Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Оптимальное управление.
Конспект лекций

(VI семестр)

лектор — доцент М. В. Орлов
составители — В. Б. Ларионов, С. А. Матвеев, В. С. Фёдорова

v. 1.0 — 23.05.2005

Содержание

1 Задача оптимального управления

1.1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать систему, поведение которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $f \in R^n$. Управление u удовлетворяет геометрическому ограничению $u \in U$, где $U \subset R^m$. Множество U (область управления) в математической постановке задачи считается произвольным, но для технических задач особенно важен случай *компактного* множества U. Именно такое множество мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Введем некоторые обозначения: M_0 — множество начальных состояний; M_1 — множество конечных состояний; $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Будем считать, что момент времени t_0 задан, а t_1 выбирается исходя из условия $x(t_1) \in M_1$.

Кроме того, задан класс D допустимых управлений, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Если $u(\cdot) \in D$, то $u(\cdot)$ измеримо и ограничено на рассматриваемом отрезке времени.

2) Если $u(\cdot) \in D$, $v \in U$, то для любых $t', t'' : t_0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_1$ управление

$$u_1(t) = \begin{cases} v, & t' < t \leqslant t'' \\ u(t), & t \in [t_0, t'] \cup (t'', t_1] \end{cases}$$

также допустимо.

3) Если отрезок $[t_0, t_1]$ разбит на конечное число отрезков, на каждом из которых управление $u(\cdot)$ допустимо, то и на всем отрезке $[t_0, t_1]$ управление $u(\cdot)$ также допустимо.

4) Если $u(t) \in D$, $t \in [t_0, t_1]$, то управление вида $v(t) = u(t-\alpha)$, заданное на отрезке $[t_0+\alpha, t_1+\alpha]$, также допустимо.

Перечислим наиболее часто встречающиеся классы допустимых управлений:

- D_{max} — множество всех измеримых и ограниченных на некотором отрезке управлений.
- Множество всех кусочно-непрерывных слева управлений, то есть кусочно-непрерывных управлений, для которых $u(t-0) = u(t)$ для всех $t \in (t_0, t_1]$ и $u(t_0+0) = u(t_0)$.
- D_{min} — множество всех кусочно-постоянных управлений, непрерывных слева.

Если задано допустимое управление $u(\cdot) \in D$, то, подставляя его в уравнение (1), получим:

$$\dot{x} = f(x, u(t))$$

Задав начальное условие $x(t_0) = x_0$, можно решить это уравнение и получить допустимую траекторию $x(t)$.Напомним, что в линейном случае, когда $f(x, u) = Ax + u$, для всех измеримых управлений $u(\cdot)$ верна формула Коши:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds$$

В нелинейном случае $f(x, t)$, вообще говоря, разрывна при измеримом управлении $u(t)$. Ответ на вопрос о существовании и единственности решения в этом случае дает следующая теорема:

Теорема. *Пусть в задаче*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

выполнены следующие требования:

1) *$f(x,t)$ определена и непрерывна по x для почти всех t.*

2) *$f(x,t)$ измерима по t при любом x.*

3) *$|f(x,t)| \leqslant m(t)$, где $m(t)$ — суммируемая функция.*

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что на отрезке $[t_0, t_0+\varepsilon]$ существует абсолютно непрерывное решение $x(t)$ задачи (2). Если, кроме того, для любых x, y выполнено неравенство

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leqslant l(t)|x-y|,$$

где $l(t)$ — суммируемая функция, то решение единственно.

Примем эту теорему без доказательства.

Для того, чтобы обеспечить существование и единственность решения, будем предполагать, что функция $f(x,u)$ и все элементы матрицы $\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}$ размера $(n \times n)$, составленной из частных производных функции f, непрерывны по совокупности переменных в $E^n \times \overline{U}$. Будем подразумевать выполнение этого требования в каждой последующей задаче.

Пусть также задан функционал $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt$, где f^0 удовлетворяет тем же требованиям, что и f.

Итак, задача оптимального управления формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U \\ x(t_0) \in M_0,\ x(t_1) \in M_1 \\ J = \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

В первой части курса мы подробно изучили задачу оптимального управления для линейной системы в случае, когда $f^0 \equiv 1$, то есть линейную задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, \quad u \in U \\ x(t_0) \in M_0,\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

При этом основным объектом нашего изучения являлось множество достижимости

$$X(t) = \{y \in R^n : x(t_0) \in M_0,\ x(t) \text{ — траектория системы на } [t_0, t_1],\ y = x(t_1)\}$$

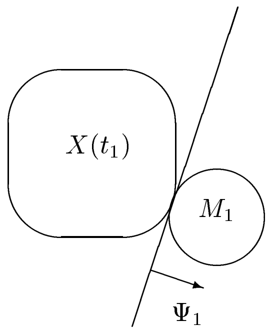
Все полученные нами результаты были основаны на свойствах множества достижимости.

Если M_0 — выпуклый компакт, а U — компакт, то $X(t)$ — выпуклый компакт. Это следствие формулы Коши:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds$$

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}U\,ds$$

и теоремы Ляпунова о выпуклости интеграла от многозначного отображения. Ход наших рассуждений при доказательстве принципа максимума Понтрягина был примерно следующим. $X(t)$ — выпуклое компактное множество, момент первого касания с множеством M_1 является временем быстродействия. Выпуклые множества $X(t_1)$ и M_1 в момент касания можно отделить гиперплоскостью, определённой вектором $\Psi_1 \neq 0$.



Далее решаем сопряжённую систему

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^*\psi \\ \psi(t_1) = \psi_1 \end{cases}$$

и получаем функцию $\psi(t)$, удовлетворяющую условиям принципа максимума.

Оказывается, что и в произвольной нелинейной задаче оптимального управления множество достижимости играет такую же фундаментальную роль, хотя в этом случае оно, вообще говоря, не является выпуклым.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2u - x_1v, & |u| \leqslant 1, & x_1(0) = 1, & x_1(T) = -1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1u - x_2v, & |v| \leqslant 1, & x_2(0) = 0, & x_2(T) = 0 \\ T & \longrightarrow & \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases}$$

Множество достижимости:

$$X(t) = \{y \in E^n : y = x(t),\ \dot{x}(s) = f(x(s), u(s)),\ x(t_0) = x_0,\ u(\cdot) \in D_{\bar{U}},\ t_0 \leqslant s \leqslant t\}$$

Перейдём к полярным координатам:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \\ (x_1, x_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

Очевидно, справедливо следующее равенство

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Продифференцируем его левую и правую части по переменной t. Получим

$$2r\dot{r} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2.$$

$$\dot{r} = \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(x_2u - x_1v) + x_2(-x_1u - x_2v)}{r} = -\frac{x_1^2v + x_2^2v}{r} = -\frac{r^2v}{r} = -rv$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \equiv -x_1u - x_2v = -ru\cos\varphi - rv\sin\varphi$$

Отсюда при $\cos\varphi \neq 0$ получаем

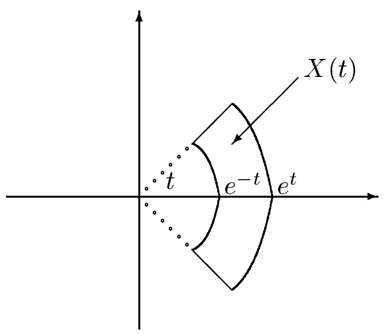
$$\dot{\varphi} = -u$$

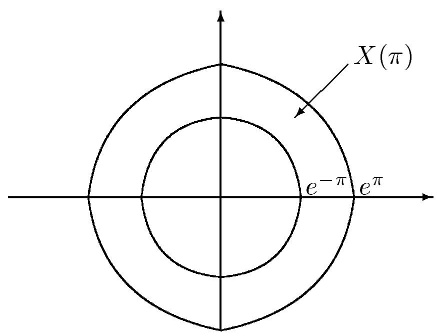
При $\cos\varphi = 0$ получим аналогичную формулу, дифференцируя x_1 (при этом, очевидно, $\sin\varphi \neq 0$). Итак:

$$\begin{cases} \dot{r} &= -rv, \quad -1 \leqslant v \leqslant 1, \quad r(0) = 1 \\ \dot{\varphi} &= -u, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r &= e^{\int_0^t v(s)\,ds} \\ \varphi &= \int\limits_0^t u(s)\,ds \end{cases}$$

Очевидно, $-t \leqslant \varphi \leqslant t$, $e^{-t} \leqslant r \leqslant e^t$. Будем изучать поведение множества достижимости при $t \geqslant 0$.





В частности, в момент времени $t = \pi$ множество достижимости $X(\pi)$ представляет собой кольцо $e^{-\pi} \leqslant r \leqslant e^{\pi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Точка (-1,0) появляется сразу внутри $X(\pi)$.

1.2 Расширенная задача

В дальнейшем нам потребуется эквивалентная формулировка задачи оптимального управления. Добавим к фазовым координатам координату x^0, закон изменения которой имеет вид

$$x^0 = f^0(x_1, \ldots, x_n, u),$$

где f^0 — функция из определения функционала J. Через $\tilde{x}$ будем обозначать вектор из расширенного пространства R^{n+1}. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x, u),$$

где $\tilde{f}(x,u) = (f^0(x,u), f(x,u))^T \in R^{n+1}$. Заметим, что правая часть этой системы не зависит от x^0. Начальное условие зададим следующим образом: $\tilde{x}(t_0) = (0, x_0)^T$.

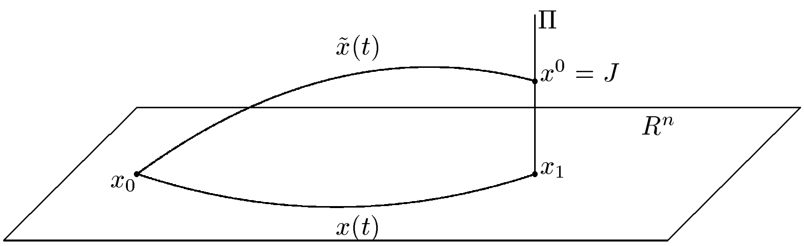
Пусть $u(\cdot)$ — некоторое допустимое управление, $x(t)$ — соответствующее решение системы (2). Тогда решение $\tilde{x}(t)$ расширенной системы с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = (0, x_0)^T$, соответствующее управлению $u(t)$, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \int\limits_{t_0}^{t} f^0(x(t), u(t))\, dt \\ x(t) \end{pmatrix}$$

В частности при $t = t_1$ имеем:

$$\begin{pmatrix} \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через П прямую, проходящую через точку $(0, x_1)^T \in R^{n+1}$ параллельно оси x^0, то есть образованную всеми точками вида $(\xi, x_1)^T$. В момент времени $t = t_1$ решение $\tilde{x}(t)$ расширенной системы проходит через прямую П, а именно, через точку с координатой $x^0 = J$. Геометрическая картина выглядит следующим образом:



Верно и обратное: если $u(t)$ — допустимое управление, $\tilde{x}(t)$ — соответствующее ему решение расширенной системы и $\tilde{x}(t_0) = (0, x_0)^T$, $x(t_1) = (x^0, x_1)^T$, то $x(t)$ — решение исходной системы и $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $J = x^0$.

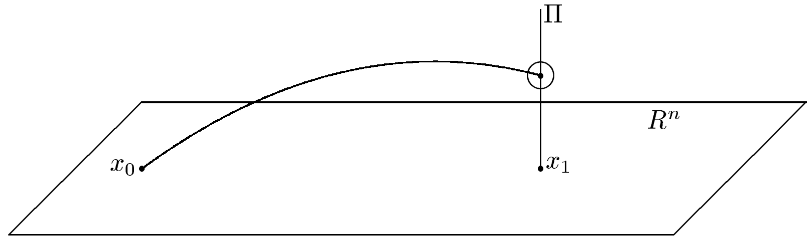
Таким образом, стало возможным сформулировать задачу оптимального управления в следующем эквивалентном виде:

В $(n+1)$-мерном пространстве R^{n+1} заданы точки $\tilde{x}_0 = (0, x_0)^T$ и прямая П, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $(0, x_1)^T$. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, таких что соответствующее решение расширенной системы $\tilde{x}(t)$ стартует из точки $(0, x_0)^T$ и попадает на прямую П, найти такое, точка пересечения которого с прямой П имеет наименьшую координату x^0.

Обозначим через $\tilde{X}(t)$ множество достижимости расширенной системы. Пусть $u_*(t)$ — оптимальное управление, а $\tilde{x}_*(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, тогда точка $\tilde{x}_*(t_1)$ лежит на границе множества $\tilde{X}(t_1)$.

Действительно, предположим противное, то есть пусть $\tilde{x}_*(t_1) \in \operatorname{int} \tilde{X}(t_1)$, тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ точка $(x^0_*(t_1) - \varepsilon,\, x_(t_1))^T \in \tilde{X}(t_1)$, то есть в эту точку приходит некоторая траектория системы.

В то же время, $x^0_*(t_1) - \varepsilon < J$. Полученное противоречие доказывает утверждение.



Итак, задачу можно переформулировать таким образом, чтобы оптимальная траектория в конечный момент времени лежала на границе множества достижимости расширенной системы (для исходной задачи это, вообще говоря, неверно).

1.3 Простейшие результаты для управляемой системы

Итак, основным объектом нашего изучения будет множество достижимости управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

где $x \in R^n, U \subset R^m$.

Множество достижимости определено равенством

$$X(t) = \{y \in R^n : y = x(t),\, \dot{x}(s) = f(x(s), u(s)),\, u \in D_U,\, s \in [t_0, t],\, x(t_0) = x_0\}.$$

Будем считать, что функция f удовлетворяет условию ограниченности в одном из двух видов:

$$\|f(x,u)\| \leqslant A\|x\| + B \tag{α}$$

или

$$\langle f(x,u), x\rangle \leqslant A\|x\|^2 + B, \tag{β}$$

где A, B — положительные постоянные. Заметим, что условие (α) представляет собой частный случай условия (β). Действительно, если выполнено (α), то

$$\langle f(x,u), x\rangle \leqslant \|f(x,u)\|\|x\| \leqslant A\|x\|^2 + B\|x\|.$$

Поскольку $\|x\| \leqslant \|x\|^2 + 1$, то

$$\langle f(x,u), x\rangle \leqslant A\|x\|^2 + B\|x\|^2 + B = (A+B)\|x\|^2 + B.$$

Если выполнено условие ограниченности, то все траектории управляемой системы (3) равномерно ограничены на заданном интервале $[t_0, t_1]$. Для доказательства этого факта нам потребуется

Лемма. *Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ задана непрерывная вектор-функция $x(t)$ и для некоторых чисел $P, Q \geqslant 0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ выполнено*

$$\|x(t)\| \leqslant P + Q\int\limits_{t_0}^{t} \|x(s)\| ds. \tag{4}$$

Тогда для всех $t \in [t_0, t_1]$
$$\|x(t)\| \leqslant Pe^{Q(t-t_0)}.$$

Доказательство. Обозначим $M = \max\limits_{[t_0,t_1]} \|x(t)\|$. Из неравенства (4) можно получить следующую оценку для $\|x(t)\|$:
$$\|x(t)\| \leqslant P + Q(t-t_0)M.$$

Подставляя в неравенство (4), получим

$$\|x(t)\| \leqslant P + Q\int\limits_{t_0}^{t} (P + Q(t-t_0)M)ds = P + PQ(t-t_0) + MQ^2\frac{(t-t_0)}{2!}.$$

Продолжая процесс, на $(N+1)$-м шаге получим:

$$\|x(t)\| \leqslant P + PQ(t-t_0) + \ldots + PQ^N\frac{(t-t_0)^N}{N!} + MQ^{N+1}\frac{(t-t_0)^{N+1}}{(N+1)!} =$$
$$= P\left(1 + Q(t-t_0) + \ldots + Q^N\frac{(t-t_0)^N}{N!}\right) + M\frac{Q^{N+1}(t-t_0)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Устремим N к бесконечности. Поскольку слагаемое $M\frac{Q^{N+1}(t-t_0)^{N+1}}{(N+1)!}$ стремится к нулю, правая часть неравенства будет стремиться к $Pe^{Q(t-t_0)}$. Лемма доказана. $\square$

Пусть теперь выполнено условие (α). Поскольку

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(s), u(s))\,ds,$$

то

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|f(x(s), u(s))\|\,ds \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} (A\|x(s)\| + B)\,ds.$$

Обозначая $P = \|x_0\| + B(t_1 - t_0)$, $Q = A$ и применяя лемму, получим, что на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\|x(t)\| \leqslant Pe^{Q(t-t_0)} \leqslant Pe^{Q(t_1-t_0)}.$$

Если же выполнено условие (β), доказательство равномерной ограниченности проводится следующим образом. Продифференцируем выражение $\|x(t)\|^2$ по t:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\langle \dot{x}, x\rangle = 2\langle f(x,u), x\rangle \leqslant 2A\|x(t)\|^2 + 2B.$$

Проинтегрировав неравенство, получим

$$\|x(t)\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + 2A\int\limits_{t_0}^{t} \|x(s)|^2\,ds + 2B(t_1 - t_0).$$

Для завершения доказательства снова применяем лемму, на этот раз в обозначениях $P = \|x_0\| + 2B(t_1 - t_0)$, $Q = 2A$.

Если все траектории управляемой системы (3) равномерно ограничены на отрезке $[t_0, t_1]$ и $\overline{U}$ — компакт, то на этом отрезке будут также ограничены величины $\|f(x,u)\|$ и $\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\|$.

Теорема 1. *Пусть в управляемой системе* (3) $\overline{U}$ *— компакт и выполнено условие ограниченности* (α) *или* (β). *Тогда* $\overline{X}(t)$ *— непрерывно зависящий от* t *компакт.*

Доказательство. Как было доказано выше, из условия ограниченности следует ограниченность множества $X(t)$, поэтому $\overline{X}(t)$ — компакт. Докажем непрерывность $\overline{X}(t)$.

По определению $\overline{X}(t)$, для любого $t' \in [t_0, t_1]$, любого $p \in \overline{X}(t)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая траектория $x(t)$, что

$$\|x(t') - p\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, поскольку $\|f(x(t), u(t))\| \leqslant m$ на $[t_0, t_1]$, верна оценка

$$\|x(t) - x(t')\| \leqslant \int\limits_{t'}^{t} \|f(x(s), u(s))\|\, ds \leqslant m|t - t'|.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $|t - t'| \leqslant \delta$

$$\|x(t) - x(t')\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $|t - t'| \leqslant \delta$, то

$$\|x(t) - p\| \leqslant \|x(t) - x(t')\| + \|x(t') - p\| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $x(t) \in \overline{X}(t)$, то доказанное означает, что при $|t - t'| \leqslant \delta$ для любого $p_1 \in \overline{X}(t')$ найдётся такое $p_2 \in \overline{X}(t)$, что $\|p_1 - p_2\| \leqslant \varepsilon$, причём величина δ одна и та же для всех $t' \in [t_0, t_1]$. Следовательно, при $|t - t'| \leqslant \delta$ для любого $p_1 \in \overline{X}(t)$ найдётся такое $p_2 \in \overline{X}(t')$, что $\|p_1 - p_2\| \leqslant \varepsilon$. Итак, при $|t - t'| \leqslant \delta$

$$\overline{X}(t') \subset \overline{X}(t) + S_\varepsilon(0),$$
$$\overline{X}(t) \subset \overline{X}(t') + S_\varepsilon(0),$$

а это и означает непрерывность отображения $\overline{X}(t)$. Теорема доказана. □

Следующую теорему примем без доказательства.

Теорема 2. *Рассмотрим управляемую систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Пусть выполнены следующие условия

1) U — компакт,

2) выполнено условие ограниченности в форме (α) или (β),

3) множество $F(x) = f(x, U) = \{y \in E^n : y = f(x,u),\ u \in U\}$ выпукло.

Тогда для любого $t \in [t_0, t_1]$ множество достижимости $X(t)$ является компактом.

Множество $F(x)$ называется *векторграммой скоростей*.

1.4 Теорема существования решения задачи быстродействия

Рассмотрим задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть в задаче* (5) *выполнены следующие условия:*

1) U — компакт,

2) выполнено условие ограниченности в форме (α) или (β),

3) $F(x) = f(x,U)$ — выпуклый компакт,

4) система управляема из x_0 в x_1.

Тогда существует оптимальное по быстродействию управление.

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что $X(t)$ — непрерывный компакт. Поскольку система управляема, существует такое $\tau > t_0$, что $x_1 \in X(\tau)$. Обозначим $t_1 = \inf\{\bar{\tau} > t_0 : x(\bar{\tau}) = x_1\}$. Очевидно, что $t_1 \leqslant \tau$.

В силу определения точной нижней грани, существует последовательность $\{\tau_i\}$, сходящаяся к t_1, для которой $x_1 \in X(\tau_i)$. В силу непрерывности $X(t)$ имеем: $X(\tau_i) \to X(t_1)$ при $\tau_i \to t_1$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из $|\tau_i - t_1| < \delta$ следует

$$X(\tau_i) \subset X(t_1) + S_\varepsilon(0).$$

Последнее означает, в частности, что $x_1 \in X(t_1) + S_\varepsilon(0)$. Из компактности $X(t_1)$ и произвольности ε следует, что $x_1 \in X(t_1)$. Теорема доказана. □

1.5 Система уравнений в вариациях

Займёмся теперь более детальным изучением множества достижимости $X(t)$ для управляемой системы (3). Наша цель в последующем будет состоять в том, чтобы некоторым образом аппроксимировать множество достижимости $X(t)$ в окрестности оптимальной траектории выпуклым множеством и далее воспользоваться теоремой об отделимости, так же как и в принципе максимума Понтрягина для линейных систем. Для этого нам потребуется изучить поведение управляемой системы в окрестности оптимальной траектории.

В дальнейшем будем предполагать, что в качестве множества допустимых управлений D выбран класс всех кусочно-непрерывных слева управлений. Исследование множества достижимости в случае произвольных измеримых управлений отличается некоторыми техническими деталями.

Рассмотрим сначала случай непрерывного на отрезке $[t_0, t_1]$ управления $u(t)$. Мы получаем на этом отрезке классическое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = \varphi(x,t) = f(x,u(t)) \tag{6}$$

Мы предполагаем, как обычно, что $\varphi(x,t)$, $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}$ — непрерывные по совокупности переменных функции. Задав начальное условие $x(t_0) = x_0$, получим, в силу теоремы существования и единственности, решение $x(t)$, которое будем считать определённым на отрезке $[t_0, t_1]$.

В силу теоремы о дифференцируемости и непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий, найдётся такое ε, что для любого ξ, удовлетворяющего неравенству $\|\xi - x_0\| < \varepsilon$, существует решение уравнения (6) с начальным условием $x(t_0) = \xi$, определённое на всём отрезке $[t_0, t_1]$. Обозначим это решение через $x(t, \xi, t_0)$. Функции $x(t, \xi, t_0)$ и $\frac{\partial x(t,\xi,t_0)}{\partial \xi}$ непрерывны по совокупности переменных t, ξ и являются абсолютно непрерывными функциями, то есть существует производная $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x(t,\xi,t_0)}{\partial \xi}$, причём порядок дифференцирования можно менять.

Решение $x(t, \xi, t_0)$ может быть записано в виде

$$x(t,\xi,t_0) = x(t,x_0,t_0) + \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} (\xi - x_0) + \bar{o}(\|\xi - x_0\|).$$

Зададим возмущение начального условия в специальном виде: $\xi = x_0 + \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon)$ и исследуем, как изменится решение.

Дифференцированием получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}[x(t,\xi,t_0) - x(t,x_0,t_0)] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[\left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} h\right] + \bar{o}(\varepsilon).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[x(t,\xi,t_0) - x(t,x_0,t_0)] &= \varphi(x(t,\xi,t_0),t) - \varphi(x(t,x_0,t_0),t) = \\ &= \varphi\left(x(t,x_0,t_0) + \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} h + \bar{o}(\varepsilon), t\right) - \varphi(x(t,x_0,t_0),t) = \\ &= \varepsilon \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{(x(t,x_0,t_0),t)} \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} h + \bar{o}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Приравнивая правые части, получим:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[\left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} h\right] + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{(x(t,x_0,t_0),t)} \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} h + \bar{o}(\varepsilon).$$

Поделим на ε, устремим ε к нулю и введём следующее обозначение:

$$y(t) = \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t,x_0,t_0)} h.$$

Мы получили, что функция $y(t)$ удовлетворяет линейной системе уравнений

$$\dot{y}(t) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{(x(t,x_0,t_0),t)} y,$$

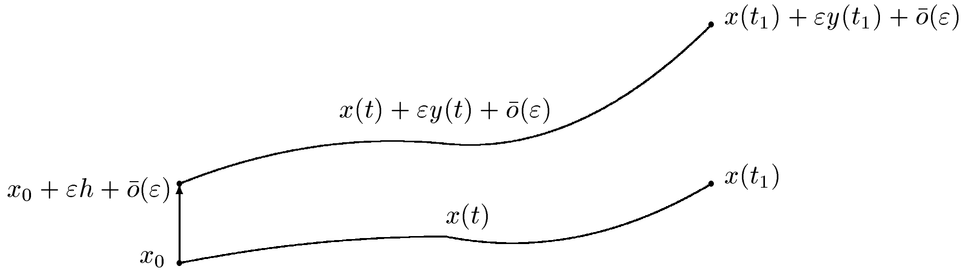
или

$$\dot y(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t,x_0,t_0),u(t))} y \tag{7}$$

с начальным условием

$$y(t_0) = \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{(t_0,x_0,t_0)} h = \left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{t_0} h = \frac{\partial \xi}{\partial \xi} h = Eh = h.$$

Итак, чтобы вычислить $x(t,\xi,t_0) = x(t,x_0,t_0) + \varepsilon y(t) + \bar o(\varepsilon)$ с точностью до $\bar o(\varepsilon)$, необходимо решить систему уравнений (7) с начальным условием $y(t_0) = h$. Система (7) называется *системой уравнений в вариациях.*



Система уравнений (7) определяет оператор A_{tt_0}, то есть

$$y(t) = A_{tt_0} y(t_0).$$

Отметим некоторые свойства оператора A_{tt_0}:

1) Оператор A_{tt_0} — линейный (это следует из вида уравнения (7)).

2) Оператор A_{tt_0} — непрерывный (это следует из предыдущего свойства).

3) Оператор $A_{\tau\tau}$ — тождественный.

4) Для любых $t, s, \tau \in [t_0, t_1]$ верно $A_{ts}A_{s\tau} = A_{t\tau}$.

Лемма 1. *Пусть $y(t)$ — решение системы (7), $\psi(t)$ — решение сопряжённой системы*

$$\dot\psi = -\frac{\partial f^*}{\partial x}(x(t),u(t))\psi.$$

Тогда $\langle \psi(t), y(t)\rangle = \mathrm{const}$ для любого $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Продифференцируем скалярное произведение по t:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t),y(t)\rangle = \langle\dot\psi(t),y(t)\rangle + \langle\psi(t),\dot y(t)\rangle = -\left\langle \frac{\partial f^*}{\partial x}\psi(t), y(t)\right\rangle + \left\langle \psi(t), \frac{\partial f}{\partial x} y\right\rangle =$$

$$= -\left\langle \psi(t), \frac{\partial f}{\partial x} y\right\rangle + \left\langle \psi(t), \frac{\partial f}{\partial x} y\right\rangle = 0$$

Это равенство верно для любой внутренней точки. На концах отрезка утверждение леммы получается по непрерывности. Лемма доказана. □

2 Вариации Макшейна и конус касательных направлений

2.1 Простейшие одночленные вариации

В классическом вариационном исчислении функция $u^*(t)$ называлась вариацией функции $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенство $|u(t) - u^*(t)| < \varepsilon$ было выполнено для любого $t \in [t_0, t_1]$. Использование таких вариаций управления $u(t)$ возможно в случае, когда U — открытое множество. В этом случае при малом $\varepsilon > 0$ все вариации $u^*(t)$ не выходят из множества U.

Для задач оптимального управления характерен случай, когда множество U — компакт (например, $U = \{-1, 1\}$), а также случай, когда оптимальное управление идёт по границе U. В этом случае использование классических вариаций оказывается невозможным, поскольку даже при малом варьировании управление может выйти из множества U. Опишем другой способ варьирования управления, наиболее часто используемый в теории оптимального управления.

Пусть $u(t)$ — допустимое управление на отрезке $[t_0, t_1]$ и $\tau \in (t_0, t_1)$ – точка непрерывности функции $u(t)$. Пусть $\sigma \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ и $v \in U$. Введём обозначение $J(\tau, \sigma, \varepsilon) = (\tau - \varepsilon\sigma, \tau]$. Будем говорить, что управление $u^*(t)$ получено из управления $u(t)$ при помощи *одночленной вариации Макшейна* $M(\tau, \sigma, v, \varepsilon)$, если

$$u^*(t) = \begin{cases} v, & t \in J(\tau, \sigma, \varepsilon), \\ u(t), & t \in [t_0, t_1] \backslash J(\tau, \sigma, \varepsilon). \end{cases}$$

Очевидно, функция $u^*(t)$ является допустимым управлением.

Пусть управлению $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ соответствует траектория $x(t)$. Исследуем, как изменится траектория при замене управления $u(t)$ на $u^*(t)$ с сохранением начального условия. Траекторию, соответствующую управлению $u^*(t)$ с начальным условием $x^*(t_0) = x_0$ обозначим через $x^*(t)$. На отрезке $[t_0, \tau - \varepsilon\sigma]$ выполняется тождество $u^*(t) \equiv u(t)$, следовательно, на этом отрезке $x^*(t) \equiv x(t)$. Легко видеть, что

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \int\limits_{\tau - \varepsilon\sigma}^{\tau} [f(x^*(t), v) - f(x(t), u(t))]\, dt.$$

В то же время, для всех $t \in (\tau - \varepsilon\sigma, \tau]$ верно

$$x^*(t) = x^*(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} f(x^*(s), v)\, ds = x^*(\tau) + \alpha(\varepsilon),$$

где под $\alpha(\varepsilon)$ понимается бесконечно малая при $\varepsilon \to 0$ величина. Отсюда в силу непрерывности $f(x, u)$ следует, что

$$f(x^*(t), v) - f(x^*(\tau), v) = \alpha(\varepsilon).$$

Аналогично, в силу непрерывности $u(t)$ в точке τ получим:

$$f(x(t), u(t)) - f(x(\tau), u(\tau)) = \alpha(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$f(x^*(t), v) - f(x(t), u(t)) = f(x^*(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau)) + \alpha(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \int\limits_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau} [f(x^*(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau)) + \alpha(\varepsilon)]\,dt = \varepsilon\sigma[f(x^*(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon),$$

откуда получаем, что $x^*(\tau) = x(\tau) + \alpha(\varepsilon)$. Итак,

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon\sigma[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon).$$

Используя линейный оператор $A_{t\tau}$, мы можем перенести приращение $\varepsilon\sigma[f(x(t), v) - f(x(\tau), u(\tau))]$ из точки $x(\tau)$ в точку $x(t_1)$:

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon\sigma A_{t_1\tau}[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon).$$

2.2 Усложнённые одночленные вариации

Усложним теперь конструкцию одночленной вариации Макшейна.

Пусть, как и раньше, $u(t)$ — допустимое управление на отрезке $[t_0, t_1]$ и $\tau \in (t_0, t_1)$ — точка непрерывности функции $u(t)$. Пусть, кроме того, $\varepsilon > 0$ и $\sigma_k \geqslant 0$, $v_k \in U$ для $k = \overline{1, s}$. Обозначим

$$J_k = (\tau - \varepsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{s-k+1}), \tau - \varepsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{s-k})], \quad k = \overline{1, s-1},$$

$$J_s = (\tau - \varepsilon\sigma_1, \tau].$$

Будем говорить, что управление $u^*(t)$ получено из управления $u(t)$ применением вариации Макшейна $M(\tau; \sigma_1, \ldots, \sigma_s; v_1, \ldots, v_s; \varepsilon)$, если

$$u^*(t) = \begin{cases} v_k, & t \in J_k \\ u(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{s} J_k. \end{cases}$$

Пусть $x(t)$ и $x^*(t)$ — траектории, соответствующие управлениям $u(t)$ и $u^*(t)$. На правом конце отрезка J_1, как и в случае простейшей одночленной вариации, будем иметь

$$\begin{aligned} &x^*(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)) - x(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)) = \\ &\quad = \varepsilon\sigma_1[f(x(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)), v_1) - f(x(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)), u(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)))] + \bar{o}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Из непрерывности функции $f(x, u)$ и функции $u(t)$ в точке τ получаем

$$f(x(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)), v_1) = f(x(\tau), v_1) + \alpha(\varepsilon)$$

и

$$f(x(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)), u(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s))) = f(x(\tau), u(\tau)) + \alpha(\varepsilon).$$

Окончательно получаем

$$x^*(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)) - x(\tau - \varepsilon(\sigma_2 + \ldots + \sigma_s)) = \varepsilon\sigma_1[f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau)] + \bar{o}(\varepsilon).$$

Исследуем теперь приращение траектории на правом конце отрезка J_2.

$$x^*(\tau - \varepsilon(\sigma_3 + \ldots + \sigma_s)) - x(\tau - \varepsilon(\sigma_3 + \ldots + \sigma_s)) = \varepsilon\sigma_1[f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau)] + \bar{o}(\varepsilon) +$$
$$+ \int\limits_{\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)}^{\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)} [f(x^*(t), v_2) - f(x(t), u(t))]\, dt.$$

Используя непрерывность функций $f(x, u)$, $x(t)$, $x^*(t)$ и функции $u(t)$ в точке τ, получим, аналогично случаю простейшей одночленной вариации, что

$$\int\limits_{\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)}^{\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)} [f(x^*(t), v_2) - f(x(t), u(t))]\, dt = \varepsilon\sigma_2[f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau)] + \bar{o}(\varepsilon)$$

Таким образом,

$$x^*(\tau - \varepsilon(\sigma_3 + \ldots + \sigma_s)) - x(\tau - \varepsilon(\sigma_3 + \ldots + \sigma_s)) = \varepsilon\sigma_1[f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau)] +$$
$$+ \varepsilon\sigma_2[f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau)] + \bar{o}(\varepsilon).$$

Повторяя рассуждение для отрезков $J_3, \ldots, J_s$, окончательно получаем выражение для приращения траектории в момент времени τ:

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^{s} \sigma_i[f(x(\tau), v_i) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon\xi + \bar{o}(\varepsilon),$$

где

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i[f(x(\tau), v_i) - f(x(\tau), u(\tau))].$$

Приращение в момент времени t_1 получается, как и раньше, применением линейного оператора $A_{t_1\tau}$ к приращению в момент времени τ:

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau}\xi + \bar{o}(\varepsilon).$$

2.3 Многочленные вариации

Пусть теперь $M_1(\tau_1; \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{s_1}^1; v_1^1, \ldots, v_{s_1}^1; \varepsilon), \ldots, M_r(\tau_r; \sigma_1^r, \ldots, \sigma_{s_r}^r; v_1^r, \ldots, v_{s_r}^r; \varepsilon)$ — одночленные вариации Макшейна, причём $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r < t_1$.

Будем говорить, что управление $u^*(t)$ получается из управления $u(t)$ применением *многочленной вариации Макшейна* M, соответствующей одночленным вариациям $M_1, \ldots, M_r$, если оно получается из $u(t)$ последовательным применением вариаций $M_1, \ldots, M_r$.

Исследуем приращение траектории для многочленной вариации. Для $i = \overline{1, r}$ в случае, когда к управлению применяется лишь вариация M_i, будем иметь

$$x^*(\tau_i) - x(\tau_i) = \varepsilon\xi_i + \bar{o}(\varepsilon),$$

где

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{s_i} \sigma_j^i[f(x(\tau_i), v_j^i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))].$$

Пусть теперь вариации $M_1, \ldots, M_r$ применяются последовательно. Применим сначала вариацию M_1 и перенесём полученное приращение в точку $\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{s_2})$:

$$x^*(\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{s_2})) - x(\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{s_2})) = \varepsilon A_{\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1+\ldots+\sigma_{s_2}), \tau_1}\xi_1 + \bar{o}(\varepsilon) = \\ = \varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \bar{o}(\varepsilon).$$

Последнее равенство следует из того факта, что, в силу непрерывности оператора $A_{t\tau_1}$,

$$A_{\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1+\ldots+\sigma_{s_2}), \tau_1}\xi_1 = A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \alpha(\varepsilon).$$

В точке τ_2 получим

$$x^*(\tau_2) - x(\tau_2) = \varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \bar{o}(\varepsilon) + \int\limits_{\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1+\ldots+\sigma_{s_2})}^{\tau_2} [f(x^*(t), u^*(t)) - f(x(t), u(t))]\, dt = \\ = \varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \bar{o}(\varepsilon).$$

Продолжая процесс, в точке τ_r получим

$$x^*(\tau_r) - x(\tau_r) = \varepsilon[A_{\tau_r\tau_1}\xi_1 + \ldots + A_{\tau_r\tau_{r-1}}\xi_{r-1} + \xi_r] + \bar{o}(\varepsilon).$$

Остаётся перенести приращение в точку t_1:

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon[A_{t_1\tau_1}\xi_1 + \ldots + A_{t_1\tau_r}\xi_r] + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon\varphi(M) + \bar{o}(\varepsilon),$$

где $\varphi(M) = A_{t_1\tau_1}\xi_1 + \ldots + A_{t_1\tau_r}\xi_r$.

В случае одночленной вариации вектор $\varphi(M)$ определяется аналогично.

2.4 Конус касательных направлений и операции над вариациями

Совокупность всех векторов $\varphi(M)$ для всевозможных многочленных вариаций M обозначим через K. Множество K называется *конусом касательных направлений* к множеству достижимости в точке $x(t_1)$.

Покажем, что множество K действительно является конусом, более того, выпуклым. Для этого нам потребуется ввести для вариаций Макшейна операции сложения и умножения на число. Эти операции мы определим последовательно для простейших одночленных, усложнённых одночленных и многочленных вариаций Макшейна.

Пусть $M(\tau, \sigma, v, \varepsilon), M'(\tau', \sigma', v', \varepsilon')$ — простейшие одночленные вариации Макшейна. Для определённости будем считать, что $\tau \leqslant \tau'$. Вариацию $M + M'$ определим в случае $\tau = \tau'$ как усложнённую вариацию с параметрами $(\tau; \sigma, \sigma'; v, v', \varepsilon)$, а в случае $\tau < \tau'$ — как многочленную вариацию, соответствующую вариациям M, M'. При этом в обозначениях $\xi = \sigma[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))]$, $\xi' = \sigma'[f(x(\tau'), v') - f(x(\tau'), u(\tau'))]$ будем иметь в первом случае

$$x^*(\tau') - x(\tau') = \varepsilon(\xi + \xi') + \bar{o}(\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon[A_{t_1\tau'}\xi + A_{t_1\tau'}\xi'] + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon[\varphi(M) + \varphi(M')] + \bar{o}(\varepsilon),$$

а во втором случае
$$x^*(\tau') - x(\tau') = \varepsilon(A_{\tau'\tau}\xi + \xi') + \bar{o}(\varepsilon)$$
и, следовательно,
$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon[A_{t_1\tau}\xi + A_{t_1\tau'}\xi'] + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon[\varphi(M) + \varphi(M')] + \bar{o}(\varepsilon).$$
Таким образом, в обоих случаях
$$\varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M'). \tag{8}$$

Если теперь $M(\tau; \sigma_1, \dots, \sigma_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$, $M'(\tau'; \sigma'_1, \dots, \sigma'_{s'}; v'_1, \dots, v'_{s'}; \varepsilon)$ — усложнённые одночленные вариации Макшейна, то вариация $M + M'$ определяется в случае $\tau = \tau'$ как усложнённая вариация с параметрами $(\tau; \sigma_1, \dots, \sigma_s, \sigma'_1, \dots, \sigma'_{s'}; v_1, \dots, v_s, v'_1, \dots, v'_{s'}; \varepsilon)$, а в случае $\tau < \tau'$ — как многочленная вариация, соответствующая вариациям M и M'. Справедливость равенства (8) в этом случае доказывается аналогично.

Наконец, пусть M, M' — многочленные вариации, соответствующие одночленным вариациям $M_1, \dots, M_r$ и $M'_1, \dots, M'_{r'}$, применяемым соответственно в точках $\tau_1, \dots, \tau_r$ и $\tau'_1, \dots, \tau'_{r'}$. Можно считать, что $r = r'$ и $\tau_i = \tau'_i$ для $i = 1, \dots, r$, поскольку в противном случае к каждой из многочленных вариаций можно добавить вырожденные вариации (с нулевыми параметрами σ), применяемые в недостающих точках. Определим вариацию $M + M'$ как $(M_1 + M'_1) + \ldots + (M_r + M'_r)$. В этом случае
$$\varphi(M + M') = \varphi(\sum_{i=1}^{s}(M_i + M'_i)) = \sum_{i=1}^{s}(\varphi(M_i) + \varphi(M'_i)) = \sum_{i=1}^{s}\varphi(M_i) + \sum_{i=1}^{s}\varphi(M'_i) = \varphi(M) + \varphi(M').$$
Таким образом, для суммы двух вариаций справедливо равенство (8).

Пусть $\lambda > 0$ и $M(\tau, \sigma, v, \varepsilon)$ — простейшая одночленная вариация Макшейна. Определим вариацию λM как одночленную вариацию с параметрами $(\tau, \lambda\sigma, v, \varepsilon)$. Очевидно, в этом случае выполняется равенство
$$\varphi(\lambda M) = \lambda\varphi(M). \tag{9}$$
Если же $M(\tau; \sigma_1, \dots, \sigma_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$ — усложнённая одночленная вариация, то вариацию λM определим как одночленную вариацию с параметрами $(\tau; \lambda\sigma_1, \dots, \lambda\sigma_s; v_1, \dots, v_s; \varepsilon)$. Очевидно, равенство (9) верно и в этом случае.

Если, наконец, M — многочленная вариация, соответствующая одночленным вариациям $M_1, \dots, M_r$, то вариацию λM определим как многочленную вариацию, соответствующую вариациям $\lambda M_1, \dots, \lambda M_r$. Выполнение равенства (9) в этом случае также очевидно.

Из свойств операций над вариациями легко выводятся свойства множества K. Действительно, если $\varphi(M) \in K$ и $\lambda > 0$, то
$$\lambda\varphi(M) = \varphi(\lambda M) \in K,$$
поэтому множество K — конус. С другой стороны, поскольку для любых $\alpha, \beta > 0$ из $\varphi(M) \in K$ и $\varphi(M') \in K$ следует, что
$$\alpha\varphi(M) + \beta\varphi(M') = \varphi(\alpha M + \beta M') \in K,$$
то множество K является выпуклым.

2.5 Расширенный конус касательных направлений

Расширим класс рассматриваемых вариаций. Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ задано допустимое управление $u(t)$. Пусть также $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ и M — вариация Макшейна.

В случае $\alpha > 0$ будем говорить, что управление $u^*(t)$, определённое на отрезке $[t_0, t_1 + \varepsilon\alpha]$, получается из управления $u(t)$ применением вариации $V(M, \alpha)$, если на отрезке $[t_0, t_1]$ управление $u^*(t)$ получается из управления $u(t)$ применением вариации M, а при $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon\alpha]$ выполняется равенство $u^*(t) = u(t_1)$. В этом случае при $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon\alpha]$ верно

$$x^*(t) = x^*(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} f(x^*(s), u(t_1))\, ds = x^*(t_1) + (t - t_1) f(x^*(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon) =$$

$$= x^*(t_1) + (t - t_1) f(x(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon).$$

Если же $\alpha < 0$, то будем говорить, что управление $u^*(t)$, определённое на отрезке $[t_0, t_1]$, получается из управления $u(t)$ применением вариации $V(M, \alpha)$, если на отрезке $[t_0, t_1]$ управление $u^*(t)$ получается из управления $u(t)$ применением вариации M, а при $t \in (t_1 + \varepsilon\alpha, t_1]$ выполняется равенство $u^*(t) = u(t)$. В этом случае, аналогично, для $t \in [t_1 + \varepsilon\alpha, t_1]$

$$x^*(t) = x^*(t_1) + (t - t_1) f(x(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon).$$

Таким образом, в обоих случаях в точке $t_1^* = t_1 + \varepsilon\alpha$ имеем:

$$x^*(t_1^*) = x^*(t_1) + \varepsilon\alpha f(x(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon) = x(t_1) + \varepsilon(\varphi(M) + \alpha f(x(t_1), u(t_1))) + \bar{o}(\varepsilon) =$$

$$= x(t_1) + \varepsilon\varphi(V(M, \alpha)) + \bar{o}(\varepsilon),$$

где $\varphi(V(M, \alpha)) = \varphi(M) + \alpha f(x(t_1), u(t_1))$.

Введем для вариаций вида $V(M, \alpha)$ операции сложения и умножения на число. Пусть α_1, α_2 — ненулевые вещественные числа, M_1, M_2 — вариации Макшейна и $\lambda \geqslant 0$. Сумму вариаций $V(M_1, \alpha_1)$ и $V(M_2, \alpha_2)$ определим следующим образом:

$$V(M_1, \alpha_1) + V(M_2, \alpha_2) = V(M_1 + M_2, \alpha_1 + \alpha_2).$$

Произведение вариации $V(M, \alpha)$ на число λ определим следующим образом

$$\lambda V(M, \alpha) = V(\lambda M, \lambda\alpha).$$

При этом очевидно, что

$$\varphi(V(M_1, \alpha_1) + V(M_2, \alpha_2)) = \varphi(V(M_1, \alpha_1)) + \varphi(V(M_2, \alpha_2))$$

и

$$\varphi(\lambda V(M, \alpha)) = \lambda\varphi(V(M, \alpha)).$$

Множество $\tilde{K}$ всех векторов вида $\varphi(V(M, \alpha))$ для всевозможных вариаций $V(M, \alpha)$ является, очевидно, выпуклым конусом. Это множество называют *расширенным конусом касательных направлений* к множеству достижимости $X(t_1)$ в точке $x(t_1)$.

2.6 Топологические факты

Для дальнейшего изучения конуса касательных направлений нам потребуются некоторые дополнительные факты из топологии.

Лемма 2. *Пусть $M \subset R^n$ — выпуклый компакт, $f : M \to R^n$, отображение f непрерывно и $x_0 \in \operatorname{int} M$. Пусть, кроме того, для любого $x \in \partial M$ выполнено неравенство $\|f(x) - x\| \leqslant \|x - x_0\|$. Тогда $x_0 \in f(M)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим простой частный случай: $x_0 = 0,\ M = S_R(0),\ R > 0$. Докажем, что существует такое $x_* \in S_R(0)$, что $f(x_*) = 0$. Рассмотрим отображение: $\varphi(x) = \pi_M(x - f(x))$, где π_M — оператор проектирования на множество M. Поскольку оператор π_M и отображение f непрерывны, отображение $\varphi(x)$ также непрерывно, при этом оно действует из M в себя. Согласно теореме Брауэра, которой мы воспользуемся без доказательства, это означает существование неподвижной точки x_*, для которой $x_* = \varphi(x_*)$.

Если $x_* \in \operatorname{int} M$, то $x_* = \pi_M(x_* - f(x_*))$ тогда и только тогда, когда $x_* = x_* - f(x_*)$, то есть $f(x_*) = 0 = x_0$. Если же $x_* \in \partial M$, то $\|x_* - f(x_*)\| \leqslant \|x_*\| \leqslant R$. Следовательно, $x_* - f(x_*) \in M$ и $\pi_M(x_* - f(x_*)) = x_* - f(x_*)$, то есть снова $x_* - f(x_*) = x_*$ и $f(x_*) = 0 = x_0$.

Рассмотрим теперь общий случай и сведем его к доказанному. Сделаем замену $y = x - x_0$, чтобы избавиться от x_0. Рассмотрим отображение $p : M - x_0 \to R^n$, заданное формулой $p(y) = f(x) - x_0$. Это отображение непрерывно. Кроме того, для любого $x \in \partial M$ верно

$$\|f(x) - x\| = \|f(x) - x_0 - (x - x_0)\| = \|p(y) - y\| \leqslant \|x - x_0\| = \|y\|.$$

Таким образом, для всех $y \in \partial(M - x_0)$ верно

$$\|p(y) - y\| \leqslant \|y\|.$$

Достаточно доказать, что существует y_*, для которого $p(y_*) = 0$. Поскольку $M - x_0$ — выпуклый компакт, то найдется такое R, что $M - x_0 \subset S_R(0)$. Построим непрерывное взаимно-однозначное отображение $h : M - x_0 \to S_R(0)$:

$$h(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ R\frac{y}{\|y\|}\min\{\alpha \geqslant 0 : y \in \alpha(M - x_0)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\bar{y} = h(y)$. По построению $\bar{y}$ параллелен y. Домножением на минимум добиваемся взаимной однозначности.

Рассмотрим композицию отображений $p \circ h^{-1} : S_R(0) \to R^n$. Это отображение непрерывно. Проверим выполнение неравенства для граничных точек:

$$\|p \circ h^{-1}(\bar{y}) - \bar{y}\| = \|p(y) - \bar{y}\| \leqslant \|p(y) - y\| + \|y - \bar{y}\| \leqslant \|y\| + \|y - \bar{y}\| = \|\bar{y}\|.$$

Последнее равенство справедливо в силу коллинеарности векторов $\overline{y}$ и y.

По доказанному выше существует такое $\bar{y}_* \in S_R(0)$, что $p \circ h^{-1}(\bar{y}_*) = 0$. В качестве искомого y_* следует взять $h^{-1}(\bar{y}_*)$. Лемма доказана.

□

Следствие 1. *Пусть $M \subset R^n$ — выпуклый компакт, $f_\varepsilon : M \to R^n$, отображение f_ε непрерывно и $x_0 \in \operatorname{int} M$. Пусть также выражение $f_\varepsilon(x) - x$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in M$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ верно $x_0 \in f_\varepsilon(M)$.*

Доказательство. Пусть $\beta = \min\limits_{x \in \partial M} \|x - x_0\|$. Так как $x_0 \in \operatorname{int} M$, то $\beta > 0$.

В силу равномерной сходимости к нулю существует такое положительное ε_0, что для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполнено неравенство $\max\limits_{x \in M} \|f_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \beta$.

Пусть $x \in \partial M$, тогда

$$\|f_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \max_{x \in M} \|f_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \beta = \min_{x \in \partial M} \|x - x_0\| \leqslant \|x - x_0\|.$$

Для завершения доказательства остаётся применить лемму. □

Следствие 2. *Пусть $M \subset R^n$ — выпуклый компакт, $f_\varepsilon : M \to R^n$, отображение f_ε непрерывно. Пусть также P — непустой компакт, вложенный в $\operatorname{int} M$, и выражение $f_\varepsilon(x) - x$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in M$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ верно $P \subset f_\varepsilon(M)$.*

Доказательство. Аналогично, пусть $\beta = \min\limits_{x \in \partial M,\, x_0 \in P} \|x - x_0\|$, тогда $\beta > 0$. Фиксируем точки x_0 и x. Пользуясь уже доказанным следствием 1, получаем, что $x_0 \in f_\varepsilon(M)$ и, в силу произвольности x_0, $P \subset f_\varepsilon(M)$. □

2.7 Свойства конуса касательных направлений

Вернемся к рассмотрению множества достижимости $X(t)$. Для доказательства дальнейших теорем нам потребуется понятие симплекса.

Пусть в пространстве R^n заданы точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$, причём система векторов

$$a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0$$

линейно независима. *Симплексом* S называется выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Другими словами,

$$S = \{y \in R^n : y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Числа λ_i называются барицентрическими координатами. *Центром симплекса* называется точка, у которой все барицентрические координаты совпадают.

Очевидно, что симплекс на плоскости — это треугольник, в пространстве — пирамида с треугольным основанием.

Представление произвольной точки x сиплекса S в виде

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,$$

единственно в силу линейной независимости указанной выше системы векторов. Из этого представления следует, что точка симплекса непрерывно зависит от барицентрических координат.

Докажем теперь следствие принадлежности точки границе множества достижимости.

Теорема 4. *Пусть $(u(t), x(t))$, — допустимая пара в задаче* (3) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *и* $x(t_1) \in \partial X(t_1)$. *Тогда* $0 \in \partial K$.

Доказательство. Предположим противное, то есть пусть $0 \in \operatorname{int} K$. Тогда существует симплекс Π с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$, такой что $0 \in \Pi$. Каждой вершине симплекса a_i отвечает соответствующая вариация Макшейна M_i, для которой $x^*(t_1) = x(t_1) + \varepsilon a_i + \bar{o}(\varepsilon)$. Так как для любого $a \in \Pi$

$$a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,$$

то точке a соответствует вариация Макшейна $M_a = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i M_i$, для которой $x^*(t_1) = x(t_1) + \varepsilon a + \bar{o}(\varepsilon)$.

Отображение $f_\varepsilon : \Pi \to R^n$ определим формулой

$$f_\varepsilon(a) = \frac{x^*(t_1) - x(t_1)}{\varepsilon} = a + \frac{\bar{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Как видно, $f_\varepsilon(a) - a$ стремится к нулю равномерно по $a \in \Pi$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, отображение f_ε удовлетворяет всем условиям следствия 2 из леммы 2.

Выберем такое $r > 0$, что $S_r(0) \subset \operatorname{int} \Pi$. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ верно $S_r(0) \subset f_\varepsilon(\Pi)$. Значит, для любого $\tilde{a} \in S_r(0)$ существует вариация Макшейна $M(\tilde{a})$, такая что

$$\tilde{a} = \frac{x^*(t_1) - x(t_1)}{\varepsilon_0},$$

или $x^*(t_1) = x(t_1) + \varepsilon_0 a$. Следовательно, $x(t_1) + \varepsilon_0 S_r(0) \subset X(t_1)$, что противоречит условию. □

Вернёмся к расширенной задаче оптимального управления. Обозначим через C и $\tilde{C}$ соответственно конус касательных направлений и расширенный конус касательных направлений для расширенной задачи.

Теорема 5. *Пусть $\tilde{x}(t)$ — оптимальная траектория расширенной задачи, соответствующая оптимальному управлению $u(t)$. Тогда отрицательное направление оси x^0 не содержится в $\operatorname{int} \tilde{C}$.*

Доказательство. Обозначим через χ оператор проектирования вдоль оси x^0. Оператор χ действует по правилу

$$\chi(a_0, a_1, \ldots, a_n)^T = (0, a_1, \ldots, a_n)^T.$$

Обозначим через l отрицательное направление оси x^0. Предположим, что $l \subset \operatorname{int} \tilde{C}$. В R^n выберем симплекс T_n с центром в нуле и вершинами $a_0, \ldots, a_n$. Для $h > 0$ рассмотрим симплекс T_n^h с вершинами $b_0 = (-h, a_0)^T, \ldots, b_n = (-h, a_n)^T$, полученный из симплекса T_n параллельным переносом в направлении отрицательной полуоси x^0 на величину h. Как видно, все точки b_i имеют ненулевую координату $b_i^0 = -h$ и $a_i = \chi(b_i)$. Кроме того, для достаточно большого h получим $T_n^h \subset \operatorname{int} \tilde{C}$.

Для любой точки a из симплекса T_n справедливо представление

$$a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,$$

где λ_i — барицентрические координаты точки a. Точка $a \in T_n$ является проекцией точки

$$b = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i$$

из симплекса T_n^h. Для каждой вершины b_i выберем такую расширенную вариацию Макшейна $V(M_i, \alpha_i)$, что

$$b_i = \varphi(V(M_i, \alpha_i)).$$

Тогда

$$b = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi(V(M_i, \alpha_i)) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i V(M_i, \alpha_i)\right).$$

Таким образом точке a поставлена в соответствие вариация

$$V(M, \alpha) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i V(M_i, \alpha_i) = V\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i M_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \alpha_i\right).$$

Конец траектории соответствующей вариации $V(M, \alpha)$ записывается в виде

$$\tilde{x}^*(t_1^*) = \tilde{x}(t_1) + \varepsilon b + \bar{o}(\varepsilon).$$

Тогда отображение $\beta_\varepsilon : T_n \to R^n$, заданное формулой

$$\beta_\varepsilon(a) = \frac{1}{\varepsilon}\chi(\tilde{x}^*(t_1^*) - \tilde{x}(t_1)) = a + \frac{\bar{o}(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

определено для малых положительных ε, непрерывно, и выражение $\beta_\varepsilon(a) - a$ стремится к нулю равномерно по $a \in T_n$ при $\varepsilon \to 0$. По следствию 1 из леммы 2, при достаточно малых ε выполнено $0 \in \beta_\varepsilon(T_n)$. Таким образом, найдётся такая вариация $V(M_*, \alpha_*)$, что соответствующая траектория $\tilde{x}^*(t)$ удовлетворяет условию $\chi(\tilde{x}^*(t_1) - \tilde{x}(t_1)) = 0$. При этом разность

$$x^{*0}(t_1^*) - x^0(t_1) = -\varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon)$$

при достаточно малом ε отрицательна. Последнее противоречит оптимальности пары $(\tilde{x}(t), u(t))$. Теорема доказана. $\square$

3 Принцип максимума

3.1 Принцип максимума для динамической системы

Вернёмся к рассмотрению системы (3). Введём функцию Гамильтона

$$H(x,\psi,u) = \langle \psi, f(x,u)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x,u)$$

и обозначим

$$M = \max_{v\in U} H(x,\psi,v).$$

Теорема 6 (принцип максимума). *Пусть $(u(t),x(t))$ — допустимая пара в задаче (3) на отрезке $[t_0,t_1]$ и $x(t_1)\in\partial X(t_1)$. Тогда существует такая функция $\psi(t)\neq 0$, что*

$$\dot\psi = -\left.\frac{\partial H(x,\psi,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x(t)\\ u=u(t)}} = -\frac{\partial f^*}{\partial x}(x(t),u(t))\psi$$

и

$$H(x(t),\psi(t),u(t)) = M(x(t),\psi(t)) \tag{10}$$

для любого $t\in[t_0,t_1]$. Кроме того,

$$M(t) = \mathrm{const} \tag{11}$$

всюду на отрезке $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Из условия $x(t_1)\in\partial X(t_1)$ и теоремы 4 имеем, что $0\in\partial K$. Таким образом, конус K не заполняет всего пространства R^n и, следовательно, существует опорная гиперплоскость к конусу K в его вершине. Другими словами, существует такое $\xi\in R^n$, $\xi\neq 0$, что для любого $y\in K$ выполнено $\langle y,\xi\rangle\leqslant 0$. В качестве функции $\psi(t)$ возьмём решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot\psi(t) = -\dfrac{\partial f^*(x(t),u(t))}{\partial x}\psi \\ \psi(t_1) = \xi \end{cases}$$

Пусть $\tau\in(t_0,t_1)$ — точка непрерывности управления $u(t)$, а $M(\tau,\sigma,v,\varepsilon)$, где $\sigma>0$, $\varepsilon>0$, $v\in U$ — одночленная вариация Макшейна. Тогда выполнено

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon\sigma[f(x(\tau),v) - f(x(\tau),u(\tau))] + \bar{o}(\varepsilon).$$

Составим систему:

$$\begin{cases} \dot y(t) = \dfrac{\partial f^*(x(t),u(t))}{\partial x} y \\ y(\tau) = \sigma[f(x(\tau),v) - f(x(\tau),u(\tau))] = y_\tau \end{cases}$$

Точка $y(t_1) = A_{t_1\tau}y(\tau)$ лежит в K, поэтому

$$\langle y(t_1),\xi\rangle = \langle y(t_1),\psi(t_1)\rangle \leqslant 0.$$

По лемме 1, $\langle y(t),\psi(t)\rangle = \mathrm{const}$ на отрезке $[\tau,t_1]$. Таким образом,

$$\langle y(\tau),\psi(\tau)\rangle \leqslant 0.$$

Подставляя сюда выражение для $y(\tau)$, получим

$$\langle \sigma[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))], \psi(t)\rangle \leqslant 0,$$

или

$$\langle f(x(\tau), v), \psi(\tau)\rangle \leqslant \langle f(x(\tau), u(\tau)), \psi(\tau)\rangle.$$

Таким образом, для любого $v \in U$

$$H(x(\tau), \psi(\tau), v) \leqslant H(x(\tau), \psi(\tau), u(\tau)),$$

что означает выполнение равенства (10). Для точек разрыва управления равенство (10) доказывается предельным переходом.

Докажем теперь выполнение равенства (11). Равенство (10) означает, что на отрезке $[t_0, t_1]$

$$M(t) = H(x(t), \psi(t), u(t)) = \langle f(x(t), u(t)), \psi(t)\rangle.$$

Докажем сначала непрерывность функции $M(t)$. Поскольку функции $x(t)$, $\psi(t)$, и $f(x, u)$ непрерывны, а управление $u(t)$ кусочно-непрерывно слева, то функция $M(t)$ также кусочно-непрерывна слева, причём все её точки разрыва совпадают с точками разрыва управления $u(t)$. Пусть $\theta \in (t_0, t_1)$ — точка разрыва $u(t)$. Докажем, что $M(\theta - 0) = \mathrm{M}(\theta + 0)$.

Из равенства (10) следует, что

$$M(\theta - 0) = M(\theta) = H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta)) \geqslant H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta + 0)) = M(\theta + 0).$$

Рассмотрим теперь последовательность точек τ_i, для которой $\tau_i \to \theta + 0$ при $i \to \infty$. Из принципа максимума следует, что

$$M(\tau_i) = H(x(\tau_i), \psi(\tau_i), u(\tau_i)) \geqslant H(x(\tau_i), \psi(\tau_i), u(\theta - 0)).$$

Устремляя теперь i к бесконечности, получим

$$H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta + 0)) \geqslant H(x(\theta), \psi(\theta), u(\theta - 0)),$$

то есть

$$M(\theta + 0) \geqslant M(\theta - 0).$$

Из двух неравенств следует, что $M(\theta + 0) = M(\theta - 0)$.

Покажем теперь, что $M(t) = \mathrm{const}$ на любом участке непрерывности управления $u(t)$. Доказательство теоремы будет тем самым завершено.

Пусть $t_0 \leqslant t_2 < t_3 \leqslant t_1$ и управление $u(t)$ непрерывно на интервале $(t_2, t_3]$. Пусть, кроме того, $\tau_0, \tau_1 \in (t_2, t_3)$. Из принципа максимума вытекает выполнение следующих двух неравенств:

$$H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_0)) - H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_1)) \geqslant 0$$

и

$$-H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_1)) + H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_0)) \leqslant 0.$$

Прибавим к обеим частям каждого неравенства выражение $M(\tau_1) - M(\tau_0)$, учитывая, что

$$M(\tau_1) - M(\tau_0) = H(x(\tau_1), \psi(\tau_1), u(\tau_1)) - H(x(\tau_0), \psi(\tau_0), u(\tau_0)).$$

Таким образом, получим

$$H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_0)) - H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_0)) \leqslant M(\tau_1) - \\ - M(\tau_0) \leqslant H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_1)) - H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_1)). \quad (12)$$

Рассмотрим производную

$$\frac{d}{dt}H(x(t),\psi(t),u(\tau))\bigg|_{t=\tau} = \frac{\partial}{\partial x}H(x(t),\psi(t),u(\tau))\dot{x}\bigg|_{t=\tau} + \frac{\partial}{\partial \psi}H(x(t),\psi(t),u(\tau))\dot{\psi}\bigg|_{t=\tau}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt}H(x(t),\psi(t),u(\tau))\bigg|_{t=\tau} = f^*\frac{\partial f}{\partial x}\psi\bigg|_{t=\tau} - \psi^*\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* f\bigg|_{t=\tau} = 0.$$

Поделим все три части двойного неравенства (12) на $\tau_1 - \tau_0$. Из последнего равенства следует, что неравенство (12) примет вид

$$\alpha(\tau_1 - \tau_0) \leqslant \frac{M(\tau_1) - M(\tau_0)}{\tau_1 - \tau_0} \leqslant \beta(\tau_1 - \tau_0),$$

где $\alpha(t), \beta(t)$ — бесконечно малые при $t \to 0$. Из этой оценки вытекает дифференцируемость функции $M(t)$ и равенство нулю её производной всюду на (t_2, t_3). Это означает, что $M(t) = \mathrm{const}$ на (t_2, t_3), а значит, и на $(t_2, t_3]$. Теорема доказана. □

3.2 Задача с закреплёнными концами

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления, в которой $M_0 = \{x_0\}$, $M_1 = \{x_1\}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U \\ x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1 \\ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases} \quad (13)$$

Введём обозначения

$$\mathcal{H}(x,\tilde{\psi},u) = \langle \tilde{f}(x,u), \tilde{\psi}\rangle = \psi_0 f^0(x,u) + H(x,\psi,u)$$

и

$$\mathcal{M}(x,\tilde{\psi}) = \max_{v\in U}\mathcal{H}(x,\tilde{\psi},v).$$

Очевидно, что при этом

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{x}}.$$

Теорема 7. *Пусть $(u(t), x(t))$ — оптимальная пара в задаче (13) на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда существует решение $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$ расширенной сопряжённой системы, для которого*

1) выполнен принцип максимума: $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$\mathcal{H}(x(t),\tilde{\psi}(t),u(t)) = \mathcal{M}(x(t),\tilde{\psi}(t)), \quad (14)$$

2) выполнены соотношения

$$\psi_0(t_1) \leqslant 0, \tag{15}$$

$$\mathcal{M}(x(t_1), \tilde{\psi}(t_1)) = 0, \tag{16}$$

3) всюду на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\psi_0(t) = \text{const} \tag{17}$$

$$\mathcal{M}(x(t), \tilde{\psi}(t)) = \text{const}. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим через l отрицательное направление оси y^0:

$$l = \{z \in E^n : z = (-\lambda, 0, \ldots, 0)^T,\ \lambda \geqslant 0\}.$$

В силу теоремы 5, $l \nsubseteq \operatorname{int} \tilde{C}$. Тогда, по теореме об отделимости, найдётся такой вектор $\tilde{\xi} \in E^{n+1}$, что для любого $z \in l$ и любого $\tilde{y} \in \tilde{C}$ выполняются неравенства $\langle z, \tilde{\xi}\rangle \geqslant 0$ и $\langle \tilde{y}, \tilde{\xi}\rangle \leqslant 0$.

В качестве функции $\tilde{\psi}(t)$ выбираем решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{x}} \tilde{\psi} \\ \tilde{\psi}(t_1) = \tilde{\xi} \end{cases}$$

Доказательство равенства (14) проводится аналогично доказательству равенства (10) в теореме 6.

Для доказательства неравенства (15) достаточно заметить, что $z = (-1, 0, \ldots, 0)^T \in l$ и, следовательно,

$$-\psi_0(t_1) = \langle z, \tilde{\psi}(t_1)\rangle = \langle z, \tilde{\xi}\rangle \geqslant 0.$$

Рассмотрим вектор $\alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1)) \in \tilde{C}$. Поскольку $\tilde{\psi}(t_1) = \tilde{\xi}$, то

$$\alpha \mathcal{M}(x(t_1), \tilde{\psi}(t_1)) = \langle \alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1)), \psi(t_1)\rangle \leqslant 0.$$

Произвольность знака α доказывает равенство (16).

Соотношение (17) следует из равенства

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial \mathcal{H}(x, \tilde{\psi}, u)}{\partial x^0} = 0.$$

Доказательство соотношения (18) проводится аналогично доказательству соотношения (11). □

В случае задачи быстродействия (5) имеем $f^0(x, u) \equiv 1$ и, следовательно,

$$\mathcal{H}(x, \tilde{\psi}, u) = \psi_0 + H(x, \psi, u),$$

$$\mathcal{M}(x, \tilde{\psi}) = \psi_0 + M(x, \psi).$$

Принцип максимума в этом случае принимает следующий вид:

Теорема 8. *Пусть* $(u(t), x(t))$ *— оптимальная пара в задаче* (5), *тогда существует решение* $\psi(t) \not\equiv 0$ *сопряжённой системы, для которого всюду на отрезке* $[t_0, t_1]$ *выполняются соотношения*

1) $H(x(t), \psi(t), u(t)) = M(x(t), \psi(t))$,

2) $M(x(t), \psi(t)) = \text{const} \geqslant 0$

3.3 Задача с подвижными концами

Для формулировки и решения дальнейших задач об отыскании оптимальных управлений нам будут необходимы некоторые геометрические понятия.

Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — действительнозначная скалярная функция, заданная на области G евклидова пространства X. Если функция $f(x)$ имеет в G первые частные производные по всем переменным, то в каждой точке $x \in G$ определен вектор

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T,$$

называемый *градиентом* функции $f(x)$.

Множество $S = \{x \in G : f(x) = 0\}$ называется *гиперповерхностью* пространства X. Будем теперь считать, что функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Точка $x \in S$, удовлетворяющая соотношениям

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0,$$

называется *особой* точкой гиперповерхности S. Прочие точки гиперповерхности называются ее *неособыми* точками. Гиперповерхность называется гладкой, если она не имеет особых точек. Все гиперповерхности, рассматриваемые в дальнейшем, предполагаются гладкими.

Если функция $f(x)$, задающая гиперповерхность S, линейна, то есть имеет вид

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b,$$

то S называется *гиперплоскостью*. Очевидно, что она будет гладкой тогда и только тогда, когда среди коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ есть ненулевые. При $n = 2$ гиперплоскость представляет собой прямую на плоскости, а при $n = 3$ — плоскость в трехмерном пространстве.

Пусть x_0 — произвольная точка гладкой гиперповерхности S. Вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ называется *нормальным* вектором (или просто нормалью) к гиперповерхности S в точке x_0. В случае гиперплоскости нормали во всех точках совпадают, то есть имеется единственный нормальный вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Гиперплоскость однозначно определяется заданием нормали и одной точки, принадлежащей этой гиперплоскости. Если S — гладкая гиперповерхность и $x_0 \in S$, то гиперплоскость, проходящая через x_0 и имеющая вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ своей нормалью, называется *касательной гиперплоскостью* гиперповерхности S в точке x_0.

Пусть теперь $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — гладкие гиперповерхности, заданные в пространстве X соответственно уравнениями $f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0$. Пересечение этих гиперповерхностей $M = \bigcap_{i=1}^k S_i$ называется $(n-k)$*-мерным гладким многообразием* в X, если для каждой точки $x \in M$ векторы $\operatorname{grad} f_1(x), \ldots, \operatorname{grad} f_k(x)$ линейно независимы. Если все S_i являются гиперплоскостями, то M называется $(n-k)$-мерной плоскостью.

Пусть M — гладкое $(n-k)$-мерное многообразие, и пусть $x \in M$. Обозначим через L_i касательную гиперплоскость к гиперповерхности S_i в точке x, где $1 \leqslant i \leqslant k$. Пересечение касательных гиперплоскостей $T = \bigcap_{i=1}^k L_i$ называется *касательной* $(n-k)$*-мерной плоскостью* к многообразию M в точке x.

Теперь рассмотрим задачу оптимального управления с подвижными концами:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) \in S_0, \; x(t_1) \in S_1 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases} \tag{19}$$

Здесь S_0 и S_1 — гладкие многообразия размерностей r_0 и r_1 соответственно, причем r_0 и r_1 строго меньше n. Если оба многообразия вырождаются в точки, то задача превращается в уже рассмотренную задачу с закрепленными концами.

Если бы точки x_0 и x_1 были известны, то мы имели бы задачу с закрепленными концами. Поэтому управление $u(t)$, оптимальное в смысле задачи с подвижными концами, оптимально и в прежнем смысле, то есть принцип максимума Понтрягина остается в силе. Однако в данном случае нам необходимы ещё соотношения, из которых можно было бы определить положения точек x_0 и x_1 на многообразиях S_0 и S_1. Для этого будем использовать условия трансверсальности.

Пусть $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$, а T_0 и T_1 — касательные плоскости размерностей r_0 и r_1 многообразий S_0 и S_1, проведенные в точках x_0 и x_1 соответственно. Пусть, далее, $(u(t), x(t))$, где $t \in [t_0, t_1]$, — оптимальная пара задачи с закрепленными концами x_0 и x_1, а $\psi(t)$ — вектор, являющийся решением сопряженного уравнения (существование решения доказывается в теореме 7). Тогда вектор $\psi(t_1)$ удовлетворяет *условию трансверсальности* на правом конце траектории $x(t)$, если $\psi(t_1) \perp T_1$. Иначе говоря, условие трансверсальности означает, что для любого вектора $\beta \parallel T_1$, выполнено соотношение $\langle \psi(t_1), \beta \rangle = 0$. Аналогично определяется условие трансверсальности на левом конце траектории $x(t)$.

Условия трансверсальности позволяют написать $r_0 + r_1$ соотношений, включающих координаты концевых точек x_0 и x_1. А так как число неизвестных параметров по сравнению с задачей с закрепленными концами также увеличилось на $r_0 + r_1$, то вместе с принципом максимума условия трансверсальности образуют достаточную систему соотношений для решения поставленной оптимальной задачи с подвижными концами. Теперь, наконец, можно сформулировать принцип максимума для задачи с подвижными концами:

Теорема 9. *Пусть* $(x(t), u(t))$ *— оптимальная пара в задаче* (19). *Тогда существует такой вектор* $\tilde{\psi}(t) \neq 0$, *являющийся решением уравнения*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t))}{\partial x},$$

что справедливы следующие утверждения:

1) для любого $t \in [t_0, t_1]$ *выполнено*

$$\mathcal{H}(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \mathcal{M}(x(t), \tilde{\psi}(t)),$$

2) $\psi_0(t_1) \leqslant 0$, $\mathcal{M}(x(t_1), \tilde{\psi}(t_1)) = 0$, $\psi_0(t) = \mathrm{const}$,

3) $\tilde{\psi}(t_1)$ *удовлетворяет условию трансверсальности на правом конце, а* $\tilde{\psi}(t_0)$ *— на левом конце.*

Примем эту теорему без доказательства.

3.4 Задача с неавтономной системой

Теперь рассмотрим задачу с неавтономной (то есть явно зависящей от t) системой:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases} \tag{20}$$

Время t_0 в ней предполагается заданным, а t_1 — искомое время прохождения через точку x_1. Сведем эту систему к автономному случаю, введя дополнительную координату x_{n+1}:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0.$$

Очевидно, $x_{n+1} = t$, поэтому теперь наша система может быть записана в следующем автономном виде:

$$\begin{cases} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), x_{n+1}), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = 1. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$x^* = (x, x_{n+1})^T, \quad f^* = (f, 1)^T, \quad x_0^* = (x(t_0), x_{n+1}(t_0))^T = (x_0, t_0)^T, \quad (x(t_1), x_{n+1}(t_1))^T \in S_1,$$

где S_1 — прямая, проходящая через $(x_1, 0)^T$ параллельно оси x_{n+1}. Таким образом, мы получили в $(n+1)$-мерном пространстве уже рассмотренную задачу с подвижными концами:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f^*(x^*(t), u(t)) \\ x^*(t_0) = x_0^* \\ x^*(t_1) \in S_1 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(^*t), u(t))\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

Сопряженный вектор $\tilde{\psi}(t)$ для этой задачи вычисляется по формулам:

$$\dot{\tilde{\psi}}_i(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

$$\dot{\psi}_{n+1}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_{n+1}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \psi_\alpha.$$

Выясним, что из себя представляет принцип максимума для полученной задачи. Ее функция Гамильтона имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}^*(t, x^*(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \psi_0 f^0 + \psi_1 f^1 + \ldots + \psi_n f^n + \psi_{n+1} \cdot 1 = \mathcal{H}(t, x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) + \psi_{n+1}.$$

Поэтому

$$\mathcal{M}^*(t, x^*(t), \tilde{\psi}(t)) = \max_{v \in U} \mathcal{H}^*(t, x^*(t), \tilde{\psi}(t), v) = \mathcal{M}(t, x(t), \tilde{\psi}(t)) + \psi_{n+1}.$$

Таким образом, соотношение $\mathcal{H}^*(t, x^*, \tilde{\psi}, u) = \mathcal{M}^*(t, x^*, \tilde{\psi})$, выполняющееся вдоль оптимальной траектории, принимает вид $\mathcal{H}(t, x, \tilde{\psi}, u) = \mathcal{M}(t, x, \tilde{\psi})$ — это принцип максимума из предыдущей задачи.

Условие трансверсальности на правом конце траектории означает, что прямая S_1, параллельная оси x_{n+1}, ортогональна вектору $(\psi_1(t_1), \ldots, \psi_{n+1}(t_1))$, то есть $\psi_{n+1}(t_1) = 0$. Кроме того, $\psi_0(t_1) \leqslant 0$ по теореме 9, а условие $\mathcal{M}^*(t, x, \tilde{\psi}) = 0$ из той же теоремы превращается в условие

$$\mathcal{M}(t, x(t), \tilde{\psi}(t)) = -\psi_{n+1}(t).$$

Вектор $\tilde{\psi}(t)$ отличен от нуля, поскольку вектор $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ не является нулевым.

Таким образом, доказана

Теорема 10. *Пусть* $(x(t), u(t))$ — *оптимальная пара в задаче* (20). *Тогда существует такой вектор* $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$, *являющийся решением уравнения*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t))}{\partial x},$$

что справедливы следующие утверждения:

1) для любого $t \in [t_0, t_1]$ *выполнено*

$$\mathcal{H}(t, x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \mathcal{M}(t, x(t), \tilde{\psi}(t)),$$

2) $\psi_0(t_1) \leqslant 0$, $\mathcal{M}(t_1, x(t_1), \tilde{\psi}(t_1)) = 0$, $\psi_0(t) = \mathrm{const}$,

3) $\mathcal{M}(t, x(t), \tilde{\psi}(t)) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \psi_\alpha \, d\tau$.

Рассмотрим теперь неавтономную задачу с условием, что время t_1 задано, так что время $t_1 - t_0$ закреплено.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1, \ t_1 \text{ фиксировано} \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases} \tag{21}$$

Решение этой задачи проводится по аналогии с предыдущей. Снова вводим дополнительную переменную x_{n+1}, изменяющуюся по правилу:

$$\dot{x}_{n+1}(t) = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0.$$

Переписываем систему в автономном виде, при этом правое граничное условие примет вид

$$(x(t_1), x_{n+1}(t_1))^T = (x_1, t_1)^T.$$

Теперь момент времени t_1 можно уже не считать фиксированным, так как в силу правого граничного условия попадание в точку $(x_1, t_1)^T$ может произойти только в момент времени t_1, и потому применима теорема 10. Таким образом доказана

Теорема 11. *Пусть* $(x(t), u(t))$ — *оптимальная пара в задаче* (21). *Тогда существует такой вектор* $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$, *являющийся решением уравнения*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t))}{\partial x},$$

что справедливы следующие условия:

1) для любого $t \in [t_0, t_1]$ *выполнено*

$$\mathcal{H}(t, x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \mathcal{M}(t, x(t), \tilde{\psi}(t))$$

2) $\psi_0(t_1) \leqslant 0$, $\psi_0(t) = \mathrm{const}$

Аналогичным образом формулируется теорема для задачи с закрепленным временем и подвижными концами ($x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_1$), лишь добавляется третий пункт: $\tilde{\psi}(t_1)$ удовлетворяет условию трансверсальности на правом конце, а $\tilde{\psi}(t_0)$ — на левом.

Наконец, рассмотрим задачу со свободным правым концом ($x(t_1) \in R^n$) и закрепленным временем:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases} \tag{22}$$

Вновь точно таким же образом вводим переменную x_{n+1} и сводим к автономной задаче с подвижным (уже не свободным!) правым концом. Условие трансверсальности в этом случае примет вид $\psi(t_1) \perp R^n$, откуда следует, что $\psi(t_1) = 0$. Из условия $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$ получаем тогда, что $\psi_0(t_1) < 0$. Можно считать, что $\psi_0(t_1) = -1$. Таким образом, справедлива

Теорема 12. *Пусть $(x(t), u(t))$ — оптимальная пара в задаче (22). Тогда существует такой вектор $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$, являющийся решением уравнения*

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t))}{\partial x},$$

что справедливы следующие условия:

1) для любого $t \in [t_0, t_1]$ выполнено

$$\mathcal{H}(t, x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \mathcal{M}(t, x(t), \tilde{\psi}(t))$$

2) $\tilde{\psi}(t_1) = (-1, 0, \ldots, 0)^T$.

4 Достаточные условия оптимальности

4.1 Теорема о достаточных условиях оптимальности

Принцип максимума Понтрягина содержит лишь необходимые условия оптимальности. Ниже мы рассмотрим теорему о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума. Для определённых классов управляемых систем эта теорема является эффективным средством обоснования оптимальности решения, построенного на основе принципа максимума. После этого мы рассмотрим примеры применения теоремы о достаточных условиях оптимальности.

Вновь рассмотрим задачу (22) со свободным временем и закреплённым правым концом. Из теоремы 12 следует, что функция Гамильтона-Понтрягина для этой задачи будет иметь вид

$$\mathcal{H}(t,x,\psi,u) = -f^0(t,x,u) + \langle \psi, f(t,x,u)\rangle.$$

Предположение 1. Предположим, что при любом наборе параметров (t,x,ψ) существует единственный максимизатор $u_*(t,x,\psi)$ функции $\mathcal{H}$:

$$u_*(t,x,\psi) = \operatorname*{argmax}_{v\in U} \mathcal{H}(t,x,\psi,v).$$

Очевидно, что

$$\mathcal{H}(t,x,\psi,u)\Big|_{u=u_*(t,x,\psi)} = \mathcal{M}(t,x,\psi).$$

Необходимые условия оптимальности приводят к краевой задаче принципа максимума

$$\begin{cases} \quad \dot{x} = \mathcal{H}'_\psi(t,x,\psi,u)\Big|_{u=u_*(t,x,\psi)} \equiv f(t,x,u_*(t,x,\psi)) \\ \quad \dot{\psi} = -\mathcal{H}'_x(t,x,\psi,u)\Big|_{u=u_*(t,x,\psi)} \\ x(t_0) = X_0 \\ \psi(t_1) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Предположение 2. Пусть при $t \in [t_0,t_1]$ существует решение $(x(t),\psi(t))$ краевой задачи (23). Предполагается лишь существование решения, о его единственности никаких предположений не делается. Определим теперь при $t \in [t_0,t_1]$ управление $u(t)$, полагая

$$u(t) = u_*(t,x,\psi)\Big|_{\substack{x=x(t)\\ \psi=\psi(t)}}.$$

Пара функций $(x(t),u(t))$ образует экстремальный процесс, который может служить претендентом на роль оптимального процесса. Пара $(x(t),u(t))$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$. Тройка функций $(x(t),\psi(t),u(t))$ образует экстремальную тройку.

Поставим теперь основной вопрос: является ли пара $(x(t),u(t))$ оптимальной для задачи (22)? Положительный ответ на этот вопрос даёт формулируемая ниже теорема. Для её формулировки сделаем дополнительные предположения.

Предположение 3. Функции $\mathcal{M}(t,x,\psi)$, $\mathcal{M}'_x(t,x,\psi)$ непрерывны по совокупности переменных.

Предположение 4. Сопряжённое уравнение допускает запись

$$\dot{\psi} = -\mathcal{M}'_x(t,x,\psi).$$

Предположение 5. Функция
$$m(t,x) = \mathcal{M}(t,x,\psi(t))$$
является вогнутой функцией переменной x при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Замечание. В связи с предположением 5 напомним некоторые факты о вогнутых функциях. График гладкой вогнутой функции $f(x)$ скалярного аргумента x располагается под касательной. Приращение функции допускает при любых x и Δx оценку
$$f(x+\Delta x) - f(x) \leqslant f'(x)\Delta x$$
или
$$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x \leqslant 0.$$
В левой части последнего неравенства стоит разность между значением функции и линейными членами её тейлоровского разложения. Для вогнутой функции $f : R^n \to R^1$ при любых x и Δx выполняется неравенство
$$f(x+\Delta x) - f(x) - \langle f'(x), \Delta x\rangle \leqslant 0. \qquad (24)$$

Теорема 13 (о достаточных условиях оптимальности). *При сделанных предположениях экстремальный процесс* $(x(t), u(t))$ *является оптимальным в задаче* (22).

Доказательство. Рассмотрим произвольный допустимый процесс $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, где $t \in [t_0, t_1]$. При этом, очевидно,
$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)),\ \hat{x}(t_0) = x_0.$$
Введём приращения:
$$\Delta u(t) \equiv \hat{u}(t) - u(t),$$
$$\Delta x(t) \equiv \hat{x}(t) - x(t),$$
$$\Delta J \equiv J(\hat{u}) - J(u).$$
Для обоснования оптимальности процесса $(x(t), u(t))$ следует установить неравенство $\Delta J \geqslant 0$ для приращения ΔJ. Приведём следующие выкладки:

$$0 = \Big\{\psi(t_1) = \Delta x(t_0) = 0\Big\} = \langle \psi(t), \Delta x(t)\rangle\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\langle \psi(t), \Delta x(t)\rangle\,dt =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} [\langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t)\rangle + \langle \psi(t), \Delta\dot{x}(t)\rangle]\,dt = \Big\{\Delta\dot{x}(t) = \dot{\hat{x}} - \dot{x}(t) = f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) - f(x, x(t), u(t))\Big\} =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} [-\langle \mathcal{M}'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)\rangle + \langle \psi(t), f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))\rangle - \langle \psi(t), f(t, x(t), u(t))\rangle]\,dt =$$
$$= \Big\{\langle \psi(t), f(t,x(t),u(t))\rangle = \mathcal{H}(t, x(t), \psi(t), u(t)) + f^0(t, x(t), u(t)),\ \langle \psi(t), f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))\rangle =$$
$$= \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) + f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\Big\} = \int\limits_{t_0}^{t_1} [-\langle \mathcal{H}'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)\rangle + \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) -$$
$$- \mathcal{H}(t, x(t), \psi(t), u(t))]\,dt + J(\hat{u}) - J(u).$$

Отсюда находим:

$$-\Delta J = \int\limits_{t_0}^{t_1} [-\langle \mathcal{M}'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)\rangle + \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - \mathcal{H}(t, x(t), \psi(t), u(t))]\, dt.$$

Принимая во внимание принцип максимума, перепишем последнее соотношение в виде:

$$-\Delta J = \int\limits_{t_0}^{t_1} [-\langle \mathcal{M}'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)\rangle + \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - \mathcal{M}(t, x(t), \psi(t))]\, dt.$$

Учитывая, что $\mathcal{H}(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) \leqslant \mathcal{M}(t, \hat{x}(t), \psi(t))$, получим

$$-\Delta J \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} (-\langle M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t)\rangle + M(t, \tilde{x}(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)))\, dt.$$

Интегрант в правой части неравенства не превосходит нуля в силу соотношения (24), поэтому

$$\Delta J \geqslant 0.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Теорема о достаточных условиях оптимальности применима для задачи управления при фиксированных концах траектории, то есть для задачи (13). Действительно, ключевым моментом приведённого выше доказательства является представление нуля в виде

$$0 = \langle \psi(t_1), \Delta x(t_1)\rangle - \langle \psi(t_0), \Delta x(t_0)\rangle \tag{25}$$

Но и для задачи (13) это равенство справедливо, поскольку $\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0$.

Эта теорема также применима и для задачи управления на бесконечном промежутке времени: $t_0 \leqslant t < +\infty$. В этом случае, естественно, следует рассматривать допустимые управления, гарантирующие сходимость несобственного интеграла

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{+\infty} f^0(t, x(t), u(t))\, dt.$$

Для применимости теоремы достаточно потребовать выполнения равенства (25) при $t_1 = +\infty$.

4.2 Случай линейно-квадратичной задачи

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \quad \dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in R^n,\ u \in U = R^r,\ t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \\ J[u] = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_0^T (\langle x, Qx\rangle + \|u\|^2)\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_U} \end{cases}$$

Геометрическое ограничение на управление отсутствует, длительность $T > 0$ процесса управления задана, правый конец траектории свободен. Матрицы $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $Q \in R^{n\times n}$ заданы и не зависят от t, причем $Q = Q^* \geqslant 0$.

Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}(\langle x, Qx\rangle + \|u\|^2) + \langle \psi, Ax + Bu\rangle.$$

Для нахождения максимизатора $u_* = \operatorname*{argmax}_u \mathcal{H}(x, \psi, u)$ вычислим градиент функции $\mathcal{H}$ по u и приравняем его нулю:

$$\mathcal{H}'_u = -u + B^*\psi = 0.$$

Таким образом, максимизатор $u_*(\psi) = B^*\psi$ не зависит от фазовой переменной x. Отсюда

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x,\psi) = \mathcal{H}(x,\psi,u_*(\psi)) &= -\frac{1}{2}(\langle x, Qx\rangle + \|u_*\|^2) + \langle \psi, Ax + Bu_*(\psi)\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}(\langle x, Qx\rangle + \|B^*\psi\|^2) + \langle \psi, Ax\rangle + \langle \psi, BB^*\psi\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \langle A^*\psi, x\rangle + \frac{1}{2}\|B^*\psi\|^2.\end{aligned}$$

Первая и вторая производные функции $\mathcal{M}$ по x имеют вид

$$\mathcal{M}'_x(x,\psi) = -Qx + A^*\psi,$$

$$\mathcal{M}''_{xx} = -Q \leqslant 0,$$

поэтому функция $\mathcal{M}(x,\psi)$ вогнута по x.

Теперь запишем сопряженное уравнение:

$$\dot{\psi} = -H'_x = Qx - A^*\psi = -M'_x(x,\psi).$$

Значит, краевая задача принципа максимума Понтрягина имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BB^*\psi, \ 0 \leqslant t \leqslant T \\ \dot{\psi} = Qx - A^*\psi \\ x(0) = x_0, \\ \psi(T) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Претендент на роль оптимального управления — r-мерная векторная функция $u(t) = u_*(\psi)$. Очевидно, все предположения теоремы 13 выполнены, и управление $u(t)$ действительно является оптимальным.

Для фактического построения оптимального решения задачи центральная роль отводится нахождению решения краевой задачи (26). Методы ее решения будут рассмотрены ниже.

Можно доказать единственность решения краевой задачи (26). Это утверждение равносильно следующему: задача

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BB^*\psi, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ \dot{\psi} = Qx - A^*\psi \\ x(0) = 0, \\ \psi(T) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

имеет только нулевое решение. Для доказательства последнего факта рассмотрим матричную задачу Коши вида

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = -Q - P(t)A - A^*P(t) + P(t)DP(t), \quad D = BB^* \\ P(T) = 0 \end{cases} \tag{28}$$

относительно неизвестной матричной функции $P(t) \in R^{n\times n}$ — симметричной матрицы порядка n. Уравнение системы (28) называется матричным дифференциальным уравнением Риккати. Пусть $P(t)$ — решение этой задачи Коши, определенное при $t \in [0,T]$ (это возможно в силу сделанных предположений). Покажем, что векторная функция $z(t) = \psi(t) + P(t)x(t)$, где $(x(t), \psi(t))$ — решение однородной задачи (27), а $P(t)$ — решение задачи (28), тождественно равна нулю.

Действительно, в силу однородных граничных условий на правом конце, $z(T) = 0$. Покажем, что функция $z(t)$ является решением линейного однородного векторного уравнения $\dot{z} = -(A - DP(t))^*z$:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = \dot{\psi}(t) + \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} = (Qx - A^*\psi) + (-Q - PA - A^*P + PDP)x + P(Ax + BB^*\psi) = \\ = Qx - A^*(z - Px) - Qx - PAx - A^*Px + PDPx + PAx + PBB^*(z - Px) = \\ = -A^*z + PDz = -(A^* - PD)z = -(A - DP)^*z. \end{aligned}$$

Однородная задача Коши имеет единственое нулевое решение, поэтому функция $z(t)$ тождественно равна нулю и между функциями $x(t)$ и $\psi(t)$ имеется зависимость вида $\psi(t) = -P(t)x(t)$. После подстановки этого выражения в первое уравнение системы (27) получим однородную задачу Коши относительно функции $x(t)$, из чего следует, что $x(t) \equiv 0$, а потому и $\psi(t) \equiv 0$. Таким образом доказано утверждение о единственности решения краевой задачи (26).

Опишем метод прогонки (в непрерывной форме) для получения решения краевой задачи (26). Выше было показано, что решение задачи (26) может быть сведено к решению задачи Коши относительно функции $x(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = [A - DP(t)]x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{29}$$

После нахождения решения этой задачи функция $\psi(t)$ вычисляется явным образом. Итак, метод прогонки для нахождения решения линейной краевой задачи (26) состоит из трех пунктов:

1) найти матричное решение $P(t)$ задачи Коши (28),

2) найти решение $x(t)$ векторной задачи Коши (29)

3) с помощью явной формулы вычислить функцию $\psi(t)$.

Упражнение. Проверить применимость теоремы 13 для задачи управления

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in R^n, u \in R^r,\ 0 \leqslant t \leqslant T \\ x(0) = x_0 \\ J[u] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T (F(x) + \|u\|^2)\, dt \to \min_{u(\cdot)} \end{cases}$$

где $F : R^n \to R^1$ — гладкая выпуклая функция.

5 Примеры

5.1 Задача о нагревании чайника до заданной температуры

Рассмотрим задачу о нагревании чайника с начальной температурой x_0 до заданной температуры x_1 с минимальным расходом топлива. Пусть $x(t)$ — температура чайника, $u(t)$ — мгновенный расход топлива в момент времени t, $F(u)$ — скорость изменения температуры за счёт нагрева, $G(x)$ — скорость изменения температуры за счёт рассеивания тепла. Соответствующую задачу оптимального управления можно сформулировать тогда следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(u) - G(x) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 \\ J = \displaystyle\int_0^T u(t)\, dt \longrightarrow \min \end{cases} \tag{30}$$

Функции $F(u)$ и $G(x)$ могут быть выбраны разными способами. Будем считать, что

$$F(u) = \frac{1}{a}\frac{u}{1 + k^{-1}u},$$

$$G(x) = b(x - x_0),$$

где $a, k, b > 0$. Ограничения на управление $u(t)$ можно наложить одним из двух способов:

I. $u(t) \in [0, +\infty)$ (идеальная ситуация),

II. $u(t) \in [0, u^+]$, где $u^+ > 0$.

Введём новое управление $v(t)$, полагая

$$v(t) = \frac{u(t)}{k},$$

и новую фазовую переменную

$$z(t) = a\frac{x(t) - x_0}{k}.$$

Задача (30) в новых переменных принимает вид

$$\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{v}{1+v} - bz \\ z(0) = 0 \\ x(T) = z_1 \\ J = \displaystyle\int_0^T v(t)\, dt \longrightarrow \min \end{cases} \tag{31}$$

Возможные ограничения на $v(t)$ имеют вид

I′. $v(t) \in [0, +\infty)$,

II$'$. $v(t) \in [0, v^+]$, где $u^+ = \frac{u^+}{k} > 0$.

Исходная задача с пятью параметрами a, b, k, x_0, x_1 сведена, таким образом, к задаче с двумя параметрами $b > 0$ и $z_1 > 0$. Функция

$$f(v) = \frac{v}{1+v}$$

имеет характер функции насыщения: $f(0) = 0$, $f(+\infty) = 1$ и $f(v), f'(v) > 0$ при $v \in [0, +\infty)$.

Вопрос об управляемости системы является существенным, поскольку $\dot{z}(t)$ может стать отрицательным (из ограниченного слагаемого $f(v)$ вычитается неограниченное положительное bz). Докажем следующую лемму:

Лемма. *При выполнении условия* (I$'$) *условие управляемости в задаче* (31) *имеет вид*

$$z_1 < \frac{1}{b},$$

а при выполнении условия (II$'$) *условие управляемости имеет вид*

$$z_1 < \frac{1}{b}\frac{v^+}{1+v^+}.$$

Доказательство. Действительно, в случае (I$'$) имеем $0 \leqslant \dot{z} \leqslant 1 - bz$ и, по теореме Чаплыгина (см. ниже),

$$0 \leqslant z(t) \leqslant \frac{1}{b}(1 - e^{-bt}) \to \frac{1}{b}.$$

Если же выполнено условие (II$'$), то имеем $0 \leqslant \dot{z} \leqslant \frac{v^+}{1+v^+} - bz$ и, следовательно,

$$0 \leqslant z(t) \leqslant \frac{1}{b}\frac{v^+}{1+v^+}(1 - e^{-bt}) \to \frac{1}{b}\frac{v^+}{1+v^+}.$$

□

Теорема Чаплыгина, используемая в доказательстве леммы, формулируется следующим образом:

Теорема (Чаплыгин). *Пусть $\dot{x} = F(x,t)$, $x(0) = z$ и $\dot{y} = F(y,t)$, $y(0) = z$. Тогда если для всех z, t верно $F(z,t) \geqslant G(z,t)$, то для всех t верно $x(t) \geqslant y(t)$.*

Примем эту теорему без доказательства.

Замечание. При условии (II$'$) применение управления $v = v^+$ требует времени $T > 0$, которое определяется из условия

$$\frac{1}{b}\frac{v^+}{1+v^+}(1 - e^{-bT}) = z_1,$$

или

$$T = \frac{1}{b}\ln\frac{1}{1 - bz_1\frac{1+v^+}{v^+}}.$$

Ясно, что это есть время быстродействия для задачи (31) при условии (II$'$). При условии (I$'$) время

$$T_V = \frac{1}{b}\ln\frac{1}{1 - bz_1\frac{1+V}{V}}.$$

движения с постоянным управлением V будет больше времени $T_{V'}$ для любого постоянного управления $V' > V$. Таким образом, при условии (I$'$) задача быстродействия неразрешима.

Для решения задачи (31) рассмотрим сначала случай (I$'$). Запишем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\mathcal{H}(x,\psi,v)=\psi_0 v+\psi\left(\frac{v}{1+v}-bz\right).$$

При $\psi_0=0$ получаем случай задачи быстродействия, поэтому $\psi_0<0$. Полагая $\psi_0=-1$, получаем

$$\mathcal{H}(x,\psi,v)=-v+\psi\left(\frac{v}{1+v}-bz\right).$$

Для того, чтобы максимизировать функцию $\mathcal{H}$, найдём её производную:

$$\mathcal{H}'_v=-1+\psi\frac{1}{(1+v)^2}.$$

Если $\psi\leqslant 1$, то

$$\mathcal{H}'_v\leqslant -1+\psi\frac{1}{(1+v)^2}<0,$$

то есть $\mathcal{H}$ монотонно убывает по $v>0$ и, следовательно, имеет максимум в точке $v_*=0$. Если же $\psi\geqslant 1$, то уравнение $\mathcal{H}'_v=0$ имеет решение $v=\sqrt{\psi}-1$ и $\mathcal{H}''_{vv}=-2\psi\frac{1}{(1+v)^3}<0$. Таким образом, в этом случае функция $\mathcal{H}$ имеет максимум в точке $v_*(\psi)=\sqrt{\psi}-1$. Итак,

$$v_*(\psi)=\begin{cases}0, & \psi<1,\\ \sqrt{\psi}-1, & \psi\geqslant 1.\end{cases}$$

По теореме 7, для оптимального процесса при любом $t\in[0,T]$ выполняется равенство

$$\mathcal{H}(x(t),\psi(t),v(t))=0.$$

В частности, $\mathcal{H}(x(0),\psi(0),v(0))=0$, или

$$-v(0)+\psi(0)\left(\frac{v(0)}{1+v(0)}-bz(0)\right)=0.$$

Поскольку $z(0)=0$, получаем, что

$$v(0)\left(-1+\frac{\psi(0)}{1+v(0)}\right)=0.$$

Рассмотрим два случая. Если $v(0)=0$, то $\sqrt{\psi(0)}-1=0$ и, следовательно, $\psi(0)=1$. Если же нулю равен второй сомножитель, то

$$\psi(0)=1+v(0)=1+\sqrt{\psi(0)}-1,$$

откуда, используя условие $\psi(0)\neq 0$, получаем, что $\psi(0)=1$. Таким образом, начальное условие для сопряжённой переменной имеет вид $\psi(0)=1$. Сопряжённая система

$$\begin{cases}\dot{\psi}=-\mathcal{H}'_z=b\psi\\ \psi(0)=1\end{cases}$$

имеет тогда решение $\psi(t) = e^{bt} \geqslant 1$. Для экстремального управления получим формулу

$$v_*(t) = \sqrt{\psi(t)} - 1 = e^{\frac{b}{2}t} - 1. \tag{32}$$

Управлению $v_*(t)$ отвечает траектория $z_*(t)$, определённая задачей Коши

$$\dot{z} = \frac{e^{\frac{b}{2}t} - 1}{1 + e^{\frac{b}{2}t} - 1} - bz, \quad z(0) = 0,$$

или

$$\dot{z} = 1 - e^{-\frac{b}{2}t} - bz, \quad z(0) = 0.$$

Решая эту задачу, получим траекторию

$$z_*(t) = \frac{1}{b}(1 - e^{-\frac{b}{2}t})^2. \tag{33}$$

Из условия $z_*(T) = z_1$ можно теперь определить время T_*:

$$T_* = \frac{2}{b} \ln \frac{1}{1 - \sqrt{bz_1}} > 0. \tag{34}$$

Функционал J на управлении $v_*(t)$ примет значение

$$J_* = \int\limits_0^{T_*} v_*(t)\, dt = \int\limits_0^{T_*} \left(e^{\frac{b}{2}t} - 1\right) dt = \frac{2}{b}\left(e^{\frac{b}{2}T_*} - 1 - \frac{b}{2}T_*\right) > 0.$$

Окончательно получаем

$$J_* = \frac{2}{b}\left(\frac{1}{1 - \sqrt{bz_1}} - 1\right) - \frac{2}{b} \ln \frac{1}{1 - \sqrt{bz_1}}.$$

Таким образом, в случае ограничений типа (I′) задача полностью решена, и формулы (32), (33), (34) задают соответственно оптимальное управление, траекторию и время.

Рассмотрим теперь случай ограничений типа (II′). Определим функции $v_*(t)$, $z_*(t)$ и время T_* равенствами (32), (33) и (34). Если для всех $t \in [0, T_*]$ выполняется неравенство $v_*(t) \leqslant v^+$, то управление $v_*(t)$ является решением задачи также и в случае (II′). В противном случае найдётся такое $\theta \in (0, T_*)$, что $v_*(\theta) = v^+$, но $z_*(\theta) < z_1$. Исходя из равенства (32), получаем

$$\theta = \frac{2}{b} \ln\left(1 + v^+\right).$$

Положим теперь

$$v_{**} = \begin{cases} v_*(t), & 0 \leqslant t \leqslant \theta \\ v^+(t), & \theta \leqslant t \leqslant T_{**} \end{cases}$$

$$z_{**} = \begin{cases} z_*(t), & 0 \leqslant t \leqslant \theta \\ \bar{z}(t), & \theta \leqslant t \leqslant T_{**} \end{cases}$$

где $\bar{z}(t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{v^+}{1 + v^+} - bz \\ z(\theta) = \dfrac{1}{b}\left(e^{\frac{b}{2}\theta} - 1\right)^2 \end{cases}$$

а время T_{**} определяется из условия $\bar{z}(T_{**}) = z_1$. Очевидно, тройка $(v_{**}(t), z_{**}(t), T_{**})$ является оптимальной для случая (II$'$).

Сформулируем теперь решение для случая (I$'$) в виде задачи обратной связи. Из формул (32) и (33) получаем, что

$$\frac{v_*(t)}{1+v_*(t)} = 1 - e^{\frac{b}{2}t} = \sqrt{bz}.$$

Мы приходим, таким образом, к системе

$$\begin{cases} \dot{z} = \sqrt{bz} - bz \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет два решения, одно из которых даёт формула (33), а второе тривиально. Чтобы избавиться от неоднозначности, введём новую фазовую переменную $Y = \sqrt{bz}$. Тогда $bz = Y^2$ и $b\dot{z} = 2Y\dot{Y}$. Дифференциальное уравнение принимает вид $2Y\dot{Y} = Y - Y^2$. Система обратной связи после замены переменной будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{Y} = \dfrac{1-Y}{2} \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение.

5.2 Задача о распределении ресурсов в процессе роста колонии микроорганизмов

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (a+x)u, \quad x \in E^1, t \in [0,T], u \in [0,1] \\ x(0) = x_0 > 0 \\ J = \int\limits_0^T \left(-\dfrac{x}{1+x}\right) u\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases} \tag{35}$$

где $a > 0$. Эта задача имеет следующую микробиологическую интерпретацию. Функционал $-J$ характеризует размер линейно растущей колонии микроорганизмов. Задача состоит в том, чтобы достигнуть максимального размера колонии за фиксированное время. Предполагается, что питательные вещества расходуются либо на размножение, либо на питание микроорганизмов. Управление $u(t)$ есть доля ресурсов, расходуемая на размножение в момент времени t (при $u(t) = 0$ все ресурсы расходуются только на питание, при $u(t) = 1$ — только на размножение). a — постоянная, характеризующая как воздействие окружающей среды, так и свойства индивидуальной колонии. Фазовая переменная x положительна, что следует из ее физического смысла. Неравенство $x > 0$ в модели (35), как мы покажем ниже, выполняется для любой допустимой траектории.

Задача оптимального управления (35) — нелинейная одномерная задача с интегральным функционалом на фиксированном отрезке времени, с фиксированным левым концом траектории $x(0) = x_0$ и свободным правым концом $x(T) > 0$. Допустимое управление в задаче (35) представляет пример так называемых «билинейных систем»: в правой части дифференциального уравнения присутствует член в форме произведения фазовой переменной и управления. Под знаком интеграла в функционале присутствует нелинейная функция вида $\frac{x}{1+x}$.

В задаче о нагреве чайника управление имело непрерывный вид с возможным выходом на верхний допустимый предел. В рассматриваемом сейчас примере будет обнаружено новое явление — особое управление, или особый режим: на некотором временном промежутке положительной длины условие максимума не позволяет однозначно определить экстремальное управление. Но дополнительные рассуждения позволяют и в этом случае вычислить оптимальное управление на особом участке. Значение управления на особом участке оказывается внутренней точкой области управления. В целом, оптимальное управление в данном примере является кусочно-постоянной функцией, которая может принимать крайние значения 0, 1 и особое значение на интервале $(0, 1)$.

При $u(t) \equiv 0$ система задачи (35) принимает вид

$$\dot{x} = a, \ x(0) = x_0 > 0.$$

Эта задача Коши имеет решение $x^+(t) = x_0 + at$. При $u(t) \equiv 1$ получаем задачу Коши

$$\dot{x} = -x, \ x(0) = x_0 > 0,$$

которая имеет решение $x^-(t) = x_0 e^{-t}$.

Лемма. *Для любой допустимой траектории $x(t)$ задачи (35) при всех $t \geqslant 0$ выполнено двойное неравенство*

$$x^-(t) \leqslant x(t) \leqslant x^+(t). \tag{36}$$

Доказательство. Так как $x(0) = x_0 > 0$, то существует такое $\tau > 0$, что при $t \in [0, \tau)$ выполнено неравенство $x(t) > 0$. Отсюда следует, что при $t \in [0, \tau)$ верно

$$\dot{x}(t) \leqslant a = \dot{x}^+(t),$$

$$\dot{x}(t) \geqslant a - (a + x(t)) = -x(t) = \dot{x}^-(t),$$

откуда по теореме Чаплыгина вытекает выполнение неравенства (36) при $t \in [0, \tau)$.

Если допустить теперь, что при некотором $\tau > 0$ выполнится равенство $x(\tau) = 0$, то перейдя в правой части неравенства (36) к пределу при $t \to \tau$, получим $x(\tau) \geqslant x^+(\tau) > 0$ — противоречие. Таким образом, неравенство (36) выполняется на любом интервале вида $[0, \tau)$. Лемма доказана. □

Таким образом, в выбранной модели автоматически выполняется условие $x(t) > 0$, что избавляет нас от необходимости вводить дополнительные фазовые ограничения.

Напишем функцию Гамильтона для задачи (35):

$$\mathcal{H}(x, \tilde{\psi}, u) = \psi_0 \left(-\frac{x}{1+x} u \right) + \psi(a - (a + x)u).$$

Поскольку задача (35) представляет собой задачу со свободным правым концом, то $\psi_0 = -1$. Таким образом, Функция Гамильтона принимает вид

$$\mathcal{H}(x, \psi, u) = \frac{x}{1+x} u + \psi(a - (a + x)u).$$

Найдём теперь экстремальное управление

$$u_*(\psi, x) = \operatorname*{argmax}_{u \in [0,1]} \mathcal{H}(x, \psi, u).$$

Для этого рассмотрим градиент функции $\mathcal{H}$ по переменной u:

$$\pi(t) = \mathcal{H}'_u = \frac{x}{1+x} - \psi(a+x)$$

Функция $\pi(t)$ называется функцией переключения. Поскольку функция $\mathcal{H}$ зависит от переменной u линейно, возможны три случая:

- если $\pi(t) > 0$, то $u_*(t) = 1$,
- если $\pi(t) < 0$, то $u_*(t) = 0$,
- если $\pi(t) = 0$, то максимизирующая точка не может быть определена с помощью условия максимума (все точки $u \in [0,1]$ являются максимизаторами функции). С помощью некоторых дополнительных рассуждений в предположении, что $\pi(t) \equiv 0$ вдоль оптимального процесса на некотором временном отрезке положительной длины, будет вычислено для этого отрезка особое управление $u_*(t) = u_s \in (0,1)$.

Таким образом, находится оптимальное управление

$$u_*(x,\psi) = \begin{cases} 1, & \pi > 0, \\ 0, & \pi < 0, \\ u_s, & \pi = 0. \end{cases}$$

Теперь мы можем записать краевую задачу принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления (35):

$$\begin{cases} \dot{x} = H'_\psi = a - (a+x)u_*(x,\psi) \\ \dot{\psi} = -H'_x = \left(\psi - \dfrac{1}{(1+x)^2}\right) u_*(x,\psi) \\ x(0) = x_0 \\ \psi(T) = 0 \end{cases}$$

Эта краевая задача является нелинейной. Сложность её решения связана с тем, что мы заранее не знаем, существуют ли участки особого управления, сколько этих участков и как определить их границы.

Обратимся теперь к изучению некоторых свойств оптимального управления, которые позволят нам построить гипотезу о виде оптимального решения задачи (35).

Для функции переключения вдоль оптимального процесса на правом конце временного отрезка можно в силу условия трансверсальности и соотношения $x(t) > 0$ записать неравенство

$$\pi\Big|_{t=T} = \frac{x(T)}{1+x(T)} - \psi(T)(a+x(T)) = \frac{x(T)}{1+x(T)} > 0.$$

Это неравенство сохраняется в некоторой окрестности точки T:

$$\exists \theta: \ \pi > 0 \text{ при } \theta < t \leqslant T.$$

Поэтому на заключительной стадии процесса управления имеем:

$$u_*(t) = 1, \ \theta < t \leqslant T.$$

Это так называемый «эффект знания момента смерти», возникающий из-за несовершенства нашей модели. Предположим теперь, что на некотором участке времени (τ, θ) выполняется соотношение $\pi \equiv 0$. Оказывается, что данное тождество вместе с дифференциальным уравнением управляемого движения позволяет определить управление $u = u_s$. На участке (τ, θ) имеем $\frac{d}{dt}\pi \equiv \frac{d^2}{dt^2}\pi \equiv 0$, откуда получаем

$$0 \equiv \frac{d}{dt}\pi = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{1+x} - \psi(a+x)\right) = \frac{1}{(1+x)^2}\dot{x} - \dot{\psi}(a+x) - \psi\dot{x} =$$
$$= \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \psi\right)(\dot{x} + (a+x)u) = \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \psi\right)a.$$

Следовательно, на особом участке (τ, θ) имеет место равенство $\psi = \frac{1}{(1+x)^2}$. Дифференцирование его по времени даёт

$$\dot{\psi} = \left(\psi - \frac{1}{(1+x)^2}\right)u = 0u = -\frac{2}{(1+x)^3}\dot{x},$$

откуда получаем $\dot{x} = a - (a+x)u = 0$. Следовательно,

$$u = \frac{a}{a+x}.$$

Кроме того, из условия $\pi \equiv 0$ получаем

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)(a+x)}.$$

Итак, на особом участке (τ, θ) выполнены следующие равенства:

$$\begin{cases} x = \sqrt{a}, \\ \psi = \dfrac{1}{(1+\sqrt{a})^2}, \\ u = \dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Мы пока не знаем, существует ли участок особого режима (τ, θ), не знаем параметров τ и θ и не знаем число особых участков. Наша гипотеза относительно оптимального управления состоит в том, что на начальном отрезке времени $[0, \tau]$ управление u_* равно 0 (в случае $x_0 < \sqrt{a}$) или 1 (в случае $x_0 > \sqrt{a}$). В точке τ траектория достигает значения $\sqrt{a}$, и далее на интервале (τ, θ) управление равно u_s, на отрезке же $[\theta, T]$ управление равно 1.

Докажем нашу гипотезу для случая $x_0 < \sqrt{a}$. Пусть $T > 0$ достаточно велико. Сконструируем новое управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \tau = \frac{\sqrt{a}-x_0}{a}, \\ u_s, & \tau < t < \theta, \\ 1, & \theta \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

и соответствующую ему траекторию

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x_0 + at, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ \sqrt{a}, & \tau < t < \theta, \\ \sqrt{a}e^{(\theta - t)}, & \theta \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Подставим управление $\bar{u}(t)$ в функционал:

$$\varphi(\theta) = J[\bar{u}] = \int\limits_0^T \left(-\frac{\bar{x}(t)}{1+\bar{x}(t)}\right)\bar{u}(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau 0\,dt + \int\limits_\tau^\theta \left(-\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)\,dt + \int\limits_\theta^T \left(-\frac{\sqrt{a}e^{\theta-t}}{1+\sqrt{a}e^{\theta-t}}\right)\,dt =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2(\theta-\tau) + \ln\left(1+\sqrt{a}e^{\theta-\tau}\right)\Big|_{t=\theta}^{t=T} =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2(\theta-\tau) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{a}e^{\theta-T}}{1+\sqrt{a}}\right).$$

Найдём параметр θ, решая экстремальную задачу

$$\varphi(\theta) \to \min_{\theta>\tau}.$$

Найдём производную функции $\varphi(\tau)$ и приравняем её нулю:

$$\varphi'(\theta) = -\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}e^{\theta-T}} = 0,$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}e^{\theta-T}}{1+\sqrt{a}e^{\theta-T}},$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 = e^{\theta-T}\left[\sqrt{a} - \sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2\right]$$

$$e^{\theta-T} = \frac{1+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{a}},$$

$$\theta = T - \ln\left(2+\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

Легко проверяется, что $\varphi''(\theta) > 0$. Требуем $\tau < \theta$. После нахождения параметра θ можно вычислить

$$\bar{x}(T) = \sqrt{a}e^{\theta-T} = \frac{\sqrt{a}}{2+\frac{1}{\sqrt{a}}} < \sqrt{a}.$$

Выбор параметра θ равносилен выбору $\bar{x}(T)$:

$$\theta - \tau = \ln\left(\frac{\bar{x}(T)}{\sqrt{a}}\right)$$

Обоснуем теперь оптимальность построенного решения. Временно зафиксируем правый конец траектории. Покажем, что в задаче (35) с дополнительным условием $x(T) = x_1 \in (0, \sqrt{a})$ пара $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ является оптимальной, тогда эта пара при некотором θ будет очевидным образом оптимальной в исходной задаче.

Представим функционал J в виде

$$J = J(x,u) = \int\limits_0^T \left[-\frac{x}{1+x} + \dot{w}(x) - \dot{w}(x)\right] dt,$$

где

$$w(x) = -\int\limits_0^x \frac{\xi\, d\xi}{(1+\xi)(a+\xi)},$$

$$\dot{w}(x) = w'(x)[a - (a+x)u].$$

Получаем:

$$J = -w(x(t))\Big|_{t=0}^{t=T} + \int\limits_0^T \left[-\frac{xu}{1+x} + w'(x)(a-(a+x)u)\right] dt =$$

$$= -w(x(T)) + w(x(0)) + \int\limits_0^T \left[-\frac{xu}{1+x} - \frac{x[a-(a+x)u]}{(1+x)(a+x)}\right] dt =$$

$$= w(x_0) - w(x_1) + \int\limits_0^T \left[-\frac{xu}{1+x} - a\frac{x}{(1+x)(a+x)} + \frac{xu}{1+x}\right] dt = w(x_0) - w(x_1) + a\int\limits_0^T w'(x)\, dt.$$

Отсюда получаем формулу для приращения функционала:

$$\Delta J = J(x,u) - J(\bar{x},\bar{u}) = a\int\limits_0^T [w'(x(t)) - w'(\bar{x}(t))]\, dt.$$

Изучим экстремальные свойства функции

$$w'(x) = -\frac{x}{(1+x)(a+x)}.$$

Заметим, что

$$w'(0) = 0,$$

$$w'(x) < 0,\ x > 0,$$

$$w'(+\infty) = 0,$$

$$w''(x) = \frac{x^2 - a}{(1+x)^2(a+x)^2}.$$

Распишем ΔJ в виде

$$\Delta J = \int\limits_0^\tau a\,[w'(x(t)) - w'(\bar{x}(t))]\, dt + \int\limits_\tau^\theta a\,[w'(x(t)) - w'(\bar{x}(t))]\, dt + \int\limits_\theta^T a\,[w'(x(t)) - w'(\bar{x}(t))]\, dt.$$

Оценивая каждый из трех интегралов, получим, в силу функции $w'(x)$, их неположительность, откуда следует оптимальность управления $\bar{u}$.