $\forall u, v \in \mathbf{U}$ выполняется следующее равенство:

$$J(u) - J(v) = \int\limits_0^1 \langle J'(v + t(u - v)), u - v \rangle_{\mathbb{H}} \, dt = \langle J'(v + \theta(u - v)), u - v \rangle_{\mathbb{H}}, \text{ где } \theta \in [0, 1].$$

3 Задачи управления линейной динамической системой

Здесь мы рассмотрим простейшую задачу оптимального управления при следующих условиях:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 < t < T, \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{L}^2_r(t_0, T), \quad (1)$$

здесь $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ — матрица (оператор)порядка $n{\times}n$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$ — матрица порядка $n{\times}r$, $f(t) = \{f_i(t)\}$ — матрица порядка $n{\times}1$, то есть n-мерный вектор столбец; моменты времени t_0, T, а также точка x_0 заданы; $\mathbf{U}$ — заданное множество из $\mathbf{L}^2_r(t_0, T)$; $x(t, u) = x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ — решение (траектория), соответствующая управлению $u = u(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t)) \in \mathbf{L}^2_r(t_0, T)$. Также мы считаем известной траекторию, разницу с которой мы минимизируем — $y(t)$.

Критериями качества управления могут выступать различные функционалы, например:

$$J_1(u) = |x(T, u) - y|^2_{\mathbb{R}^n} \to \inf \text{ — \textit{терминальный квадратичный функционал}} \quad (2)$$

или

$$J_2(u) = \int\limits_{t_0}^{T} |x(t, u) - y(t)|^2_{\mathbb{R}^n}\, dt \to \inf \text{ — \textit{интегральный квадратичный функционал}} \quad (3)$$

Минимизация терминального квадратичного функционала позволят добиться точности в достижении конечной точки. Интегрального — близости траектории к заданной.

Определение. При $u(t) \in \mathbf{L}^2(t_0, T)$ под *решением задачи Коши* (1) понимается непрерывная на отрезке $[t_0, T]$ функция $x(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau) + f(\tau)\right)\, d\tau, \quad t \in [t_0, T]$$

При этом функционалы $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ должны принадлежать классу измеримых по Лебегу и ограниченных функций $\mathbf{L}^\infty(t_0, T)$.

Напомним, что $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty(t_0,T)} = \inf\limits_{\substack{C>0: \\ |u(t)| \leqslant C \text{ п.в.}}} C = \lim\limits_{p\to\infty} \left(\int\limits_{t_0}^{T} |u(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$

Редуцируем исходную задачу к линейной, положив $x = x_1 + x_2$, где

$$\begin{cases} x_1' = Ax_1 + Bu \\ x_1(t_0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = Ax_2 + f \\ x_2(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Заметим, что во второй системе нет неизвестного управления, а значит можно найти x_2. При такой редукции критериальные функционалы можно представить как

$$J_1(u) = |\underbrace{x_1(T, u)}_{=A_1 u} - \underbrace{(y - x_2(T))}_{=f \in \mathbb{R}^n}|^2 = \|A_1 u - f\|^2_{\mathbb{R}^n},$$

$$J_2(u) = \int\limits_{t_0}^{T} |\underbrace{x_1(t,u)}_{=A_2u} - \underbrace{(y - x_2(t))}_{=f\in\mathbf{L}^2(t_0,T)}|^2\,dt = \|A_2u - f\|_{\mathbf{L}^2(t_0,T)}.$$

Таким образом, для решения задачи (1), (2) или задачи (1), (3) необходимо минимизировать нормы $\|A_1u-y\|^2$ и $\|A_2u-y\|^2$ соответственно, где операторы A_1 и A_2 задаются следующим образом

$$A_1u = x(T,u)\colon \mathbf{L}^2(t_0,T) \to \mathbb{R}^n,$$
$$A_2u = x(t,u)\colon \mathbf{L}^2(t_0,T) \to \mathbf{L}^2(t_0,T).$$

Для дальнейших рассуждений докажем, что операторы A_1 и A_2 ограничены, то есть для соответствующих норм $\|Au\| \leqslant c\cdot\|u\|$. Из (1) и определения решения задачи Коши имеем

$$|x(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \left(A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)\right)\,d\tau\right| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \left(|A(\tau)||x(\tau)| + |B(\tau)||u(\tau)|\right)\,d\tau.$$

Так как $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{L}^\infty$, то модули под знаком интеграла можно оценить сверху константами, тогда получим, что $|x(t)|$ не превосходит

$$C_B \int\limits_{t_0}^{t} |u(\tau)|\,d\tau + C_A \int\limits_{t_0}^{t} |x(\tau)|\,d\tau.$$

Можно загрубить оценку, заменив момент времени на максимальный, тогда в силу неравенства Коши-Буняковского полученное выражение меньше или равно

$$C_B\sqrt{T-t_0}\|u\|_{\mathbf{L}^2} + C_A \int\limits_{t_0}^{t} |x(\tau)|\,d\tau.$$

Эта оценка верна для всех $t \in [t_0, T]$. Далее нам понадобится лемма Гронуолла-Беллмана. Напомним её формулировку без доказательства.

Лемма (Гронуолл-Беллман). [B2, стр. 30–31, лемма 2], [АТФ, стр. 189]

Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \omega(t) \leqslant b + a\int\limits_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,d\tau \quad (b \geqslant 0, a > 0).$$

Тогда верно неравенство $\omega(t) \leqslant b\cdot e^{a(t-t_0)}$.

Из приведённых рассуждений можно сделать вывод, что функционалы $J_1(u)$ и $J_2(u)$ слабо полунепрерывны снизу на $\mathbf{L}^2$, откуда следует следующая

Теорема 3 (о существовании оптимального управления задач (1), (2) **и** (1), (3)**).** *Пусть* $A(t)$, $B(t)$, $f(t) \in \mathbf{L}^\infty(t_0, T)$; $y(t) \in \mathbf{L}^2(t_0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. *Тогда у обеих задач* (1), (2) *и* (1), (3) *при выборе управления из слабо компактного множества* $\mathbf{U} \subset \mathbf{L}^2(t_0, T)$ *существует оптимальное управление.*

Теперь обратимся к вопросу о дифференцируемости функционалов J_1 и J_2. Для любого дифференцируемого по Фреше квадратичного функционала $J(u) = \|Au - f\|^2$ справедливы формулы $J'(u) = 2A^*(Au - f)$ и $J''(u) = 2A^*A$. Вычислим сопряжённые операторы в нашем случае. Для оператора A_1 для любого v имеем

$$\langle A_1 u, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, A_1^* v \rangle_{\mathbf{L}^2}$$

Если расписать это равенство, то получим

$$\langle x(T, u), v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \int_{t_0}^{T} \langle u(t), \ldots \rangle_{\mathbb{R}^r} \, dt,$$

где вместо многоточия стоит необходимый нам множитель.

Введём функцию $\psi(t)$ как решение *сопряжённой задачи Коши*:

$$\begin{cases} \psi(T) = v, \\ \psi'(t) = -A^T(t)\psi(t). \end{cases} \tag{5}$$

Тогда скалярное произведение можно расписать как

$$\begin{aligned} \langle x(T), v \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \langle x(T), \psi(T) \rangle - \langle 0, \psi(t_0) \rangle = \{\text{ф-ла Ньютона-Лейбница, } x(t_0) = 0\} = \\ &= \int_{t_0}^{T} \langle x(t), \psi(t) \rangle_t' \, dt = \int_{t_0}^{T} \left(\langle x'(t), \psi(t) \rangle + \langle x(t), \psi'(t) \rangle \right) dt = \{x'(t) = Ax + Bu\} = \\ &= \int_{t_0}^{T} \langle Bu, \psi(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, dt + \int_{t_0}^{T} \left(\langle Ax, \psi(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x(t), \psi'(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\langle u(t), B^T \psi(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^r} \, dt + \int_{t_0}^{T} \left\langle x(t), \psi'(t) + A^T(t)\psi(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \, dt \end{aligned}$$

Последний интеграл в силу (5) обнуляется, а из первого мы получаем, что $A_1^* v = B^T \psi(t)$.

Аналогичные рассуждения можно провести для оператора A_2:

$$\langle A_2 u, v\rangle_{\mathbf{L}^2} = \langle u, A_2^* v\rangle_{\mathbf{L}^2}$$

$$\int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t,u), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{t_0}^{T} \langle u(t), \ldots\rangle_{\mathbb{R}^r}\, dt$$

Прибавим к левой части этого равенства интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{T} \langle Bu + Ax - x'(t), \psi(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}\, dt = 0,$$

где $\psi(t)$ — решение системы

$$\begin{cases} \psi(T) = 0, \\ \psi'(t) = -A^T(t)\psi(t) - v(t). \end{cases} \tag{6}$$

Получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t,u), v\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle u(t), B^T\psi(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r}\, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \big(\langle x(t), v(t)\rangle + \left\langle x(t), A^T\psi\right\rangle - \langle x'(t), \psi\rangle\big)\, dt.$$

Последний интеграл обращается в нуль в силу (6) и того, что по формуле Ньютона-Лейбница

$$-\int\limits_{t_0}^{T} \langle x'(t), \psi\rangle\, dt = -\left\langle x(t), \psi(t)\right\rangle\Big|_{t=t_0}^{T} + \int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t), \psi'(t)\rangle\, dt = \int\limits_{t_0}^{T} \langle x(t), \psi'(t)\rangle\, dt.$$

Отсюда $A_2^* v = B^T\psi(t)$.

Теорема 4 (о дифференцируемости функционалов J_1 и J_2). *Пусть $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{L}^\infty(t_0, T)$; $y(t) \in \mathbf{L}^2(t_0, T)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда оба функционала J_1 и J_2 бесконечно дифференцируемы по u на $\mathbf{L}^2(t_0, T)$, причём*

$$J_1'(u) = 2B^T\psi(t), \text{ где } \psi(t) \text{ — решение (5)},$$

$$J_2'(u) = 2B^T\psi(t), \text{ где } \psi(t) \text{ — решение (6)}.$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве $\mathbf{U}$, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, \forall \alpha \in [0,1].$$

И введём несколько новых понятий:

Определение. Функция $J(u)$ называется *строго выпуклой*, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, u \neq v, \forall \alpha \in (0,1).$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *сильно выпуклой* с коэффициентом $\kappa > 0$, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, \forall \alpha \in [0,1].$$

Теорема 5 (о локальном минимуме выпуклой функции). *Пусть множество $\mathbf{U}$ выпуклое, функция $J(u)$ выпукла на $\mathbf{U}$, $J_* > -\infty$, тогда:*

1) *любая точка локального минимума $J(u)$ на $\mathbf{U}$ является точкой глобального минимума;*

2) *если $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, то $\mathbf{U}_*$ выпукло;*

3) *если $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, а $J(u)$ строго выпукла, то $\mathbf{U}_* = \{u_*\}$ (состоит из одного элемента).*

Теорема 6 (сильно выпуклый вариант теоремы Вейерштрасса). *Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ выпукло и замкнуто (не обязательно ограничено!), функция $J(u)$ сильно выпукла с коэффициентом κ и полунепрерывна снизу на $\mathbf{U}$ (т.е. и слабо полунепрерывна снизу) тогда:*

1) $J_* > -\infty$*;*

2) $\mathbf{U}_* = \{u_*\} \neq \varnothing$*;*

3) $\forall u \in \mathbf{U}$ $\frac{\kappa}{2}\|u-u_*\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant J(u) - J(u_*)$.

Теорема 7 (критерий выпуклости для дифференцируемых функций). *Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ выпукло, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $J(u)$ *выпукла;*

(b) $J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u-v \rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$*;*

(c) $\langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$.

Если, кроме того, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ и $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$, то эквивалентны утверждения (a)–(c) и утверждение

(d) $\langle J''(u) \cdot h, h \rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}, \forall h \in \mathbb{H}$.

Теорема 8 (критерий сильной выпуклости для дифференцируемых функций). *Пусть* $\mathbb{H}$ *— гильбертово пространство, множество* $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ *выпукло,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a') $J(u)$ *сильно выпукла с коэффициентом* $\varkappa > 0$;

(b') $J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\varkappa}{2}\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$;

(c') $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \varkappa\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$.

Если, кроме того, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ *и* $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$, *то эквивалентны утверждения* (a') – (c') *и утверждение*

(d') $\langle J''(u) \cdot h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \varkappa\|h\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u \in \mathbf{U}, \forall h \in \mathbb{H}$.

Теорема 9 (условия оптимальности в форме вариационного неравенства). *Пусть множество* $\mathbf{U}$ *— выпукло,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. *Тогда*

1) *если* $u_* = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J(u)$, *то* $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \quad (1)$;

2) *если* $u_* \in \mathrm{int}\mathbf{U}$, *то* $J'(u_*) = 0$;

3) *если выполняется* (1), *а* $J(u)$ *выпукла, то* $u_* = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J(u)$.

Метрическая проекция

В этом пункте $\mathbf{M}$ — метрическое пространство, $\rho(x, y)$ — метрика, $\mathbf{U} \subset \mathbf{M}$.

Определение. *Проекцией* $\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(v)$ точки v на множество $\mathbf{U}$ называется $\operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} \rho(u, v)$ (в некоторых случаях выгоднее рассматривать проекцию как $\operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} \rho^2(u, v)$).

Заметим, что в случае, когда $\mathbf{U}$ не выпукло, проекция точки, вообще говоря, может быть не единственной (см. рис. 8).

Для некоторых множеств проекции точки на них вообще не существует. Например, если рассмотреть открытый шар $\mathbf{U} = \{\|u\| < 1\}$ и точку вне этого шара, то она не будет иметь проекцию на это множество (см. рис. 9).

Теорема 10 (существование и единственность проекции и её свойства). *Пусть* $\mathbb{H}$ *— гильбертово пространство,* $\mathbf{U}$ *— выпуклое замкнутое множество, тогда*

1) *для любого элемента* h *из* $\mathbb{H}$ *существует единственная* $\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(h)$;

2) $p = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(h) \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \mathbf{U}, \\ \langle p - h, u - p\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \end{cases}$ *(см. рис. 10);*

3) $\|\mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(f) - \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(g)\|_{\mathbb{H}} \leqslant \|f - g\|_{\mathbb{H}} \quad \forall f, g \in \mathbb{H}$. *Это свойство называют* ***нестрогой сжимаемостью*** *оператора проектирования (см. рис. 11).*

Теорема 11 (проекционная форма критерия оптимальности). *Пусть* $\mathbb{H}$ *— гильбертово пространство,* $\mathbf{U}$ *— выпуклое замкнутое множество,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$, $J(u)$ *выпукла. Тогда*

$$u_* = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J(u) \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha > 0 \quad u_* = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u_* - \alpha J'(u_*)).$$

Метод скорейшего спуска

Рассмотрим достаточно общую задачу минимизации:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Для её решения в данном методе строится следующая итерационная последовательность:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k),\ k = 0, 1, 2, \dots;\ \alpha \geqslant 0 \tag{2}$$

Для начала процесса итерирования необходимо задать $u_0 \in \mathbb{H}$. Способов, для выбора u_0 в общем случае не существует и в основном здесь исходят из каких-либо эмпирических данных и полагаются на опыт.

Критерии остановки процесса приближенного нахождения минимума могут быть основаны на различных соображениях. Приведём некоторые из них:

1) $\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \varepsilon_1$;

2) $\|J(u_{k+1}) - J(u_k)\| \leqslant \varepsilon_2$;

3) $\|J'(u_k)\| \leqslant \varepsilon_3$.

(ε_i выбираются, исходя из требований к решению). Обычно на практике применяют комбинации этих оценок.

Выбор шага спуска α_k в общем случае также не единственен (причём на каждом шаге он может быть взят по-разному). Иногда α_k берут не зависящим от k: $\alpha_k = \alpha \equiv const > 0$. В методе скорейшего спуска α_k определяется конкретным образом:

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{\alpha \geqslant 0} J(u_k - \alpha J'(u_k)). \tag{3}$$

Обозначим через $f_k(\alpha)$ выражение $J(u_k - \alpha J'(u_k))$.

Заметим, что в при таком выборе α_k, если $u_{k+1} = u_k$, то либо $\alpha_k = 0$, либо $J'(u_k) = 0$. Случай $J'(u_k) = 0$ является необходимым условием минимума и процесс итерирования можно остановить. А в случае, когда $\alpha_k = 0$ из (3) имеем

$$\begin{cases} f_k'(0) \geqslant 0 \\ f_k'(0) = \langle J'(u_k), J'(u_k) \rangle \leqslant 0. \end{cases}$$

Откуда $f_k'(0) = 0$ и мы опять получили необходимое условие минимума.

Теорема 12. *Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{H})$, $J(u)$ сильно выпукла с коэффициентом $\kappa > 0$, $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbb{H})$ с константой $L > 0$. Тогда при любом выборе начальной точки u_0 из $\mathbb{H}$ метод (2)–(3) сходится к точке минимума u_* задачи (1), причём для скорости сходимости справедлива оценка:*

$$\frac{\kappa}{2}\|u_k - u_*\|^2 \leqslant J(u_k) - J(u_*) \leqslant q^k (J(u_0) - J(u_*)),\ \text{где } q = 1 - \frac{\kappa}{L} \in [0, 1) \tag{4}$$

Непрерывный аналог метода скорейшего спуска

Как и в предыдущем методе, здесь мы рассматриваем задачу минимизации функции $J(u)$ на множестве без ограничений $\mathbf{U} = \mathbb{H}$:

$$J(u) \to \inf,\ u \in \mathbb{H} \qquad (1)$$

Приведём некоторые формальные рассуждения, которые позволят нам получить непрерывный аналог метода скорейшего спуска. Рассмотрим шаг процесса для этого метода:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha J'(u_k).$$

Если рассматривать Δt_k как некий временной шаг, то разделив это равенство на Δt_k получим:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t_k} = -\frac{\alpha_k}{\Delta t_k} J'(u_k).$$

Если теперь задать значение $u(t)$ в начальный момент времени $t = 0$, то мы придём (исходя из здравого смысла) к системе

$$\begin{cases} u'(t) = -\beta(t) J'[u(t)], \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (2)$$

Теорема 13. *Пусть $J(u)$ сильно выпукла на $\mathbb{H}$ с коэффициентом $\kappa > 0$, $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbb{H})$, $\beta(t) \geqslant \beta_0 > 0$ непрерывна по t. Тогда для любого начального приближения $u_0 \in \mathbb{H}$ метод (2) сходится к u_* и для скорости сходимости справедлива оценка:*

$$\|u(t) - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \|u_0 - u_*\|_{\mathbb{H}} \cdot e^{-\kappa \beta_0 t},\ t \geqslant 0 \qquad (3)$$

Метод проекции градиента

В этом пункте рассмотрим задачу минимизации функции $J(u)$ на множестве, уже не совпадающем со всем пространством $\mathbb{H}$ (задачу на условный минимум):

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subset \mathbb{H} \qquad (1).$$

В данном методе рассматривается итерационная последовательность

$$u_{k+1} = \mathrm{pr}_{\mathbf{U}}(u_k - \alpha_k J'(u_k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

При этом необходимо учитывать, что на каждом шаге приближения все точки u_k должны принадлежать $\mathbf{U}$. Для простоты будем считать, что

$$\alpha_k = \alpha \equiv const \qquad (3)$$

Теорема 14. *Пусть $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ – выпуклое, замкнутое множество, $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ и сильно выпукла с коэффициентом $\kappa > 0$, $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ с константой $L > 0$. Пусть также $\alpha \in \left(0, \frac{2\kappa}{L^2}\right)$. Тогда для любого начального приближения $u_0 \in \mathbf{U}$ метод (2), (3) сходится:*

$$\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \|u_0 - u_*\|_{\mathbb{H}} \cdot q^k(\alpha),\ \text{где}\ 0 < q(\alpha) = \sqrt{1 - 2\kappa\alpha + \alpha^2 L^2} < 1. \qquad (4)$$

Метод условного градиента

В этом пункте рассматривается задача минимизации следующего вида:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subset \mathbb{H}. \tag{1}$$

Идея метода условного градиента основана на том, что в окрестности точки u_k функционал $J(u)$ можно приближенно представить как

$$J(u) \simeq J(u_k) + \langle J'(u_k), u - u_k \rangle .$$

Так как $J(u_k)$ близко к $J(u)$, то мы стараемся минимизировать скалярное произведение $J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle$. Введём обозначение

$$\overline{u}_k = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J_k(u). \tag{2}$$

Тогда итерационная последовательность рассматриваемого метода описывается как

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\overline{u}_k - u_k), \tag{3}$$

где

$$\alpha_k = \operatorname*{argmin}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} J\left(u_k + \alpha\left(\overline{u}_k - u_k\right)\right) \tag{4}$$

Лемма 1 (оценка скорости сходимости числовой последовательности). *Пусть для монотонной числовой последовательности* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$*:*

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_n > \ldots > 0$$

выполняется условие $\qquad a_k - a_{k+1} \geqslant C{\cdot}a_k^2 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда верна оценка:

$$a_m \leqslant \frac{a_0}{1 + a_0 C m} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (*).$$

Теорема 15. *Пусть* $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ *— выпуклое, замкнутое, ограниченное множество,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$ *и выпукла,* $J'(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ *с константой* $L > 0$, $D = \mathrm{diam}\mathbf{U}$. *Тогда*

$$J(u_k) - J_* \leqslant \frac{J(u_0) - J_*}{1 + \frac{J(u_0) - J_*}{2LD} k} = O\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (5).$$

Если $J(u)$ *сильно выпукла, то, кроме этого, выполнено условие*

$$\frac{\kappa}{2}\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant J(u_k) - J_*.$$

Метод Ньютона

Рассматриваем задачу минимизации функции $J(u)$:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{H} \tag{1}$$

Идея метода Ньютона похожа на метод условного градиента, но здесь мы будем использовать не линейную, а квадратичную аппроксимацию функции $J(u)$ в окрестности точки u_k:

$$J(u) \simeq J(u_k) + \left[\langle J'(u_k), u - u_k\rangle + \frac{1}{2}\left\langle J''(u_k)(u - u_k), u - u_k\right\rangle\right].$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $J_k(u)$ (квадратично по u).

На каждом шаге процесса находится минимум

$$\overline{u}_k = \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbf{U}} J_k(u). \tag{2}$$

И вычисляется следующее приближение по формулам (в общем случае):

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\overline{u}_k - u_k), \qquad \alpha_k = \operatorname*{argmin}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} J(u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)).$$

Но мы будем рассматривать метод в более простом варианте, когда α_k не минимизируются и принимаются равными 1. В этом случае $u_{k+1} = \overline{u}_k$. Это "классический" метод Ньютона.

Теорема 16. *Пусть* $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ *— выпуклое, замкнутое множество, причём* $\operatorname{int} \mathbf{U} \neq \varnothing$, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ *и сильно выпукла с коэффициентом* $\kappa > 0$, $J''(u) \in \mathbf{Lip}(\mathbf{U})$ *с константой* $L > 0$. *Тогда если* $q = \frac{L}{2\kappa} \|u_1 - u_0\|_{\mathbb{H}} < 1$, *то метод (2) сходится к* u_* *и верна следующая оценка скорости сходимости:*

$$\|u_k - u_*\|_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{2\kappa}{L} \cdot q^{2^k} \left(1 - q^{2^k}\right)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3).$$

Метод сопряжённых направлений (градиентов)

В этом пункте рассмотрим задачу минимизации для функционалов специального вида в конечномерном гильбертовом пространстве:

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle \to \inf, \quad u \in \mathbb{R}^n = \mathbf{U}, \quad A^* = A > 0. \qquad (1)$$

Критерием оптимальности для такой задачи является условие $J'(u_*) = 0$, которое эквивалентно условию $Au_* = f$.

Идея метода сопряжённых градиентов заключается в следующем. Пусть $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой точки u_0 из $\mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$u_* - u_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_{n-1} p_{n-1}.$$

Таким образом, u_* представимо в виде

$$u_* = u_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_{n-1} p_{n-1}.$$

Тогда итерационную последовательность данного метода можно описать как

$$\begin{aligned} &u_0 = u_0 \\ &u_1 = u_0 + \alpha_0 p_0 \\ &u_2 = u_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

(точное описание итерации будет дано ниже).

Подействовав на вышеприведённое равенство оператором A, получим

$$f - Au_0 = \alpha_0 Ap_0 + \alpha_1 Ap_1 + \ldots + \alpha_{n-1} Ap_{n-1}.$$

Выражение $f - Au_0$ считаем известным, и наша задача состоит в нахождении α_i, а также "правильного" выбора базиса $\{p_k\}$.

Определение. Векторы p и q называются *сопряжёнными относительно матрицы* $R = R^* > 0$, если $\langle Rp, q\rangle = 0$. По-другому это называют ортогональностью относительно скалярного произведения $\langle p, q\rangle_R = \langle Rp, q\rangle$.

Если $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ — базис из сопряжённых относительно A векторов, то

$$\alpha_k = \frac{\langle f - Au_0, p_k\rangle}{\langle Ap_k, p_k\rangle}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{α}$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, $A = A^* > 0$, $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ *— базис из сопряжённых относительно* A *векторов,* $u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1}p_{k-1}$, *где* α_k *вычисляются по формулам* (α). *Тогда*

$$\alpha_k = \alpha_k^* = \underset{-\infty<\alpha<+\infty}{\operatorname{argmin}} J(u_k + \alpha p_k) = -\frac{\langle J'(u_k), p_k\rangle_{\mathbb{H}}}{\langle Ap_k, p_k\rangle_{\mathbb{H}}} \tag{2}$$

и

$$\langle J'(u_{k+1}), p_k\rangle_{\mathbb{H}} = 0 \quad \forall k = \overline{0, n-1} \tag{3}$$

Опишем подробнее итерации в рассматриваемом методе. В качестве первого приближения берём любую точку из $\mathbb{R}^n$, а первый вектор будущего базиса вычисляем как значение производной функции $J(u)$ в данной точке:

$$\begin{cases} \forall u_0 \in \mathbb{R}^n \\ p_0 = -J'(u_0) \end{cases}$$

Теперь пусть требуется вычислить $k+1$-ю итерацию, когда предыдущие k уже вычислены, тогда применяем следующие формулы:

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, & (4u) \\ p_{k+1} = -J'(u_{k+1}) + \beta_k p_k & (4p) \end{cases}$$

α_k здесь вычисляются по формулам (α) или (2) (обозначим для однообразия формулы (2) как (4α)). Коэффициенты же β_k берутся таким образом, чтобы для p_{k+1} сохранялась ортогональность (сопряжённость) с p_k:

$$\beta_k = \frac{\langle J'(u_{k+1}), Ap_k\rangle}{\langle Ap_k, p_k\rangle} \tag{4β}$$

Теорема 17. *Пусть* $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ *— гильбертово пространство,* $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle$, $A^* = A > 0$. *Тогда метод (4) сходится к* u_* *за конечное число шагов (не превосходящее* n*), причём*

(a) $\langle Ap_k, p_m\rangle = 0 \quad \forall k \neq m$;

(b) $\langle J'(u_k), J'(u_m)\rangle = 0 \quad \forall k \neq m$;

(c) $\langle J'(u_k), p_m\rangle = 0 \quad \forall m = 0, 1, \ldots, k-1$.

Метод покоординатного спуска

Здесь мы будем рассматривать экстремальную задачу в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\{p_k\}_{k=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Положим $p_{n+1} = p_1$, $p_{n+2} = p_2$, ... Пусть также $u_0 \in \mathbb{R}^n$ — некое начальное приближение. Предположим, что уже построены k приближений u_k и мы находимся на $k+1$-ом шаге итерации.

Назовём $(k+1)$-й шаг итерации *удачным*, если

$$\left[\begin{array}{l} J(u_k - \alpha_k p_{k+1}) < J(u_k), \\ J(u_k + \alpha_k p_{k+1}) < J(u_k). \end{array}\right.$$

В противном случае назовём шаг *неудачным*.

Если шаг удачный, то обновляем u_k (берём то значение, где меньше $J(u_{k+1})$) и не меняем α_k: $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. Если же шаг неудачный, то переходим к обработке p_{k+2}.

Кроме того, ведётся подсчёт неудачных шагов "подряд". Если это число становится равным размерности пространства, то происходит дробление α: u_{k+1} оставляем равной u_k, переходим к обработке вектора p_{k+2}, и полагаем $\alpha_{k+1} = \lambda \alpha_k$, где $\lambda \in (0,1)$ — наперёд заданный коэффициент дробления (обычно его берут равным $1/2$).

Теорема 18. *Пусть функция $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$ и выпукла, множество Лебега $M(u_0) = \{u \in \mathbb{R}^n | J(u) \leqslant J(u_0)\}$ ограничено. Тогда описанный выше процесс сходится и по функции и по аргументу:*

$$J(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} J_*; \quad \rho(u_k, \mathbf{U}_*) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Задачи линейного программирования

В этом пункте мы рассмотрим задачу минимизации функционала $J(u) = \langle c, u\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, где c фиксировано из $\mathbb{R}^n$.

Общая задача линейного программирования рассматривается на множестве

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | \, \langle a_i, u\rangle = b_i, \langle \overline{a_i}, u\rangle \leqslant \overline{b_j}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,s}\} \tag{1}$$

Если ввести ряд обозначений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \dots \\ \overline{a_s} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \dots \\ \overline{b_s} \end{pmatrix},$$

то множество $\mathbf{U}$ можно описать в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b, \overline{A}u \leqslant \overline{b}\}.$$

Наряду с общей задачей (1) мы будем рассматривать *каноническую* задачу линейного программирования на множестве

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b, u \geqslant 0\}. \tag{2}$$

Заметим, что задача (1) сводится к задаче (2). Действительно, положим в (1)

$$w_i = \max\{0, u_i\} \geqslant 0, \quad v_i = \max\{0, -u_i\} \geqslant 0, \quad y = \overline{b} - \overline{A}u \geqslant 0.$$

Тогда можно рассмотреть задачу (2) относительно новой переменной z:

$$z = (y, v, w) \in \mathbb{R}^{2n+s},\ z \geqslant 0$$

$$J(u) = \langle c, u \rangle = \langle c, w - v \rangle \text{ — линейна по } z \text{ (не зависит от } y),$$

а ограничения задаются равенством $A(w - v) = b$.

Определение. Точка v выпуклого множества $\mathbf{U}$ называется *угловой* точкой этого множества, если из соотношения $v = \alpha x + (1 - \alpha)y$, где $x, y \in \mathbf{U}, \alpha \in (0, 1)$, следует, что $v = x = y$.

Теорема 19 (критерий угловой точки для канонического U). *Пусть матрица $A = (A_1|A_2|\cdots|A_n)$ (расписано по столбцам). Точка v является угловой точкой канонического множества $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда существует набор столбцов $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_r)$, $r = \operatorname{rank} A$, причём*

$$A_{j_1} v_{j_1} + A_{j_2} v_{j_2} + \cdots + A_{j_r} v_{j_r} = b, \tag{3}$$

где $v_{j_i} \geqslant 0$ $(i = \overline{1, r})$, а $\forall j \notin J_b = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \quad v_j = 0$.

Определение. Угловая точка v канонического множества $\mathbf{U}$ называется *невырожденной*, если существует такой набор J_b, что $v_j > 0$ для всех $j \in J_b$. Эти координаты (j) называются *базисными* для точки v:

$$B = (A_{j_1}|A_{j_2}|\ldots|A_{j_r}) \text{ — базис } v.$$

Определение. Если у множества $\mathbf{U}$ все угловые точки невырожденные, то задача минимизации (2) называется *невырожденной.*

Симплекс-метод

Здесь мы применим аппарат угловых точек для рассмотрения оптимизационной задачи следующего вида:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf \quad u \in \mathbf{U} = \{u \geqslant 0, Au = b\} \tag{1}$$

Идея метода лежит в переборе лишь только угловых точек множества $\mathbf{U}$. Часто это позволяет найти оптимальное решение быстрее рассмотренных выше методов. Перейдем к описанию симплекс-метода.

Пусть имеется угловая точка v множества $\mathbf{U}$ (каким образом она находится, нам сейчас не важно). Будем считать также, что из матрицы A выкинуты все линейно зависимые строки (в системе нет линейно зависимых уравнений), то есть $r = \operatorname{rank} A = m$. Находясь в условиях Теоремы 19, можно записать, что $v_b = (v_{j_1}, \ldots, v_{j_r})$ — базисные для v, $v_{j_r} \geqslant 0$, а остальные v_j равны нулю. Обозначим через J_b множество $\{j_1, \ldots, j_r\}$, а через J_f — множество $\{1, \ldots, n\} \backslash J_b$. Пусть далее для соответствующих A_{j_i} матрица $B = (A_{j_1}|A_{j_2}|\cdots|A_{j_r})$, а остальные столбцы матрицы A образую некую матрицу $F_{r \times (n-r)}$. По определению B и Теореме 19 $\det B \neq 0$, и существует обратная матрица B^{-1}.

Разобьём вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ на базисные переменные $u_b = (u_{j_1}, \ldots, u_{j_n})$ и на свободные переменные u_f. Тогда условие $Au = b$ можно записать как $Bu_b + Fu_f = b$.

В этом случае для u_b в (1) справедливо равенство $u_b = B^{-1}b - B^{-1}Fu_f$, а так как $Av = b$ тогда и только тогда, когда $Bv_b + Fv_f = Bv_b = b$, то это равенство можно переписать как $u_b = v_b - B^{-1}Fu_f$. Теперь от канонических ограничений $u \geqslant 0$ можно перейти к неканонической форме:

$$\begin{cases} u_f \geqslant 0, \\ B^{-1}Fu_f \leqslant v_b. \end{cases}$$

Для функции $J(u)$, используя те же рассуждения, можно написать:

$$\begin{aligned} J(u) = \langle c, u\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle c_b, u_b\rangle_{\mathbb{R}^r} + \langle c_f, u_f\rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} = \\ = \langle c_b, v_b\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle c_f - (B^{-1}F)^T c_b, u_f\right\rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} = J(v) - \langle \Delta, u_f\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где $J(v) = \langle c, v\rangle$, $-\Delta = c_f - (B^{-1}F)^T c_b$.

Введём обозначение

$$g(u_f) = J(v) - \langle \Delta, u_f\rangle_{\mathbb{R}^{n-r}}. \quad (3)$$

Заметим, что в этом случае $J(v) = C \equiv const$. Тогда задача (1) сводится к задаче с меньшим количеством переменных, но с неканоническими ограничениями:

$$\begin{cases} g(u_f) = J(v) - \sum\limits_{j\in J_f} \Delta_j u_j \to \inf, \\ u_f \in \mathbf{U}_f = \{u_f \geqslant 0,\ (B^{-1}F)u_f \leqslant v_b\}. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим через J_f^+ множество тех $j \in J_f$, для которых $\Delta_j > 0$. И пусть $k \in J_f^+$, например, самый меньший:

$$k = \min_{j\in J_f^+} j. \quad (5)$$

Рассмотрим для (4) подзадачу минимизации функции от одной переменной $u_f = (0, \ldots, 0, u_k, 0, \ldots, 0)$:

$$\begin{cases} g_k(u_k) = J(v) - \Delta_k u_k \to \inf, \\ u_k \in \mathbf{U}^k = \{u_k \geqslant 0,\ (B^{-1}F)_k u_k \leqslant v_b\}. \end{cases}$$

Обозначим через γ_k вектор $(B^{-1}F)_k = B^{-1}A_k$, и пусть

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1k} \\ \gamma_{2k} \\ \vdots \\ \gamma_{rk} \end{pmatrix}, \quad I_k^+ = \{i = \overline{1, r} \mid \gamma_{ik} > 0\}, \quad (6)$$

(I_k^+ есть множество “реальных” ограничений сверху на u_k). Тогда в качестве решения подзадачи можно взять

$$\theta_k = \min_{i\in I_k^+} \left(\frac{v_{ji}}{\gamma_{ik}}\right). \quad (7)$$

Опишем теперь непосредственно сам метод. Возможны следующие ситуации.

1) $J_f^+ = \varnothing$. В этом случае v принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$ (оптимальна) и мы останавливаемся.

2) $J_f^+ \neq \varnothing$, и существует такой номер $k \in J_f^+$, что $I_k^+ = \varnothing$. Но тогда нет "реальных" ограничений на u_k, которые могут бесконечно возрастать. Откуда $J_* = -\infty$, $\mathbf{U}_* = \varnothing$ и процесс итерирования следует остановить.

3) Множество J_f^+ не пусто и для любого k из J_f^+ соответствующее множество I_k^+ также не пусто. (Этот случай представляет собой непосредственно "шаг" метода.)

   Берём k по правилу (5), $u_k = \theta_k$ по правилу (7).

   В (7) минимум может достигаться на нескольких номерах, поэтому введём супер-мега-множество

$$\left(I_k^+\right)_* = \left\{ i \in I_k^+ \mid \frac{v_{ji}}{\gamma_{ik}} = \theta_k \right\},$$

   и из него выберем, например, наименьший элемент $s = \min\limits_{i \in \left(I_k^+\right)_*} i$.

   После этого переходим к рассмотрению следующей угловой точки $w \in \mathbf{U}$, которая вычисляется по правилу $w_b = v_b - B^{-1} A_k u_k$. Докажем, что при использовании такого правила мы действительно получим угловую точку.

   Для точки w соответствующая ей матрица B будет иметь вид

$$B(w) = (A_{j_1} | \cdots | A_{j_{s-1}} | A_k | A_{j_{s+1}} | \cdots | A_{j_r}).$$

   Нам необходимо показать, что это есть базис. Сделаем это по определению. Пусть

$$\alpha_1 A_{j_1} + \ldots + \alpha_{s-1} A_{j_{s-1}} + \alpha_k A_k + \alpha_{s+1} A_{j_{s+1}} + \ldots + \alpha_r A_{j_r} = 0.$$

   Подставим в это равенство $A_k = B\gamma_k = \gamma_{1k} A_{j_1} + \ldots + \gamma_{rk} A_{j_r}$. Тогда так как $B(v)$ есть базис, то необходимо должно выполняться

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_k \gamma_{ik} = 0, & \forall i \neq s, \\ \alpha_k \gamma_{sk} = 0. \end{cases}$$

   Отсюда следует, что все α_i равны нулю, то есть $B(w)$ — базис.

   Таким образом, по Теореме 19 мы получаем, что w действительно угловая точка множества $\mathbf{U}$.

Замечания.

1) В случае, когда v вырождена, $\theta_k = 0$ и $v = w$. При этом может произойти зацикливание процесса, но правила выбора k и s (правила Блэнда) позволяют избежать этого.

2) Если угловых точек в множестве $\mathbf{U}$ конечное число, то остановка процесса произойдёт через конечное число шагов на случаях 1) или 2).

В конце пункта сформулируем обобщающую наши рассуждения теорему.

Теорема 20 (к задаче линейного программирования). *В задаче линейного программирования выполняются следующие утверждения:*

1) если $\mathbf{U} \neq \varnothing$, то в $\mathbf{U}$ существует по крайней мере одна угловая точка;

2) если $J_* > -\infty$, то во множестве U_* содержится по крайней мере одна точка.

Доказательство.

Доказательство этой теоремы, по сути, приводится в обосновании симплекс-метода (перебора по угловым точкам). $\square$

Замечание. Утверждение 2) справедливо именно для задачи линейного программирования. В противном случае это, вообще говоря, не верно. Например, если $J(u) = e^{-u}$ (это не задача линейного программирования), то $\mathbf{U} = \mathbb{R}^1$, $J_* = 0$, но $U_* = \varnothing$.

6 Методы снятия ограничений

В этой главе рассматриваются задачи минимизации функционалов

$$J(u) \to \inf,\ u \in \mathbf{U}$$

с учётом ограничений на множество $\mathbf{U}$.

Эти ограничения могут быть "терпимыми", например, u может принадлежать не всему пространству, а какому-либо подмножеству этого пространства. Такие ограничения мы не рассматриваем и считаем, что их можно обойти простыми методами.

Нас же будут интересовать более "функциональные" ограничения на u. Рассмотрим конкретный пример:

$$u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subset \mathbb{H} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s} = 0\},$$

где g_i какие-либо функции.

Здесь интересующие нас ограничения это m ограничений типа "неравенство" и s ограничений типа "равенство" ("терпимым" ограничением является принадлежность точки u множеству $\mathbf{U}_0$).

Естественно, какие-либо из ограничений могут отсутствовать.

Метод штрафов

В этом методе рассматривается задача минимизации с ограничениями следующего вида:

$$J(u) \to \inf,\ u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subset \mathbb{H} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, \\ g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s} = 0\} \quad (1)$$

Рассмотрим функцию (называемую *штрафом* или *штрафной функцией*):

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m+s} (g_i^+(u))^{p_i}, \quad p_i \geqslant 1 \text{ (обычно } p_i = 2).$$

Функции $g_i^+(u)$ называют *индивидуальными штрафами*. В качестве конкретного примера можно взять

$$g_i^+(u) = \max\{g_i(u), 0\},\ i = \overline{1, m},$$
$$g_i^+(u) = |g_i(u)|\,,\ i = \overline{m+1, m+s}.$$

Легко видеть, что условие

$$\begin{cases} P(u) = 0, \\ u \in \mathbf{U}_0 \end{cases}$$

выполняется тогда и только тогда, когда точка u принадлежит множеству $\mathbf{U}$.

Из штрафной функции $P(u)$ формируются формулы вида

$$\Phi_k(u) = J(u) + A_k P(u), \quad A_k > 0, A_k \to \infty \text{ при } k \to \infty, u \in \mathbf{U}_0, k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Теперь от задачи (1) мы переходим к последовательности задач (2). Пусть точки $u_k \in \mathbf{U}_0$ таковы, что

$$\Phi_{k*} \equiv \inf_{\mathbf{U}_0} \Phi_k \leqslant \Phi_k(u_k) \leqslant \Phi_{k*} + \varepsilon_k \tag{3}$$

(их можно получить, например, методами, изложенными в предыдущей главе). Используя эту последовательность точек, сформулируем основную теорему в этом пункте.

Теорема 21. *Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, множество $\mathbf{U}_0$ слабо замкнуто; $J(u)$, $g_i^+(u)$ слабо полунепрерывны снизу на $\mathbf{U}_0$; точка*

$$J_0 = \inf_{\mathbf{U}_0} J(u)$$

конечна; множество

$$\mathbf{U}(\delta) = \{u \in \mathbf{U}_0 : g_i^+(u) \leqslant \delta, i = \overline{1, m+s}\}$$

ограничено в $\mathbb{H}$ для некоторого $\delta > 0$; $A_k \to +\infty$, $\varepsilon_k \to +0$, тогда последовательность $J(u_k)$ стремится к минимуму $J(u)$:

$$J(u_k) \to \inf \quad (J(u_k) \to J_*),$$

и все слабые предельные точки последовательности $\{u_k\}$ содержатся во множестве $\mathbf{U}_*$.

Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач

В этом пункте рассматриваем следующую задачу минимизации:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subset \mathbf{L} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0\} \tag{1}$$

Можно рассмотреть и случай, когда есть ограничения типа "равенство", но при этом они обязаны быть линейными (в предыдущем методе на такие ограничения также накладываются жёсткие условия в виде слабой полунепрерывности снизу, так что они "почти" линейны).

Назовём задачу (1) *выпуклой*, если множество $\mathbf{U}_0$ выпукло, $\mathbf{L}$ представляет собой линейное пространство, функции g_i выпуклы.

Построим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \lambda_0 J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^{m+1}).$$

Числа λ_i называют *множителями Лагранжа.*

Теорема 22 (теорема Ку́на-Та́ккера). *Пусть задача* (1) *выпукла в указанном смысле. Тогда*

1) если точка u_* является оптимальной ($u_* \in \mathbf{U}_*$), то существует набор множителей Лагранжа $\lambda^* \neq 0$ такой, что

i)

$$\min_{u \in \mathbf{U}_0} \mathcal{L}(u, \lambda^*) = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*) \text{ — принцип минимума;}$$

ii)

$$\lambda_i^* \geqslant 0, \quad i = \overline{0, m} \text{ — условия неотрицательности множителей Лагранжа;}$$

iii)

$$\lambda_i^* g_i(u_*) = 0, \quad i = \overline{1, m} \text{ — условия, дополняющие нежёсткости.}$$

2) если для некоторой пары (u_*, λ^*) выполняются условия i)-iii) и, кроме того, $u_* \in \mathbf{U}$ и $\lambda_0^* \neq 0$, то u_* — оптимальная точка ($u_* \in \mathbf{U}_*$).

Замечание о регулярности

Рассмотрим пример, в котором $\lambda_0^* = 0$. Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$, $J(u) = -u \to \inf$, $\mathbf{U}_0 = \mathbb{R}^1$, $g_1(u) = u^2$, $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 \mid u^2 \leqslant 0\} = \{0\} = \mathbf{U}_*$. Докажем, что в любом наборе $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*)$ обязательно $\lambda_0^* = 0$. По Теореме 22 найдётся неотрицательный набор $(\lambda_0^*, \lambda_1^*)$ такой, что будет выполняться условие i): $-\lambda_0^* u + \lambda_1^* u^2 \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^1$.

Разделим это неравенство на $u > 0$: $-\lambda_0^* + \lambda_1^* u \geqslant 0 \quad \forall u > 0$, и устремим u к нулю. Получим $-\lambda_0^* \geqslant 0$.

Отсюда с учётом условия неотрицательности множителей Лагранжа имеем $\lambda_0^* = 0$.

Достаточные условия регулярности (условия Сле́йтера)

Достаточным условием на регулярность является существование точки $u_0 \in \mathbf{U}_0$ такой, что $g_1(u_0) < 0, \ldots, g_m(u_0) < 0$. Для доказательства этого факта предположим, что в некотором (ненулевом) наборе λ^* первая координата λ_0^* равна нулю, тогда функция Лагранжа на этом наборе равна:

$$\mathcal{L}(u_0, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_0) < 0 = \mathcal{L}(u_*, \lambda^*),$$

и мы приходим к противоречию с принципом минимума.

Приведём аналог теоремы Куна-Таккера в несколько иной формулировке. Для этого сначала введём одно

Определение. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — множества произвольной природы. $f: \ \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbb{R}^1$. Точка (x_*, y^*) называется *седловой* точкой функции f на множестве $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, если

$$f(x_*, y) \leqslant f(x_*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \quad \forall x \in \mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{Y}.$$

Теорема 23 (седловая форма теоремы Куна-Таккера). *Пусть выполняются условия Теоремы 22 и условия регулярности Слейтера. Тогда точка u_* принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$ (u_* — оптимальная точка) тогда и только тогда, когда классическая функция Лагранжа (с $\lambda_0 = 1$) имеет седловую точку (u_*, λ^*) на множестве $\mathbf{U}_0 \times \mathbb{R}^m_+$.*

$$J(u_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u_*) \leqslant J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(u) \quad \forall u \in \mathbf{U}_0 \qquad (b)$$

Правило множителей Лагранжа для гладких задач

В этом пункте рассматривается задача минимизации с ограничениями:

$$J(u) \to \inf \quad u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, \\ g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s}(u) = 0\}, \quad (1)$$

где $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство, с дополнительными требованиями на гладкость функций. Здесь мы кратко рассмотрим лишь необходимое условие локального минимума.

Для начала введём несколько понятий (некоторые из них приведены лишь в качестве напоминания).

Определение. Точка u_* называется *точкой локального минимума* функции $J(u)$, если существует такое положительное число ε, что для любой точки $u \in \mathbf{U}_\varepsilon \cap \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}_\varepsilon = \{u \ : \ \|u - u_*\| < \varepsilon\}$, выполняется условие $J(u_*) \leqslant J(u)$.

Определение. Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство, $M \subset \mathbf{X}$, $x_0 \in M$. Вектор $h \in \mathbf{X}$ называют *касательным* ко множеству M в точке x_0, если существует отображение $\varphi(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbf{X}$, обладающее свойствами:

1) $x_0 + th + \varphi(t) \in M$;
2) $\varphi(t) = o(t)$, то есть $\frac{\|\varphi(t)\|_{\mathbf{X}}}{t} \to 0$ при $t \to 0$.

Вообще говоря, для наших целей достаточно существования отображения переводящего в $\mathbf{X}$ не всю действительную ось $\mathbb{R}^1$, а лишь какой-либо интервал $(-\varepsilon; \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $T_{x_0}M$ все касательные векторы ко множеству M в точке x_0.

Теорема (Люсте́рник). [АТФ, стр. 171-174]

Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — банаховы пространства, отображение $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ дифференцируемо по Фреше, $M = \{x \in \mathbf{X} \mid F(x) = 0\}$, $x_0 \in M$, $\operatorname{im} F'(x_0) = \mathbf{Y}$. Тогда $T_{x_0}M = \ker F'(x_0)$.

Теорема 24. *Пусть u_* — точка локального минимума в задаче* (1)*; $J(u), g_i(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U}_\varepsilon)$ для некоторого положительного ε. Тогда существует ненулевой набор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \ldots, \lambda_{m+s}^*)$, обладающий следующими свойствами:*

i) $\mathcal{L}'_u(u_*, \lambda^*) = \lambda_0^* J'(u_*) + \sum\limits_{i=1}^{m+s} \lambda_i^* g'_i(u_*) = 0$

— *условие стационарности функции Лагранжа*;

ii) $\lambda_i^* \geqslant 0 \quad \forall i = \overline{0, m}$ — *условия неотрицательности множителей Лагранжа*;

iii) $\lambda_i^* g_i(u_*) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$ — *условия, дополняющие нежёсткости.*

Двойственные экстремальные задачи

В этом пункте рассмотрим задачу минимизации

$$\begin{gathered} J(u) \to \inf, \\ u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{U}_0 \subseteq \mathbf{L} \mid g_1(u) \leqslant 0, \ldots, g_m(u) \leqslant 0, g_{m+1}(u) = 0, \ldots, g_{m+s}(u) = 0\}\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Для решения подобных задач иногда легче перейти к решению так называемых *двойственных задач*. Опишем этот процесс. Строим функцию Лагранжа для задачи (1):

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = 1 {\cdot} J(u) + \sum_{i=1}^{m+s} \lambda_i g_i(u),\ u \in \mathbf{U}_0,\ \lambda \in \Lambda_0 = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \lambda_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}\right\}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(u) = \sup_{\lambda \in \Lambda_0} \mathcal{L}(u, \lambda) = \begin{cases} J(u), \text{ если } u \in \mathbf{U}, \\ +\infty, \text{ если } u \in \mathbf{U}_0 \backslash \mathbf{U} \end{cases}. \tag{3}$$

Задача (1) равносильна задаче минимизации на расширенном множестве:

$$\varphi(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U}_0. \tag{4}$$

Вводим функцию

$$\psi(\lambda) = \inf_{u \in \mathbf{U}_0} \mathcal{L}(u, \lambda). \tag{5}$$

Определение. Задача

$$\psi(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda_0 \tag{6}$$

называется *двойственной* к исходной задаче (1).

Теорема 25. *Всегда верны неравенства:*

$$\psi(\lambda) \leqslant \psi^* \leqslant \varphi_* = J_* \leqslant \varphi(u), \quad \forall \lambda \in \Lambda_0,\ \forall u \in \mathbf{U}_0. \tag{7}$$

Для того, чтобы

$$\psi^* = \varphi_*,\ \mathbf{U}_* \neq \varnothing,\ \Lambda^* \neq \varnothing, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{L}(u, \lambda)$ имела седловую точку на $\mathbf{U}_0 \times \Lambda_0$; $\mathbf{U}_* \times \Lambda^*$ — множество всех седловых точек.

Вторая двойственная задача

Введём понятие второй двойственной задачи. Для этого рассмотрим один

Пример.

Рассмотрим минимизацию функции $J(u) = u^2$ на множестве

$$\mathbf{U} = \{g(u) = u^2 - 1 \leqslant 0\} = [-1, 1].$$

Имеем:
$$J_* = \varphi_* = 0,\ \mathbf{U}_* = \{0\} \neq \varnothing,$$
$$\mathcal{L}(u, \lambda) = u^2 + \lambda(u^2 - 1)$$

Получаем $\psi(\lambda) = -\lambda$, если $\lambda \geqslant -1$ (в нашем случае $\lambda \geqslant 0$).

Теперь поставим двойственную задачу к $\psi(\lambda)$:

$$\psi(\lambda) = -\lambda \to \sup_{\lambda \geqslant 0},\ \psi^* = 0 = \psi(0),\ \Lambda^* = \{0\} \neq \varnothing.$$

Перейдём к задаче на минимум ($\overline{J}(v) = -\psi(v)$):

$$\overline{J}(v) = v \to \inf,\ v \geqslant 0, \quad (v := \lambda)$$

$$v \in V = \{v \in \mathbb{R}^1 = V_0 \mid g(v) = -v \leqslant 0\}$$

Отсюда получаем функцию Лагранжа:

$$\overline{\mathcal{L}}(v, \mu) = 1 \cdot v + \mu(-v),\ \mu \geqslant 0$$

$$\overline{\psi}(\mu) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu = 1, \\ -\infty, \text{ если } \mu \neq 1 \end{cases}.$$

Определение. Задача максимизации функции $\overline{\psi}(\mu)$ при $\mu \geqslant 0$ называется *второй двойственной задачей.*

Приведённый пример показывает, что вторая двойственная задача не всегда совпадает с исходной.

7 Простейшая задача оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина

В этой главе мы коснёмся задачи оптимизации, которую принято называть задачей *оптимального управления.* Более подробно этот вопрос освещается в соответствующем курсе, мы же рассмотрим его, исходя из наших потребностей.

В общем виде рассматриваемая задача выглядит следующим образом:

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), u(t), t)\, dt + \varphi(x(T)) \to \inf$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ почти всюду для } t_0 < t < T,\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$u \in \mathbf{U} = \{u(t) - \text{измерима по Лебегу } \mid u(t) \in V \subseteq \mathbb{R}^r \text{ для почти всех } t\}$$

Функционал f^0 принято называть *интегрантом*, а функционал φ — *терминантом.* Заметим, что в такой постановке отсутствуют фазовые ограничения на $x(t)$ ($x(t) \in G \subseteq \mathbb{R}^n$), что облегчает нам исследование задачи.

Предположим существование $f, f_x, f^0, f^0_x, \varphi, \varphi_x$ их непрерывность по t, и Липшиц-непрерывность по x и u на $\mathbb{R}^n \times V \times [t_0; T]$. (В принципе можно обойтись без Липшиц-непрерывности, но при этом многие выкладки значительно усложняются.) В дальнейшем будем ссылаться на подобное существование отметкой (2).

Функция Гамильтона-Понтрягина. Принцип максимума

В этом пункте рассмотрим функцию следующего вида:

$$H(x,u,t,\psi) = f^0(x,u,t) + \langle \psi, f(x,u,t)\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

называемой функцией Гамильтона-Понтрягина.

Введём ряд обозначений:

$$\Delta J = J(u+h) - J(u),$$

$$\Delta x = x(t,u+h) - x(t,h),$$

$$\Delta f^0 = f^0\left(x(t,u+h), u(t)+h(t), t\right) - f^0\left(x(t,u), u(t), t\right).$$

Преобразуем $\Delta J(u)$ так, чтобы получить принцип максимума.

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta f^0\, dt + \Delta\varphi. \tag{3}$$

Применяя формулу конечных приращений, имеем

$$\Delta\varphi = \langle \varphi_x\left(x(T) + \theta\Delta x(T)\right) \pm \varphi_x(x(T)), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{R}_\varphi,$$

где $\theta \in [0,1]$, $\mathcal{R}_\varphi$ — некоторый остаток.

Таким образом, получаем

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta f^0\, dt + \langle \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{R}_\varphi. \tag{4}$$

Введём обозначение

$$\psi(T) = \varphi_x\left(x(T)\right). \tag{5}$$

Тогда

$$\langle \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle = \langle \psi(T), \Delta x(T)\rangle = \{\Delta x(t_0) = 0\} = \langle \psi(T), \Delta x(T)\rangle - \langle \psi(t_0), \Delta x(t_0)\rangle =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\langle \psi(t), \Delta x(t)\rangle\, dt = \int\limits_{t_0}^{T} \langle \psi'(t), \Delta x(t)\rangle\, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \langle \psi(t), \Delta x'(t)\rangle\, dt.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta H\, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \langle \psi'(t), \Delta x(t)\rangle\, dt + \mathcal{R}_\varphi. \tag{6}$$

Теперь, используя формулу конечных приращений и элементарные преобразования, представим ΔH в несколько ином виде:

$$\Delta H = \left(H\left(x(t,u+h), u+h, t, \psi\right) - H\left(x(t,u), u+h, t, \psi\right)\right) +$$
$$+ \left(H\left(x(t,u), u+h, t, \psi\right) - H\left(x(t,u), u, t, \psi\right)\right) =$$
$$= \langle H_x\left(x(t) + \theta(t)\Delta x(t), u+t, t, \psi\right), \Delta x(t)\rangle + \Delta_u H,$$

где $\theta \in [0;1]$, а через $\Delta_u H$ обозначено второе слагаемое.

Продолжая цепочку равенств, получаем

$$\Delta H = \langle H_x(x,u,t,\psi), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H + \mathcal{R}_H(t),$$

где $\mathcal{R}_H(t)$ — некий остаток, связанный с $H(\ldots)$. Имеем:

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \langle \psi' + H_x, \Delta x \rangle \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t) \, dt + \mathcal{R}_\varphi. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\psi'(t) = -H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)). \tag{8}$$

При выполнении этого условия выражение (7) преобразуется в

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H \, dt + \int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t) \, dt + \mathcal{R}_\varphi. \tag{9}$$

Оценим остатки в этом выражении. Для этого рассмотрим сначала производную приращения x:

$$\begin{cases} \Delta x'(t) = \Delta f(t), \quad t_0 < t < T; \\ \Delta x(t_0) = 0. \end{cases}$$

Перейдём к эквивалентной интегральной форме:

$$\Delta x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Delta f(\tau) \, d\tau.$$

Тогда из условия Липшица получим:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \, d\tau + L \int\limits_{t_0}^{t} \| \underbrace{h(\tau)}_{=\Delta u(\tau)} \|_{\mathbb{R}^r} \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta x(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \, d\tau + L \int\limits_{t_0}^{T} \|h(\tau)\|_{\mathbb{R}^r} \, d\tau.$$

По лемме Гронуола-Бэллмана имеем:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant L \|h\|_{\mathbf{L}^1(t_0;T)} \exp\left\{L(t - t_0)\right\}.$$

Возьмём максимум по t от обоих частей этого неравенства:

$$\|\Delta x(t)\|_{\mathbf{C}[t_0;T]} \leqslant \mathrm{const} \|h\|_{\mathbf{L}^1(t_0;T)} = O\left(\|h\|_{\mathbf{L}^1}\right).$$

Тогда для остатка $\mathcal{R}_\varphi$, используя условия Липшица и применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем следующую оценку:

$$|\mathcal{R}_\varphi| = |\langle \varphi_x\left(x(T)+\theta\Delta x(T)\right) - \varphi_x\left(x(T)\right), \Delta x(T)\rangle_{\mathbb{R}^n}| \leqslant \\ \leqslant \{\theta\in[0;1]\} \leqslant L\|\Delta x(T)\|^2_{\mathbb{R}^n} = O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right)$$

Оценим остаток $\mathcal{R}_H(t)$.

$$\mathcal{R}_H(t) = \langle H_x\left(x(t)+\theta(t)\Delta x(t), u(t)+h(t), t, \psi(t)\right) - H_x\left(x(t), u(t)+h(t), t, \psi(t)\right), \Delta x(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского и условий (2) получаем

$$\left|\int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t)\,dt\right| \leqslant L\int\limits_{t_0}^{T} \|\theta(t)\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\left(1+\|\psi\|_{\mathbf{C}}\right)\|\Delta x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\,dt.$$

И так как ψ непрерывна и промежуток ограничен, то

$$\left|\int\limits_{t_0}^{T} \mathcal{R}_H(t)\,dt\right| = O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right).$$

Из оценок остатков получаем формулу

$$\Delta J = \int\limits_{t_0}^{T} \Delta_u H\,dt + O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1(t_0;T)}\right). \tag{10}$$

Теперь сформулируем основную теорему пункта.

Теорема 26 (принцип максимума Понтрягина). *Пусть для задачи* (1) *выполняются условия* (2), $u(t)$ *— оптимальное управление,* $x(t)$ *— соответствующая оптимальная траектория,* $\psi(t)$ *— решение сопряжённой задачи* (5), (8). *Тогда*

$$H\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right) = \min_{v\in V\subseteq\mathbb{R}^n} H\left(x(t), v, t, \psi(t)\right) \tag{11}$$

для почти всех t.

Об использовании принципа максимума

Заметим, что используя принцип максимума, мы, по сути, переходим от бесконечномерной задачи к континууму конечномерных задач. (Параметр t можно считать при этом “номером” задачи.) Иногда это позволяет упростить решение, иногда нет. Принцип максимума даёт нам лишь необходимые условия на оптимальность, то есть управления, ему удовлетворяющие, на самом деле есть лишь “подозрительные” на оптимальность управления.

Предположим, что $u(t, x, \psi)$ — оптимальное управление, на котором достигается (11). Тогда, подставляя его в наши условия, имеем систему:

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(x(t), u\left(t, x(t), \psi(t)\right), t\right) \\ x(t_0) = x_0 \\ \psi'(t) = -H_x\left(x(t), u\left(t, x(t), \psi(t)\right), t\right), t, \psi(t)) \\ \psi(T) = -\varphi\left(x(T)\right) \end{cases}$$

Получаем краевую задачу принципа максимума, в которой $2n$ дифференциальных уравнений и $2n$ краевых условий. К сожалению, это именно краевая задача, с условиями не в t_0, а в T, к тому же она нелинейно зависит от траектории $x(t)$.

Предположим, что $x(t)$,$\psi(t)$ — решение этой системы. Тогда управление $u(t, x(t), \psi(t))$ будет являться “подозрительным” на оптимальность.

Линеаризованный принцип максимума. Градиент функционала

Добавим в задаче (1) к условиям (2) условия на гладкость: f_u, f_u^0 — Липшиц-непрерывны по u и непрерывны по совокупности переменных (x, u, t). Обозначим эти условия ($2u$).

Тогда аналогично предыдущим выкладкам можно показать, что

$$\Delta_u H(t) = H\left(x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)\right) - H\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right) = \\ = \left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), h(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} + \mathcal{R}_u.$$

Для $\mathcal{R}_u$ в силу наших предположений справедлива оценка:

$$|\mathcal{R}_u| \leqslant L\left|h(t)\right|^2.$$

И для (10) мы получаем выражение:

$$J(u+h) - J(u) = \int\limits_{t_0}^{T} \left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), h(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} dt + O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^1}\right) + L\int\limits_{t_0}^{T} \left|h(t)\right|^2 dt.$$

Последнее слагаемое в этой сумме есть норма h в пространстве $\mathbf{L}^2$ в квадрате, умноженная на константу L, то есть $O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}\right)$.

Второе слагаемое также можно считать $O\left(\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}\right)$, так как

$$\|h\|^2_{\mathbf{L}^1} = \left(\int\limits_{t_0}^{T} 1\cdot\left|h(t)\right| dt\right)^2 \leqslant \underbrace{\left(\int\limits_{t_0}^{T} 1\, dt\right)}_{=const} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_{t_0}^{T} \left|h(t)\right|^2 dt\right)}_{=\|h\|^2_{\mathbf{L}^2}}$$

И по определению $J'(u) = H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right)$ (отождествление по Риссу).

Теорема 27.

Пусть выполнены условия Теоремы 26 и условия (2u). *Тогда* $J(u)$ *дифференцируема по Фреше в* $\mathbf{L}^2$ *и её производная имеет вид*

$$J'(u) = H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right).$$

Если, кроме того, $u(t)$ *— оптимальное управление в задаче* (1), *то необходимо выполняется линеаризованный принцип максимума:*

$$\left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), u(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^r} = \min_{v \in V} \left\langle H_u\left(x(t), u(t), t, \psi(t)\right), v\right\rangle_{\mathbb{R}^r}. \tag{15}$$

8 Регуляризация некорректно поставленных экстремальных задач по Тихонову

Напомним, что экстремальная задача минимизации функционала $J(u)$ называется корректно поставленной в случае, когда

1) J_* существует (конечно);

2) множество оптимальных решений $\mathbf{U}_*$ не пусто;

3) из того, что последовательность $J(u_k)$ (u_k допустимы) сходится к J_* следует, что соответствующая последовательность u_k сходится к u_*.

В зависимости от типа сходимости $u_k \to u_*$ корректность задачи может быть, соответственно, сильной и слабой. Следующий пример показывает, что эти типы корректности не эквивалентны.

Пример. (слабо корректная задача, не являющаяся сильно корректной)
Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$J(u) = \int\limits_0^T x^2(t)\,dt \to \inf, \quad x'(t) = u(t),\ 0 < t < T, \quad x(0) = 0,$$

$$u \in \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{L}^2(0,T) \mid u(t) \in [-1;1] \text{ почти всюду}\}$$

Ранее было доказано, что множество $\mathbf{U}$ (“параллелепипед” в $\mathbf{L}^2$) — слабый компакт, а функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу. Можно также показать, что $J_* > -\infty$ ($J_* = 0$), оптимальной является точка $u_* = 0$ и, более того, $\mathbf{U}$ состоит из одной этой точки: $\mathbf{U} = \{0\} \neq \varnothing$. Таким образом, пункты 1) и 2) в определении корректности выполняются. По Теореме 2 получаем, что задача является слабо корректно поставленной. Докажем, что она не сильно корректно поставлена.

Берём последовательность

$$u_k(t) = \sin\left(\frac{\pi k t}{T}\right) \in \mathbf{C}^\infty[0,T] \subset \mathbf{L}^2(0,T) \Rightarrow u_k \in \mathbf{U}.$$

Тогда соответствующие x_k сходятся к 0:

$$x_k(t) = \frac{T}{\pi k}\underbrace{\left(1 - \cos\frac{\pi k t}{T}\right)}_{\leqslant 2} \overset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

То есть, $J(u_k) \to 0 = J_*$, но в тоже время сходимости по k

$$\|u_k - u_*\|^2_{\mathbf{L}^2} = \|u_k - 0\|^2_{\mathbf{L}^2} = \frac{T}{2} \overset{k\to\infty}{\not\to} 0.$$

И задача не является сильно корректно поставленной.

Перейдём к теме пункта. Пусть, как обычно, требуется решить задачу минимизации

$$J(u) \to \inf, \quad u \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{H}, \tag{1}$$

но при этом мы будем считать, что известно лишь приближенное значение функции $J(u)$ ($\mathbf{U}$ задано точно). Положим, что отличие известного значения функции от истинного удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{J}(u) - J(u)| \leqslant \delta \left(1 + \|u\|^2_{\mathbb{H}}\right), \quad \delta \geqslant 0, \quad \forall u \in \mathbf{U}. \qquad 2$$

Это означает, что ошибка может быть довольно большой на “периферии”, но достаточна мала, если u близко к 0.

Выбор такого рода ограничения обусловлен следующими рассуждениями. Рассмотрим функционал $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}$ ($A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F})$, $f \in \mathbf{F}$). Если порождающий оператор задан неточно с некоторой ошибкой $\|\tilde{A} - A\| \leqslant h$, $\tilde{J}(u) = \|\tilde{A}u - f\|^2_{\mathbf{F}}$, то для соответствующих квадратичных функционалов ошибка принимает вид

$$|\tilde{J}(u) - J(u)| \leqslant h\cdot \max\left\{\|f\|^2_{\mathbf{F}},\ 1 + h + 2\|A\|\right\} \cdot \left(1 + \|u\|^2_{\mathbb{H}}\right) \leqslant \delta \left(1 + \|u\|^2_{\mathbb{H}}\right),$$

то есть получаем (2) (эту оценку можно получить из того, что $\|Au - \tilde{A}u\|_{\mathbf{F}} \leqslant \|A - \tilde{A}\|\cdot\|u\|$).

А. Н. Тихонов в 1960-х годах предложил метод, позволяющий решать подобного рода задачи. Суть метода в том, что от исходной задачи мы переходим к экстремальной задаче следующего вида:

$$T_\alpha(u) = \tilde{J}(u) + \alpha\cdot\|u\|^2 \to \inf, \quad \alpha > 0, \quad u \in \mathbf{U}. \tag{3}$$

Функционал T_α называют *функционалом Тихонова*. α — некий стабилизирующий функционал.

При переходе к такой задаче нам достаточно найти такое $\tilde{u} \in \mathbf{U}$, что

$$T_\alpha(\tilde{u}) \leqslant \inf_{u\in\mathbf{U}} T_\alpha(u) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Теорема 28. *Пусть в задаче* (1) $J_* > -\infty$, $\mathbf{U} \neq \varnothing$, *множество* $\mathbf{U}$ *выпукло и замкнуто в гильбертовом пространстве* $\mathbb{H}$, *функционал* $J(u)$ *выпукл и полунепрерывен снизу, выполняется условие* (2), $\tilde{u}$ *выбирается по правилу* (4), *параметры* δ, α, ε *стремятся к* 0, *причём* $\frac{\delta+\varepsilon}{\alpha} \to 0$. *Тогда*

$$\tilde{J}(\tilde{u}) \to J_*, \quad \|\tilde{u} - u_*\|_{\mathbb{H}} \to 0,$$

где $u_* = \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbf{U}_*} \|u\|_{\mathbb{H}}$ — *нормальное решение задачи* (1).