Понятие случайного процесса

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство, $\mathbb{M}$ - метрическое пространство, $\mathcal{B}(\mathbb{M})$ - борелевская σ-алгебра метрического пространства $\mathbb{M}$, T - борелевское подмножество вещественной прямой.

2.1.1. Определение. Семейство случайных величин $X_T = \{X_t, t \in T\}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих свои значения в метрическом пространстве $\mathbb{M}$, называется *случайным процессом.*

Множество T, участвующее в определении случайного процесса, называется *параметрическим множеством.* Можно было бы дать определение случайного процесса с параметрическим множеством T любой природы. Более того, существуют важные классы случайных процессов, само определение которых предусматривает специальную (не обязательно числовую) природу параметрического множества. Мы ограничимся случаем, когда параметрическое множество является борелевским подмножеством вещественной прямой.

Если параметрическое множество конечно, $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, то понятие случайного процесса сводится к понятию случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, который вполне характерисуется своим распределением

$$P_{t_1,\ldots,t_n}\{A\} = P\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\}, \;\; A \in \mathcal{B}^n(\mathbb{M}), \tag{1}$$

где $\mathcal{B}^n(\mathbb{M})$ обозначает декартово произведение n копий σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{M})$.

Предположим, что параметрическое множество T имеет бесконечную мощность. Каждому натуральному числу n и любому набору чисел $t_1, \ldots, t_n$ из T соответствует случайный вектор $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и его распределение (2.1.1). Такие распределения называются *конечномерными распределениями* случайного процесса X_T. Семейство конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса.

Возникает естественный вопрос: в какой мере конечномерные распределения случайного процесса характеризуют сам случайный процесс? Вполне ясно, что два различных случайных процесса со значениями в одном и том же метрическом пространстве могут иметь одинаковые конечномерные распределения. Ниже мы убедимся, что при определенных условиях семейство вероятностных мер $P_{t_1,\ldots,t_n}\{A\}$, $A \in \mathcal{B}^n(\mathbb{M})$, $t_1, \ldots, t \in T$, может выступать в качестве конечномерных распределений некотрого случайного процесса. Для этой цели нам понадобятся два свойства, которыми обладают конечномерные распределения случайного процесса. Из (2.1.1) следует, что для любого набора чисел $t_1, \ldots, t_n$ из T, любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ из $\mathcal{B}(\mathbb{M})$ и любой перестановки π чисел $1, \ldots, n$ выполняются равенства

$$P_{t_1,\dots,t_n}\left\{\prod_{k=1}^{n} A_k\right\} = P_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}\left\{\prod_{k=1}^{n} A_{\pi(k)}\right\} \tag{2}$$

$$P_{t_1,\dots,t_n}\left\{\prod_{k=1}^{r-1} A_k \times \mathbb{M} \times \prod_{k=r+1}^{n} A_k\right\} = P_{t_1,\dots,t_{r-1},t_{r+1},\dots,t_n}\left\{\prod_{k=1}^{r-1} A_k \times \prod_{k=r+1}^{n} A_k\right\}. \tag{3}$$

При $r = 1$ и $r = n$ записи соответственно $\prod_{k=1}^{r-1} A_k$ и $\prod_{k=r+1}^{r} A_k$, ественно, опускаются. Равенства (2.1.3) и (2.1.3) называются *условиями согласcованности* конечномерных распределений случайного процесса X_T.

Пусть T - подмножество вещественной прямой, $\mathbb{M}$ - метрическое пространство. Обозначим $\mathbb{M}^T$ множество функций, определенных на T и принимающих свои значения в $\mathbb{M}$. Возвращаясь к параграфу из первой главы, мы видим, что $\mathbb{M}^T$ представляет собой декартово произведение $\prod_{t\in T}\mathbb{M}_t$, $\mathbb{M}_t = \mathbb{M}$. Обозначим $\mathcal{B}^T(\mathbb{M}) = \prod_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{M})_t$, $\mathcal{B}(\mathbb{M})_t = \mathcal{B}(\mathbb{M})$. В случае счетного множества T объекты $\mathbb{M}^T$ и $\mathcal{B}^T(\mathbb{M})$ мы будем обозначать $\mathbb{M}^\infty$ и $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{M})$.

2.1.2. Теорема. *Пусть T - борелевское подмножество вещественной прямой, $\mathbb{M}$ - польское пространство. Предположим, что для любого натурального числа n и любого набора $t_1,\dots,t_n$ чисел из T существует вероятностная мера $P_{t_1,\dots,t_n}\{A\}$, $A\in\mathcal{B}^n(\mathbb{M})$. Если это семейство вероятностных мер удовлетворяет условиям (2.1.2) и (2.2.3), то можно определить вероятностное пространство $(R^T,\mathcal{B}^T,P^T)$ и случайный случайный процесс $X_T = \{X_t, t\in T\}$ на нем такие, что*

$$P^T\{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in A\} = P_{t_1,\dots,t_n}\{A\},\ \ A\in\mathcal{B}^n(\mathbb{M}). \tag{4}$$

Доказательство. Первые два объекта вероятностного пространства $(\mathbb{M}^T,\mathcal{B}^T(\mathbb{M}),P^T)$ были определены выше. Вероятность P^T определена в теореме Колмогорова. Элемент ω пространства элементарных событий $\mathbb{M}^T$ предствляет собой функцию $\omega = \omega(t)$, $t\in T$, со значениями в $\mathbb{M}$. Определим случайный процесс $X_T = \{X_t, t\in T\}$, положив $X_t(\omega) = \omega(t)$. По теореме Колмогорова выполняется равенство

$$P^T\{C(A)\} = P_{t_1,\dots,t_n}\{A\},\ \ A\in\mathcal{B}^n(\mathbb{M}),$$

для любого цилиндрического множества

$$C(A) = \{\omega(t), t\in T : (\omega(t_1),\dots,\omega(t_n))\in A\},\ \ A\in\mathcal{B}^n(\mathbb{M}). \tag{5}$$

Из определения случайного процесса X_T следует, что

$$P^T\{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in A\} = P^T\{C(A)\}. \quad \#$$

2.1.3. Следствие. *Пусть $\{P_n\}_{n\ge1}$ - последовательность вероятностных мер, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{M})$ польского пространства $\mathbb{M}$. Существует вероятностное пространство $(\mathbb{M}^\infty,\mathcal{B}^\infty(\mathbb{M}),P^\infty)$ и последовательность $\{X_n\}_{n\ge1}$ независимых случайных величин со значениями в $\mathbb{M}$ такие, что*

$$P^\infty\{X_n\in A\} = P_n\{A\},\ \ A\in\mathcal{B}(\mathbb{M}). \tag{6}$$

Доказательство. По ТЕОРЕМЕ для любого натурального числа n и любой перестановки π чисел $1, \dots, n$ можно определить вероятностную меру $F_{\pi(1),\dots,\pi(n)}$ на $\mathcal{B}^n(\mathbb{M})$ таким образом, что будет выполняться равенство

$$F_{\pi(1),\dots,\pi(n)} \left\{ \prod_{k=1}^{n} A_{\pi(k)} \right\} = \prod_{k=1}^{n} P_k \left\{ A_k \right\}, \ \ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{M}).$$

Очевидно, что так определенное семейство вероятностных мер удовлетворяет условиям соглассованности (2.1.2) и (2.1.3). По теореме 2.1.2 на вероятностном пространстве $(\mathbb{M}^\infty, \mathcal{B}^\infty(\mathbb{M}), P^\infty)$ можно определить последовательность $\{X_n\}_{n\geq 1}$ случайных величин со значениями в $\mathbb{M}$ такие, что

$$P^\infty \left\{ X_{r_1} \in A_1, \dots, X_{r_n} \in A_n \right\} = \prod_{k=1}^{n} P_k \left\{ A_k \right\}$$

для любых натуральных челе $r_1 < \cdots < r_n$ и любых $A_1, \dots, A_n$ из $\mathcal{B}(\mathbb{M})$. Последнее равенство означает независимость $X_1, X_2, \dots$ #

2.1.4. Координатная версия случайного процесса. Пусть дан случайный процесс X_T со значениями в польском пространстве $\mathbb{M}$. Его конечномерные распределения удовлетворяют условиям соглассованности (2.1.2) и (2.1.3). По теореме 2.1.2 можно построить вероятностное пространство $(\mathbb{M}^T, \mathcal{B}^T(\mathbb{M}), P^T)$ и определить на нем случайный процесс X'_T, конечномерные распределения которого совпадают с конечномерными распределениями данного случайного процесса X_T. Вероятностная мера P^T называется *распределением* случайного процесса X_T. Случайный процесс X'_T называется *координатной версией* случайного процесса X_T. Отсюда следует, что произвольная задача относительно случайного процесса X_T, решение которой может быть дано в терминах его конечномерных распределений, можно решать с привлечением координатной версии случайного процесса.

2.1.5. Случайный процесс как отображение. Обсудим еще одну точку зрения на случайный процесс. Случайный процесс X_T представляет собой семейство случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих свои значения в метрическом пространстве $\mathbb{M}$. Для данного $\omega \in \Omega$ мы получаем функцию $\{X_t(\omega), t \in T\}$ со значениями в $\mathbb{M}$, определенную на множестве T. Она назыается *траекторией* случайного процесса X_T. Это наблюдение позволяет смотреть на случайный процесс X_T как на отображение

$$X_T : \Omega \longrightarrow \mathbb{M}^T. \tag{7}$$

Предположим, что отображение (2.1.6) измеримо. Другими словами, для любого $A \in \mathcal{B}^T(\mathbb{M})$ его прообраз $X_T^{-1}(A) = \{\omega : X_T(\omega) \in A\}$ принадлежит $\mathcal{F}$. В этом случае можно определить вероятностную меру

$$P_{X_T} \left\{ A \right\} = P \left\{ X_T^{-1}(A) \right\}, \ \ A \in \mathcal{B}^T(\mathbb{M}). \tag{8}$$

Если в качестве A здесь взять цилиндрическое множество (2.1.5), то мы получим

$$P_{X_T} \left\{ C(A) \right\} = P_{t_1,\dots,t_n} \left\{ A \right\}, \ \ A \in \mathcal{B}^n(\mathbb{M}). \tag{9}$$

Если $\mathbb{M}$ - польское пространство, то по теореме Колмогорова вероятностные меры P^T и P_{X_T} совпадают. Подчеркнем, что вероятностная мера (2.1.7) может быть определена только при предположении измеримости отображения (2.1.6). При этом не требуется, чтобы метрическое пространство $\mathbb{M}$ было польским. С другой стороны, вероятностная мера P^T нами определена в предположении, что случайный процесс X_T принимает свои значения в польском пространстве. В ряде случаев случайный процесс X_T можно изменить таким образом, что измененный процесс будет измеримым и его конечномерные распределения совпадают с конечномерными распределения X_T. Эта проблема будет изучена в параграфе 2.5.

2.1.6. Случайный процесс - функция двух переменных. На случайный процесс X_T можно смотреть как на функцию двух переменных $X_t(\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. Эта точка зрения в ряде случаев оказывается весьма плодотворной. При этом нередко требуется, чтобы функция $X_t(\omega)$ была измеримой. Далеко не каждый случайный процесс обладает этим свойством. Класс случайных процессов, обладающих этим свойством, выделяется следующим определением: случайный процесс X_T называется *измеримым,* если

$$\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{F}, \ \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{M}), \tag{10}$$

где $\mathcal{B}(T)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств множества T. В некоторых случаях случайный процесс X_T можно изметить таким образом, что измененный случайный процесс будет измеримым и его конечномерные распределения совпадают с конечномерными распределениями X_T. Эту проблему мы обсудим в параграфе 2.7.

2.1.7. Вещественные случайные процессы. В большей части этой изучаются случайные процессы со значениями в вещественной прямой. Мы будем называть их *вещественными* случайными процессами. Конечномерное распределение (2.1.1) вещественного случайного процесса однозначно определяется характеристической функцией

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k}\right\}, \ \ u_1,\dots,u_n \in R^1, \ \ i=\sqrt{-1}, \tag{11}$$

случайного вектора $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$. Эта функция также называется совместной характеристической функцией случайных величин $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$. Таким образом описание вещественного случайного процесса можно дать либо в терминах конечномерных распрелений (2.1.1), либо в терминах характеристических функций (2.1.10). В частности, равенства (2.1.2) и (2.1.3) равносильны соответственно равенствам

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = f_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(u_{\pi(1)},\dots,u_{\pi(n)}), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &f_{t_1,\dots,t_{r-1},t_r,t_{r+1},\dots,t_n}(u_1,\dots,u_{r-1},0,u_{r+1},\dots,t_n) \\ &\qquad\qquad\qquad = f_{t_1,\dots,t_{r-1},t_{r+1},\dots,t_n}(u_1,\dots,u_{r-1},u_{r+1},\dots,u_n) \end{aligned} \tag{13}$$

для любых вещественных чисел $u_1,\dots,u_n$.

Разумеется, специальные классы случайных процессов могут быть охарактеризованы в других терминах, которые более полно отражают специальные свойства этих случайных процессов.