гауссовские случайные процессы

2.4.1. Ковариациооная функция случайного процесса. Назовем вещественный случайный прцесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$ *квадратично интегрируемым,* если $E|X_t|^2 < \infty$ для любого $t \in T$. Функция

$$D_{X_T}(s,t) = E\left[(X_s - EX_s)(X_t - EX_t)\right], \quad s,t \in T, \tag{1}$$

называется *ковариационной функцией* вещественного квадратично интегрируемоно случайного процесса X_T. Примером вещественного квадратично интегрируемого случайного процесса может служить процесс броуновского движения $W_T = \{W_t, t \in T\}$, где T - конечный сегмент $[a,b] \subset R^1$, или полупрямая $[a,\infty) \subset R^1$. Его ковариационная функция имеем следующий вид

$$D_{W_T}(s,t) = \min\{s-a, t-a\}, \quad s,t \in T. \tag{2}$$

Действительно, если $s < t$, то $E[W_s W_t] = E[W_s(W_t - W_s)] + E(W_s - W_a)^2 = s - a$, так как $W_a = 0$ почти всюду, $EW_t = 0$ для любого $t \in T$ и случайные величины W_s и $W_t - W_s$ независимы. Отметим, что, каковы бы ни были $t_1 < \cdots < t_n$ из T, характеристическую функцию случайного вектора $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ можно записать в следующем виде

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} u_k D_{W_T}(t_k,t_m) u_m\right\}, \quad u_1,\ldots,u_n \in R^1. \tag{3}$$

Мы видим, что процесс броуновского движения можно описать в терминах его ковариационной функции.

Отметим два свойства ковариационной фунеции (2.4.1). Она *симметрична.* Другими словами, $D_{X_T}(s,t) = D_{X_T}(t,s)$ для любых s и t из T. Второе свойство состоит в том, что она *положительно определена,* т.е. выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} z_k D_{X_T}(t_k,t_m)\overline{z}_m \geq 0, \tag{4}$$

для любых $t_1,\ldots,t_n$ и T и любых комплексных чисел $z_1,\ldots,z_n$. Черта над комплексным числом $z = \alpha + i\beta$ означет переход к его сопряжонному числу $\overline{z} = \alpha - i\beta$. Чтобы убедиться в справедливости неравенства (2.4.3), достаточно заметить, что его левую часть можно записать в следующем виде

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} z_k(X_{t_k} - Ex_{t_k})\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k(X_{t_k} - Ex_{t_k})}\right],$$

что представляет собой неотрицательное число.

Для любого набора $t_1, \ldots, t_n$ из T ковариационная функция (2.4.1) порождает симметрицную матрицу

$$D_{X_T}(t_1, \ldots, t_n) = (D_{X_T}(t_k, t_m)), \quad k, m = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Она называется *ковариационной матрицей* случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$. На семейство ковариационных матриц можно смотреть как на некоторую характеристику квадратично интегрируемого случайного процесса.

Ковариационная матрица (2.4.4) может оказаться вырожденной. Пусть ее ранг равен $m < n$. В этом случае можно выбрать m линейно независмых столбцов матрицы (2.4.4) такие, что любой из оставшихся столбцов можно записать в виде линейной комбинации этих выбранных столбцов с вещественными коъффициентами. Предположит, что этим свойством облажаю первые m столбцов матрицы (2.4.4). В этом случай для любого $m < l \le n$ найдутся вещественные числа $\gamma_{1,l}, \ldots, \gamma_{m,l}$ такие, что

$$D_{X_T}(t_k, t_l) = \sum_{r=1}^{m} \gamma_{r,l} D_{X_T}(t_k, t_r), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Перепищем это равенство в следующем виде

$$E\left[(X_{t_k} - EX_{t_k})\left((X_{t_l} - EX_{t_l}) - \sum_{r=1}^{m} \gamma_{r,l}(X_{t_r} - EX_{t_r})\right)\right] = 0.$$

Умножим последнее равенство на $\gamma_{k,l}$ для $k = 1, \ldots, m$ и полученные равенства сложим. В результате мы получим

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_{k,l}(X_{t_k} - EX_{t_k})\right)\left((X_{t_l} - EX_{t_l}) - \sum_{r=1}^{m} \gamma_{r,l}(X_{t_r} - EX_{t_r})\right)\right] = 0.$$

Вычтем это равенство из предыдущего равенства при $k = l$. Эта операция приведет нас к равенству

$$E\left|(X_{t_l} - E_{t_l}) - \sum_{r=1}^{n} \gamma_{r,l}(X_{t_r} - EX_{t_r})\right|^2 = 0.$$

Отсюда слежует, что каждая из случайных величин $X_{t_l} - EX_{t_l}$, $l = m+1 \ldots, n$, является линейной комбинацией случайных величин $X_{t_k} - EX_{t_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому вычисление распределения случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ сводится к вычислению распределения вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$. Это замечание позволяет ограничиться изучением только невырожденных ковариационных матриц при описании квадратично интегрируемых случайных процессов.

2.4.2. Многомерное нормальное распределение. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (x_k - a_k) b_{k,m} (x_m - a_m), \quad x_1, \ldots, x_n \in R^1, \tag{6}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ - фиксированные вещественные числа, $B = (b_{k,m})$ - симметричная невырожденная положительно определенная вещественная $n \times n$-матрица.

Невырожденность матрицы B означает, что ее определитель $|B$ отличен от нуля. Нетрудно убедиться, что определитель невырожденной положительно определенной матрицы является положительным числом. В курсах по линейной алгебре доказывается, что существует невырожденная вещественная $n \times n$-матрица $C = (c_{k,m})$ такая, что $C'BC = E$, где C' - матрица, транспонированная к матрице C, а $E = (e_{k,m})$ - единичная $n \times n$-матрица, другии словами, $e_{k,k} = 1$ и $e_{k,m} = 0$, если $k \neq m$.

Существование упомянутой матрицы C позволяет привести квадратичную форму (2.4.5) к так называемому *диагональному виду.* Чтобы описать этот диагональный вид, условимся смотреть на точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вещественного евклидова пространства R^n как на вектор-столбец. Операция транспонирования этого вектор-столбца приводит к вектор-строке x'. Преобразуем вектор столбец $x - a$ в вектор-столбец $y = C^{-1}(x - a)$, где a -вектор-столбец, составленный из чисел $a_1, \ldots, a_n$, участвующих в образовании квадратичной формы (2.4.5), и C^{-1} - матрица, обратная к матрице C. Квадратичную форму (2.4.5) можно записать в следующем виде $Q(x_1, \ldots, x_n)(x - a)'B(x - a)$. Подстановка $x - a = Cy$ преобразует ее к упомянутому диагональному виду

$$(Cy)'B(Cy) = y'C'BCy = y'Ey' = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Возможность привести квадратичную форму (2.4.5) к диагональному виду позволяет вычислить интеграл

$$\begin{aligned}\int_{-\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(x_1, \ldots, x_n)\right\} dx_1 \cdots dx_n \\ = \int_{-\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{y_k^2}\right\} \Big||C|\Big| dy_1 \cdots dy_n \\ \Big||C|\Big| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt\right)^n = \Big||C|\Big| (2\pi)^{n/2}.\end{aligned}$$

Модуль определителя $|C|$ равен $1/\sqrt{|B|}$, так как $C'BC| = |C'||B||C| = 1$. Мера

$$P_Q\{A\} = \int \underset{A}{\cdots} \int \exp\left\{-\frac{!}{2}Q(x_1, \ldots, x_n\right\} dx_1 \cdots dx_n, \quad A \in \mathcal{B}^n, \tag{7}$$

называется *невырожденным n-мерным нормальным распределением.*

Упомянутое преобразование переменных $x - a = Cy$ позволяет вычислить интегралы

$$\int \underset{R^n}{\cdots} \int x_k \, dP_Q = a_k, \quad \int \underset{R^n}{\cdots} \int (x - a_k)(x - am) \, dP_Q = \frac{B_{k,m}}{|B|}, \tag{8}$$

где $B_{k,m}$ - алгебраическое дополнение элемента $b_{k,m}$ матрицы B. Вычислим, например, второй из интегралов. Мы имеем

$$\int \cdots \int_{R^n} (x_k - a_k)(x_m - a_m)\, dP_Q$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} c_{k,r} y_r \right) \left(\sum_{l=1}^{n} c_{m,l} y_l \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right\} dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{c_{k,r} c_{m,l}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (y_r^2 + y_l^2) \right\} dy_r dy_l$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{c_{k,r} c_{m,r}}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} y_r^2 \right\} dy_r \right)^2 = \sum_{r=1}^{n} c_{k,r} c_{m,r} = \frac{B_{k,m}}{|B|}.$$

Последнее равенство следует из определения обратной матрицы и соотношения $B^{-1} = CC'$, так как $C'BC = E$.

Вычислим характеристическую функцию меры (2.4.6)

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \int \cdots \int_{R^n} \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\} dP_Q, \;\; u_1, \ldots, u_n \in R^1.$$

Применение преобразования переменных $x - a = Cy$ приводит к цели

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k a_k \right\} \prod_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ y_r \sum_{k=1}^{n} u_k c_{k,r} - \frac{1}{2} y_r^2 \right\} dy_r$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k a_k \right\} \prod_{r=1}^{n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k c_{k,r} \right)^2 \right\}$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k a_k - \frac{1}{2|B|} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} u_k B_{k,m} u_m \right\}. \quad (9)$$

На последнем этапе мы воспользовались соотношениями

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k c_{k,r} \right)^2 = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k c_{k,r} \right) \left(\sum_{m=1}^{n} u_m c_{m,r} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \left(u_r u_m \sum_{r=1}^{n} c_{k,r} c_{m,r} \right) = \frac{1}{|B|} \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} u_r B_{k,m} u_m.$$

Назовем случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ называется невырожденным n-мерным *нормальным вектором,* если его распределение является невырожденное нормальное распределение (2.4.6). Формулы (2.4.7) приводят к равенствам

$$EX_k = a_k, \;\; E\left[(X_k - EX_k)(X_m - EX_m) \right] = \frac{B_{k,m}}{|B|}, \;\; k, m = 1, \ldots, n. \quad (10)$$

Мы видим, что ковариационная матрица невырожденного нормального вектора является обратной к матрице B. Это наблюдение приводит к заключению, что распределение невырожденного нормального вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ полностьб определяется вектором математических ожиданий его компонет и его ковариационной матрицей.

Определение невырожденного n-мерного вектора можно перефразировать в терминах его характеристической функции. Именно, случайный вектор $(X_1, \dots, X_n)$ называется невырожденным n-мерным нормальным вектором, если его характеристическая функция может быть записана в следующем виде

$$f(u_1, \dots, u_n) = E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k X_k \right\} = \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k E X_k \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} u_k E\left[(X_k - EX_k)(X_m - EX_m)\right] u_m \right\}, \;\; u_1, \dots, u_n \in R^1. \quad (11)$$

Это определение допускает обобщение, а именно: случайный вектор $(X_1, \dots, X_n)$ называется *нормальным,* если его характеристическая функция имеет вид (2.4.10). Если ковариационная матрица нормального вектора вырождена, тое его распределение не может быть невырожденным n-мерным нормальным распределением. Пусть ранг ковариационной мартицы равен $m < n$. В этом случае, как мы видели в пункте 2.4.1, найдутся m комнонет $X_{k_1}, \dots, X_{k_m}$ случайного вектора $(X_1, \dots, X_n)$ такие, что для любого $l \neq k_1, \dots, k_m$ случайная величина $X_l - EX_l$ является линейной комбинацией случайных величин $X_{k_r} - EX_{k_r}$, $r = 1, \dots, m$, с вещественными коэффициентами. Другими словами, распределение случайного вектора $(X_1, \dots, X_n)$ определяется распределением невырожденного m-мерного вектора $(X_{k_1}, \dots, X_{k_m})$.

Отметим одно свойство нормальных случайных векторов, которое иногда принимают за определение. Для того чтобы случайный вектор $(X_1, \dots, X_n)$ был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы линейная космбинация его компонент $X = U - 1X_1 + \dots + u_n X_n$ была нормальной (быть может вырожденной) случайной величиной, каковывы бы ни были вещественные числа $u_1, \dots, u_n$. Действительно, если случайный вектор $(X_1, \dots, X_n)$ является нормальным, то из вида его характеристической функции (2.4.10) следует, что случайная величина X нормальна (быть может вырожденной). Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение (быть может вырожденным). Ее характеристическая функция имеет вид

$$\exp\left\{ iuEX - \frac{u^2}{2} E(X - EX)^2 \right\}, \;\; u \in R^1.$$

Заметим, что при $u = 1$ она совпадает с (2.4.10). Так как это справеливо для любых вещественных чисел $u_1, \dots, u_n$, то случайный вектор $(X_1, \dots, X_n)$ является нормальным.

2.4.3. Процесс броуновского движения как функция самого себя. Пусть $W_T = \{W_t = W(t), t \in T = [0, \infty)\}$ - процесс броуновского движения. Определим новый случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$, проложив $X_0 = 0$, $X_t = tW_{1/t}$, $t > 0$. Докажем, что X_X - процесс броуновского движения. Достаточно доказать, что для любого набора $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ характеристическая функция случайного вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ имеет следующий вид (2.3.13). В силу равенств

$$\sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} = \sum_{k=1} ukt_k W(1/t_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{r=1}^{k} u_k t_k \right) [W(1/t-k) - W(1/t_{k+1})] + \left(\sum_{k=1}^{n} u_k t_k \right) W(1/t_n) \quad (12)$$

и свойств процесса броуновского движения мы имеем

$$f_{t_1,\dots,t_n)(u_1,\dots,u_n} = E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} \right\}$$
$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{n} u_r t_r \right)^2 t_n^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{r=1}^{k} u_r t_r \right)^2 (t_k^{-1} - t_{k+1}^{-1}) \right\}, \ \ u_1, \dots, u_n \in R^1.$$

С помощью несложных преобразований эту функцию можно привести к виду (2.3.13).

Можно поступить иначе. Ковариационная функция процесса X_T имеет вид $D_{X_T}(s,t) = \min\{s,t\}$ Действительно, если $s > 0$ и $t > o$, то

$$D_{X_T}(s,t) = E\left[sW(1/s)tW(1/t)\right] = st\min\{1/s, 1/t\} = \min\{s,t\}, \ \ s,t \in T.$$

Из (2.4.11) следует, что случайный вектор $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ имеет нормальное распределение, так как $(W(1/t_n), \dots, W(1/t_1))$ - нормальный вектор. характеристическая функция случайного вектора $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ мжет быть записана в сиде (2.4.3).

2.4.4. Процесс броуновского движения со сносом. Пусть T обозначет сегмент $[a,b] \subset R^1$, или полупрямую $[a, \infty) \subset R^1$. Случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$ называется процессом броуновского движения *со сносом* μ и *коэффициентом диффузии* σ^2, $\sigma > 0$, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. $P\{X_a = 0\} = 1$;

2. для любых $t_1 < \dots < t_n$ из T случайные величины $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, \dots, n-1$, независимы;

3. для любых s и $s+t$ из T, $t > 0$, случайная величина $X_{s+t} - X_s$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μt и дисперсией $\sigma^2 t$.

Из этого определения следует, что процесс броуновского движения является процессом броуновского движения с нулевым сносом и единичным коэффициентом диффузии. Кроме того, случайный процесс $Y_T = \{Y_t, t \in T\}$, $Y_t = (X_t - \mu t)/\sigma$, является процессом броуновского движения. Это наблюдение позволяет вычислить конечномерные распределения процесса X_T. Мы ограничимся тем, что вычислим характеристичекую функцию случайного вектора $(X_{t_1}, \dots X_{t_n})$, для любых $a = t_0 < t_1 < \dots < x_{t_n}$. В силу (2.3.13) мы имеем

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} \right\}$$
$$= \exp \left\{ i\mu \sum_{k=1}^{n} u_k t_k - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r \right)^2 (t_{k+1} - t_k) \right\}, \ \ u_1, u_1, \dots, u_n \in R^1.$$

Несложные преобразования приводят к выражению

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} u_k EX_{t_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} u_k E\left[(X_{t_k} - EX_{t_k})(X_{t_m} - EX_{t_m})\right] u_m\right\}.$$

К этому выражению для характеристической функции случайного вектора $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ можно прийти иначе. Именно, из равенства $X_t = \sigma Y_t + \mu t$ и того факта, что процесс броуновского движения является гауссовским процессом, следует, что X_T - гауссовский процесс. Отсюда следует, что характеристическаяфункция случайног вектора $(X_{t-1},\dots,X_{t_n})$ имеет указанный вид.

2.4.5. Броуновский мост. Пусть $W_T = \{W_t, t \in T = [0,1]\}$ - процесс броуновского движения. Случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$, $X_t = W_t - tW_1$, называется *броуновским мостом.* Вычислим характеристическую функцию случайного вектора $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ для любых $t_1 < \dots < t_n$ из T. Достаточно рассмотреть случай $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$, так как X_0 и X_1 равны нулю с вероятностью единица. Пусть $u_1,\dots,u_n$ - произвольные вещественные числа. Обозначим

$$u = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r\right)(t_{k+1} - t_k).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) &= E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k}\right\} = E\exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r\right)\left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right]\right\} \\ &= E\exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r - u\right)\left[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right] - u\left[W_{t_{n+1}} - W_{t_n}\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2(1-t_n)\right\}\prod_{k=0}^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r - u\right)^2 (t_{k+1} - t_k)\right\}. \end{aligned}$$

Из определения броуновского моста следует, что он является гауссовским процессом. Это приводит к новой записи характеристической случайного вектора $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} u_k E\left[X_{t_k}X_{t_m}\right]\right\}.$$

Мы могли бы определить броуновский мост как гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$D_{X_T}(s,t) = E\left[X_s X_t\right] = E\left[(W_s - sW_1)(W_t - tW_1)\right] = \min\{s,t\} - st,\ \ s,t \in T.$$

2.4.6. Многомерный процесс броуновского движения. Пусть T обозначает сегмент $[a,b] \subset R^1$ или полупрямую $[a,\infty) \subset R^1$. Случайный процесс $W_T = \{W_t^1,\dots,W_t^m, t \in T\}$ со значениями в m-мерном евклидовам пространстве R^m называется *многомерным (более точно, m-мерным) процессом броуновского движения,* если

1. $P\{W_a = 0\} = 1$;

2. для любых $t_1 < \cdots < t_n$ и T случайные векторы

$$W_{t_{k+1}} - W_{t_k} = (W_{t_{k+1}}^{(1)} - W_{t_k}^{(1)}, \ldots, (W_{t_{k+1}}^{(m)} - W_{t_k}^{(m)}), \;\; k = 1, \ldots, n-1,$$

независимы;

3. для любых s и $s+t$ из T, $t > 0$, случайный вектор

$$W_{t+s} - W_s = (W_{t+s}^{(1)} - W_s^{(1)}, \ldots, W_{t+s}^{(m)} - W_s^{(m)})$$

имеет нормальное распределеное