Бесконечные произведения мер

1 произведения измеримых пространств

Декартовым произведением $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ непустых множеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, где $\omega_k \in \Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Примером может служить n-мерное евклидово пространство R^n, представляющее собой декартово произведение n копий вещественной прямой R^1. Наряду с декартовым произведением множеств Ω_k точно также можно построить декартово произведение их подмножеств $A_k \subset \Omega_k$, $k = 1, 2 \ldots, n$. В результате мы получим подмножество $\prod_{k=1}^n A_k$ декартова произведения $\prod_{k=1}^n \Omega_k$, называемое *прямоугольником* со *сторонами* A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Прямоугольник, у которого одна или несколько сторон являются пустыми множествами, представляет собой пустое множество.

Пусть теперь в нашем распоряжении имеются измеримые пространства $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Прямоугольник $\prod_{k=1}^n A_k$ называется *измеримым*, если $A_k \in \mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Можно сказать, что прямоугольник называется измеримым, если все его стороны измеримы. *Декартовым произведением σ-алгебр* $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, называется σ-алгебра, порожденная классом измеримых прямоугольников декартова произведения $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ и обозначается $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$. Измеримое пространство $(\prod_{k=1}^n \Omega_k, \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k)$ называется *декартовым произведением измеримых пространств* $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и обозначается $\prod_{k=1}^n (\Omega_k, \mathcal{F}_k)$.

Теорема 1.5.1. *Пусть $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, - измеримые пространства. Класс $\mathcal{A}_n$ множеств, каждое из которых можно представить в виде конечного объединения непересекающихся измеримых прямоугольников декартова произведения $\prod_{k=1}^n \Omega_k$, представляет собой алгебру. Кроме того, σ-алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{L}_n)$, порожденная классом $\mathcal{A}_n$, совпадает с $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$.*

Доказательство. Класс множеств $\mathcal{A}_n$, содержит в себе декартово произведение $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ и пустое множество. Требуется доказать, что класс $\mathcal{L}_n$ наряду с любыми двумя множествами содержит их разность и объединение.

Докажем сначала, что разность двух измеримых прямоугольников $A^{(n)} = \prod_{k=1}^n A_k$ и $B^{(n)} = \prod_{k=1}^n B_k$ принадлежит классу $\mathcal{L}_n$. Это утверждение мы докажем методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для измеримых прямоугольников с числом сторон $2, \ldots, m$. Докажем, что оно справедливо для прямоугольников с $m + 1$ числом сторон. Запишем разность прямоугольников $A^{(m+1)} = \prod_{k=1}^{m+1} A_k = A^{(m)} \times A_{m+1}$ и $B^{(m+1)} = \prod_{k=1}^{m+1} B_k = B^{(m)} \times B_{m+1}$ в следующем виде

$$A^{(m+1)} \setminus B^{(m+1)} =$$

$$= \left[\left(A^{(m)} \setminus B^{(m)}\right) \times A_{m+1}\right] \cup \left[\prod_{k=1}^{m}(A_k \cap B_k) \times (A_{m+1} \setminus B_{m+1})\right].$$

По предположению в декартовом произведении $\prod_{k=1}^{m}\Omega_k$ найдутся непересекающиеся измеримые прямоугольники $C_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, l$, объединение которых совпадает с разностью $A^{(m)} \setminus B^{(m)}$ и, следовательно, разность $A^{(m+1)} \setminus B^{(m+1)}$ можно записать в виде объединения

$$A^{(m+1)} \setminus B^{(m+1)} = \left[\bigcup_{\nu=1}^{l}(C_\nu \times A_{m+1})\right] \cup \left[\prod_{k=1}^{m}(A_k \cap B_k) \times (A_{m+1} \setminus B_{m+1})\right]$$

непересекающихся измеримых прямоугольников декартова произведения $\prod_{k=1}^{m+1}\Omega_k$.

Докажем, что $A \setminus B \in \mathcal{L}_n$ для любых A и B из $\mathcal{A}_n$. Множества A и B могут быть представлены в виде сумм непересекающихся, внутри каждой суммы, измеримых прямоугольников $A_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, m$, и $B_\mu, \nu = 1, 2, \ldots, l$, декартова произведения $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$. По доказанному выше разность $A_\nu \setminus B_\mu$ принадлежит $\mathcal{A}_n$ и, следовательно, пересечение $\cap_{\mu=1}^{l}(A_\nu \setminus B_\mu)$ также принадлежит $\mathcal{A}_n$. Множества $\cap_{\mu=1}^{l}(A_\nu \setminus B_\mu)$, $\nu = 1, \ldots, m$, не пересекаются. Отсюда следует, что разность $A \setminus B = \cup_{\nu=1}^{m}A_\nu \setminus \cup_{\mu=1}^{l}B_\mu = \cup_{\nu=1}^{m}\cap_{\mu=1}^{l}(A_\nu \setminus B_\mu)$ принадлежит $\mathcal{A}_n$.

Объединение множеств $A = \cup_{\nu=1}^{m}A_\nu$ и $B = \cup_{\mu=1}^{l}B_\mu$ из $\mathcal{L}_n$ принадлежит $\mathcal{L}_n$, так как $A \cup B = A \cup B \setminus A$, множества A и $B \setminus A$ не пересекаются и по доказанному выше разность $B \setminus A$ принадлежит $\mathcal{A}_n$.

Пусть Π_n обозначает класс измеримых прямоугольников декартова произведения $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$. Равенство $\mathcal{F}(\mathcal{L}_n) = \prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ является следствием соотношений $\Pi_n \subset \mathcal{A}_n \subset \prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$. #

Теорема 1.5.2. *Пусть $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, \ldots, n$, -измеримые польские пространства, ρ_k - метрика на Ω_k. Множество $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$ является польским пространством с метрикой*

$$\rho((\omega_1', \ldots, \omega_n'), (\omega_1'', \ldots, \omega_n'')) = \rho_1(\omega_1', \omega_1'') + \cdots + \rho_n(\omega_n', \omega_n'')$$

и его борелевская σ-алгебра совпадает с $\prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$.

Доказательство. Мы опускаем простую проверку того, что функция ρ является метрикой. Из определения (1.5.1) следует, что последовательность $\{(\omega_1^{(m)}, \ldots, \omega_n^{(m)}\}_{m\geq 1}$ сходится или фундаментальна по метрике ρ тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, \ldots, n$ последовательность $\{\omega_k^{(m)}\}_{m\geq 1}$ сходится или фундаментальна по метрике ρ_k. Поэтому $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$ с метрикой ρ является полным метрическим пространством. По предположению Ω_k является сепарабельным. Пусть $\mathfrak{D}_k$ - счетное всюду плотное в Ω_k множество. Счетное множество $\mathfrak{D} = \prod_{k=1}^{n}\mathfrak{D}_k$, как нетрудно видеть, всюду плотно в $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$. Таким образом $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$ является польским пространством.

Докажем, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ метрического пространства $\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$ совпадает с декартовым произведением $\prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$ борелевских σ-алгебр $\mathcal{F}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Убедимся сначала, что $\mathcal{B} \subset \prod_{k=1}^{n}\mathcal{F}_k$. Для этого достаточно доказать, что любое открытое множество O метрического пространства $\prod_{k=1}^n \Omega_k$ принадлежит $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$. Каждая точка $(\omega_1^{(0)}, \ldots, \omega_n^{(0)})$ множества O содержится в нем вместе с некоторым открытым шаром с центорм в этой точке. Пусть это будет шар

$$S = \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \rho((\omega_1, \ldots, \omega_n), (\omega_1^{(0)}, \ldots, \omega_n^{(0)})) < \varepsilon \right\}$$

Пусть ε_k, $k = 1, \ldots, n$ - положительные рациональные числа, сумма которых строго меньше $\varepsilon/2$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ найдется точка $\omega_k' \in \mathfrak{D}_k$ такая, что $\rho_k(\omega_k^{(0)}, \omega_k') < \varepsilon_k$. Точка $(\omega_1^{(0)}, \ldots, \omega_n^{(0)})$ принадлежит измеримому прямоугольнику

$$U = \prod_{k=1}^n U_k, \quad U_k = \left\{ \omega_k : \rho_k(\omega_k, \omega_k') < \varepsilon_k \right\}.$$

В свою очередь, прямоугольник $U = \prod_{k=1}^n U_k$ содержится в S. Действительно, если $(\omega_1'', \ldots, \omega_n'') \in U$, то

$$\rho((\omega_1'', \ldots, \omega_n''), (\omega_1^{(0)}, \ldots, \omega_n^{(0)}) = \sum_{k=1}^n \rho_k(\omega_k'', \omega_k^{(0)}) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^n \left(\rho_k(\omega_k'', \omega_k') + \rho_k(\omega_k', \omega_k^{(0)}) \right) < 2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k < \varepsilon.$$

Таким образом установлено, что каждая точка $(\omega_1^{(0)}, \ldots, \omega_n^{(0)})$ множества O содержится вместе с некоторым измеримым прямоугольником U указанного вида. Другими словами, O является объединением множеств вида U. Каждое множество U определяется некоторой точкой из $\mathcal{D}$ и набором положительных рациональных чисел $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Поэтому таких множеств U может быть не более, чем сченое число и, следовательно, $O \in \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$.

Нам осталось доказать, что $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k \subset \mathcal{B}$. Класс множеств

$$\hat{\mathcal{F}}_k = \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} \Omega_i \times A_k \times \prod_{i=k+1}^n \Omega_i : A_k \in \mathcal{F}_k \right\}$$

является σ-алгеброй. Он составляет часть $\mathcal{B}$, так как порождается классом открытых множеств вида $\prod_{i=1}^{k-1} \Omega_i \times O_k \times \prod_{i=k+1}^n \Omega_i$, где O_k - открытое множество метрического пространства Ω_k. Произвольный измеримый прямоугольник можно представить в виде пересечения

$$\prod_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^{k-1} \Omega_i \times A_k \times \prod_{i=k+1}^n \Omega_i \right)$$

множеств из $\mathcal{B}$. Таким образом доказано, что борелевская σ-алебра $\mathcal{B}$ содержит класс измеримых прямоугольников и, следовательно, содержит $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$. #

Конструкция декартова произведения конечного числа измеримых пространств может быть обобщена на любое число сомножителей. Пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T \subset R^1$, - семейство измеримых пространств. *Декартовым произведением* $\prod_{t \in T} \Omega_t$ множеств Ω_t, $t \in T$, называется множество функций $x(t)$, $t \in T$, значения которых в точке t принадлежат множеству Ω_t. Для любого набора $t_1, t_2, \ldots, t_n$ из T и любого множества $A \subset \prod_{k=1}^n \Omega_{t_k}$ определим множество $C(A) = \{x(t) : (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) \in A\}$ функций из $\prod_{t \in T} \Omega_t$, называемое *цилиндрическим множеством с основанием* A. Цилиндрическое множество $C(A)$ называется *измеримым,* если $A \in \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$. Можно сказать, что цилиндрическое множество измеримо, если измеримо его основание. *Декартовым произведением σ-алгебр* $\mathcal{F}_t$, $t \in T$, называется σ-алгебра, порожденная классом измеримых цилиндрических множеств и обозначается $\prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Измеримое пространство $(\prod_{t \in T} \Omega_t, \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t)$ называется *декартовым произведением измеримых пространств* $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$, и обозначается $\prod_{t \in T} (\Omega_t, \mathcal{F}_t)$.

Определения декартовых произведений конечного числа и произвольного числа измеримых пространств согласуются друг с другом. Другими словами, если $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ - конечное множество, то декартово произведение $\prod_{t \in T} (\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, трактуемое как измеримое пространство функций $x(t)$, $t \in T$, совпадает с декартовым произведением $\prod_{k=1}^n (\Omega_{t_k}, \mathcal{F}_{t_k})$, трактуемым как измеримое пространство последовательной $(\omega_{t_1}, \omega_{t_2}, \ldots, \omega_{t_n})$.

Теорема 1.5.3. *Пусть $U \subset T \subset R^1$ и соответственно $\prod_{t \in T} (\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ и $\prod_{t \in U} (\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ - декартово произведение измеримых пространств и декартово произведение части их. Отображение*

$$\pi : \prod_{t \in T} \Omega_t \longrightarrow \prod_{t \in U} \Omega_t,$$

переводящее функцию $x(t)$, $t \in T$, в ее сужение $\pi x(t)$, $t \in U$, измеримо.

Доказательство. Класс $\mathcal{L} = \{A : A \in \prod_{t \in U} \mathcal{F}_t, \pi^{-1}(A) \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t\}$ множеств является σ-алгеброй. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ - числа из U. Прообраз $\pi^{-1}(C(A))$ цилиндрического множества

$$C(A) = \{x(t), t \in U : (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) \in A\} \tag{1}$$

с основанием $A \in \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$ в пространстве $\prod_{t \in U} \Omega_t$ представляет собой цилиндрическое множество $\{x(t), t \in T : (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) \in A\}$ в пространстве $\prod_{t \in T} \Omega_t$ с тем же самым основанием A. Тем самым доказано, что класс $\mathcal{L}$ содержит класс измеримых цилиндрических множеств из $\prod_{t \in U} \Omega_t$ и, следовательно, $\mathcal{L} = \prod_{t \in U} \mathcal{F}_t$. #

Теорема 1.5.4. *Пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in T \subset R^1$, - измеримые пространства. Для любых фиксированных $t_1, \ldots, t_n$ из T класс $\mathcal{F}_{t_1, \ldots, t_n}$ цилиндрических множеств*

$$C(A) = \{x(t), t \in T : (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in A\}, A \in \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k},$$

является σ-алгеброй и совпадает с σ-алгеброй $\mathcal{F}(\mathcal{L}_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$, порожденной классом цилиндрических множеств

$$\mathcal{L}_{t_1, \ldots, t_n} = \left\{ C(A) : A = \prod_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{F}_{t_k}, k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Доказательство. Из равенств $C(A \setminus B) = C(A) \setminus C(B)$, $C(\cup_{k=1}^\infty A_k) = \cup_{k=1}^\infty C(A_k)$, справедливых для любых множеств $A, B, A_k, k = 1, 2, \ldots,$ из $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$, следует, что $\mathcal{F}_{t_1, \ldots, t_n}$ является σ-алгеброй.

Чтобы доказать второе утверждение достаточно убедиться, что класс $\mathcal{F}_{t_1,\ldots,t_n}$ содержится в σ-алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{L}_{t_1,\ldots,t_n}$, так как $\mathcal{F}\mathcal{L}_{t_1,\ldots,t_n}$ содержится в $\mathcal{F}_{t_1,\ldots,t_n}$. Класс $\mathcal{D}$ множеств A из $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$, для которых $C(A) \in \sigma(\mathcal{L}_{t_1,\ldots,t_n})$, является σ-алгеброй. Она содержит класс $\mathcal{A}_n$ множеств, каждое из которых может быть представлено в виде конечного объединения непересекающихся измеримых прямоугольников декартова произведения $\prod_{k=1}^n \Omega_{t_k}$. По теореме 1.5.1 класс $\mathcal{A}_n$ является алгеброй и порожденная им σ-алгебра совпадает с $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$. Поэтому $\mathcal{D} = \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$ и, следовательно, $\mathcal{F}(\mathcal{L}_{t_1,\ldots,t_n}) = \mathcal{F}_{t_1,\ldots,t_n}$. #

Теорема 1.5.5. *Пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T \subset R^1$, - измеримые пространства. Класс измеримых цилиндрических множеств декартова произведения $\prod_{t\in T} \Omega_t$ является алгеброй.*

Доказательство. Пространство функций $\prod_{t\in T} \Omega_t$ и пустое множество являются измеримыми цилиндрическими множествами. Чтобы убедиться в этом, достаточно в определении цилиндрического множества в качестве оснований взять соответственно $\prod_{k=1}^n \Omega_{t_k}$ для некоторого n и пустое множество. Из равенства $\prod_{t\in T} \Omega_t \setminus C(A) = C(\prod_{k=1}^n \Omega_{t_k} \setminus A)$ следует, что дополнение измеримого цилиндрического множества вляется измеримым цилиндрическим множеством. Для завершения доказательства теоремы осталось установить, что объединение двух измеримых цилиндрических множеств - измеримое цилиндрическое множество. Пусть даны два измеримых цилиндрических множества

$$C(A_r) =$$
$$= \left\{x(t), t \in T : (x(t_1^{(r)}), \ldots, x(t_{n_r}^{(r)}) \in A_r\right\}, A_r \in \prod_{k=1}^{n_r} \mathcal{F}_{t_k^{(r)}}, r = 1, 2.$$

Обозначим $\{t_1, \ldots, t_n\}$ объединение множеств $\{t_1^{(r)}, \ldots, t_{n_r}^{(r)}\}$, $r = 1, 2$. По теореме 1.5.3 отображения $\pi_r : \prod_{k=1}^n \Omega_{t_k} \to \prod_{k=1}^{n_r} \Omega_{t_k^{(r)}}$, $r = 1, 2$, измеримы и, следовательно, $\pi_r^{-1}(A_r) \in \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k^{(r)}}$, $r = 1, 2$, и $\pi_1^{-1}(A_1) \cup \pi_2^{-1}(A_2) \in \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_{t_k}$. Из равенства

$$C(\pi_r^{-1}(A_r)) = \left\{x(t), t \in T : (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in \pi_r^{-1}(A_r)\right\} = C(A_r)$$

следует, что

$$C(A_1) \cup C(A_2) = C(\pi_1^{-1}(A_1)) \cup C(\pi_2^{-1}(A_2)) = C(\pi_1^{-1}(A_1) \cup \pi_2^{-1}(A_2)) =$$
$$= \left\{x(t), t \in T : (x(t_1), \ldots, x(t_n)) \in \pi_1^{-1}(A_1) \cup \pi_2^{-1}(A_2)\right\}. \ \#$$

Следующая теорема содержит описание измеримых подмножеств декартовых произведений измеримых пространств с несчетным числом сомножителей.

Теорема 1.5.6. *Пусть $T \subset R^1$ - несчетное множество, $\prod_{t\in T}(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ - декартово произведение измеримых пространств. Множество A принадлежит $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$ тогда и только тогда, когда найдутся последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел из T и множество $B \in \prod_{n=1}^\infty \mathcal{F}_{t_n}$ такие, что $A = \{x(t), t \in T : (x(t_1), x(t_2), \ldots) \in B\}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{L}$ класс подмножеств декартова произведенения $\prod_{t\in T} \Omega_t$, представимых в указанном виде. Убедимся, что $\mathcal{L}$ является σ -алгеброй. Пустое множество и $\prod_{t\in T} \Omega_t$ принадлежат $\mathcal{L}$. Чтобы в эттом убедиться, достаточно взять произвольную последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$, а в качестве оснований соответственно пусте множество и $\prod_{n=1}^\infty \Omega_{t_n}$. Если A принадлежит $\mathcal{L}$, то его дополнение $\overline{A} = \left\{x(t), t \in T : (x(t_1), \ldots) \in \overline{B}\right\}$

также принадлежит $\mathcal{L}$. Пусть $\{A^m\}_{m\geq 1}$ - последовательность множеств

$$A^m = \{x(t), t \in T : (x(t_1^m), \dots) \in B^m\}, \quad B^m \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t_n^m},$$

из $\mathcal{L}$. Обозначим $\{t_n\}_{n\geq 1}$ объединение последовательностей $\{t_n^m\}_{n\geq 1}$, $m = 1, 2, \dots$ По теореме 1.5.3 отображение $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_{t_n} \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_{t_n^m}$ измеримо и, следовательно, $\pi_m^{-1}(B^m) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t_n}$. Из равенств

$$A^m = \left\{x(t), t \in T : (x(t_1), \dots) \in \pi_m^{-1}(B^m)\right\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A^m = \left\{x(t), t \in T : (x(t_1), \dots) \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \pi_m^{-1}(B^m)\right\}$$

следует, что класс $\mathcal{L}$ замкнут оноситeльно счетных объединений. Докажем теперь, что σ-алгебра $\mathcal{L}$ содержит любое измеримое цилиндрическое множество

$$C(A) = \{x(t), t \in T : (x(t_1,), \dots, x(t_r)) \in A\}, \quad A \in \prod_{k=1}^{r} \mathcal{F}_{t_k}. \tag{2}$$

Действительно, дополним конечное множество $t_1, \dots, t_r$ произвольными различными чилами t_n, $n \geq r+1$, до последовательности $\{t_n\}_{n\geq 1}$. Множество $A \times \prod_{n=r+1}^{\infty} \Omega_{t_n}$ принадлежит $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t_n}$ и

$$C(A) = \left\{x(t), t \in T : (x(t_1), \dots, x(t_r), x(t_{r+1}), \dots) \in A \times \prod_{n=r+1}^{\infty} \Omega_{t_n}\right\}.$$

Класс $\mathcal{L}$ будучи σ-алгерой, должен содержать σ-алгебру $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$, порожденную классом цилиндрических множеств.

Нам осталось доказать, что $\mathcal{L} \subset \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$. Фиксируем последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел из T и обозначим $\mathcal{K}$ класс множеств B из $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t_n}$, для которых множества $\{x(t), t \in T : (x(t_1), x(t_2), \dots) \in B\}$ принадлежат $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$. Класс $\mathcal{K}$ является σ-алгеброй. Докажем, что он содержит все измеримые цилиндрические множества декартова произведения $\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_{t_n}$. Произвольное измеримое цилиндирическое множество имеет вид $B = D \times \prod_{n=r+1}^{\infty} \Omega_{t_n}$, где r - некоторое натуральное число и D - произвольное множество из $\prod_{n=1}^{r} \mathcal{F}_{t_n}$. Множество

$$\{x(t), t \in T : (x(t_1), x(t_2), \dots) \in B\} =$$
$$= \{x(t), t \in T : (x(t_1), \dots, x(t_r)) \in D\}$$

принадлежит $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$, так как является измеримым цилиндрическим множеством. #

Следующий пример показывает, что в декартовых произведениях измеримых пространств существуют неизмеримые множества.

Пример 1.5.1. *Пусть* $(\Omega_t, \mathcal{F}_t) = (R^1, \mathcal{B}^1), t \in T = [0, 1]$, *- семейство копий измеримой вещественной прямой. Множество* $A = \{x(t), t \in T, : \sup_{t\in T} |x(t)| = 1\}$ *не принадлежит* $\prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$.

Доказательство. Предположим, что множество A измеримо. По теореме 1.5.6 найдутся последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ чисел из T и множество $B \in \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t_k}$ такие, что $A = \{x(t), t \in T : (x(t_1), x(t_2), \dots) \in B\}$. Функция $x(t)$, $t \in T$, равная единице при $t = t_n, n = 1, 2, \dots$, и двум при $t \notin \{t_1, t_2, \dots\}$ принадлежит множеству A, но ее максимальное значение равно двум. #

Пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T$, - семейство измеримых пространств. Предположим, что T является объединением двух непустых непересекающихся множеств U и V. Функция $x = x(t)$, $t \in T$, порождает две другие фикции $u = u(t)$, $t \in U$, и $v = v(t)$, $t \in V$. Условимся писать $x = (u, v)$. По данной функции $v(t)$, $t \in V$, и множеству $A \in \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$ построим множество

$$A^v = \{u(t), t \in U : x = (u, v) \in A\} \subset \prod_{t\in U} \Omega_t.$$

Из этого определения следует, что функция $u(t)$, $t \in U$, принадлежит A^v, если она является сужением некоторой функции $x(t)$, $t \in T$, из множества A. Множество A^v называется *сечением* множества A или, более подробно, сечением множества A по функции $v = v(t)$, $t \in V$. Сечение непустого множества может оказаться пустым. Если $U = \emptyset$, то сечение множества A по определению равно пустому множеству. Если $V = \emptyset$, то сечение множества A по пределению совпадает с A. Сечение A^v называется *измеримым*, если $A^v \in \prod_{t\in U} \mathcal{F}_t$.

Пусть f - измеримое отображение декартова произведения измеримых пространств $\prod_{t\in T}(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ в измеримое пространство $(Y, \mathcal{Y})$. Предположим, что $U \neq \emptyset$ и $V \neq \emptyset$. Положим $\phi(u, v) = f(x)$ и $f^v(u) = \phi(u, v)$, где $v = v(t)$, $t \in V$, - фиксированная функция. Отображение f^v пространства $\prod_{t\in U} \Omega_t$ функций в множество Y называется *сечением* отображения f или, более подробно, сечением отображения f по функции $v = v(t)$, $t \in V$. Сечение f отображения называется *измеримым,* если $(f^v)^{-1}(B) = \{u(t), t \in U : f^v(u) = \phi(u, v) \in B\} \in \prod_{t\in U} \mathcal{F}_t$, каково бы ни было $B \in \mathcal{Y}$.

Теорема 1.5.7. *Любое сечение измеримого множества измеримо. Любое сечение измеримого отображения измеримо.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Доказательство требуется провести для случая, когда оба множества U и V отличны от пустого множества. Из определения сечения множества, следует, что сечение объединения счетного числа множеств совпадает с объединением сечений слагаемых, а сечение дополнения множества равно дополнению сечения. Другими словами, класс $\mathcal{L}$ множеств $A \in \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$, все сечения которых измеримы, является σ-алгеброй. Утверждение можно выразить равенством $\mathcal{L} = \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$. Чтобы доказать это равенство, достаточно доказать, что класс измеримых цилиндрических множеств составляет часть класса $\mathcal{L}$.

Пусть дано измеримое цилиндрическое множество (1.5.2). Обозначим класс $\mathcal{K}$ множеств A из $\prod_{k=1}^{r} \mathcal{F}_{t_k}$ таких, что все сечения $C(A)$ измеримы. Докажем равенство $\mathcal{K} = \prod_{k=1}^{r} \mathcal{F}_{t_k}$. Для этого достаточно доказать, что любой измеримый прямоугольник $A = \prod_{k=1}^{r} A_k$, $A_k \in \mathcal{F}_{t_k}$, принадлежит $\mathcal{K}$. Положим $\{u_1, \dots, u_m\} = \{t_1, \dots, t_r\} \cap U$ и $\{w_1, \dots, w_n\} = \{t_1, \dots, t_r\} \cap V$. Если $\{u_1, \dots, u_m\} = \emptyset$ или $\{w_1, \dots, w_n\} = \emptyset$, то сечение множества $C(A)$ является пустым множеством или совпадает с $C(A)$. Рассмотрим случай, когда оба множества $\{u_1, \dots, u_m\}$ и $\{w_1, \dots, w_n\}$ не пусты. Цилиндрическое множество $C(A)$ можно записать в следующем виде

$$\left\{ x(t), t \in T : (x(u_1), \ldots, x(u_m)) \in \prod_{k=1}^{m} A_{u_k}, (x(w_1), \ldots, x(w_n)) \in \prod_{k=1}^{n} A_{v_k} \right\}.$$

Его сечение $(C(A))^v$ по функции $v = v(t)$, $t \in V$, совпадает с множеством

$$\left\{ x(t), t \in U, : (x(u_1), u(t_2), \ldots, x(u_m)) \in \prod_{k=1}^{m} A_{u_k} \right\} \in \prod_{t \in U} \mathcal{F}_t,$$

или является пустым множеством в зависимости от того, принадлежит или нет точка $(v(w_1), \ldots, v(w_n))$ множеству $\prod_{k=1}^{n} A_{w_k}$. Тем самым доказано, что все сечения измеримого цилиндрического множества $C(\prod_{k=1}^{r} A_{t_k})$ измеримы.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть f^v - сечение отображения f, определяемое множествами U, V и функцией $v = v(t)$, $t \in V$. Каково бы ни было $B \in \mathcal{Y}$, множество $(f^v)^{-1}(B)$ является сечением множества $f^{-1}(B) \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$ по функции $v^v(t)$, $t \in V$. По первому утверждению $(f^v)^{-1}(B) \in \prod_{t \in U} \mathcal{F}_t$. #

В качестве одного из следствий теоремы 1.5.7 мы получаем следующее утверждение: непустой прямоугольник в декартовом произведении конечного числа измеримых простанств является измеримым тогда и только тогда, когда измеримы все его стороны.