# Сепарабельные случайные процессы

Случайный процесс был определен как семейство $X_T = \{X(t), t \in T\}$ случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{M}$, где $T$ – некоторое подмножество вещественной прямой, называемое параметрическим множеством. Случайный процесс можно рассматривать как отображение

$$X_T : \Omega \longrightarrow \mathbb{M}^T, \quad X_T(\omega) = X(t,\omega), t \in T,$$

пространства элементарных событий в пространство функций, определенных на множестве $T$ со значениями в $\mathbb{M}$. Это отображение может оказаться неизмеримым и, следовательно, типичная задача о вычислении вероятности того, что $X_T$ примет значения из некоторого множества $A \in \mathcal{A}(\mathbb{M}^T)$, становится бессодержательной, так как множество $\{\omega : X_T(\omega) \in A\}$ не обязательно принадлежит $\mathcal{A}$.

**Пример.** *Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ – борелевская $\sigma$–алгебра подмножеств сегмента $[0,1]$, $P$ – мера Лебега на $\mathcal{A}$. Известно, что существует бесконечное число неизмеримых подмножеств сегмента $[0,1]$. Пусть $B$ – одно из них. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ определим случайный процесс $X_T = \{X(t), t \in T = [0,1]\}$, положив $X(t,\omega) = 1$, если $t = \omega$, и $X(t,\omega) = 0$ в остальных точках $(t,\omega) \in T \times \Omega$. Множество $\{\omega : \max_{t\in T} X(t) = 1\} = B$ не принадлежит $\mathcal{A}$.*

В рассмотренном примере каждая случайная величина $X(t)$ равна нулю с вероятностью единица, откуда следует, что конечномерные распределения случайного процесса $X_T$ совпадают с соответствующими конечномерными распределениями случайного процесса $Y_T = \{Y(t), t \in T\}$, $Y(t) \equiv 0$. При этом случайный процесс $Y_T$, рассматриваемый как отображение $\Omega$ в $\mathbb{M}^T$, оказывается $\Big(\mathcal{A} - \mathcal{A}(M^T)\Big)$–измеримым.

Этот пример приводит к идее, состоящей в том, чтобы произвольный случайный процесс $X_T = \{X(t), t \in T\}$ заменить на другой случайный процесс $\{Y(t), t \in T\}$, который наследовал бы все основные свойства случайного процесса $X_T$ и, кроме того, отображение $Y_T : \Omega \longrightarrow M^T$ было бы $\Big(\mathcal{A} - \mathcal{A}(\mathbb{M}^T)\Big)$–измеримым. Такой случайный процесс $Y_T$ можно построить во многих случаях, в частности, когда метрическое пространство $\mathbb{M}$ компактно. В более общем случае, когда $\mathbb{M}$ – локально компактное метрическое пространство, желаемый случайный процесс $Y_T$ также можно построить, но при этом его область значений оказывается другим метрическим пространством $\widetilde{\mathbb{M}}$, являющимся некоторым компактным расширением метрического метрического пространства $\mathbb{M}$.

Для любых $\omega \in \Omega$ и $T_0 \subset T$ обозначим $\overline{X(T_0,\omega)}$ замыкание множества $X(T_0,\omega) = \{X(t,\omega) : t \in T_0\}$ точек метрического пространства $\mathbb{M}$. Множество $J = (a,b) \cap T$ называется относительным интервалом в $T$, а величины $a$ и $b$ называются его концами.

Оба конца относительного интервала или один из них могут принимать бесконечные значения.

Случайный процесс $X_T = \{X(t), t \in T\}$ со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{M}$ называется *сепарабельным*, если существуют конечное или счетное множество $S, S \subset T$, и событие $N, P(N) = 0$, такие, что

$$X(u,\omega) \in \bigcap_{J:u\in J} \overline{X(J\cap S,\omega)} \tag{1}$$

для любых $u \in T$ и $\omega \notin N$, где пересечение осуществляется по всем относительным интервалам $J$, содержащим $u$.

Множество $S$, о котором говорится в определении сепарабельного случайного процесса, называется *сепарантой* или, более подробно, *сепарантой случайного процесса* $X_T$. Если $S$ – сепаранта случайного процесса $X_T$, то любое более широкое счетное множество $S_0, S \subset S_0$, очевидно, также является сепарантой этого же случайного процесса. Случайный процесс может оказаться несепарабельным только в том случае, когда параметрическое множество $T$ несчетно, так как в противном случае (1) выполняется, например, с $S = T$. По этой причине, при обсуждении вопроса о сепарабельности случайного процесса $X_T$, мы будем предполагать, что параметрическое множеств $T$ несчетно.

**Теорема 1.** *Для того чтобы случайный процесс $X_T = \{X(t), t \in T\}$ со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{M}$ был сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы существовали счетное множество $S, S \subset T$, и событие $N, P(N) = 0$, такие, что выполняется одно из следующих двух условий:*

$$\bigcap_{t\in J\cap S} \{X(t) \in K\} \subset \bigcap_{t\in J} \{X(t) \in K\} \cup N \tag{2}$$

*или*

$$\bigcap_{t\in J\cap S} \{X(t) \in K\} \subset \{X(u) \in K\} \cup N, \quad u \in J, \tag{3}$$

*где $K$ – любое замкнутое подмножество метрического пространства $\mathbb{M}$ и $J$ – любой относительный интервал в $T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать справедливость следующей цепочки импликаций (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1). Предположим, что выполнено (1) и элементарное событие $\omega$ принадлежит множеству $\cap_{t\in J\cap S}\{X(t) \in K\}$, но не принадлежит множеству $N$. Так как множество $K$ замкнуто и $X(t,\omega) \in K$ для каждого $t \in J \cap S$, то множество $X(J\mathcal{S},\omega)$ и его замыкание $\overline{X(J\mathcal{S},\omega)}$ лежат в $K$. Доказательство импликации (1) $\Longrightarrow$ (2) завершено. Справедливость импликации (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидна. Предположим теперь, что выполняется (3). Пусть $u \in J$ и $\omega \notin N$. По предположению (3) выполняется для любого замкнутого множества $K$ и, следовательно, для $K = \overline{X(J\cap S,\omega)}$. Очевидно, что $X(t,\omega) \in K$ для любого $t \in J\cap S$. В силу (3) $X(u,\omega) \in K$ и, следовательно, выполняется (1). Доказательство импликации (3) $\Longrightarrow$ (1) завершено. #

**Теорема 2.** *Для любого случайного процесса $X_T = \{X(t), t \in T\}$ со значениями в сепарабельном метрическом пространстве $\mathbb{M}$ найдутся счетное множество $S, S \subset T$,* *и семейство событий* $N^u, P\{N^u\}=0, u\in T$, *такие, что*

$$\bigcap_{t\in J\cap S}\{X(t)\in K\}\subset\{X(u)\in K\}\cup N^u \tag{4}$$

*для любого* $u\in T$, *любого относительного интервала* $J, u\in J$, *и любого замкнутого множества* $K, K\subset\mathbb{M}$.

Доказательство. Обозначим $U=U(J)$ класс счетных подмножеств относительного интервала $J$. Для любого замкнутого множества $K\subset\mathbb{M}$, найдется конечное или счетное множество $S_{J,K}\subset J$, удовлетворяющее условию

$$\inf_{V\in U}P\left\{\bigcap_{t\in V}\{X(t)\in K\}\right\}=P\left\{\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\right\}.$$

Действительно, существует последовательность множеств $V_n\in U, n=1,2,\ldots$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\bigcap_{t\in V_n}\{X(t)\in K\}\right\}=\inf_{V\in U}P\left\{\bigcap_{t\in V}\{X(t)\in K\}\right\}.$$

В качестве $S_{J,K}$ можно взять объединение множеств $V_n, n=1,2,\ldots$, так как

$$\inf_{V\in U}P\left\{\bigcap_{t\in V}\{X(t)\in K\}\right\}\le P\left\{\bigcap_{t\in\cup_{n=1}^{\infty}V_n}\{X(t)\in K\}\right\}\le P\left\{\bigcap_{t\in V_n}\{X(t)\in K\}\right\}.$$

Вероятность события

$$N^u_{J,K}=\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\cap\{X(u)\notin K\},\quad u\in J,$$

равна нулю. Это следует из следующих соотношений

$$P\left\{\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\right\}=P\left\{\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\cap\{X(u)\in K\}\right\}+P\left\{N^u_{J,K}\right\}\ge$$

$$\ge P\left\{\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\right\}+P\left\{N^u_{J,K}\right\}.$$

Следствием равенства

$$\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}=\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\cap\{X(u)\in K\}\cap N^u_{J,K}$$

является следующее соотношение

$$\bigcap_{t\in S_{J,K}}\{X(t)\in K\}\subset\{X(u)\in K\}\cap N^u_{J,K},\ \ u\in J. \tag{5}$$

Теперь все готово для построения множеств $S$ и $N$, о которых говорится в теореме. Обозначим $\mathcal{L}$ некоторое счетное множество, всюду плотное в $\mathbb{M}$, и класс $\mathcal{K}$ дополнений

$\mathbb{M} \setminus S(a,r)$ сфер $S(a,r) = \{x : \rho(a,x) < r\} \subset \mathbb{M}$ с центрами $a \in \mathcal{L}$ и радиусами $r$, длины которых выражаются рациональными числами. Обозначим $S = \cup' S_{J,K}$ и $N^u = \cup'' N^u_{J,K}$, где объединение $\cup'$ распространяется на все относительные интервалы $J$ с рациональными концами и все $K \in \mathcal{K}$, а объединение $\cup''$ распространяется на все относительные $J$ с рациональными концами, содержащими $u$, и все $K \in \mathcal{K}$. Вероятность события $N^u$ равна нулю, так как оно представляет собой объединение счетного числа событий нулевой вероятности. Множество $S$, будучи объединением счетного числа счетных множеств, счетно.

Докажем, что так построенные множества $S$ и $N^u, u \in T$, удовлетворяют условию (4). Пусть $K$ – произвольное замкнутое множество. Открытое множество $\mathbb{M} \setminus K$ можно представить в виде конечного или счетного объединения сфер $S(a,r)$ с центрами из $\mathcal{L}$ и рациональными радиусами. Поэтому $K$ можно записать в виде пересечения конечного или счетного пересечения множеств из класса $\mathcal{K}$. Пусть для определенности $K$ совпадает с пересечением $\cap_{m=1}^{\infty} K_m$ счетного числа некоторых множеств из класса $\mathcal{K}$. Относительный интервал $J$ можно представить в виде объединения конечного или счетного числа относительных интервалов с рациональными концами. Пусть $J$ совпадает с объединением $\cup_{n=1}^{\infty} J_n$ счетного числа относительных интервалом с рациональными концами. Если $u \in J$, то найдется относительный интервал $J_\nu$, содержащий $u$. Справедлива следующая цепочка соотношений

$$\bigcap_{t \in J \cap S} \{X(t) \in K\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t \in J_n \cap S} \{X(t) \in K\} \subset \bigcap_{t \in J_\nu \cap S} \{X(t) \in K\} =$$

$$= \bigcap_{t \in J_\nu \cap S} \left\{X(t) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m\right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{t \in J_\nu \cap S} \{X(t) \in K_m\} \subset$$

$$\subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{t \in S_{J_\nu, K_m}} \{X(t) \in K_m\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\{X(u) \in K_m\} \cup N^u_{J_\nu, K_m}\right) \subset \qquad (\text{ в силу } (5)\ )$$

$$\subset \bigcap_{m=1}^{\infty} (\{X(u) \in K_m\} \cup N^u) = \left\{X(u) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m\right\} \cup N^u = \{X(u) \in K\} \cup U^u,$$

откуда следует (4). #

Два случайных процесса $X_T = \{X(t), t \in T\}$ и $Y_T = \{Y(t), t \in T\}$, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и принимающие значения из одного метрического пространства $\mathbb{M}$ называются *стохастически эквивалентными*, если $P\{X(t) \neq Y(y)\} = 0$ каждого $t \in T$.

**Теорема 3.** *Любой случайный процесс* $X_T = \{X(t), t \in T\}$, *определенный на полном вероятностном пространстве и принимающий значения в компактном метрическом пространстве* $\mathbb{M}$, *стохастически эквивалентен некоторому сепарабельному случайному процессу* $Y_T = \{Y(t), t \in T\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 найдутся счетное множество $S, S \subset T$, и семейство событий $N^u, u \in T$, такие, что будет выполнено соотношение (4), которое можно записать в следующей эквивалентной форме

$$X(u,\omega) \in \bigcap_{J: u \in J} \overline{X(J \cap S, \omega)}, \quad u \in T, \ \omega \notin N^u. \tag{6}$$

Эквивалентность (4) и (6) можно доказать, повторив соответствующее доказательство эквивалентности (1) и (3); все изменения в рассуждениях сводятся к замене события $N$, о котором там говорилось, на событие $N^u$. Заметим, что

$$M^u = \left\{ \omega : X(u,\omega) \notin \bigcap_{J:u\in J} \overline{X(J\cap S,\omega)} \right\} \subset N^u.$$

Множество $M^u$, будучи подмножеством события нулевой вероятности, само является событием нулевой вероятности в силу предполагаемой полноты вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Определим случайный процесс $Y_T = \{Y(t), t \in T\}$ , положив

$$Y(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega), & \text{если} \quad t \in S, \omega \in \Omega, \\ X(t,\omega), & \text{если} \quad t \notin S, \omega \notin M^u, \\ a, & \text{если} \quad t \notin S, \omega \in M^u, \end{cases} \tag{7}$$

где $a$ – любая точка множества $\bigcap_{J:t\in J} \overline{X(J\mathcal{S},\omega)}$. Из этого определения следует, что для любого относительного интервала $J$, любого $u \in J$ и любого $\omega \in \Omega$

$$Y(u,\omega) = \begin{cases} X(u,\omega) \in \overline{X(J\cap S,\omega)} = \overline{Y(J\cap S,\omega)}, & \text{если} \quad u \in J\cap S, \omega \in \Omega, \\ X(u,\omega) \in \overline{X(J\cap S,\omega)} = \overline{Y(J\cap S,\omega)}, & \text{если} \quad u \notin J\cap S, \omega \notin M^u, \\ a, \in \overline{X(J\cap S,\omega)} = \overline{Y(J\cap S,\omega)}, & \text{если} \quad u \notin J\cap S, \omega \in M^u. \end{cases}$$

Другими словами, $Y_T$ удовлетворяет условию сепарабельности (1) с некоторым счетным множеством $S$ и $N = \emptyset$. Случайные процессы $X_T$ и $Y_T$ стохастически эквивалентны, так как множество $\{X(t) \neq X(t)\}$ лежит в событии $M^t$ нулевой вероятности. #

Случайный процесс $X_T = \{X(t), t \in T\}$ со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{M}$ с метрикой $\rho$ называется *стохастически непрерывным*, если для любого $u \in T$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to u} P\left\{\rho\left(X(t), X(u)\right) > \varepsilon\right\} = 0.$$

Случайный процесс $X_T$ называется *стохастически односторонне непрерывным*, если для любого $u \in T$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\downarrow u} P\left\{\rho\left(X(t), X(u)\right) > \varepsilon\right\} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{t\uparrow u} P\left\{\rho\left(X(t), X(u)\right) > \varepsilon\right\} = 0. \tag{8}$$

Случайный процесс $X_T$ называется *стохастически непрерывным справа (слева)*, если для любого $u \in T$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется первое (второе) из условий (8).

Из этих определений очевидным образом следует, что случайный процесс стохастически односторонне непрерывен, если он стохастически непрерывен или стохастически непрерывен слева (справа).

**Теорема 4.***Если $X_T = \{X(t), t \in T\}$ – стохастически односторонне непрерывный сепарабельный случайный процесс со значениями в метрическом пространстве* $\mathbb{M}$*, то в качестве его сепаратны можно взять любое счетное всюду плотное подмножество множества $T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S$ и $N$ – сепаранта и событие нулевой вероятности, о которых говорится в определении сепарабельности случайного процесса $X_T$.

Пусть $S_0$ – произвольное счетное всюду плотное подмножество множества $T$. Для любого $u \in T$ найдутся монотонно возрастающая последовательность $\{s_n\}_{n\geq 1}$ и монотонно убывающая последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел из $S$, сходящиеся к $u$. По предположению случайный процесс $X_T$ стохастически односторонне непрерывен. Поэтому одна из последовательностей $\{\rho\left(X(s_n), X(u)\right)\}_{n\geq 1}$ или $\{\rho\left(X(u), X(t_n)\right)\}_{n\geq 1}$ сходится по вероятности к нулю, например, первая из них. Из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся с вероятностью единица к тому же самому пределу. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем считать, что сама эта последовательность сходится с вероятностью единица. Событие $N^u$, на котором последовательность $\{\rho\left(X(s_n), X(u)\right)\}_{n\geq 1}$ случайных величин не сходится, имеет нулевую вероятность. Если $u \in J \cap S$ и элементарное событие $\omega$ не принадлежит событию $N_0 = N \cup \cup_{u\in S} N^u$, то $X(u,\omega)$ является пределом одной из последовательностей $\{X(s_n)\}_{n\geq 1}$ или $\{X(t_n)\}_{n\geq 1}$ и, следовательно, $X(u,\omega) \in \overline{X(J\cap S_0,\omega)}$, откуда, в свою очередь, следует, что $\overline{X(J\cap S,\omega)} \subset \overline{X(J\cap S_0,\omega)}$. Пусть $u \in T$ и $\omega \notin N_0$ В силу предполагаемой сепарабельности случайного процесса $X_T$

$$X(u,\omega) \in \bigcap_{J:u\in J} \overline{X(J\cap S)} \subset \bigcap_{J:u\in J} \overline{X(J\cap S_0)}.$$

Другими словами множество $S_0$ и событие $N_0$ удовлетворяют (1). #

**Теорема 5.** *Пусть $Z_T = \{Z(t), t\in T\}$ – случайный процесс со значениями в польском пространстве $\mathbb{M}$ и $X_T = \{X(t), t\in T\}$ – его координатная модификация, определенная на координатном вероятностном пространстве $(M^T, \mathcal{A}(\mathbb{M}^T), P^T)$. Существует множество $\Omega_0 \subset M^T$ внешней вероятности $(P^T)^*\{\Omega_0\} = 1$, такое, что тройка $\left(\Omega_0, \Omega_0 \cap \mathcal{A}(\mathbb{M}^T), (P^T)^*\right)$ является вероятностным пространством и $Y_T = \{Y(t), t\in T\}$, $Y(t,\omega) = X(t,\omega), \omega\in\Omega_0$, – сепарабельный случайный процесс.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3 существует сепарабельный случайный процесс $Y_T = \{Y(t), t\in T\}$, стохастически эквивалентный случайному процессу $X_T = \{X(t), t\in T\}$. Мы будем считать, что случайный процесс $Y_T$ определен, как указано в (7). Докажем, что внешняя мера множества

$$\Omega_0 = \left\{\omega : \omega\in\mathbb{M}^T, Y(t,\omega) = Z(t,\omega, t\in T\right\}$$

равна единице. По определению $(P^T)^*\{\Omega_0\} = \inf\left\{P^T\{A\} : \Omega_0 \subset A \in \mathcal{A}(\mathbb{M}^T)\right\}$. Достаточно убедиться, что $P^T\{A\} = 1$, каково бы ни было множество $A\in\mathcal{A}(\mathbb{M}^T)$, содержащее $\Omega_0$. Докажем это. По ТЕОРЕМЕ найдутся последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ и множество $B \in \mathcal{A}(\mathbb{M}^\infty)$, такие, что $A = \{\omega(t), t\in T, : (\omega(t_1), \omega(t_2), \ldots, \omega(t_n), \ldots) \in B\}$. Предположение $\Omega \subset A$ имеет своим следствием $\{Y(t_n) = Z(t_n), n = 1,2,\ldots\} \subset A$. Убедимся в этом. Пусть $\omega^0 \in \{Y(t_n) = Z(t_n), n = 1,2,\ldots\}$. Из определения (7) следует, что функция $\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}\ (t) = Y(t,\omega^0), t\in T$, не принадлежит ни одному из множеств $M^u, u\in T$, и следовательно, $Y(t,\widetilde{\omega}) = X(t,\widetilde{\omega}), t\in T$, другими словами, $\widetilde{\omega}\in \Omega_0 \subset A$. Из равенств $Y(t,\widetilde{\omega}) = X(t,\widetilde{\omega}) =\widetilde{\omega}\ \underset{\omega}{(t)} = Y(t,\omega^0), t\in T$, и $Y(t_n,\omega^0) = X(t_n,\omega^0) = \omega^0(t_n), n = 1,2,\ldots$ следует, что $\omega^0(t_n) =(\ t_n), n = 1,2,\ldots$ и, следовательно, $\omega^0 \in A$, так как $\widetilde{\omega}\in A$. Тем самым доказано, что $\{Y(t_n) = X(t_n), n = 1,2,\ldots\} \subset A$, если $\Omega_0 \subset A$, и, следовательно, $P\{A\} = 1$, так как $P\{Y(t_n) = X(t_n), n = 1,2,\ldots\} = 1$ в силу стохастической эквивалентности случайных процессов $X_t$ и $Y_T$. Равенство $(P^T)^* = 1$ доказано. Тот факт, что тройка $(\Omega_0, \Omega_0 \cap \mathcal{A}(\mathbb{M}^T), (P^T)^*)$ является вероятностным пространством доказано в ТЕОРЕМЕ. Сужение сепарабельного случайного процесса $Y_T$, на множество $\Omega_0$ является сепарабельным случайным процессом. #

Обсудим некоторые свойства вещественных случайных процессов. Сепарабельный вещественнозначный процесс, как следует из сравнения теорем 1 и 6, этими свойствами обладает.

Обозначим $\mathcal{E}$ класс множеств $K$ вида $[-\infty, a], [a, b], [b, \infty], [-\infty, \infty]$.

**Теорема 6.** *Пусть $X_T = \{X(t), t \in T\}$ – случайный процесс с вещественными значениями, $S$ – счетное подмножество множества $T$, $N$ – событие нулевой вероятностью. Следующие свойства эквивалентны:*

$$\bigcap_{t \in J \cap S} \{X(t) \in K\} \subset \bigcap_{t \in J} \{X(t) \in K\} \cup N, \quad K \in \mathcal{E}, \tag{9}$$

$$\inf_{t \in J} X(t, \omega) = \inf_{t \in J \cap S} X(t, \omega), \quad \sup_{t \in J} X(t, \omega) = \sup_{t \in J \cap S} X(t, \omega), \quad \omega \notin N, \tag{10}$$

$$\inf_{t \in J \cap S} X(t, \omega) \leq X(u, \omega) \leq \sup_{t \in J \cap S} X(t, \omega), \quad u \in J, \quad \omega \notin N, \tag{11}$$

$$\liminf_{t \to u, t \in T} X(t, \omega) = \liminf_{t \to u, t \in J \cap S} X(t, \omega), \quad \limsup_{t \to u, t \in J} X(t, \omega) = \limsup_{t \to u, t \in J \cap S} X(t, \omega), \quad \omega \notin N, \tag{12}$$

$$\liminf_{t \to u, t \in J \cap S} X(t, \omega) \leq X(u, \omega) \leq \limsup_{t \to u, t \in J \cap S} X(t, \omega), \quad \omega \notin N. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будет проведено по следующей схеме: (9) $\Longrightarrow$ (10) $\Longrightarrow$ (11) $\Longrightarrow$ (12) $\Longrightarrow$ (13) $\Longrightarrow$ (9). Предположим, что (9) выполняется, но (10) не имеет места; например, для некоторого относительного интервала $J$ и некоторого элементарного события $\omega \notin N$ не выполняется первое из двух равенств (10). Тогда найдется такое вещественное число $a$, что $\inf_{t \in J} X(t, \omega) < a < \inf_{t \in J \cap S} X(t, \omega)$. Элементарное событие $\omega$ принадлежит пересечению событий $\{X(t) \in K\}, t \in J \cap S, K = [a, \infty]$. В силу (9) оно принадлежит пересечению событий $\{X(t) \in K\}, t \in J$, и, следовательно, $\inf_{t \in J} X(t, \omega) \geq a$. Противоречие, к которому мы пришли, доказывает, что (10) является следствием (9). Очевидно, что (10) влечет (11). Пусть выполнено (11). Запишем его для $J = J(\varepsilon) = (u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ и в полученных неравенствах перейдем к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$. В результате мы придем к неравенствам

$$\liminf_{t \to u, t \in S} X(t, \omega) \leq \liminf_{t \to u, t \in T \cap S} X(t, \omega) \leq \limsup_{t \to u, t \in T} X(t, \omega) = \limsup_{t \to u, t \in S} X(t, \omega), \omega \notin N.$$

Эти неравенства на самом деле являются равенствами, так как

$$\inf_{t \in J(\varepsilon)} X(t, \omega) \leq \inf_{t \in J(\varepsilon) \cap S} X(t, \omega) \leq \sup_{t \in J(\varepsilon) \cap S} X(t, \omega) \leq \sup_{t \in J(\varepsilon)} X(t, \omega)$$

в силу $J(\varepsilon) \cap S \subset J(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{t \in J(\varepsilon)} X(t, \omega) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{t \in J(\varepsilon) \cap S} X(t, \omega) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t \in J(\varepsilon) \cap S} X(t, \omega) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t \in J(\varepsilon)} X(t, \omega).$$

Тем самым доказано, что (12) является следствием (11). Тот факт, что (12) влечет (13) следует из следующих соотношений

$$\liminf_{t\to u, t\in S} X(t,\omega) = \liminf_{t\to u, t\in T} X(t,\omega) \leq X(u,\omega) \leq \limsup_{t\to u, t\in T} X(t,\omega) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{t\in J(\varepsilon)} X(t,\omega), \ \ \omega \notin N.$$

Докажем, что (9) следует из (13). Предположим, что (13) выполнено, но (9) не имеет места. В этом случае найдется относительный интервал $J$, множество $K \in \mathcal{E}$ и элементарное событие $\omega$, такие, что $\omega \in \cap_{t\in J\cap S} \{T(t) \in K\}$ и $\omega \notin \cap_{t\in J} \{X(t) \in K\} \cup N$. Очевидно, что множество $K$ отлично от $[-\infty, \infty]$, так как в этом случае (9) заведомо выполняется. Поэтому $K$ может быть множеством одного из трех типов $[a, b]$, $[-\infty, a]$ или $[a, \infty]$. В каждом из трех возможных случаев найдется такое $u \in J$, что $X(u,\omega) \notin K$. Если, например, $K = [-\infty, a]$, то $a < X(u,\omega) \leq \limsup_{t\to u, t\in S} X(t,\omega) \leq a$. что противоречит (9). #