Пуассоновский процесс

В этом параграфе обсуждается специальный пример вещественного случайного процесса. Мы дадим его определение, а затем приведем два доказательства его существования. Первое из этих доказательств имеет конструктивный характер, а второе доказательство основано на применении теоремы 2.1.2. В дальнейшем мы убедимся, что этот случайный процесс является представителем ряда важных классов случайных процессов. Мы будем считать, что все рассматриваемые далее случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Законность такого предположения оправдывается в замечании 2.2.6.

2.2.1. Определение. Пусть T обозначает сегмент $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ или полупрямую $[a, \infty) \subset \mathbb{R}^1$. Вещественный случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$ называется *пуассоновским процессом* с параметром λ (λ - фиксированное положительное число), если он удовлетворяет следующим условиям:
1. $P\{X_a = 0\} = 1$,
2. для любого натурального числа n и любого набора чисел $t_1 < \cdots < t_n$ чисел из T случайные величины $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, независимы,
3. для любых s и $t > 0$ таких, что $s, s+t \in T$ разность $X_{t+s} - X_s$ имеет пуассоновское распределение с параметром λt, т. е.

$$P\{X_{t+s} - X_s = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Сначала мы дадим конструктивное доказательство существования пуассоновского процесса, парамеметрическим множеством которого является сегмент.

2.2.2. Теорема. *Любойо сегмент $T = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ является параметрическим множеством некоторого пуассоновского процесса.*

Доказательство. Пусть $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - независимые случайные величины, где N имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda(b-a)$, а каждая из случайных величин $X_n, n = 1, 2, \ldots$, имеет равномерное распределение на сегменте $[a, b]$. Обозначим индикаторную функцию I_t отрезка $[a, t]$. Докажем, что семейство случайных сумм

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N} I_t(X_n), \quad t \in T = [a, b], \tag{1}$$

является пуассоновским процессом. С этой целью вычислим совместную характеристическую функцию случайных величин $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\phi(u_1, \ldots, u_{n-1}) = E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \right] \right\}, \;\; u_1, \ldots, u_{n-1} \in R^1,$$

Будет доказано, что она имеет следующий вид

$$\phi(u_1,\dots,u_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left\{\lambda(t_{k+1}-t_k)(e^{\iota u_k}-1)\right\}. \tag{2}$$

Предположим, что (2.2.2) доказано. Положив $u_k = 0$, $k \neq r$, мы получим

$$E\exp\left\{iu_r\left[X_{t_{r+1}} - X_{t_r}\right]\right\} = \exp\left\{\lambda(t_{r+1}-t_r)(e^{\iota u_r}-1)\right\}. \tag{3}$$

Из (2.2.2) и (2.2.3) следует, что совместная характеристическая функция случайных величин $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, может быть записана в виде произведения характеристических функций этих случайных величин, что по известному критерию влечет их независимость. Третье условие из определения 2.2.1 следует из (2.2.2), если положить $n = 2, t_1 = s, t_2 = t+s$. Очевидно, что первое условие из определения 1 также выполняется.

Докажем (2.2.2). Предположим сначала, что $t_1 = a$ и $t_n = b$. Позже мы освободимся от этого ограничения. Привлекая формулу полной вероятности, мы получим

$$\begin{aligned}
\phi(u_1,\dots,u_{n-1}) &= E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n-1} u_k \sum_{m=1}^{N}\left[I_{t_{k+1}}(X_m) - I_{t_k}(X_m)\right]\right\} \\
&= E\exp\left\{i\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} u_k\left[I_{t_{k+1}}(X_m) - I_{t_k}(X_m)\right]\right\} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} P\{N=p\}\, E\exp\left\{i\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=1}^{n-1} u_k\left[I_{t_{k+1}}(X_m) - I_{t_k}(X_m)\right]\right\} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} P\{N=p\}\left(E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n-1} u_k\left[I_{t_{k+1}}(X_m) - I_{t_k}(X_m)\right]\right\}\right)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} P\{N=p\}\,(b-a)^{-p}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)e^{iu_k}\right)^p \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}e^{-\lambda(b-a)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)e^{iu_k}\right)^p \\
&= \exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)e^{\iota u_k} - \lambda(b-a)\right\} \\
&= \exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)e^{\iota u_k} - \lambda\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)(e^{\iota u_k}-1)\right\} = \prod_{k=1}^{n-1}\exp\left\{\lambda(t_{k+1}-t_k)(e^{\iota u_k}-1)\right\}.$$

Освободимся теперь от предположения, что $t_1 = a$ и $t_n = b$. Рассмотрим, например, случай $a < t_1 < t_n < b$. Два других возможных случая рассматриваются аналогично.

Добавим к числам t_k, $k = 1, \ldots, n$, еще два числа $t_0 = a$ и $t_{n+1} = b$. По доказанному выше выполняется равенство

$$E \exp \left\{ i \sum_{k=0}^{n} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \right] \right\} = \prod_{k=0}^{n} \exp \left\{ \lambda (t_{k+1} - t_k)(e^{\iota u_k} - 1) \right\}$$

для любых вещественных чисел u_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Положив этом равенстве $u_0 = u_n = 0$, мы получим (2.2.2) в общем случае. #

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы построить пуассоновский процесс, параметрическим множеством которого служит полупрямая.

2.2.3. Теорема. *Любая полупрямая $T = [a, \infty) \subset \mathbb{R}^1$ является парамеметрическим множеством некоторого пуассоновского процесса.*

Доказательство. Мы построим требуемый пуассоновский процесс с помощью описываемой ниже процедуры "склеивания"независимых случайных процессов. С этой целью мы построим последовательность независимых пуассоновских процессов $X_{T_n} = \{X_{n,t}, t \in T_n = [a+n-1, a+n]\}, n = 1, 2, \ldots,$ с общим параметром λ. "Склеим"эти случайные процессы, т. е. определим случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$ по следующему правилу:

$$X_t = X_{1,t}, \;\; t \in [a, a+1],$$

$$X_t = X_{n-1, a+n-1} + X_{n,t}, \;\; t \in [a+n-1, a+n], \;\; n = 2, 3, \ldots$$

Ясно, что $X_a = 0$ с вероятностью единица. Чтобы убедиться, что этот случайный процесс удовлетворяет двум другим условиям из определения 2.2.1, достаточно доказать равенство (2.2.2). В этом можно убедиться с помощью несложных, но громоздких вычислений. Мы поступим несколько иначе, а именно, мы проведем операцию "склеивания" последовательно. Сначала мы склеим случайные процессы X_{T_1} и X_{T_2}. Затем полученный процесс мы "склеим" с X_{T_3}. Неограниченно продолжая этот процесс последовательного "склеивания", мы придем к пуассоновскому процессу X_T, определенному на полупрямой $T = [a, \infty)$.

Таким образом задача построения пуассоновского процесса на полупрямой сводится к доказательству того, что случайный процесс X_T, $T = [a, c]$, "склеенный" из независимых пуассоновских процессов X_{T_1}, $T_1 = [a, b]$, и X_{T_2}, $T_2 = [b, c]$, с общим параметром λ является пуассоновским процессом с параметром λ. Докажем это.

Разобьем данные числа $a \leq t_1 \cdots < t_n \leq c$, на две части $a \leq t_1 < \cdots < t_m \leq b$ и $b < t_{m+1} < \cdots t_n \leq c$. Вычислим совместную характеристическую функцию случайных величин $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, \ldots, n-1$,

$$\phi(u_1, \ldots, u_{n-1}) = E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \right] \right\}, \;\; u_1, \ldots, u_{n-1} \in R^1.$$

Преобразуем множитель при мнимой единице в показателе экспоненты следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right] + u_m \left[X_{m+1} - X_{t_m}\right] + \sum_{k=m+1}^{n-1} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} u_k \left[(X_{1,t_{k+1}} - X_{1,t_k}\right] + u_m \left[X_{1,b} - X_{1,t_m}\right] \\
&+ u_m \left[X_{2,t_{m+1}} - X_{2,b}\right] + \sum_{k=m+1}^{n-1} u_k \left[X_{2,t_{k+1}} - X_{2,t_k}\right].
\end{aligned}
$$

Отсюда и в силу независимости случайных процессов X_{T_1}, и X_{T_2}, следует равенство (2.2.2), откуда, в свою очередь, вытекает, что "склеенный" случайный процесс X_T, является пуассоновским процессом. #

2.2.4. Второе доказательство существования пуассоновского процесса. Пусть T по-прежнему обозначает сегмент $[a, b]$ или полупрямау $[a, \infty)$. Предположим, что пуассоновский процесс существует. Отправляясь от определения 2.1.1, мы снова придем к равенству (2.2.2), которое позволяет вычислить характеристичекую функцию случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ для любых $t_1 < \cdots < t_n$ из T. Достаточно рассмотреть случай $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, так как $X_a = 0$ с вероятностью единица. Для любых вещественных чисел $u_1, \ldots, u_n$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1, \ldots, u_n) &= E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} \right\} \\
&= E \exp\left\{ i \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r \right) \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right] \right\} \\
&= \exp\left\{ \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \left(\exp\left(i \sum_{r=k+1}^{n} u_r \right) - 1 \right) \right\}. \quad (4)
\end{aligned}
$$

Таким образом, если пуассоновский процесс существует, то нам известно как выглядит характеристическая функция случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ для любого набора $t_1 \cdots < t_n$ из T. Теперь можно рассуждать следующим образом. Пусть π - произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$. Положим по определению

$$
f_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(n)}) = f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1, \ldots, u_n).
$$

Тем самым мы располагаем семейством характеристических функций, которое удовлетворяет условию (2.1.11). Из (2.2.4) следует равенство (2.1.12). По теореме 2.1.2 существует вещественный случайный процесс X_T, который удовлетворяет условиям из определения 2.1.1.

2.2.5. Конечномерные распределения. Рассмотрим, например, пуассоновский процесс $X_T = \{X_t, t \in T = [a, \infty)$. Для любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ и любого $A \in \mathcal{B}^n(\mathbb{R}^1)$

выполняется равенство

$$P\left\{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in A\right\}=\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A}P\left\{X_{t_1}=k_1,\dots,X_{t_n}=k_n\right\}$$

где $k_1,\dots,k_n$ - целые неотрицательные числа. Так как

$$P\left\{X_{t_1}=k_1,\dots,X_{t_n}=k_n\right\}=P\left\{X_{t_{\pi(1)}}=k_{\pi(1)},\dots,X_{t_{\pi(n)}}=k_{\pi(n)}\right\}$$

для любой перестановки π чисел $1,\dots,n$, то можно считать, что $a\le t_1<\dots,t_n$. Достаточно рассмотреть случай $a=t_0<t_1<\dots<t_n$, так как $X_a=0$ с вероятностью единица. В силу равенства

$$\begin{aligned}P\left\{X_{t_1}=k_1,\dots,X_{t_n}=k_n\right\}&\\&=P\left\{X_{t_1}=k_1,X_{t_2}-X_{t_1}=k_2-k_1,\dots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=k_n-k_{n-1}\right\}\end{aligned}$$

мы имеем

$$P\left\{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in A\right\}=\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in A}\prod_{r=0}^{n-1}\frac{[\lambda(t_{r+1}-t_r)]^{k_{r+1}-k_r}}{(k_{r+1}-k_r)!}e^{-\lambda(t_{r+1}-t_r)},$$

где суммирование распространяется на все $0=k_0\le k_1\le\dots\le k_n$. Разумеется, это выражение для конечномерного распределения можно вывести из вида соответствующей характеристичекой функции (2.2.4).

2.2.6. Замечание. В начале параграфа было заявлено, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$. В частности, доказательство существования пуассоновского процесса основано на молчаливом предположении, что существуют независимые случайные величины $N,X_1,X_2,\dots$, определенные на этом вероятностном пространстве и имеющие предписанные распределения. Однако не на каждом вероятностном пространстве можно определить такие случайные величины. С другой стороны, по следствию 2.1.3 можно построить вероятностное пространство $(\mathbb{M}^\infty,\mathcal{B}^\infty(\mathbb{M}),P^\infty)$, $\mathbb{M}=\mathbb{R}^1$, и последовательность независимых случайных величин с данными распределениями. Следовательно, наше соглашение оправдано, если под $(\Omega,\mathcal{F},P)$ понитать подходящее вероятностное пространство.

В заключение заметим, что P-почти все траектории пуассоновского процесса (2.2.1) являются возрастающими ступенчатыми функциями.