Глава 3.
Доказательство принципа максимума Понтрягина

1 §9. Вариации Макшейна. Множество $\mathcal{M}$ вариаций Макшейна. Приращение траекторий. Главный член приращения. Отображение $\phi(M) : \mathcal{M} \mapsto S^{n+1}$

1.1 Напоминание постановки задачи ОУ. Роль вариаций Макшейна в общей схеме доказательства теоремы 1

1.2 Простейшая одночленная вариация Макшейна *(ПОВМ — один интервал варьирования, одна иголка)*

Обозначение *простейшей одночленной вариации Макшейна*:

$$M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma\\ v\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{9.1}$$

Рассмотрим допустимое управление

$$u(t),\ t_0 \le t \le t_1, \tag{9.2}$$

— кусочно-непрерывную функцию со значениями в области управления U с конечным числом точек разрыва первого рода $\theta_1, \ldots, \theta_N \in (t_0, t_1)$; напомним соглашение $u(\theta_j - 0) = u(\theta_j), j = 1, \ldots, N, \quad u(t_0+0) = u(t_0), u(t_1 - 0) = u(t_1)$.
Выберем

- число $\tau \in (t_0, t_1), \tau \neq \theta_j, j = 1, \ldots, N$ (т.е. τ — точка непрерывности управления $u(t)$);
- число $\sigma \ge 0$;
- точку $v \in U$;
- $\epsilon > 0$ — малый параметр

и определим множество моментов времени

- $J(\epsilon) = (\tau - \epsilon\sigma, \tau]$ — полуинтервал варьирования.

Длина этого полуинтервала $\epsilon\sigma \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Построим новое управление

$$u_\epsilon^*(t) = \begin{cases} v, & t \in J(\epsilon), \\ u(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus J(\epsilon). \end{cases} \tag{9.3}$$

Это управление допустимо.

Говорят, что управление (9.3) получено из управления (9.2) при помощи простейшей одночленной вариации Макшейна (9.1):

$$\boxed{\begin{array}{c} u(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}} \quad \xrightarrow{M\left(\tau;\, \begin{matrix}\sigma \\ v\end{matrix}\,;\epsilon\right)} \quad \boxed{\begin{array}{c} u_\epsilon^*(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}}$$

Управления (9.2), (9.3) порождают траектории $\tilde{x}(t), \tilde{x}_\epsilon^*(t)$, соответственно, выходящие в момент времени $t = t_0$ из одной и той же начальной точки $\tilde{x}_0$. Выше установлено, что для для приращения траектории $\tilde{x}_\epsilon^*(t) - \tilde{x}(t)$ при малых значениях параметра ϵ имеет место соотношение

$$\tilde{x}_\epsilon^*(t) - \tilde{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \tau - \epsilon\sigma], \quad t \text{ слева от } J(\epsilon), \\ O(\epsilon), & t \in J(\epsilon), \\ \epsilon\tilde{\xi}_\tau + o(\epsilon), & t = \tau, \\ \epsilon\tilde{\xi}(t) + o_t(\epsilon), & t \in [\tau, t_1], \qquad\quad t \text{ справа от } J(\epsilon), \end{cases} \tag{9.4}$$

в котором $(n+1)$-мерный вектор $\tilde{\xi}_\tau$ определяется формулой

$$\tilde{\xi}_\tau = \sigma[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau)], \tag{9.5}$$

а $(n+1)$-мерная векторная функция $\tilde{\xi}(t), \tau \le t \le t_1$, является решением дифференциального уравнения в вариациях

$$\dot{\tilde{\xi}} = F(t)\tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi}(t)|_{t=\tau} = \tilde{\xi}_\tau.$$

Здесь $F(t) \equiv \tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}, u(t))|_{\tilde{x}=\tilde{x}(t)}$ — квадратная матрица порядка $n{+}1$. Функция $\tilde{\xi}(t), \tau \le t \le t_1$, допускает следующую запись в терминах фундаментальной матрицы уравнения в вариациях:

$$\tilde{\xi}(t) = \Phi(t, \tau)\tilde{\xi}_\tau. \tag{9.6}$$

Для дальнейшего особый интерес представляет формула для приращения траектории в конечный момент времени $t = t_1$:

$$\tilde{x}_\epsilon^*(t_1) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon\phi(M) + o(\epsilon), \tag{9.7}$$

где $\phi(M) \in S^{n+1}$ — вектор, определяемый равенством

$$\phi(M) \equiv \tilde{\xi}(t_1) = \Phi(t_1, \tau)\tilde{\xi}_\tau.$$

Таким образом, для простейших одночленных вариаций Макшейна дано конструктивное описание отображения $\phi(\cdot) : M \mapsto \phi(M)$ формулой

$$\phi(M) = \Phi(t_1, \tau)\sigma\left[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))\right]. \tag{9.8}$$

Обратим внимание на то, что вектор (9.8) не зависит от ϵ и явным образом представлен в терминах правой части $\tilde{f}$ уравнения управляемого движения, варьируемого процесса $\tilde{x}(t), u(t)$ и параметров вариации Макшейна (9.1).

Совокупность всех вариаций Макшейна будем обозначать символом

$$\mathcal{M} = \{\text{ПОВМ, ОВМ, МВМ}\}. \tag{9.9}$$

Это множество состоит из простейших одночленных вариаций Макшейна (ПОВМ), которые описаны выше, оно включает в себя также одночленные вариации Макшейна (ОВМ) и многочленные вариации Макшейна (МВМ), рассмотренные в следующих подразделах. Там же будет дано конструктивное описание отображения

$$\phi : \mathcal{M} \mapsto S^{n+1}. \tag{9.10}$$

Это будет сделано последовательно в несколько этапов. Пока отображение (9.10) описано только для простейших одночленых вариаций Макшейна формулой (9.8).

Замечание 9.1. *В формулировке теоремы 1 участвует неравенство*

$$K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) \geq K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), v) \quad \forall v \in U, t \in [t_0, t_1]. \tag{9}$$

Положив в этом неравенстве $t = \tau$ и принимая во внимание вид функции Гамильтона-Понтрягина $K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) = \tilde{\psi}\tilde{f}(\tilde{x}, u)$, перепишем его в виде

$$\tilde{\psi}(\tau)[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))] \leq 0,$$

или, после умножения на число $\sigma \geq 0$, с учетом формулы (9.5),

$$\tilde{\psi}(\tau)\tilde{\xi}_\tau \leq 0,$$

или

$$\tilde{\psi}(\tau)\tilde{\xi}(\tau) \leq 0.$$

Последнее неравенство можно записать, в силу свойства решений линейного и ему сопряженного уравнений $\tilde{\psi}(t)\tilde{\xi}(t) = const$, см. §6, в виде

$$\tilde{\psi}(t_1)\tilde{\xi}(t_1) \leq 0,$$

или

$$\tilde{\psi}(t_1)\phi(M) \leq 0.$$

Таким образом, на основе техники простейших одночленных вариаций Макшейна доказательство неравенства (9) приводится к проверке последнего записанного здесь неравенства, имеющего прозрачную геометрическую интерпретацию, см. §13. Однако, при проведении доказательста теоремы 1 мы не можем ограничиться лишь простейшими одночленными вариациями Макшейна, и множество $\mathcal{M}$ вариаций Макшейна будет подходящим образом дополнено вариациями Макшейна более сложной структуры (ОВМ, МВМ).

1.3 Одночленная вариация Макшейна *(ОВМ — один интервал варьирования, s иголок над ним)*

Обозначение *одночленной вариации Макшейна*:

$$M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma_1, \dots, \sigma_s \\ v_1, \dots, v_s\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{9.11}$$

Рассмотрим допустимое управление

$$u(t),\ t_0 \le t \le t_1. \tag{9.12}$$

Выберем

- число $\tau \in (t_0, t_1)$, τ — точка непрерывности управления $u(t)$;
- числа $\sigma_1, \dots, \sigma_s \ge 0$;
- точки $v_1, \dots, v_s \in U$;
- $\epsilon > 0$ — малый параметр

и определим множество

- $J(\epsilon) = (\tau - \epsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_s), \tau]$ — полуинтервал варьирования.

Длина этого полуинтервала $\epsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_s) \to 0$ при $\epsilon \to 0$. Представим полуинтервал $J(\epsilon)$ в виде объединения s непересекающихся, примыкающих друг к другу и занумерованных слева направо полуинтервалов $J_1(\epsilon), \dots, J_s(\epsilon)$, с длинами $\epsilon\sigma_1, \dots, \epsilon\sigma_s$, соответственно:

$$J(\epsilon) = J_1(\epsilon) \bigcup J_2(\epsilon) \bigcup \ldots \bigcup J_s(\epsilon).$$

Построим новое управление

$$u^*_\epsilon(t) = \begin{cases} v_1, & t \in J_1(\epsilon), \\ \dots & \\ v_s, & t \in J_s(\epsilon), \\ u(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus J(\epsilon). \end{cases} \tag{9.13}$$

Это управление допустимо.

Говорят, что управление (9.13) получено из управления (9.12) при помощи одночленной вариации Макшейна (9.11):

$$\boxed{\begin{matrix} u(t) \\ [t_0, t_1] \end{matrix}} \quad \xrightarrow{M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma_1, \dots, \sigma_s \\ v_1, \dots, v_s\end{matrix}; \epsilon\right)} \quad \boxed{\begin{matrix} u^*_\epsilon(t) \\ [t_0, t_1] \end{matrix}}$$

При малых значениях параметра ϵ для приращения траектории $\tilde{x}^*_\epsilon(t) - \tilde{x}(t)$, вызванного одночленной вариацией Макшейна (9.11), можно записать соотношение

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t) - \tilde{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \tau - \epsilon\sigma, \tau], \quad t \text{ слева от } J(\epsilon), \\ O(\epsilon), & t \in J(\epsilon), \\ \epsilon\tilde{\xi}_\tau + o(\epsilon), & t = \tau, \\ \epsilon\tilde{\xi}(t) + o_t(\epsilon), & t \in [\tau, t_1], \qquad\qquad t \text{ справа от } J(\epsilon), \end{cases} \tag{9.14}$$

в котором, в отличие от формулы (9.4), $(n+1)$-мерный вектор $\tilde{\xi}_\tau$ определяется формулой

$$\tilde{\xi}_\tau = \sum_{j=1}^{s} \sigma_j [\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v_j) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau)], \tag{9.15}$$

а векторная функция $\tilde{\xi}(t)$ — формулой

$$\tilde{\xi}(t) = \Phi(t, \tau)\tilde{\xi}_\tau, \quad \tau \le t \le t_1,$$

с вектором начальных условий (9.15), так что, в конечный момент времени $t = t_1$ имеем:

$$\tilde{\xi}(t_1) = \Phi(t_1, \tau) \sum_{j=1}^{s} \sigma_j [\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v_j) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau)]. \tag{9.16}$$

На основании (9.14) - (9.16) приращение траектории в конечный момент времени $t = t_1$ может быть представлено в виде

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t_1) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon\phi(M) + o(\epsilon),$$

где $\phi(M) \in S^{n+1}$ — вектор, определяемый равенствами

$$\phi(M) \equiv \tilde{\xi}(t_1) = \Phi(t_1, \tau)\tilde{\xi}_\tau. \tag{9.17}$$

Таким образом, теперь для одночленных вариаций Макшейна M дано конструктивное описание отображения $\phi(\cdot) : M \mapsto \phi(M)$ формулой

$$\phi(M) = \Phi(t_1, \tau) \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \left[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v_j) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau)) \right]. \tag{9.18}$$

Обратим внимание на то, что вектор (9.18), как и вектор (9.8), не зависит от ϵ и явным образом представлен в терминах правой части $\tilde{f}$ уравнения управляемого движения, варьируемого процесса $\tilde{x}(t), u(t)$ и параметров одночленной вариации Макшейна (9.11).

Упражнение 9.1. *Обосновать формулу (9.15). В случае $s = 1$ одночленная вариация Макшейна превращается в простейшую одночленную вариацию Макшейна. Вывод формулы (9.15) при $s > 1$ происходит так же, как и в случае $s = 1$, т.е. при обосновании формулы (9.5).*

1.4 Многочленная вариация Макшейна *(МВМ — r интервалов варьирования, на каждом из них свой пакет иголок)*

Обозначение *многочленной вариации Макшейна*:

$$M = \{M_1, \ldots, M_r\}. \tag{9.19}$$

Здесь $M_1, \ldots, M_r$ — одночленные вариации Макшейна, r — число членов многочленной вариации Макшейна (9.19), $r \geq 1$.

Многочленная вариация Макшейна $\{M_1, \ldots, M_r\}$ рассматривается как результат последовательного применения одночленных вариаций Макшейна $M_1, \ldots, M_r$ — членов многочленной вариации M.

Рассмотрим i-тый член

$$M_i = M_i \left(\tau_i; \begin{array}{c} \sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{is_i} \\ v_{i1}, \ldots, v_{is_i} \end{array}; \epsilon \right), \quad i = 1, \ldots, r,$$

многочленной вариации (9.19). Предполагается, что параметры τ_i — точки непрерывности управления $u(t)$ — упорядочены неравенствами $\tau_1 < \tau_1 < \ldots < \tau_r$.

Следующая диаграмма показывает действие многочленной вариации Макшейна (9.19):

$$\boxed{\begin{array}{c} u(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}} \xrightarrow{M_1} \boxed{\begin{array}{c} \\ \ldots \end{array}} \xrightarrow{M_2} \ldots \xrightarrow{M_{r-1}} \boxed{\begin{array}{c} \\ \ldots \end{array}} \xrightarrow{M_r} \boxed{\begin{array}{c} u_\epsilon^*(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}}$$

При $r = 1$ многочленная вариация Макшейна является одночленной вариацией Макшейна. При $r = 2$ формула для приращения траектории принимает вид

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t) - \tilde{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \text{ слева от } J_{M_1}(\epsilon), \\ O(\epsilon), & t \in J_{M_1}(\epsilon), \\ \epsilon\tilde{\xi}_{\tau_1} + o(\epsilon), & t = \tau_1, \\ \epsilon\Phi(t,\tau_1)\tilde{\xi}_{\tau_1} + o_t(\epsilon), & t \text{ между } \ J_{M_1}(\epsilon) \text{ и } J_{M_2}(\epsilon), \\ O(\epsilon), & t \in J_{M_2}(\epsilon), \\ \epsilon[\Phi(\tau_2,\tau_1)\tilde{\xi}_{\tau_1} + \tilde{\xi}_{\tau_2}] + o(\epsilon), & t = \tau_2, \\ \epsilon\Phi(t,\tau_2)[\Phi(\tau_2,\tau_1)\tilde{\xi}_{\tau_1} + \tilde{\xi}_{\tau_2}] + o(\epsilon), & t > \tau_2, \end{cases} \tag{9.20}$$

где $J_{M_i}(\epsilon)$ — интервал варьирования одночленной вариации Макшейна M_i, $i = 1, 2$,

$$\tilde{\xi}_{\tau_1} = \sum_{j=1}^{s_1} \sigma_{1j}[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau_1), v_{1j}) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau_1), u(\tau_1))], \tag{9.21}$$

$$\tilde{\xi}_{\tau_2} = \sum_{j=1}^{s_2} \sigma_{2j}[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau_2), v_{2j}) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau_2), u(\tau_2))]. \tag{9.22}$$

Для приращения траектории в конечный момент времени $t = t_1$ на основании формулы (9.20) и свойств фундаментальной матрицы Φ можно записать соотношение

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t_1) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon\phi(M) + o(\epsilon), \tag{9.23}$$

где $\phi(M) \in S^{n+1}$ — вектор, определяемый равенством

$$\phi(M) = \Phi(t_1,\tau_1)\tilde{\xi}_{\tau_1} + \Phi(t_1,\tau_2)\tilde{\xi}_{\tau_2}, \tag{9.24}$$

а векторы $\tilde{\xi}_{\tau_1}$, $\tilde{\xi}_{\tau_2}$ имеют вид (21.21), (9.22).

Аналогично проверяется, что при любом r вектор $\phi(M)$ в формуле (9.23) имеет вид

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^{r} \Phi(t_1,\tau_i)\tilde{\xi}_{\tau_i}, \tag{9.25}$$

где

$$\tilde{\xi}_{\tau_i} = \sum_{j=1}^{s_i} \sigma_{ij}[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau_i), v_{ij}) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau_i), u(\tau_i))]. \tag{9.26}$$

Отображение ϕ для многочленных вариаций Макшейна описывается формулами (9.25), (9.26).

1.5 Отображение $\phi : \mathcal{M} \to S^{n+1}$: сводка формул

Выше построено множество вариаций Макшейна $\mathcal{M}$ и введено отображение $\phi : \mathcal{M} \to S^{n+1}$. Сделано это в несколько приемов, и сейчас мы соберем разбросанные по тексту расчетные формулы (9.8), (9.18), (9.25), (9.26), описывающие это отображение:

a. *для простейших одночленных вариаций Макшейна (9.1):*

$$\phi(M) = \Phi(t_1, \tau)\tilde{\xi}_\tau, \tag{9.23}$$

$$\tilde{\xi}_\tau = \sigma\left[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))\right]; \tag{9.24}$$

b. *для одночленных вариаций Макшейна (9.11):*

$$\phi(M) = \Phi(t_1, \tau)\tilde{\xi}_\tau, \tag{9.25}$$

$$\tilde{\xi}_\tau = \sum_{j=1}^{s} \sigma_j \left[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v_j) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))\right]; \tag{9.26}$$

c. *для многочленных вариаций Макшейна (9.19):*

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^{r} \Phi(t_1, \tau_i)\tilde{\xi}_{\tau_i}, \tag{9.27}$$

$$\tilde{\xi}_{\tau_i} = \sum_{j=1}^{s_i} \sigma_{ij}[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau_i), v_{ij}) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau_i), u(\tau_i))]. \tag{9.28}$$

1.6 Конус, порождаемый отображением $\phi(M)$

Приращение траектории в конечный момент времени $t = t_1$ представлено в виде:

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t_1) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon\phi(M) + o(\epsilon), \tag{9.29}$$

Главный член правой части (9.29) имеет вид

$$\epsilon\phi(M). \tag{9.30}$$

Введем следующие два множества $I\!K_0, I\!K_1 \subset S^{n+1}$:

$$I\!K_0 = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \{\phi(M)\} \equiv \phi(\mathcal{M}), \tag{9.31}$$

$$I\!K_1 = \tilde{x}(t_1) + I\!K_0. \tag{9.32}$$

Эти множества играют важную роль при доказательстве принципа максимума. Будет показано, что множество (9.31) является выпуклым конусом с вершиной в точке 0. Множество (9.32), полученное из множества (9.31) параллельным переносом, является выпуклым конусом с вершиной в точке $\tilde{x}(t_1)$. Для получения этих фактов в следующем параграфе будут введены операции над вариациями Макшейна и установлено свойство линейности отображения $\phi(M)$ при неотрицательных коэффициентах.

Так как

$$\phi(M) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{\tilde{x}^*_\epsilon(t_1) - \tilde{x}(t_1)}{\epsilon},$$

то множество (9.32) в линейном приближении характеризует направления смещения правых концов траектории при ее варьировании с помощью вариаций Макшейна $M \in \mathcal{M}$.

2 §10. Сложение вариаций Макшейна. Умножение вариаций Макшейна на неотрицательные числа. Линейность отображения $\phi(M)$ при неотрицательных коэффициентах. Выпуклость конуса, порождаемого отображением $\phi(M)$

2.1 Краткое введение, основные цели §10

Конечная цель данного параграфа — установить, что множество (9.31)

$$\mathbb{K}_0 = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \{\phi(M)\}$$

является выпуклым конусом с вершиной в нуле. Для получения этого результата в пространстве вариаций Макшейна $\mathcal{M}$ вводятся операции *сложения* и *умножения на неотрицательные числа*, так что для отображения ϕ выполняются свойства:

$$\phi(M + M') = \phi(M) + \phi(M') \quad \forall M, M' \in \mathcal{M} \tag{10.1}$$

(аддитивность) и

$$\phi(\lambda \cdot M) = \lambda \cdot \phi(M) \quad \forall \lambda \geq 0, M \in \mathcal{M} \tag{10.2}$$

(положительная однородность измерения 1). Из свойств (10.1), (10.2) следует *свойство линейности отображения ϕ при неотрицательных коэффициентах:*

$$\phi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1 \phi(M_1) + \lambda_2 \phi(M_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, M_1, M_2 \in \mathcal{M}. \tag{10.3}$$

2.2 Сложение вариаций Макшейна

2.2.1 Сложение простейших одночленных вариаций Макшейна

Рассмотрим две простейшие одночленные вариации Макшейна

$$M = M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma \\ \upsilon\end{matrix}; \epsilon\right), \tag{10.4}$$

$$M' = M'\left(\tau'; \begin{matrix}\sigma' \\ \upsilon'\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{10.5}$$

Замечание 10.1. При одновременном рассмотрении нескольких вариаций Макшейна малый положительный параметр ϵ всегда общий.

При определении операции сложения вариаций (10.4) и (10.5) рассматривается два случая: а) $\tau = \tau'$ и б) $\tau \neq \tau'$.

а) $\tau = \tau'$. *Определяем сумму двух ПОВМ (10.4) и (10.5), полагая*

$$M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma\\ v\end{matrix}; \epsilon\right) + M'\left(\tau; \begin{matrix}\sigma'\\ v'\end{matrix}; \epsilon\right) = M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma & \sigma'\\ v & v'\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{10.6}$$

В правой части формулы (10.6) стоит ОВМ с двумя иголками — элемент множества $\mathcal{M}$. Для введенной формулой (10.6) операции сложения двух одночленных вариаций Макшейна имеет место свойство аддитивности (10.1). Действительно,

$$\phi(M + M') = \{(10.6)\} = \phi\left(M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma & \sigma'\\ v & v'\end{matrix}; \epsilon\right)\right) = \{(9.25), (9.26)\} =$$

$$= \Phi(t_1, \tau)\{\sigma[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))] + \sigma'[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v') - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))]\} =$$

$$= \Phi(t_1, \tau)\sigma[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))] + \Phi(t_1, \tau)\sigma'[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), v') - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))] =$$

$$= \{(9.23), (9.24)\} = \phi(M) + \phi(M').$$

б) $\tau \neq \tau'$ (пусть, для определенности, $\tau < \tau'$). *Определяем сумму двух ПОВМ (10.4) и (10.5), полагая*

$$M + M' = \{M, M'\}. \tag{10.7}$$

В правой части формулы (10.7) стоит МВМ с двумя членами M и M' — элемент множества $\mathcal{M}$. Для введенной формулой (10.7) операции сложения двух одночленных вариаций Макшейна имеет место свойство аддитивности (10.1). Действительно,

$$\phi(M + M') = \{(10.7)\} = \phi(\{M, M'\}) = \{(9.27), (9.28)\} =$$

$$= \Phi(t_1, \tau)\tilde{\xi}_\tau + \Phi(t_1, \tau')\tilde{\xi}_{\tau'} = \{(9.23), (9.24)\} = \phi(M) + \phi(M').$$

В дальнейшем проведение подобных выкладок предоставляется читателю.

2.2.2 Сложение одночленных вариаций Макшейна

Рассмотрим две одночленные вариации Макшейна

$$M = M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma_1 & \dots & \sigma_s\\ v_1 & \dots & v_s\end{matrix}; \epsilon\right), \tag{10.8}$$

$$M' = M'\left(\tau'; \begin{matrix}\sigma'_1 & \dots & \sigma'_{s'}\\ v'_1 & \dots & v'_{s'}\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{10.9}$$

При определении операции сложения вариаций (10.8) и (10.9) опять рассматривается два случая: а) $\tau = \tau'$ и б) $\tau \neq \tau'$.

а) $\tau = \tau'$. *Определяем сумму двух ОВМ (10.8) и (10.9), полагая*

$$M + M' = M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma_1 & \dots & \sigma_s & \sigma'_1 & \dots & \sigma'_{s'}\\ v_1 & \dots & v_s & v'_1 & \dots & v'_{s'}\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{10.10}$$

В правой части формулы (10.10) стоит ОВМ — элемент множества $\mathcal{M}$.

Упражнение 10.1. Проверить, что для введенной формулой (10.10) операции сложения ОВМ имеет место свойство аддитивности (10.1).

б) $\tau \neq \tau'$ (пусть, для определенности, $\tau < \tau'$). *Определяем сумму двух ОВМ (10.8) и (10.9), полагая*

$$M + M' = \{M, M'\}. \tag{10.11}$$

В правой части формулы (10.11) стоит МВМ с двумя членами M и M' — элемент множества $\mathcal{M}$.

Упражнение 10.2. Проверить, что для введенной формулой (10.11) операции сложения двух одночленных вариаций Макшейна имеет место свойство аддитивности (10.1).

Замечание 10.2. Согласно данным выше определениям многочленная вариация Макшейна

$$M = \{M_1, \ldots, M_r\} \tag{10.12}$$

с r членами $M_1, \ldots, M_r$, каждый из которых — одночленная вариация Макшейна, является суммой своих членов:

$$M = M_1 + \ldots + M_r. \tag{10.13}$$

Параметры τ_i одночленных вариаций Макшейна M_i, $i = 1, \ldots, r$, удовлетворяют неравенствам $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r$.

Замечание 10.3. Напомним, что все параметры $\sigma \geq 0$. Добавление в сумму (10.13) одночленной вариации Макшейна с нулевыми параметрами σ не меняет эту вариацию, и ее образ при отображении ϕ при этом также не меняется.

2.2.3 Сложение многочленных вариаций Макшейна

Рассмотрим две многочленные вариации Макшейна: вариацию (10.12) и вариацию

$$M' = \{M'_1, \ldots, M'_{r'}\}. \tag{10.14}$$

В силу Замечаний 10.2, 10.3 можно считать, что $r' = r$, одночленные вариации Макшейна M_i, M'_i имеют общий параметр $\tau_i = \tau'_i$ и вариация (10.14) допускает представление в виде суммы

$$M' = M'_1 + \ldots + M'_r. \tag{10.15}$$

Сумму двух многочленных вариаций Макшейна (10.12) и (10.14), записанных в виде (10.13) и (10.15), определяем формулой

$$M + M' = \sum_{i=1}^{r} (M_i + M'_i) = \{(M_1 + M'_1), \ldots, (M_r + M'_r)\} \tag{10.16}$$

как сумму попарных сумм $(M_i + M'_i)$, где M_i, M'_i — одночленные вариации Макшейна с общим параметром $\tau_i = \tau'_i$, которые мы уже умеем складывать, так что $(M_i + M'_i)$ — одночленная вариация Макшейна. В силу Замечания 10.2 сумму (10.16) можно записать в форме *многочленной вариации Макшейна:*

$$M + M' = \{(M_1 + M'_1), \dots, (M_r + M'_r)\} \tag{10.17}$$

с членами $(M_1 + M'_1), \dots, (M_r + M'_r)$. В правой части формулы (10.17) стоит МВМ — элемент множества $\mathcal{M}$.

Упражнение 10.3. Проверить, что для введенной формулами (10.16), (10.17) операции сложения двух многочленных вариаций Макшейна имеет место свойство аддитивности (10.1).

Итак, на множестве $\mathcal{M}$ введена операция сложения и для отображения ϕ установлено свойство аддитивности (10.1).

2.3 Умножение вариаций Макшейна на неотрицательные числа

Введем на множестве $\mathcal{M}$ операцию умножения на неотрицательные числа и проверим выполнение для нее свойства однородности (10.2) отображения ϕ.

2.3.1 Умножение простейших одночленных вариаций Макшейна на неотрицательные числа

Рассмотрим простейшую одночленную вариацию Макшейна

$$M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma \\ v\end{matrix}; \epsilon\right).$$

Определим для нее операцию умножения на неотрицательное число λ следующей формулой:

$$\lambda \cdot M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma \\ v\end{matrix}; \epsilon\right) = M\left(\tau; \begin{matrix}\lambda\sigma \\ v\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{10.18}$$

Упражнение 10.4. Проверить, что для введенной формулой (10.18) операции умножения простейшей одночленной вариаций Макшейна на неотрицательное число имеет место свойство однородности (10.2).

2.3.2 Умножение одночленных вариаций Макшейна на неотрицательные числа

Рассмотрим одночленную вариацию Макшейна

$$M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma_1 & \dots & \sigma_s \\ v_1 & \dots & v_s\end{matrix}; \epsilon\right).$$

Определим для нее операцию умножения на неотрицательное число λ следующей формулой:

$$\lambda \cdot M\left(\tau; \begin{matrix}\sigma_1 & \dots & \sigma_s \\ v_1 & \dots & v_s\end{matrix}; \epsilon\right) = M\left(\tau; \begin{matrix}\lambda\sigma_1 & \dots & \lambda\sigma_s \\ v_1 & \dots & v_s\end{matrix}; \epsilon\right). \tag{10.19}$$

Упражнение 10.5. Проверить, что для введенной формулой (10.19) операции умножения одночленной вариаций Макшейна на неотрицательное число имеет место свойство однородности (10.2).

2.3.3 Умножение многочленных вариаций Макшейна на неотрицательные числа

Рассмотрим многочленную вариацию Макшейна

$$M = \{M_1, \ldots, M_r\},$$

члены которой $M_1, \ldots, M_r$ — одночленные вариации Макшейна. *Определим для нее операцию умножения на неотрицательное число λ следующей формулой:*

$$\lambda \cdot \{M_1, \ldots, M_r\} = \{\lambda M_1, \ldots, \lambda M_r\}. \tag{10.20}$$

Упражнение 10.6. Проверить, что для введенной формулой (10.20) операции умножения многочленной вариации Макшейна на неотрицательное число имеет место свойство однородности (10.2).

Итак, на множестве $\mathcal{M}$ введена операция умножения на неотрицательные числа и для отображения ϕ установлено свойство однородности (10.2).

Таким образом, теперь можно считать обоснованным свойство (10.3) линейности отображения ϕ при неотрицательных коэффициентах.

2.4 Конус, порождаемый отображением $\phi(M)$: основные свойства

В §9 введено множество

$$I\!K_0 = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \{\phi(M)\} \equiv \phi(\mathcal{M}), \tag{10.21}$$

порождаемое отображением

$$\phi(\cdot) : \mathcal{M} \mapsto S^{n+1}. \tag{10.22}$$

Покажем сейчас, опираясь на свойства (10.1) - (10.3) отображения (10.22), что множество (10.21) является выпуклым конусом с вершиной в нуле.

Докажем сначала, что множество $I\!K_0$ — конус с вершиной в нуле. Для этого проверим, что для любой точки $c \in I\!K_0$ имеет место включение $\lambda c \in I\!K_0$ $\forall \lambda \geq 0$. Условие $c \in I\!K_0$ означает, что $\exists M \in \mathcal{M}$: $c = \phi(M)$. Отсюда, привлекая свойство однородности (10.2), имеем: $\lambda c = \lambda \phi(M) = \phi(\lambda M) \in I\!K_0$, так как $\lambda M \in \mathcal{M}$. Проверка окончена.

Докажем теперь выпуклость множества $I\!K_0$. Возьмем любые две точки $c_1, c_2 \in I\!K_0$. Согласно определению (10.21) их можно записать в виде $c_i = \phi(M_i)$, где $M_i \in \mathcal{M}, i = 1, 2$. Отсюда в силу свойства линейности (10.3) при любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеем:

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = \lambda_1 \phi(M_1) + \lambda_2 \phi(M_2) = \phi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \in I\!K_0,$$

так как $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in \mathcal{M}$. Выпуклость множества $I\!K_0$ доказана.

Множество
$$I\!K_1 = \tilde{x}(t_1) + I\!K_0$$
очевидно, является выпуклым конусом с вершиной в концевой точке $\tilde{x}(t_1)$ рассматриваемой траектории.

3 §11. Расширение класса допустимых вариаций Макшейна

3.1 Введение расширенной вариации Макшейна.

Определим сейчас расширенную вариацию Макшейна
$$V(M, \alpha), \tag{11.1}$$
где M — вариация Макшейна, α — действительное число. Мы знаем, что операция M — вариация Макшейна — преобразует по описанным выше правилам допустимое управление $u(t), t_0 \le t \le t_1$, в проварьированное управление $u^*_\epsilon(t), t_0 \le t \le t_1$:

$$\boxed{\begin{array}{c} u(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}} \quad \xrightarrow{M} \quad \boxed{\begin{array}{c} u^*_\epsilon(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}}$$

Обратим внимание на то, что оба управления — исходное и проварьированное — определены на одном и том же отрезке времени $[t_0, t_1]$. Применение расширенной вариации Макшейна (11.1) изменяет правый конец этого отрезка:
$$t_1 \quad \longrightarrow \quad {t_1}^*_\epsilon \equiv t_1 + \epsilon\alpha. \tag{11.2}$$
Перейдем теперь к определению расширенной вариации Макшейна (11.1), рассмотрев отдельно три случая: $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ и $\alpha < 0$.

1: $\alpha = 0$. В этом случае полагаем:
$$V(M, \alpha)|_{\alpha=0} = M,$$
т.е. при $\alpha = 0$ расширенная вариация Макшейна $V(M, \alpha)$ действует точно также, как и вариация Макшейна M.

2: $\alpha < 0$. В этом случае проварьированный отрезок времени $[t_0, {t_1}^*_\epsilon]$ является частью исходного отрезка $[t_0, t_1]$, ${t_1}^*_\epsilon < t_1$. Напомним, что ϵ — малый положительный параметр.

2a. Применяя вариацию Макшейна M к управлению $u(t)$, построим проварьированное управление $\bar{u}(t)^*_\epsilon$, $t_0 \le t \le t_1$:

$$\boxed{\begin{array}{c} u(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}} \quad \xrightarrow{M} \quad \boxed{\begin{array}{c} \bar{u}^*_\epsilon(t) \\ [t_0, t_1] \end{array}}$$

2b. Полагаем

$$u_\epsilon^*(t) = \bar{u}_\epsilon^*(t),\ t_0 \le t \le t_1{}_\epsilon^*.$$

Будем говорить, что функция $u_\epsilon^*(t), t_0 \le t \le t_1{}_\epsilon^*$, *получена из функции* $u(t), t_0 \le t \le t_1$, *при помощи расширенной вариации Макшейна (11.1):*

$$\boxed{\begin{matrix} u(t) \\ [t_0, t_1] \end{matrix}} \quad \xrightarrow{V(M,\alpha)} \quad \boxed{\begin{matrix} u_\epsilon^*(t) \\ [t_0, t_1{}_\epsilon^*] \end{matrix}}$$

3: $\alpha > 0$. В этом случае исходный отрезок $[t_0, t_1]$ является частью проварьированного отрезка $[t_0, t_1{}_\epsilon^*]$, $t_1 < t_1{}_\epsilon^*$.

3a. Применяя вариацию Макшейна M к управлению $u(t)$, построим проварьированное управление $\bar{u}(t)_\epsilon^*$, $t_0 \le t \le t_1$, так же, как это было сделано в **2a.**

3b. Полагаем

$$u_\epsilon^*(t) = \begin{cases} \bar{u}_\epsilon^*(t), & t_0 \le t \le t_1{}_\epsilon^*, \\ u(t_1), & t_1 \le t \le t_1{}_\epsilon^*. \end{cases} \tag{11.3}$$

Будем говорить, что функция (11.3) получена из допустимого управления $u(t), t_0 \le t \le t_1$, *при помощи расширенной вариации Макшейна (11.1).*

Подчеркнем, что варьирование допустимого управления $u(t), t_0 \le t \le t_1$, при помощи расширенной вариации Макшейна (11.1) приводит к допустимому управлению $u_\epsilon^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1{}_\epsilon^*$. Функция (11.3) непрерывна в окрестности точки $t = t_1$. Итак, расширенная вариация Макшейна

$$V(M, \alpha), \quad \text{где} \quad M \in \mathcal{M}, \alpha \in R^1,$$

построена. Совокупность всех расширенных вариаций Макшейна будем обозначать $\mathcal{VM}$. Очевидно, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{VM}$.

3.2 Определение отображения ϕ для расширенных вариаций Макшейна

Пусть $u(t), t_0 \le t \le t_1$, — допустимое управление, которому отвечает траектория $\tilde{x}(t), t_0 \le t \le t_1$; $u_\epsilon^*(t), t_0 \le t \le t_1{}_\epsilon^*$, — проварьированное с помощью расширенной вариации Макшейна (11.1) управление, которому отвечает проварьированная траектория $\tilde{x}_\epsilon^*(t)$. При вычислении последней траектории управление можно взять в форме (11.3) при любом знаке числа α, так что траекторию $\tilde{x}_\epsilon^*(t)$ можно считать определенной в некоторой окрестности точки t_1. При этом, очевидно, в силу непрерывности функции (11.3) в окрестности точки $t = t_1$, имеет место соотношение

$$\tilde{x}_\epsilon^*(t_1{}_\epsilon^*) - \tilde{x}_\epsilon^*(t_1) = \epsilon\alpha\tilde{f}(\tilde{x}_\epsilon^*(t_1), u(t_1)) + o(\epsilon). \tag{11.4}$$

Ранее было установлено соотношение

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t_1) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon \cdot \phi(M) + o(\epsilon). \tag{11.5}$$

После почленного сложения соотношений (11.4), (11.5) и очевидного преобразования правой части с помощью (11.5) получаем

$$\tilde{x}^*_\epsilon({t_1}^*_\epsilon) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon \cdot [\phi(M) + \alpha\tilde{f}(\tilde{x}(t_1), u(t_1))] + o(\epsilon). \tag{11.6}$$

Последняя формула описывает в явном виде главный член приращения траектории, полученной при варьировании управления с помощью расширенной вариации Макшейна (11.1). Вводя обозначение

$$\phi(V(M,\alpha)) = \phi(M) + \alpha\tilde{f}(\tilde{x}(t_1), u(t_1)), \tag{11.7}$$

перепишем формулу (11.6) в более компактном виде

$$\tilde{x}^*_\epsilon({t_1}^*_\epsilon) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon \cdot \phi(V(M,\alpha)) + o(\epsilon). \tag{11.8}$$

Формула (11.7) определяет отображение $\phi : \mathcal{VM} \mapsto S^{n+1}$ для расширенных вариаций Макшейна.

3.3 Сложение расширенных вариаций Макшейна. Умножение их на неотрицательные числа. Линейность отображения ϕ при неотрицательных коэффициентах

Сложение. Для двух расширенных вариаций Макшейна $V(M_1,\alpha_1)$, $V(M_2,\alpha_2)$ $\in \mathcal{VM}$ их сумма определяется равенством

$$V(M_1,\alpha_1) + V(M_2,\alpha_2) = V(M_1 + M_2, \alpha_1 + \alpha_2), \tag{11.9}$$

в правой части которого стоит расширенная вариация Макшейна — элемент множества $\mathcal{VM}$. Из формул (11.9), (11.7) следует свойство аддитивности отображения $\phi : \mathcal{VM} \mapsto S^{n+1}$ при сложении расширенных вариаций Макшейна:

$$\phi(V(M_1,\alpha_1) + V(M_2,\alpha_2)) = \phi(V(M_1,\alpha_1)) + \phi(V(M_2,\alpha_2)). \tag{11.10}$$

Умножение на неотрицательные числа. Умножение расширенной вариации Макшейна $V(M,\alpha) \in \mathcal{VM}$ на число $\lambda \geq 0$ определяется равенством

$$\lambda \cdot V(M,\alpha) = V(\lambda \cdot M, \lambda \cdot \alpha), \tag{11.11}$$

в правой части которого стоит расширенная вариация Макшейна — элемент множества $\mathcal{VM}$. Из формул (11.11), (11.7) следует свойство положительной однородности (измерения 1) для отображения $\phi : \mathcal{VM} \mapsto S^{n+1}$:

$$\phi(\lambda \cdot V(M,\alpha)) = \lambda \cdot \phi(V(M,\alpha)), \quad \lambda \geq 0. \tag{11.12}$$

Соотношения (11.10), (11.12) влекут свойство линейности отображения ϕ при неотрицательных коэффициентах $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$:

$$\phi(\lambda_1 \cdot V(M_1,\alpha_1) + \lambda_2 \cdot V(M_2,\alpha_2)) = \lambda_1 \cdot \phi(V(M_1,\alpha_1)) + \lambda_2 \cdot \phi(V(M_2,\alpha_2)). \tag{11.13}$$

В дальнейшем знак умножения (точка $\cdot$), как правило, опускается.

3.4 Конусы $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, порождаемые отображением ϕ

Введем в рассмотрение множества $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1 \subset S^{n+1}$, полагая

$$\mathcal{C}_0 = \bigcup_{V(M,\alpha)\in\mathcal{VM}} \{\phi(V(M,\alpha))\} \equiv \bigcup_{M\in\mathcal{M},\alpha\in R^1} \{\phi(V(M,\alpha))\} \equiv \phi(\mathcal{VM}), \quad (11.14)$$

$$\mathcal{C}_1 = \tilde{x}(t_1) + \mathcal{C}_0. \qquad (11.15)$$

Опираясь на свойство (11.13) отображения ϕ, легко проверить, что множество (11.14) есть выпуклый конус с вершиной 0, а множество (11.15), полученное из множества (11.14) параллельным переносом, есть выпуклый конус с вершиной $\tilde{x}(t_1)$, см. §10. Построенные конусы, порождаемые отображением ϕ, лежат в основе доказательства принципа максимума. Конус (11.14) является алгебраической суммой выпуклого конуса $\mathbb{K}_0$ и прямой $L = \{\tilde{z} : \ \tilde{z} = \alpha\tilde{f}(\tilde{x}(t_1), u(t_1)), \alpha \in R^1\}$.

4 §12. Условие, при котором управление $u(t)$ неоптимально. Основная лемма и ее следствие.

Основная лемма. *Если луч l проходит по внутренности конуса $\mathcal{C} \equiv \phi(\mathcal{VM})$, то управление $u(t)$ неоптимально в рассматриваемой задаче оптимального управления.*

Сформулируем сразу же **Следствие из основной леммы**. Именно оно позволит нам завершить доказательство Теоремы 1.

Следствие из основной леммы. Если управление $u(t)$ оптимально, то луч l не проходит по внутренности конуса $\mathcal{C}$.

Замечание 12.1. Далее для оптимального управления $u(t)$ луч l и конус $\mathcal{C}$ в силу теоремы о разделении луча и конуса разделяются гиперплоскостью, проходящей через вершину конуса, и вывод принципа максимума Понтрягина завершается в несколько строк (см. параграф 13).

А сейчас обратимся к доказательству **основной леммы**.

Доказательство основной леммы. Пусть

$$u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (12.1)$$

— допустимое управление,

$$\tilde{x}(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \qquad (12.2)$$

— соответствующая этому управлению траектория, правый конец которой удовлетворяет условию

$$\tilde{x}(t_1) \in \Pi. \qquad (12.3)$$

Введем новую систему координат, выполнив параллельный перенос осей координат и поместив начало новой системы координат в правый конец

$\tilde{x}(t_1)$ траектории (12.2); оси новой системы координат будем обозначать буквами $y^0, y^1, \dots, y^n$. Луч l в новой системе координат совпадает с отрицательной полуосью y^0, а прямая Π — с осью y^0. Будем записывать:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y^0 \\ y \end{pmatrix} \in Y^{n+1} \equiv R^{n+1}, \quad y^0 \in R^1, y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} \in Y^n \equiv R^n.$$

Доказательство основной леммы разобьем на пять этапов **А, Б, В, Г, Д.** .

А. Идея доказательства. Для доказательства **основной леммы** будет показано, что существует допустимое управление, лучшее, чем исходное управление (12.1). Более детально: найдется допустимое управление

$$u^*_\epsilon(t), \quad t_0 \le t \le t^*_1, \tag{12.4}$$

и отвечающая ему траектория

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t), \quad t_0 \le t \le t^*_1, \tag{12.5}$$

удовлетворяющая условию

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t^*_1) \in \Pi, \tag{12.6}$$

такие, что

$$L(u^*_\epsilon) \equiv {x^0}^*_\epsilon(t^*_1) < x^0(t_1) \equiv L(u). \tag{12.7}$$

Здесь ${x^0}^*_\epsilon(t^*_1)$ — нулевая координата правого конца $\tilde{x}^*_\epsilon(t^*_1)$ построенной траектории (12.5), $x^0(t_1)$ — нулевая координата правого конца исходной траектории (12.2). Построение "лучшего"управления (12.4) будет выполнено с помощью специально подобранной *расширенной вариации Макшейна*. Описание этого процесса излагается ниже в предположении **Основной леммы** о том, что луч l (или отрицательная полуось y^0) проходит по внутренности конуса $\mathfrak{C}$.

Выбор симплекса T^n. Возьмем в Y^n набор из $n+1$ точек

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in Y^n \tag{12.8}$$

так, чтобы

$$c = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} = 0_{Y^n}, \tag{12.9}$$

и система векторов

$$a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0 \tag{12.10}$$

была линейно независимой. По точкам (12.8) построим $n-$мерный симплекс $T^n \subset Y^n$ с вершинами $a_0, a_1, \dots, a_n$. Центр симплекса T^n, по построению, расположен в нуле. Далее векторы (12.8) меняться не будут.

В. Оператор проектирования $\pi : Y^{n+1} \mapsto Y^n$. Введем оператор $\pi : Y^{n+1} \mapsto Y^n$ проектирования параллельно оси y^0. Определим этот оператор соотношением:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y^0 \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} y, \tag{12.11}$$

$$\tilde y \in Y^{n+1}, y^0 \in R^1, y \in Y^n.$$

Лемма 12.1 *(образы луча и конуса при отбражении π).*

$$\pi(l) = 0 \in Y^n, \qquad (12.12)$$

$$\pi(\mathcal{C}) = Y^n. \qquad (12.13)$$

Формула (12.12) говорит о том, что каждая точка луча l проектируется в точку $0 \in Y^n$. Формула (12.13) содержит утверждение о том, что конус проектируется оператором π на все пространство Y^n в предположении **Основной леммы**. Другими словами, при отображении π образ луча l состоит из одной точки $0 \in Y^n$, а образом конуса $\mathcal{C}$ является все пространство Y^n.

Г. Построение симплекса $\tilde T^n$. Построим теперь n-мерный симплекс $\tilde T^n \subset Y^{n+1}$. Грубо говоря, симплекс $\tilde T^n$ получается из симплекса T^n параллельным переносом на некоторое расстояние h "вниз"вдоль оси y^0. Ниже следует формальное определение симплекса $\tilde T^n$.

Привлекая вершины (12.8) симплекса T^n, введем набор $(n+1)$-мерных точек

$$\tilde b_i = \begin{pmatrix} -h \\ a_i \end{pmatrix} \in Y^{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \qquad (12.14)$$

с одинаковой нулевой координатой, равной $-h$, где $h > 0$ — параметр. Линейная независимость векторов (12.10) влечет линейную независимость векторов

$$\tilde b_1 - \tilde b_0, \tilde b_2 - \tilde b_0, \dots, \tilde b_n - \tilde b_0.$$

Поэтому по точкам (12.14) можно построить n-мерный симплекс $\tilde T^n \subset Y^{n+1}$ с вершинами $\tilde b_0, \tilde b_1, \dots, \tilde b_n$. Этот симплекс допускает следующие формальные описания:

$$\tilde T^n = \left\{ \tilde y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y \end{pmatrix} \in Y^{n+1} : \begin{array}{c} y^0 = -h \\ y \in T^n \end{array} \right\}$$

и

$$\tilde T^n = \left\{ \tilde y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y \end{pmatrix} \in Y^{n+1} : \tilde y = \sum_{i=0}^n \lambda^i \tilde b_i, \ \sum_{i=0}^n \lambda^i = 1, \lambda^i \ge 0, i = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

Здесь $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n$ — барицентрические координаты точки $\tilde y \in \tilde T^n$.

Замечание 12.2. *В силу (12.13) существует такое число $h > 0$, что*

$$\tilde b_i \in int\ \mathcal{C}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\tilde T^n \subset int\ \mathcal{C}.$$

Параметр $h > 0$ выберем так, чтобы выполнялись эти включения; в дальнейшем этот параметр фиксирован.

Замечание 12.3. *Имеет место равенство*

$$\pi(\tilde T^n) = T^n.$$

Замечание 12.4. *Любую точку $\tilde{b} \in \tilde{T}^n$ можно представить в виде*

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -h \\ a \end{pmatrix},$$

где $a \in T^n$. Точку a, как точку симплекса T^n, запишем в виде

$$a = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a) a_i, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a) = 1, \lambda^i(a) \geq 0, i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\lambda^i(a)$ — барицентрические координаты точки a, непрерывно зависящие от точки $a \in T^n$. Отсюда следует, что точку $\tilde{b} \in \tilde{T}^n$ можно записать в форме

$$\tilde{b} = \tilde{b}(a) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a) \tilde{b}_i,$$

т.е. точки $\tilde{b}$ симплекса $\tilde{T}^n$ запараметризованы естественным образом точками a симплекса T^n так, что

$$\pi(\tilde{b}(a)) = a.$$

Замечание 12.5. *Каждая из вершин $\tilde{b}_i$ симплекса $\tilde{T}^n$ принадлежит (см. Замечание 12.2) конусу*

$$\mathcal{C} \equiv \bigcup_{M \in \mathcal{M},\ \alpha \in R^1} \{\phi(V(M, \alpha))\}.$$

поэтому для каждого $i = 0, 1, \ldots, n$, найдутся вариация Макшейна $M_i \in \mathcal{M}$ и число $\alpha_i \in R^1$ такие, что

$$\tilde{b}_i = \phi(V(M_i, \alpha_i)), \quad i = 0.1. \ldots, n.$$

Напомним, что символом $\mathcal{M}$ обозначается совокупность всех вариаций Макшейна (ПОВМ, ОВМ, МВМ).

Лемма 12.2 (о представлении точек $\tilde{b}(a) \in \tilde{T}^n$). *Точки $\tilde{b}(a) \in \tilde{T}^n$ допускают представление*

$$\tilde{b}(a) = \phi(V(M(a), \alpha(a))), \quad a \in T^n,$$

где в расширенной вариации Макшейна $V(M(a), \alpha(a))$ аргументами служат:
$M(a)$ — вариация Макшейна и
$\alpha(a)$ — действительное число,
зависящие от точки $a \in T^n$, причем

$$M(a) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(a) M_i,$$

$$\alpha(a) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(a) \alpha_i.$$

Здесь $\lambda_i(a)$ — барицентрические координаты точки $a \in T^n$, M_i, α_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, — вариации Макшейна и действительные числа, соответственно, введенные в Замечании 12.5.

Доказательство леммы 12.2. Имеем:

$$\tilde{b}(a) = \{\textbf{Замечение 12.4}\} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a)\tilde{b}_i = \{\textbf{Замечение 12.5}\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a)\phi(V(M_i, \alpha_i)) = \{\textbf{Линейность отображения } \phi\ \} =$$

$$= \phi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a)V(M_i, \alpha_i)\right) =$$

$$= \phi\left(V(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a)M_i), \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(a)\alpha_i)\right) =$$

$$= \phi(V(M(a), \alpha(a))).$$

Здесь мы воспользовались свойствами расширенных вариаций Макшейна и отображения ϕ. Лемма 12.2 доказана.

Д. Заключительная часть. Обратимся к реализации плана, намеченного в пункте **А.** Докажем следующее утверждение.

Лемма 12.3. *Существует расширенная вариация Макшейна $V(M, \alpha)$, переводящая управление (12.1) в управление (12.4) такая, что при достаточно малых $\epsilon > 0$ траектория (12.5) удовлетворяет условиям (12.6), (12.7).*

Доказательство Леммы 12.3. Условие (12.6)

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t^*_1) \in \Pi$$

равносильно условию

$$\pi\left[\tilde{x}^*_\epsilon(t^*_1) - \tilde{x}(t_1)\right] = 0 \in Y^n. \tag{12.15}$$

Ранее установлено, что при малых ϵ имеет место соотношение

$$\tilde{x}^*_\epsilon(t^*_1) - \tilde{x}(t_1) = \epsilon\phi(V(M, \alpha)) + o(\epsilon). \tag{12.16}$$

Применяя оператор проектирования π к (12.16) и разделив обе части полученного равенства на $\epsilon > 0$, получаем:

$$\frac{\pi[\tilde{x}^*_\epsilon(t^*_1) - \tilde{x}(t_1)]}{\epsilon} = \pi(\phi(V(M, \alpha))) + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}. \tag{12.17}$$

В силу (12.17) условие (12.15) равносильно следующему:

$$0_{Y^n} = \pi(\phi(V(M, \alpha))) + o_\epsilon(1). \tag{12.18}$$

Здесь

$$o_\epsilon(1) = \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0 \text{ при } \epsilon \to 0.$$

Таким образом, доказательство Леммы 12.3 сводится к проверке разрешимости уравнения (12.18) относительно вариации Макшейна M и действительного числа α при достаточно малых $\epsilon > 0$. Будем искать решение уравнение (12.18) в следующем виде:

$$M = M(a), \quad \alpha = \alpha(a), \qquad a \in T^n. \tag{12.19}$$

Подстановка (12.19) в (12.18) приводит к уравнению

$$\pi(\phi(V(M(a), \alpha(a)))) + o_\epsilon(1) = 0_{Y^n} \tag{12.20}$$

относительно $a \in T^n$; в этом уравнении остаточный член зависит от a и от $\epsilon > 0$. В силу Леммы 12.2 и Замечания 12.4 $\pi(\phi(V(M(a), \alpha(a)))) = \pi(\tilde{b}(a)) = a$, поэтому уравнение (12.20) принимает вид

$$\varphi_\epsilon(a) \equiv a + o(1) = 0, \qquad \varphi_\epsilon(a)|_{\epsilon=0} = a. \tag{12.21}$$

В силу **Утверждения о малых деформациях симплекса** уравнение (12.21) разрешимо при достаточно малых ϵ: существует такое $\epsilon_0 > 0$, что уравнение (12.21) при любом $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ имеет решение $a_\epsilon \in T^n$. Это решение определяет вариацию Макшейна $M(a_\epsilon)$ и действительное число $\alpha(a_\epsilon)$ такие, что расширенная вариация Макшейна $V(M(a_\epsilon), \alpha(a_\epsilon))$ порождает управление (12.4) и отвечающую ему траекторию (12.5) со свойством (12.6), (12.7) при малых ϵ. Действительно, запишем векторное соотношение (12.16) для нулевых координат:

$${x^0}^*_\epsilon(t_1^*) - x^0(t_1) = -\epsilon h + o(\epsilon). \tag{12.22}$$

Здесь фиксированное число $h > 0$ не зависит от $\epsilon > 0$, поэтому при малых ϵ знак правой части (12.22) определяется знаком главного члена. Так как этот главный член отрицателен, то при достаточно малых $\epsilon > 0$ справедливо неравенство

$$L(u_\epsilon^*) \equiv {x^0}^*_\epsilon(t_1^*) < x^0(t_1) \equiv L(u).$$

Таким образом, требуемое неравенство (12.7) установлено, Лемма 12.3 доказана, и тем самым доказательство **Основной леммы** закончено.

5 §13. Вывод условия максимума

Напомним, что в **теореме 1** о необходимых условиях оптимальности утверждается, что из оптимальности пары $\tilde{x}(t), u(t), t_0 \le t \le t_1$, вытекает существование сопряженной переменной $\tilde{\psi}(t), t_0 \le t \le t_1$,, такой, что удовлетворяются дифференциальные уравнения: (7) — уравнение управляемого движения, (8) — сопряженное уравнение и условие максимума

$$K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) \ge K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), v) \quad \forall v \in U, t \in [t_0, t_1], \tag{9}$$

где $K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) = \tilde{\psi} \tilde{f}(\tilde{x}, u)$ — функция Гамильтона-Понтрягина.

Из оптимальности управления $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, в силу **Следствия из основной леммы** вытекает, что луч l не проходит по внутренности конуса $\mathcal{C}$. Поэтому луч и конус разделяются проходящей через вершину конуса гиперплоскостью $\Gamma_{\tilde{n}}$ с ненулевым вектором нормали $\tilde{n} \in Y^{n+1}$:

$$l \subset \Pi^{+}_{\tilde{n}}, \tag{13.1}$$

$$\mathcal{C} \subset \Pi^{-}_{\tilde{n}}. \tag{13.2}$$

Далее мы покажем, что вектор нормали $\tilde{n}$ разделяющей гиперплоскости служит граничным значением искомой сопряженной переменной:

$$\tilde{\psi}(t)|_{t=t_1} = \tilde{n}. \tag{13.3}$$

Геометрическое условие (13.1) равносильно условию

$$(\tilde{n}, \tilde{y}) \geq 0 \quad \forall \tilde{y} \in l, \tag{13.4}$$

а геометрическое условие (13.2) — условию

$$(\tilde{n}, c) \leq 0 \quad \forall c \in \mathcal{C}. \tag{13.5}$$

Если точка $\tilde{y}$ с координатами $y^0, y^1, \ldots, y^n$ принадлежит лучу l, то то $y^0 \leq 0, y^1 = 0, \ldots, y^n = 0$, и условие (13.4) принимает вид

$$\psi_0 \cdot y^0 \geq 0 \quad \forall y^0 \leq 0.$$

Полагая в нем $y^0 = -1$, получаем: $\psi_0 \cdot (-1) \geq 0$, откуда следует неравенство $\psi_0 \leq 0$, где ψ_0 — нулевая координата вектора $\tilde{n} = \tilde{\psi}(t_1)$. Таким образом, Дополнение 1 к теореме 1 доказано полностью (раньше мы отмечали свойство постоянства нулевой координаты сопряженной переменной: $\dot{\psi}_0(t) = 0, \psi_0(t) \equiv const$; теперь установлена ее неположительность.)

Перепишем неравенство (13.5) в виде

$$\tilde{n}c \leq 0 \quad \forall c \in \mathcal{C} \equiv \bigcup_{M,\alpha} \{\phi(V(M, \alpha))\}$$

или

$$\tilde{n}\phi(V(M, \alpha)) \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}, \alpha \in R^1.$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, и принимая во внимание, что расширенная вариация Макшейна $V(M, \alpha)$ при $\alpha = 0$ совпадает с вариацией Макшейна M, получаем:

$$\tilde{n}\phi(M) \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}. \tag{13.6}$$

Выберем в качестве вариации Макшейна M простейшую одночленную вариацию Макшейна

$$M(t; \sigma \quad v\,; \epsilon). \tag{13.7}$$

Здесь t — точка непрерывности управления $u(t)$, σ — неотрицательное число, v — любая точка из области управления U, $\epsilon > 0$ — малый параметр. Напомним формулу для вычисления отображения ϕ в случае простейшей одночленной вариации Макшейна (13.7):

$$\phi(M) = \Phi(t_1, t)\ \sigma\ [\tilde{f}(\tilde{x}(t), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t))]. \tag{13.8}$$

В силу (13.8) неравенство (13.7) принимает вид

$$\tilde{n}\Phi(t_1, t)\ \sigma\ [\tilde{f}(\tilde{x}(t), v) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t))] \leq 0.$$

В последнем неравенстве $(n+1)$-мерная строка

$$\tilde{n}\Phi(t_1, t) = \tilde{\psi}(t_1)\Phi(t_1, t) \equiv \tilde{\psi}(t) \tag{13.9}$$

является сопряженной переменной, удовлетворяющей сопряженному уравнению (8) и начальному условию $\tilde{\psi}(t_1) = \tilde{n} \neq 0$. Полагая в этом неравенстве $\sigma = 1$, имеем:

$$\tilde{\psi}(t)\tilde{f}(\tilde{x}(t), v) \leq \tilde{\psi}(t)\tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t)) \quad \forall v \in U, t \in [t_0, t_1],$$

или, в терминах функции Гамильтона-Понтрягина,

$$K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) \geq K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), v) \quad \forall v \in U, t \in [t_0, t_1]. \tag{9}$$

Условие максимума (9) доказано.

Неравенство (9), доказанное для точек непрерывности управления $u(t)$, предельным переходом проверяется для всех остальных точек отрезка $[t_0, t_1]$. Действительно, пусть $\tau \in (t_0, t_1)$ — точка разрыва кусочно-непрерывного управления $u(t)$. По принятому соглашению $u(\tau - 0) = u(\tau)$, причем найдется число $\delta > 0$ такое, что при $t \in (\tau - \delta, \tau]$ управление $u(t)$ непрерывно. Считая $t \in (\tau - \delta, \tau)$ и выполняя предельный переход в неравенстве (9) при $t \to \tau - 0$, убеждаемся в справедливости неравенства (9) в точке τ.

Теорема 1 доказана вместе с **Дополнением 1**. **Дополнение 2** к **теореме 1** доказывается ниже.

6 §14. Обоснование Дополнения 2 к теореме 1

Напомним формулировку этого дополнения.

Дополнение 2 к теореме 1 *(t_1 — свободно):*

$$\mathcal{K}(t) \equiv K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{14.1}$$

Функция $\mathcal{K}(t)$, очевидно, непрерывна на любом интервале непрерывности управления $u(t)$. Для доказательства (14.1) достаточно установить следующие три утверждения:

ⓐ $\mathcal{K}(t_1) = 0$

ⓑ Функция $\mathcal{K}(t)$ сохраняет постоянное значение на любом интервале непрерывности управления $u(t)$

ⓥ Функция $\mathcal{K}(t)$ непрерывна в любой точке τ разрыва управления $u(t)$:

$$\mathcal{K}(\tau - 0) = \mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(\tau + 0) \tag{14.2}$$

Доказательство утверждения ⓐ. Установленное выше включение (13.2) $\mathcal{C} \subset \Pi_{\tilde{n}}^{-}$ равносильно условию

$$\tilde{n}c \leq 0 \quad \forall c \in \mathcal{C} \equiv \bigcup_{M,\alpha} \{\phi(V(M,\alpha))\}, \tag{14.3}$$

где $\tilde{n} = \tilde{\psi}(t_1)$. Так как

$$\phi(V(M,\alpha)) = \phi(M) + \alpha \tilde{f}(\tilde{x}(t_1), u(t_1)),$$

то условие (14.3) можно записать в виде

$$\tilde{\psi}(t_1)\phi(V(M,\alpha)) \leq 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}, \alpha \in R^1. \tag{14.4}$$

Возьмем в (14.4) вариацию Макшейна M с нулевыми параметрами σ; тогда $\phi(M) = 0$, и условие (14.4) принимает вид

$$\tilde{\psi}(t_1)\alpha \tilde{f}(\tilde{x}(t_1), u(t_1)) \leq 0 \quad \forall \alpha \in R^1,$$

или

$$\alpha \cdot \mathcal{K}(t_1) \leq 0 \quad \forall \alpha \in R^1. \tag{14.5}$$

Положив в (14.5) сначала $\alpha = 1$, а затем $\alpha = -1$, получаем:

$$\mathcal{K}(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{K}(t_1) \geq 0,$$

что влечет равенство

$$\mathcal{K}(t_1) = 0.$$

Утверждение ⓐ доказано.

Доказательство утверждения ⓑ. Пусть управление $u(t)$ непрерывно на полуинтервале $(t_2, t_3] \subset (t_0, t_1)$. Докажем, что

$$\dot{\mathcal{K}}(t) = 0, \quad t \in (t_2, t_3], \tag{14.6}$$

откуда следует постоянство функции $\mathcal{K}(t)$ на этом множестве. Для этого возьмем две различные точки τ_0, τ_1 на полуинтервале $(t_2, t_3]$ и покажем, что разделенная разность функции $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\mathcal{K}(\tau_1) - \mathcal{K}(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 - \tau_0 \to 0. \tag{$\star$}$$

При этом

$$\dot{\mathcal{K}}(\tau_0) = 0 \quad \forall \tau_0 \in (t_2, t_3],$$

что влечет постоянство функции $\mathcal{K}$.

Обратимся сейчас к доказательству соотношения ($\star$). Привлекая условие (9), запишем следующие неравенства:

$$\mathcal{K}(\tau_1) \equiv K(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{\psi}(\tau_1), u(\tau_1)) \geq K(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{\psi}(\tau_1), u(\tau_0)), \tag{14.7}$$

$$\mathcal{K}(\tau_0) \equiv K(\tilde{x}(\tau_0), \tilde{\psi}(\tau_0), u(\tau_0)) \geq K(\tilde{x}(\tau_0), \tilde{\psi}(\tau_0), u(\tau_1)). \tag{14.8}$$

Умножив неравенство (14.8) на -1, перепишем его в виде

$$-\mathcal{K}(\tau_0) \leq -K(\tilde{x}(\tau_0), \tilde{\psi}(\tau_0), u(\tau_1)). \tag{14.9}$$

Эти неравенства используем для оценки приращения функции $\mathcal{K}$. Привлекая неравенства (14.7), (14.9), оцениваем это приращение сначала сверху:

$$\mathcal{K}(\tau_1) - \mathcal{K}(\tau_0) \leq K(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{\psi}(\tau_1), u(\tau_1)) - K(\tilde{x}(\tau_0), \tilde{\psi}(\tau_0), u(\tau_1)), \tag{14.10}$$

а затем снизу:

$$\mathcal{K}(\tau_1) - \mathcal{K}(\tau_0) \geq K(\tilde{x}(\tau_1), \tilde{\psi}(\tau_1), u(\tau_0)) - K(\tilde{x}(\tau_0), \tilde{\psi}(\tau_0), u(\tau_0)). \tag{14.11}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$g(t, \tau) = K(\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(\tau)) \equiv \tilde{\psi}(t)\tilde{f}(\tilde{x}(t), u(\tau)). \tag{14.12}$$

Для приращения функции $\mathcal{K}$ теперь в силу (14.10) - (14.12) можно записать следующее двойное неравенство:

$$g(\tau_1, \tau_0) - g(\tau_0, \tau_0) \leq \mathcal{K}(\tau_1) - \mathcal{K}(\tau_0) \leq g(\tau_1, \tau_1) - g(\tau_0, \tau_1). \tag{14.13}$$

В левой и правой частях последнего неравенства стоят приращения функции (14.12) по первому аргументу. Для оценки этих приращений вычислим частную производную функции g по первому аргументу. Имеем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} g(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t}[\tilde{\psi}(t)\tilde{f}(\tilde{x}(t), u(\tau))] = \\ = \dot{\tilde{\psi}}(t)\tilde{f}(\tilde{x}(t), u(\tau)) + \tilde{\psi}(t)\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}(t), u(\tau))\dot{\tilde{x}}(t) = \\ = -\tilde{\psi}(t)\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}(t), u(t))\tilde{f}(\tilde{x}(t), u(\tau)) + \tilde{\psi}(t)\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}(t), u(\tau))\tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t)),\end{gathered} \tag{14.15}$$

так как

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), u(t)), \quad \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\tilde{\psi}(t)\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}(t), u(t)).$$

Частная производная $g'_t(t, \tau)$ непрерывна по первому аргументу, причем из формулы (14.15) следует

$$g'_t(t, \tau)|_{t=\tau} = 0. \tag{14.16}$$

Применение формулы конечных приращений и равенства (14.16) дает:

$$g(\tau_1, \tau_1) - g(\tau_0, \tau_1) = g'_t(\xi, \tau_1)(\tau_1 - \tau_0) = o(|\tau_1 - \tau_0|). \tag{14.17}$$

Здесь ξ — некоторая промежуточная точка, лежащая между точками τ_0 и τ_1. Аналогичным образом получаем соотношение

$$g(\tau_1, \tau_1) - g(\tau_0, \tau_1) = o(|\tau_1 - \tau_0|). \tag{14.18}$$

Двойное неравенство (14.13) вместе с соотношениями (14.17), (14.18) приводит к обоснованию ($\star$). Утверждение ⓑ доказано.

Доказательство утверждения ⓥ. Пусть τ — точка разрыва управления $u(t)$:

$$u(\tau - 0) = u(\tau), \quad u(\tau) \neq u(\tau + 0). \tag{14.19}$$

Докажем непрерывность функции $\mathcal{K}(t)$ в точке $t = \tau$, проверив равенства (14.2):

$$\mathcal{K}(\tau - 0) = \mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(\tau + 0) \tag{14.2}$$

В силу (14.19) имеем: $\mathcal{K}(\tau - 0) = \mathcal{K}(\tau)$. Таким образом, остается установить равенство

$$\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(\tau + 0). \tag{14.20}$$

Привлекая условие максимума (9), имеем:

$$\mathcal{K}(\tau) \equiv K(\tilde{x}(\tau), \tilde{\psi}(\tau), u(\tau)) \geq K(\tilde{x}(\tau), \tilde{\psi}(\tau), u(\tau + 0)) \equiv \mathcal{K}(\tau + 0),$$

т.е. доказано неравенство

$$\mathcal{K}(\tau) \geq \mathcal{K}(\tau + 0). \tag{14.21}$$

С другой стороны, выбрав точку $\tau' > \tau$ и используя условие максимума (9), запишем неравенство

$$\mathcal{K}(\tau') \equiv K(\tilde{x}(\tau'), \tilde{\psi}(\tau'), u(\tau')) \geq K(\tilde{x}(\tau'), \tilde{\psi}(\tau'), u(\tau)),$$

и предельный переход в нем при $\tau' \to \tau + 0$ дает:

$$\mathcal{K}(\tau + 0) \geq \mathcal{K}(\tau). \tag{14.22}$$

Сравнение неравенств (14.21) и (14.22) доказывает равенство (14.20). Непрерывность функции $\mathcal{K}(t)$ установлена. Утверждение ⓥ доказано.

Обоснование **Дополнения 2** к теореме 1 закончено.