Процесс броуновского движения

Процесс броуновского движения играет исключительно важную роль в истории развития и современной теории случайных процессов. Он представляет собой математическую модель движения мельчайщих частиц в жидкости. Явление хаотического движения частиц в жидкости впервые наблюдал английский ботаник Р. Броун в 1827 году. Открытое им явление получило название броуновского движения. Математическая модель броуновского движения была предложена Л. Башелье в 1900 году. Некоторые положения этой модели были обоснованы на евристическом уровне. Строгое математическое описание броуновского движения было предложено Н. Винером в 1918 году. Наряду с математиками явлением броуновского движения заинтересовались физики. Первое описание броуновского движения с точки зрения физических законов было дано А. Эйнштейном в 1905 году. Затем его описание было усовершенствовано рядом других физиков, в частности, М. Смолуховским, А. Д. Фоккером, М. Плаком, Л. С. Орнстейном, Г. Е. Улукбеком, С. Чандрасекхараном. Более подробно с историей и математической теорией броуновского движения можно познакомится по монографиям:
П. Леви Стохастические процессы и броуновское движение. Наука, М.: 1972.
Т. Хида Броуновское движение. Наука, М.: 1987

Ниже будут приведены два доказательства существования процесса броуновского движения. Первое из них носит конструктивный характер, а второе доказательство основано на применении теоремы 2.1.2. Конструктивное доказательство основано на существовании последовательности независимых случайных величин с общим нормальным стандартным распределением. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство, на котором такая последовательность существует. Далее считается, что все рассматриваемые случайные величины определены на этом вероятностном пространстве. Мы начнем с обсуждения ряда вспомогательных утверждений.

2.3.1. Лемма. *Если $\{X_n\}_{n\geq 2}$ - последовательность независимых случайных величин с общей стандартной нормальной функцией распределения*

$$P\left\{X_n < x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du, \;\; x \in R^1, \tag{1}$$

то для любого $c > \sqrt{2}$

$$P\left\{ \bigcap_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{X_k > c\sqrt{\ln n}\right\} \right\} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Обратим внимание на то, что предположение о независимости случайных величин излишне и при докательстве использоваться не будет. С помощью правила Лопиталя можно убедиться, что

$$\lim_{x\to\infty} xe^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du = 1. \tag{3}$$

Отсюда и (2.3.1) следует, что

$$P\Big\{|X_n| > c\sqrt{\ln n}\Big\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{c\sqrt{\ln n}}^\infty e^{-u^2/2}\,du \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{c^2}{2}\ln n\Big\}$$

для всех n, больших некоторого $n_0 > 4$. В силу этой оценки

$$\sum_{n=2}^\infty P\Big\{|X_n| < c\sqrt{\ln n}\Big\} \le n_0 + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=n_0+1}^\infty n^{-c^2/2} < \infty.$$

По лемме Бореля-Кантелли выполняется (2.3.2). #

2.3.2. Функции Хаара. На отрезке $[0,1]$ определим функции H_n, $n = 0,1,\ldots$, называемые *функциями Хаара.* Функции H_0 и H_1 имеют следующий вид

$$H_0(t)\equiv 1,\ \ H_1(t) = \begin{cases} 1, & 0\le t\le \dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Далее, для $2^n \le k < 2^{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$,

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{k-2^n}{2^n} \le t \le \dfrac{k-2^n+1/2}{2^n},\\ -2^{n/2}, & \dfrac{k-2^n+1/2}{2^n} < t \le \dfrac{k-2^n+1}{2^n},\\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2.3.3. Лемма. *Пусть C_n, $n = 0,1,\ldots$, - вещественные числа. Если $|C_n| \le Cn^\alpha$ для всех $n = 1,2,\ldots$ и некоторых $C > 0$ и $0 < \alpha < 1/2$, то ряд*

$$\sum_{n=0}^\infty C_n\int_0^t H_n(u)\,du,\ \ t\in[0,1], \tag{4}$$

сходится равномерно на $[0,1]$.

Доказательство. Заметим, что функция $S_k(t) = \int_0^t H_k(u)\,du$, $t\in[0,1]$, неотрицательна. Функции S_k, $2^n \le k < 2^{n+1}$, ограничены величиной $2^{-n/2-1}$ и $S_k(t)S_m(t) = 0$, $t\in[0,1]$, если $2^n \le k \ne m < 2^{n+1}$. Положим

$$B_n = \max_{2^n\le k<2^{n+1}} |C_k|,\ \ n = 1,2,\ldots,$$

и заметим, что

$$\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\left|C_k\int_0^t H_k(u)\,du\right| \le \sum_{n=0}^\infty B_n 2^{-n/2-1} \le \sum_{n=0}^\infty 2^{-n/2-1+\alpha n} < \infty.$$

В соответствии с теоремой Вееpштрасса ряд из непрерывных функций, члены которого мажорируются соотвествующими членами сходящегося ряда из положительных величин, равномерно сходится. Равномерная сходимость ряда (2.3.4) доказана. #

Функции Хаара можно рассматривать как элементы гильбертова пространства $L_2[0,1]$ вещественных функций $f(t)$, $t \in [0,1]$, интеририуемых в квадрате по мере Лебега. Напомним, что *скалярное произведение* функций f и g из $L_2[0,1]$ определяется по формуле

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt. \tag{5}$$

Функция $f \in L_2[0,1]$ называется *нормированной,* если $(f,f) = 1$. Функции f и g называются *ортогональными,* если $(f,g) = 0$. Простые вычисления показывают, что $(H_n, H_n) = 1$ и $(H_n, H_k) = 0$, если $n \neq k$. Другими словами, последовательность $\{H_n\}_{n\geq 0}$ функций Хаара представляет собой *ортонормированную* систему в $L_2[0,1]$. Ортонормированная система функций называется *полной,* если не существует отличной от нуля почти всюду по мере Лебега функции $f \in L_2[0,1]$, которая была бы ортогональна с каждой функцией из этой системы.

2.3.4. Лемма. *Последовательность $\{H_n\}_{n\geq 0}$ функций Хаара полна в $L_2[0,1]$.*

Доказательство. Предположим, что $(f, H_n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, для некоторой функции $f \in L_2(0,1)$. Рассмотрим непрерывную функцию $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$, $t \in [0,1]$. Для любых $n = 0, 1, \ldots$, $2^n \leq k < 2^{n+1}$, равенство $(f, H_k) = 0$ эквивалентно равенству

$$F\left(\frac{k-2^n}{2^n}\right) - 2F\left(\frac{k-2^n+1/2}{2^n}\right) + F\left(\frac{k-2^n+1}{2^n}\right) = 0. \tag{6}$$

Положив в этом равенстве $n = 0$ и $k = 1$, мы видим, что значения функции $T(t)$ в точках $t = 0, 1/2, 1$ лежат на некоторой прямой $y = \alpha t + \beta$. Положив в равенстве (2.3.6) сначала $n = 1$ и $k = 2$, а затем $n = 1$ и $k = 3$, мы видим, что значения функции $F(t)$ при $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ лежат на той же самой прямой $y = \alpha t + \beta$. Полагая последовательно $n = 2, 3, \ldots$, $2^n \leq k < 2^{n+1}$, в равенстве (2.3.6), мы убедимся, что значения функции $F(t)$ лежат на прямой $\alpha t + \beta$ при $t = k2^{-n}$, $k = 0, \ldots, 2^n$, для любого $n = 1, 2, \ldots$ Множество $\{k2^{-n} : k = 0, 1, \ldots, 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ всюду плотно в $[0,1]$. Отсюда следует, что $F(t) = \alpha t + \beta$, $t \in [0,1]$, и, следовательно, $f(t) = d$. Постоянная d равна нулю в силу равенства $(f, H_0) = 0$. #

В силу соотношений

$$0 \leq \left(f - \sum_{k=0}^{n}(f,H_k)H_k, f - \sum_{k=0}^{n}(f,H_k)H_k\right) = (f,f) - \sum_{k=1}^{n}(f,H_k)^2$$

выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\infty}(f,H_k)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(f,H_k)^2 \leq (f,f). \tag{7}$$

Сходимость ряда, стоящего в этом неравенстве, влечет

$$\left(\sum_{k=n}^{n+m}(f,H_k)H_k, \sum_{k=n}^{n+m}(f,H_k)H_k\right) = \sum_{k=n}^{n+m}(f,H_k)^2 \longrightarrow 0$$

при $n, m \to \infty$. Поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(f, H_k)H_k$ сходится в среднем квадратичном. Обозначим g сумму ряда. Функция $f - g$ принадлежит пространству $L_2[0,1]$ и ортогональна с каждой функцией H_k, $k = 0, 1, \ldots$ По лемме 2.3.4 функцияи $f - g$ равна нулю почти всюду по мере Лебега. Тем самым доказано равенство

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(f, H_k)H_k(t), \;\; t \in [0,1], \;\; \forall f \in L_2[0,1],$$

где сходимость ряда понимается как сходимость в среднем квадратичном. Привлекая непрерывность скалярного произведения, мы получим равенство Парсеваля

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty}(f, H_k)(g, H_k), \;\; \forall f, g \in L_2[0,1]. \tag{8}$$

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы дать определение и доказать существование процесса броуновского движения.

2.3.6. Определение. Пусть T обозначает сегмент $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ или полупрямую $[a, \infty) \subset \mathbb{R}^1$. Случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T]\}$ называется *процессом броуновского движения или винеровским процессом*, если он удовлетворяет следующим условиям:
1. $P\{X_a = 0\} = 1$,
2. для любого конечного набора чисел $t_1 < t_2 \cdots < t_n$ из T случайные величины $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $\;k = 1, 2, \ldots, n-1$, независимы,
3. для любых s и $t > 0$ таких, что $s, s+t \in T$, разность $X_{t+s} - X_s$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и t, т. е.

$$P\{X_{t+s} - X_s < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2t}\right\} du, \;\; x \in \mathbb{R}^1.$$

Если $\{X_t \equiv X(t), t \in [0,1]\}$ - процесс броуновского движения с параметрическим множеством $[0,1]$, то $\{Y_t, t \in [a,b]\}$, $Y_t = \sqrt{b-a}X((t-a)/(b-a))$, - процесс броуновского движения с параметричесим множеством $[a,b]$. Это замечание вместе со следующей теоремой обеспечивают существование винеровского процесса на любом конечном сегменте, расположенном на вещественной прямой.

2.3.7. Теорема. *Пусть $\{X_n\}_{n\geq 0}$ - последовательность независимых случайных величин с общей стандартной нормальной функцией распределения. Ряд*

$$X_t = \sum_{n=0}^{n} X_n \int_0^t H_n(u)\, du, \;\; t \in T = [0,1], \tag{9}$$

сходится равномерно с вероятностью единица. Кроме того, семейство $X_T = \{X_t, t \in T\}$ случайных величин является процессом броуновского движения.

Доказательство. Обоначим $\Omega_0 = \cup_{n=2}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}\left\{|X_k| \leq 2\sqrt{\ln n}\right\}$. По лемме 2.3.1 $P\{\Omega_0\} = 1$. Для любого $\omega \in \Omega_0$ найдется $n_0 = n_0(\omega)$ такое, что $|X_n(\omega)| \leq 2\sqrt{\ln n}$ для всех $n > n_0$. По лемме 2.3.3 ряд (2.3.4) с $C_n = X_n(\omega)$ равномерно сходится. Тем самым доказано, что ряд (2.3.9) равномерно сходится с вероятностью единица.

Доказжем второе утверждение. Мы поступим также, как при доказательстве существования пуассоновского процесса. Возьмем произвольный набор чисел $0 \le t_1 < \cdots < t_n \le 1$ и вычислим совместную характеристическую функцию случайных величин $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, \dots, n-1$,

$$\phi(u_1, \dots, u_{n-1}) = E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \right] \right\}, \ \ u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^1.$$

Будет доказано, что она имеет следующий вид

$$\phi(u_1, \dots, u_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left\{ -\frac{u_k^2}{2}(t_{k+1} - t_k) \right\}. \tag{10}$$

Если (2.3.10) уже доказано, то полагая $u_k = 0$ для всех $k \neq r$, мы получим

$$E \exp\left\{ i u_r \left[X_{t_{r+1}} - X_{t_r} \right] \right\} = \exp\left\{ -\frac{u_r^2}{2}(t_{r+1} - t_r) \right\}. \tag{11}$$

Из (2.3.10) и (2.3.11 следует, что совместная характеристическая функция случайных величин $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, может быть записана в виде произведения характеристических функций этих случайных величин, что, по известному критерию, влечет их независимость. Третье условие из определения 2.3.6 следует из (2.3.10), если положить $n = 2, t_1 = s, t_2 = t + s$. Условие $P\{X_0 = 0\} = 1$ следует из (2.3.9).

Докажем (2.3.10). Нам удобно иметь дело с функциями $S_k(t)$, $t \in [0, 1]$, определенными при доказательстве леммы 2.3.3. Мы имеем

$$\begin{aligned}
f(u_1, \dots, t_{n-1}) &= E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n-1} u_k \sum_{m=0}^{\infty} \left[S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k) \right] X_m \right\} \\
&= E \exp\left\{ i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k) \right] X_m \right\} \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k) \right] X_m \right\} \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k) \right] \right)^2 \right\} \\
&= \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k \left[S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k) \right] \right)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь мы воспользовались независимостью случайных величин X_m, $m = 0, 1, \dots,$ и тем, что характеристическая функция нормальной случайной величины X_m имеет вид $E \exp\{iuX_m\} = \exp\{-u^2/2\}$, $u \in \mathbb{R}$. Продолжим вычисления. Обозначим J_k индикаторную функцию множества $[t_k, t_{k+1}]$. По определению скалярного произведения (2.3.5) и равенству Парсеваля (2.3.8) мы имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k) \right]^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (J_k, H_m)^2 = (J_k, J_k) = (t_{k+1} - t_k).$$

Если $k \neq r$, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} [S_m(t_{k+1}) - S_m(t_k)] [S_m(t_{r+1}) - S_m(t_r)] = \sum_{m=0}^{\infty} (J_k, H_m)(J_r, H_m) = (J_k, J_r) = 0.$$

Отсюда и (2.3.12) следует (2.3.10). #

2.3.8. Теорема. *Любая полупрямая $T = [a, \infty) \subset \mathbb{R}^1$ является параметрическим множеством некоторого процесса броуновского движения.*

Доказательство. Построить процес броуновского движения с параметрическим множеством $T = [a, \infty)$ можно с помощью операции "склеивания" независимых процессов броуновского движения X_{T_n}, $T_n = [a+n-1, a+n]$, $n = 1, 2, \ldots$ Рассуждения из теоремы 2.2.4, с помощью которых было доказано существование пуассоновского процесса с параметрически множеством T применимы и в рассматриваемом случае. Мы не будем их повторять. #

2.2.9. Второе доказательство существования процесса броуновского движения. Пусть T по-прежнему обозначает сегмент $[a, b]$ или полупряму $[a, \infty)$. Предположим, что процесс броуновского движения $X_T = \{X_t, t \in T\}$ существует. Отправляясь от определения 2.3.6, мы снова придем к (2.3.10), что помогает вычислить характеристическую функцию случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ для любого набора $t_1 < \cdots < t_n$ из T. Достаточно рассмотреть случай $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, так как $X_a = 0$ с вероятностью единица. Для любых вещественных чисел $u_1, \ldots, u_n$ мы имеем

$$\begin{aligned} f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1, \ldots, u_n) &= E \exp\left\{ i \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r \right) [X_{t_{k+1}} - X_{t_k}] \right\} \\ &= \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{r=k+1}^{n} u_r \right)^2 (t_{k+1} - t_k) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Таким образом мы знаем как выглядит характеристическая функция случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ для любого натурального числа n и любого набора $t_1 < \cdots < t_n$ чисел из T. Теперь мы можем рассуждать следующим образом. Для любой перестановки π чисел $1, \ldots, n$ положим

$$f_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(n)}}(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(n)}) = f_{t_1,\ldots,t_n}(u_1, \ldots, u_n).$$

Тем самым мы располагаем семейством характеристичеких функций, удовлетворяющих условию (2.1.12). Из вида характеристической функции (2.3.13) следует равенство (2.1.13). По теореме 2.1.2 на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T(\mathbb{R}^1), P^T)$ можно пределить вещественный случайный процесс $X_T = \{X_t, t \in T\}$, конечномерные распределения которого опреляются характеристическими функциями (2.2.13). Этот процесс удовлетворяет условиям из определения 2.3.6. #

2.2.10. Конечномерные распределения. Рассмотрим, например, процесс броуновского движения $X_T = \{X_t, t \in T = [0, \infty)\}$. Конечномерное распределение

$$P_{t_1,\ldots,t_n}\{A\} = P\{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}^n,$$

однозначно определяется функцией распределения

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left\{X_{t_1} < x_1,\dots,X_{t_n} < x_n,\right\},\ \ x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^1.$$

Можно считать, что $0 \le t_1 < \dots < t_n$, так как для любой перестановки π чисел $1,\dots,n$ выполняется равенство

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}\left(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}\right).$$

Далее мы считаем, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Равенство

$$\exp\left\{-u^2(t_{k+1}-t_k)/2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1}-t_k)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{iux - x^2/2(t_{k+1}-t_k)\right\}dx,$$

справедливое для любого $u \in \mathbb{R}^1$, позволяют записать характеристическую функцию (2.3.13) в следующем виде

$$f_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n) \\ = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1}-t_k)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\left(\sum_{r=k+1}^{n}u_r\right)x_{k+1} - \frac{x_{k+1}^2}{2(t_{k+1}-t_k)}\right\}dx_{k+1}.$$

Произведение интегралов можно рассматривать как n-кратный повторный интеграл. Замена переменных интегрирования $y = 0$, $x_1 = y_1$, $x_k = y_k - y_{k-1}$, $k = 2,\dots,n$, позволяет записать повторный интеграл в виде n-кратного интеграла

$$f(u_1,\dots,u_n) \\ = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1}-t_k)}}\int\underset{R^n}{\cdots}\int\exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}y_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(y_{k+1}-y_k)^2}{2(t_{k+1}-t_k)}\right\}dy_1\cdots dy_n. \quad (14)$$

По формуле обращения мы получим, что случайный вектор $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ имеет плотность вероятностей

$$p_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) \\ = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{k+1}-t_k)}}\exp\left\{-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2(t_{k+1}-t_k)}\right\},\ \ x_0 = 0,\ \ x_1\dots,x_n \in R^1. \quad (15)$$

Впрочем, это следует из самой записи (2.3.14) характеристической функции и теоремы единственности, согласно которой характеристическая функция и функция распределения случайного вектора однозначно определяют друг друга. Значение $P_{t_1,\dots,t_n}\{A\}$, $A \in \mathcal{B}^n(\mathbb{R}^1)$, представляет собой n-кратный интеграл Лебега от плотности вероятностей (2.3.15) по множеству A.

В заключение заметим, что P-почти все траектории процесса броуновского движения (2.3.9) являются непрерывными функциями. Это следует из леммы 2.3.3 и теоремы теоремы Веерштрасса, согласно которой сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций является непрерывной функцией.