Лекция 1

Реальное явление   Математическая модель   Выводы в рамках модели

сопоставление

Этапы развития теории вероятностей

I. P(A) - вероятности некоторых событий
II. X=X(ω) - случайные величины
III. В математической модели эксперимента введен фактор времени

Из истории теории вероятностей:
1827 Открытие Броуна движения частиц пыльцы в капле воды
...
1900
...
1997 Нобелевская премия по экономике вручена Мертону и Шоуxсу
...

В курсе в основном изучаютя непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции. Например, траектория броуновской частицы.
Мы находимся в рамках (Ω, $\mathcal{F}$,P)

Опр.: *Случайный элемент* - функция X: $\Omega \to$ S, которая является $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ - измеримым. (Т.е. $\forall$B$\in \mathcal{B}$ x^{-1}(B) = { ω : X(ω) $\in$ B} $\in$ $\mathcal{F}$)

Если M - некоторая система подмножеств S, то σ(M) - это наименьшая σ-алгебра (с единицей S), которая содержит M.
S - метрическое пространство. $\mathcal{B}$(S) = σ{открыт. мн-ва S}

Упражнение. S - сепарабельное метрическое пространство, тогда $\mathcal{B}$(S) = σ(открытых шаров) = σ(замкнутые шары)

Л Е М М А. Пусть X: $\Omega \to$ S. Пусть M - некоторая ситсема подмножеств S. Введем в Ω σ-алгебру $\mathcal{A} = X^{-1}(\sigma\{\text{M}\})$. Тогда X является $\mathcal{A}|\sigma\{\text{M}\}$ - измеримым отображением.

Доказательство.

$\circ$ $\mathcal{D}$:= { D$\subset$S : X^{-1}(D)$\in \mathcal{A}$} - σ - алгебра. M$\subset \mathcal{D}$ $\bullet$

Следствие.
Пусть X: $\Omega \to$ S, $\mathcal{B}$=σ{M}, (X: (Ω, $\mathcal{F}$) $\to$ (S, $\mathcal{B}$)), тогда X $\in$ $\mathcal{F}| \mathcal{B}$, если X^{-1}(M) $\subset \mathcal{F}$, т.е. X^{-1}(B)$\in \mathcal{F}$ $\forall$B$\in$M
То есть достаточно проверить на множествах, порождающих σ-алгебру. (Т.е. на более "скудной"совокупности множеств.

Измеримые отображения позволяют "перекинуть"меру с одного пространства на другое.

Опр.: *Распределением случайного элемента* X: $\Omega \to$ S (X $\in \mathcal{F} | \mathcal{B}$) называется мера P_x(B):=P(X^{-1}(B)). Т.е. возникает мера на (S, $\mathcal{B}$)

Изучение вероятностных мер на пространстве (S, $\mathcal{B}$) и изучение распределений случайных элементов по сути одно и тоже.

Л Е М М А. Пусть Q - вероятностная мера на (S, $\mathcal{B}$). Тогда $\exists(\Omega, \mathcal{F}$,P) и случайный элемент X: $\Omega \to$ S, такой что P_x = Q.

Доказательство.

$\circ$ Возьмем Ω = S, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, P = Q, X = I (тождественное) $\bullet$

Опр.: Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ - семейство измеримых пространств. *Случайной функцией* [заданной на Ω и T] называется семейство случайных элементов X={X(t,ω), t$\in$T, $\omega \in \Omega$}

$X_t : \Omega \to S_t$, $\forall$t$\in$T, являются $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ - измеримыми

Наиболее важный случай, когда S_t=S, $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$

X=X(t,ω), t$\in$T, $\omega \in \Omega$

- при каждом фиксированном t X - случайная величина
- по традиции аргумент ω в записи случайного процесса опускается, а пишется X(t) или X_t

Опр.: Функция X($\cdot$,ω) при фиксированном ω называется *траекторией* (реализацией или выборочной функцией).

Если T$\subset \mathbf{R}^d$, то говорят о случайных полях

Опр.: *Системы множеств* M_1, ..., $M_n \subset \mathcal{F}$ называются *независимыми* (в совокупности), если выполняется $\forall A_1 \in M_1, \ldots, A_n \in M_n$ P$(A_1, \ldots, A_n)$ = P(A_1), ..., P(A_n).

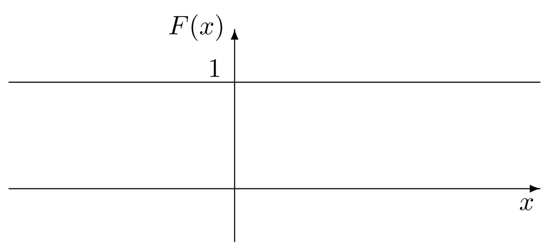
Семейство подмножеств M_t, t$\in$T называется независимым, если $\forall$n$\geq$2 $\forall t_1, \ldots, t_n \in T$, $M_1, \ldots, M_n$ - независимые системы.

Опр.: *Случайные элементы* $X_1, \dots, X_n$ называются *независимыми* (в совокупности), если независимы σ-алгебры $\sigma\{X_1\}, \dots, \sigma\{X_n\}$. ($\sigma\{X_1\} = \{X^{-1}(B), B \in \mathrm{B}_1\}$)

$X_1, X_2, \dots$ независимые действительные случайные величины. (Ω, $\mathcal{F}$, P).

Опр.: *Функциями распределения* X_n называется $F_{X_n}(x) = P(\omega : X_n(\omega) \leq x)$. Далее мы будем отождествлять запись P_x и F_x

Возьмем Ω = [0,1], $\mathcal{B}$= $\mathcal{B}$([0,1]), P=μ (мера Лебега). μ([a,b]) = b - a.
$\omega \in [0,1]$
Рассмотрим $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)2^{-k}$, a_k=0 или 1. Если запись неоднозначна, то выбираем бесконечную последовательность нулей.
Легко проверить, что $a_1, a_2, \dots$ - независимые случайные величины P(a_n=0)=
= P(a_n=1)=1/2 ($*$)
Обратно. Если $a_1, a_2, \dots$ - независимые случайные величины, такие что справедливо ($*$), то $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)2^{-k}$ является равномерно распределенной величиной на [0,1]. Если F - функция распределения, то введем F^{inv}(x)=inf$\{y : F(y) > x\}$ $\forall x \in [0,1]$
От слова invert.



Положим X(ω) = $F^{inv}(\xi(\omega))$, где ξ - равномерно распределена на [0,1] (т.е. $\sim$R[0,1]). Тогда P($F^{inv}(\xi) \leq z) = P(\xi \leq F(z)) = F(z)$, т.к. ξ - равномерно распределена $\forall z \in$ **R**.
Итак, берем разложение $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)2^{-k}$, $\omega \in [0,1]$
Записываем a_k в виде матрицы

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_2 & a_5 & a_9 & \dots \\ a_6 & a_8 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Обозначим за b_{nk} элемент стоящий на (n,k) месте $\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$

Обходим бесконечную матрицу от b_{11} к b_{21}, потом к b_{12} по дигонали и т.д., так мы обойдем все элементы матрицы. Введем $\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k}(\omega)2^{-k}$ - независимые равномерно-распределенные случайные величины $X_n(\omega) =$

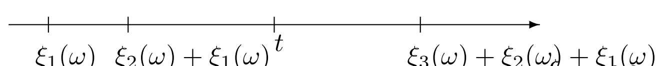
$F_n^{inv}(\xi_n(\omega))$

<u>Упражнение</u>. X_t, t∈T на [0,1] нельзя построить континуальное семейсво независимых случайных величин с заданными функциями распределениями

Т Е О Р Е М А. (Ломницкий-Улам)
Пусть $(S_t,\ \mathcal{B}_t)_{t\in T}$ - любое семейство измеримых пространств. Пусть Q_t - вероятностная мера на $(S_t,\ \mathcal{B}_t)$. Тогда $\exists(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ и семейство независимых случайных элементов $X_t : \Omega \to S_t\ \ \mathcal{F}|\ \mathcal{B}_t$-измеримо.
Без доказательства.

Примеры
1. Случайное блуждание.
$\xi_1, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных действительных случайных величин. $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $S_0 = 0$

2. Процесс восстановления.
$\xi_1, \dots$ - н.о.р.с.в. (здесь и далее: независимые одинаково распределенные величины (-а))
$X_0 = 0$ и для t>0 положим $X_t(\omega) = \max\{n : \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) \le t\}$

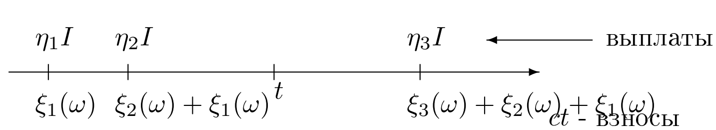


ξ_i имеют экспоненциальные распределения . Мы видим, что меньше t только две случайные величины, т.е. $X_t(\omega)$. Например, восстановление сгоревших лампочек за время t. Кстати, $X_n(\omega) \le\propto$ (с вероятностью 1). y_0 - начальный капитал. ct - взносы. $\{\eta_i\}$- н.о.р. $\{\xi_i\}$ и $X_t(\omega)$ - из прошлого примера

3. Модель Крамера-Лундберта.

$$Y_t = y_0 + ct - \sum_{j=1}^{X_t(\omega)} \eta_j(\omega)$$

$t \ge 0.\{\xi_j\}$ и $\{\eta_j\}$ - независимы. (Модель страхования)



4.Эмпирические меры

$\xi_1, \dots$ - н.о.р. векторы в $\mathbf{R}^m$.

$$P_n^*(B,\omega) = 1/n \sum_{k=1}^{n} I_B(\xi_k(\omega))$$

B - борелевское множество в $\mathbf{R}^m$. $P_n^*(B,\omega)$ - случайный процесс.

5.Пуассоновские случайные меры.
(S, $\mathcal{B}$), $\xi_1, \dots$ - н.о.р. со значениями в S, λ - конечная мера на (S, $\mathcal{B}$). Введем случайный процесс $Y \sim Pois(\lambda(s))$, Y и $\{\xi_k\}$ независимы

Y и ξ_k могут принимать значения в разных пространствах

$$Z(B,\omega) := \sum_{k=1}^{Y(\omega)} I_B(\xi_k(\omega))$$

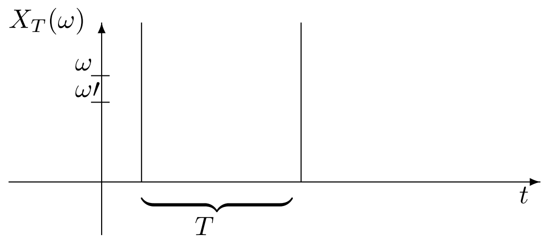
- пуассоновская случайная мера.

Задачи.

1.Построить график модели Крамера-Лундберта.
2.Пусть $B_1, \dots, B_r \subset \mathbf{R}_m$. $B_i \cap B_j = \emptyset$
а)$Z(B_1), \dots, Z(B_r)$ - независимы
б)$Z(\cdot,\omega)$ - целочисленная мера при ω фиксированном
в)$Z(B) \sim Pois(\mu(B))$
3.$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(aI, C)$
$\Updownarrow$
$\forall c \in \mathbf{R}^n, (\xi,) \sim N(\cdot, \cdot)$

Лекция 2

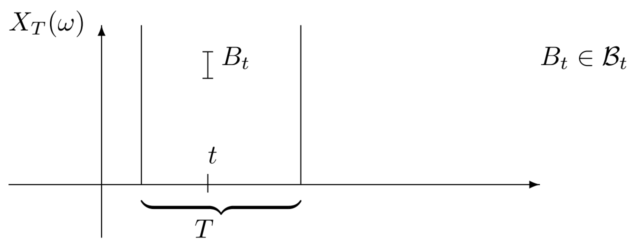
На $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим семейство случайных величин X=$\{X_t, t \in T\}$
$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S_t, \mathcal{B}_t)$



Случайный прцесс порождает отображение $\mathbf{X}(\omega):\ \omega \to X(\cdot,\omega)$ ($\mathbf{X}:\ \Omega \to S_T$, где $S_T = \otimes_{t\in T} S_t$ - множество траекторий. $X(\cdot,\omega)$ - траектория при фиксированном ω.

ω - фиксирована $\Rightarrow$ траектория, если фиксируем $\omega\prime$, то другая траектория.

Опр.: $C_T(t, B_t) = \{y \in S_T : y_t \in B_t\}$ - множество называется *элементарным цилиндром.* Другими словами, мы рассматриваем все функции, в заданный момент T, которые в фиксированный момент времени t проходят через "ворота"B_t.



Расмотрим $\mathcal{B}_T := \sigma\{$элементарных цилиндров$\}$. Легко заметить, что отображение $\mathbf{X}(\omega) : \Omega \to S_T$ является $\mathcal{F}|\mathcal{B}_T$ - измеримым. Докажем этот отдельный факт.

Доказательство.
Возьмем элементарный цилиндр $C_T(t, B_t)$.
$\mathbf{X}(\omega)^{-1}(C_T(t, B_t)) =$
$\{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in C_T(t, B_t)\} =$
$= \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\}$,
но $X_t(\omega)$ - случайная величина при каждом t $\Rightarrow \mathbf{X}(\omega)^{-1}(C_T(t, B_t)) =$
$= \{\omega : X_t(\omega) \in B_t\} \in \mathcal{F}$ •

Итак, по следствию (из лекции 1) $\Rightarrow \mathbf{X}(\omega) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ - измеримо

Введем отображение $\pi_{T,t} : \mathcal{S}_T \to S_t$. Т.ч. $\pi_{T,t} y = y(t),\ y \in S_t$.
Легко видеть, что $\pi_{T,t} \in \mathcal{B}_T|\mathcal{B}_t$, т.к. прообраз $\forall$ множества из $\mathcal{B}_t$ большого есть элементарный цилиндр. Если $\mathbf{X}(\omega) : \Omega \to \mathcal{S}_T$;
$\mathbf{X}(\omega) \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_T$, то $\pi_{T,t}\mathbf{X}(\omega) = X_t(\omega)$. Вывод: $\pi_{T,t} X_t(\omega)$ является $\mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ - измеримым отображением.

Итак, доказана следующая
Т Е О Р Е М А. $X = \{X_t;\ t \in T\}$ является семейством $\mathcal{F}|\mathcal{B}_T$ - измеримых отображений $\Leftrightarrow$
$bf X(\omega)$ является $\mathcal{F}|\mathcal{B}_t$ - измеримым. Получили два эквивалентных определения случайного процесса

Мы видели, что если $\xi : \Omega(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow S(S, \mathcal{B})$, $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}$, тогда возникает распределение $\xi : P_\xi(B) := P(\xi^{-1}(B))$, где $B \in S$
Итак, если $X = \{X_t, t \in T\}$ - случайный процесс, то возникает мера P_x на $\mathcal{B}_T$ (мера порожденная случайным элемнтом $\mathbf{X}$), т.е. мы можем говорить о вероятностях, которые при этом возникают.

Будем рассматривать зависимые случайные величины.
Пусть S_T - случайный процесс. Для точек $t_1, \ldots, t_n \in T$ рассматриваем "прямоугольник" $C = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$ - это множество в пространстве $\mathcal{S}_{t_1}, \ldots, \mathcal{S}_{t_n}$. Обозначим $\mathcal{S}_{t_1 \ldots t_n} = \mathcal{S}_{t_1} \times \ldots \times \mathcal{S}_{t_n}$. (Сужение траекторий определенных на множестве $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$)
Имеет смысл рассматривать точки $t_1, \ldots, t_n$ - различные (не совпадают друг с другом). Возьмем $\xi = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и рассмотрим σ - алгебру: $\mathcal{B}_{t_1, \ldots, t_n} = \sigma\{$"все прямоугольники"$\}$, то $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_{t_1, \ldots, t_n}$, т.к. если взять $\forall$ прямоугольник $C = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$ и рассмотреть $\xi^{-1}(C)$.

$$\xi^{-1}(C) = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_{t_k} \in B_{t_k}\} \qquad (\{X_{t_k} \in B_{t_k}\} \in \mathcal{F})$$

т.к. прямоугольники - это система порождающих для $\mathcal{B}_{t_1, \ldots, t_n}$, то $\xi \in \mathcal{F}|\mathcal{B}_{t_1, \ldots, t_n}$.
На $S_{t_1, \ldots, t_n}$ возникают меры $P_{t_1, \ldots, t_n}(\mathcal{D}) = P((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in \mathcal{D})$

Опр.: Меры $P_{t_1, \ldots, t_n}$ (на $(\mathcal{S}_{t_1, \ldots, t_n}, \mathcal{B}_{t_1, \ldots, t_n})$) называются *конечномерными распределениями* (к.-м.р.) процесса X.

Свойсва этих мер:

1. Возьмем прямоугольник $C = B_{t_1} \times \ldots \times B_{t_n}$. Пусть $(i_1, \ldots, i_n)$ - перестановка набора $(1, \ldots, n)$. Что можно сказать про (*) $P_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}})$?

Одновременно все индексы внизу и вверху переставили $\Rightarrow$ очевидно, что функция не изменится.
$(*) = P_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}}(B_{t_{i_1}} \times \ldots \times B_{t_{i_n}}) = P(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_{t_k} \in B_{t_k}\})$. А $\bigcap_{k=1}^{n} \{X_{t_k} \in B_{t_k}\}$
$= = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_{t_k} \in B_{t_k}\} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \{X_{t_{i_k}} \in B_{t_{i_k}}\}) = \mathcal{B}_{t_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{t_n}$

2. $P_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}}(\mathcal{B}_{t_{i_1}} \times \ldots \times \mathcal{B}_{t_{i_{n-1}}} \times \mathcal{S}_{t_n}) = P_{t_1, \ldots, t_{n-1}}(\mathcal{B}_{t_{i_1}} \times \ldots \times \mathcal{B}_{t_{i_{n-1}}})$, т.к. выражение это равно

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_{t_k} \in B_{t_k}\} \bigcap \{X_{t_n} \in \mathcal{S}_{t_n}\})$$

эти условия называются условиями **симметрии (1)** и **согласованности (2)**

Если имеется случайный процесс, то его к.-м.р. обладают свойствами симметрии и согласованности.

Опр.: Измеримые пространства (S,$\mathcal{B}$) и (V,$\mathcal{A}$) называются *изоморфными* ($\sim$), если $\exists$ взаимно-однозначное отображение $h : \mathcal{S} \to \mathcal{V}$ т,ч $h \in \mathcal{B} \mid \mathcal{A}$ - изм, а $h^{-1} \in \mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ - изм.

Опр.: Пространство (S,$\mathcal{B}$) называется *борелевским*, если оно изоморфно борелевскому подпространству отрезка [0,1].
Хотя что такое борелевское подпространство отрезка [0,1] неясно

$\forall$ пространство $\mathbf{R}^m$ является борелевским. **Польское** - полное, сепарабельное, метрическое пространство. $\forall$ борелевское подмножество польского пространства является борелевским.

Т Е О Р Е М А.(Колмогоров). Пусть $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ - семейство борелевских пространств. Пусть на пространствах $(S_{t_1,\dots,t_n}, \mathcal{B}_{t_1,\dots,t_n})$ $(n \in \mathbf{N}, t_1, \dots, t_n \in T)$ заданы меры $P_{t_1,\dots,t_n}$, удовлетворяющие условиям **симметрии** и **согласованности** (**1** и **2**), тогда $\exists$ вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и случайный процесс: $X = \{X_t, t \in T\}$ (т.е. $X_t \in \mathcal{F} | \mathcal{B}_t$ - измеримы $\forall t \in T$), т.ч. меры $P_{t_1,\dots,t_n}$ являются **к-м.р.**-ми процесса X.

Доказательство.
$\circ$ его не будет ввиду его сложности (*а зря - зам.*)
До этой теоремы Даниэль доказал для T-счетного эту теорему. $\bullet$

Вспомним характеристическую функцию случайного вектора. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$-случайный вектор со значениями в $\mathbf{R}^n$

Опр.: *Характеристической функцией* вектора ξ называется функция $\varphi_\xi(\lambda)$:=E $\exp\{i < \lambda, \xi >\}$= E$e^{i \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, i^2 = -1$ - мнимая единица, $< \cdot, \cdot >$ - скалярное произведение.

Вспомним замену переменных в интеграле Лебега. Если есть $(\Omega, \mathcal{F}, P) \overset{g \in \mathcal{F}|\mathcal{B}}{\to}$ $(S, \mathcal{B}) \overset{h \in \mathcal{B}|\mathcal{B}(\mathbf{R})}{\to}$ $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, то $\int\limits_{\Omega} h(g(u))$dP=$\int\limits_{S} h(z) P g^{-1}(dz)$. Как, пользуясь этим свойством, записать х. функцию случайного вектора в виде $\int$ по пространству $\mathbf{R}$?

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i<\lambda, z>} P_\xi(dz)$$

-где $P_\xi(dz)$ - распределение с.вектора. Т.е. главный вывод такой: х.ф. вектора $\equiv$ х.ф. меры, являющейся его распределением.

Т.о., если Q - мера на $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, то $\varphi_Q(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R^n}} e^{i<\lambda,z>} Q(dz)$ - х.ф. меры Q $\Longrightarrow$ вывод: х.ф. сл. вектора ξ совпадает с х.ф. его распределения P_ξ.

Как условия симметрии и согласованности для действительного процесса можно переписать в терминах х.ф.? См. Упажнение ниже. Если есть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, то $\varphi_\xi(\lambda) := Ee^{i\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k}$; далее если $(j_1, \dots, j_n)$ перестановка набора $(1, \dots, n)$, то

$$(A)\ \varphi_{P_{t_1,\dots,t_n}}(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}) = \varphi_{P_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)}}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$(B)\ \varphi_{P_{t_1,\dots,t_n}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) = \varphi_{P_{t_1,\dots,t_{n-1}}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

В курсе **Т.В.** доказывается, что между мерами на евклидовом пространстве и характеристическими функциями есть биекция.

Опр.: Процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ с действительными значениями называется процессом с *независимыми приращениями*, если $\forall n \in \mathbf{N}, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ величины $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ - независимы в совокупности.

Если есть процесс $\{X_t, t \in \mathbf{N}\}$ с независимыми приращениями, то (Запишем величину X_t так: $X_t = X_+(X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + \dots + (X_t - X_{t-1})$ - все слагаемые суммы независимы) тогда $X_t = S_t$ - процесс частных сумм независимых случайных величин. Здесь в качестве t_k взяли k, $t_k = k$.

Т Е О Р Е М А. Пусть $\varphi(s, t, \cdot)$ - хар. функции мер $Q_{s,t}$, где $0 \leq s < t < \infty$. Для того, чтобы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\exists$ -л действительный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ с независимыми приращениями, т.ч. х.ф. $X_t - X_s$ есть $\varphi(s, t, \cdot)$; необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\varphi(s, t, \cdot) = \varphi(s, u, \cdot)\varphi(u, t, \cdot)$$

-при всех $0 \leq s < u < t$. При этом начальное распределение, т.е. распределение величины X_0 могло быть сделано произвольным.

Доказательство.

$\circ$ **необходимость**$\Rightarrow$ очевидно, т.к. х.ф. суммы независимых сл. величин $\equiv$ произведение х.ф. слагаемых, т.е. $X_t - X_s = (X_t - X_u) + (X_u - X_s)$

достаточность$\Leftarrow$ Допустим, что уже $\exists$ требуемый процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Тогда х.ф. вектора $\xi = (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ приобретает вид в т. $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$:

$$\varphi_\xi(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \varphi_{X_{t_0}}(\lambda_0)\varphi_{X_{t_1} - X_{t_0}}(\lambda_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_{t_1} - X_{t_{n-1}}}(\lambda_n) =$$

Возьмем $t_0 = 0$, тогда $\varphi_{Xt_0}(\lambda_0) = \varphi_Q(\lambda_0)$

$$= \varphi_Q(\lambda_0) \cdot \varphi(t_0, t_1, \lambda_1) \dots \varphi(t_{n-1}, t_n, \lambda_n)$$

Тогда $\begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_0} \\ X_{t_1} - X_{t_0} \\ \vdots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{pmatrix} (y = A\xi)$

Если имеется ξ и квадратная матрица A, то $\varphi_{A\xi}(\lambda) = Ee^{i<A\xi,\lambda>} = Ee^{i<\xi,A^*\lambda>} = \varphi_\xi(A^*\lambda)$. Где A^* - транспонированная к A матрица. Следовательно, х.ф. $\varphi_{X_{t_0},\dots,X_{t_n}}(\lambda_0,\dots,\lambda_n) = \varphi_\xi(A^*\lambda)$. $\bullet$

Если параметрическое множество $T \subset \mathbf{R}$ и имеются меры $P_{t_1,\dots,t_n}$, где $t_1 < \dots < t_n (t_k \in T\ \forall k)$. И выполнено условие **(3)** вместо **(2)**, а именно :

(3) : $P_{t_1,\dots,t_m,\dots,t_n}(\dots\mathbf{R}\dots) = P_{t_1,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(\dots\cancel{\mathbf{R}}\dots)$

Тогда применима теорема Колмогорова.

(по лекции, здесь идет упражнение, но все подобного рода задачи иногда будут вынесены за пределы лекции - прим.ред.)

Опр.: Процесс $\mathbf{N} = \{N_t, t \geq 0\}$ называется *пуассоновским*, если

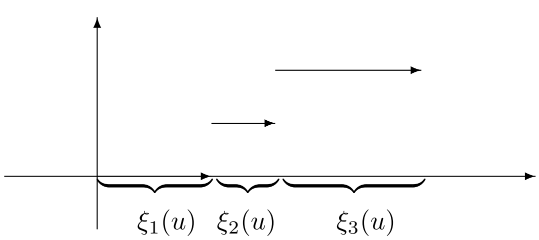
1. $N_0 = 0$ п.н.

2. Процесс $\mathbf{N}$ имееет независимые приращения.

3. $N_t - N_s$ - приращение распределено $\sim \pi_\lambda(t-s)$, $0 \leq s < t$. Где π - пуассоновский закон.

Процесс также называется *стандартным пуассоновским интенсивности* λ.

График траектории пуассоновского процесса (*процесса восстановления*).



Здесь $\xi_1(u), \xi_2(u), \dots$ - независимые одинаково распределенные по экспоненциальному закону. Докажем, что пуассоновский процесс существует.

$\zeta \sim \pi(a)$

$\varphi_\zeta(\lambda) = Ee^{i\zeta\lambda} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{ik\lambda} P(\xi = k) = e^{-a} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{i\lambda})^k}{k!} = e^{-a} e^{aei\lambda} = e^{a(e^{i\lambda}-1)}$ - х.ф. пуассоновского распределения.

Упражнения.

Упражнение 1. Если для $P_{t_1,\dots,t_n}$ (мер) их х.ф. обладают условиями (А) И (В) (см.лекцию 2), то имеют место свойства симметрии и согласованности для мер $P_{t_1,\dots,t_n}$.
Упражнение 2. Проверить, что для х.ф. $\varphi_{X_{t_0,\dots,t_n}}(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ выполнено свойство **(3)**
Указание. Надо подставить 0 в х.ф. на k-ое место и увидеть, что получили х.ф. укороченного ранга. При этом воспользуемся теоремой $(\varphi(s,t,\cdot) = \varphi(s,u,\cdot)\varphi(u,t,\cdot))$, т.к. будет х.ф.
Упражнение 3. Проверить, что выполнено условие теоремы о существовании процесса с независимыми приращениями для пуассоновского процесса.

Задачи.

1. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ сл. процесс со значениями в польском пространстве S при каждом t. Пусть траектории непрерывны. Тогда X является сл. элементом со значениями в C(T,S), т.е. $\mathcal{F}|\mathcal{B}(C(T,S))$ - изм. (Теперь по-русски, $S = \mathbf{R}$, траектории непрерывны. Тогда X- сл. элемент со значениями в $C[0,1]$).
2. $\eta_n \xrightarrow{d} \eta \overset{?}{\Leftrightarrow} \varphi_{\eta_n}(\lambda) \to \varphi_\eta(\lambda)$. $\quad (\varphi_{\eta_n}(\lambda) = e^{ia_n\lambda - \frac{1}{2}\sigma_n^2\lambda^2})$

Лекция 3

Опр.: Процесс $\mathbf{W} = \{W_t, t \geq 0\}$ называется *виннеровским (или броуновским движением)*, если

1. $W_0 = 0$ п.н.

2. Процесс W имеет независимые приращения.

3. $W_t - W_s$ - приращение распределено $\sim N(0, t-s),\ t > s \geq 0$

4. Траектории непрерывны.

$\xi \sim N(a,\sigma^2),\ \varphi_\xi(\lambda) = Ee^{i\lambda\xi} = e^{ia\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}$
$\varphi(s,t,\lambda) = \varphi(s,u,\lambda)\varphi(u,t,\lambda)$ - будут выполнены, т.к. $e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(u-s)}e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-u)}$, по доказанной теореме процесс со свойствами $1^o - 3^o$ существует.

Опр.: Вектор ζ со значениями в $\mathbf{R}^n$ называется *гауссовским* (*нормальным*), если $\varphi_\zeta(\lambda) := Ee^{i<\zeta,\lambda>} = exp\{i < a,\lambda > -\frac{1}{2} < C\lambda,\lambda >\} =$ [по координатно] $=$
$=exp\{i\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\lambda_k - \frac{1}{2}\sum\limits_{k,l=1}^{n} c_{kl}\lambda_k\lambda_l\}$. $\zeta \sim N(a,C), a \in \mathbf{R}^n, C = \{c_{kl}\}_{k,l=1}^n$
$a_k = E\zeta_k, c_{kl} = cov(\zeta_k,\zeta_l) = E(\zeta_k - E\zeta_k)E(\zeta_l - E\zeta_l)$
$C = C^*, C \geq 0$, т.е. $< C\lambda,\lambda > \geq 0 \forall\lambda \in \mathbf{R}^n$ (матрица является неотрицательно

определенной). Если $C > 0$, то $\exists$ плотность, которая задается формулой

$$p_\zeta(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C|^{-\frac{1}{2}} exp\{-\frac{1}{2} < C^{-1}(x-a), (x-a) >\}$$

$\sum\limits_{k,l}^{n} \lambda_k \lambda_n cov(\zeta_k, \zeta_l) = (\geq 0) = cov(\sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_l \zeta_l, \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \zeta_k) = cov(\eta, \eta) = D\eta \geq 0$ - ч.т.д.

Опр.: Функция $r(s,t), s,t \in T$ называется *неотрицательно определенной*, если $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in T$ матрица $(r(t_k, t_l))_{k,l=1}^n$ неотрицательно определена.

Т Е О Р Е М А. Пусть $a = a(t)$ любая действительная функция, определенная на множестве Т. Пусть $r = r(t,s) =$ - *симметрична*, т.е. $r(s,t) = r(t,s)$ и $\forall s,t \in T$ *неотрицательно* определена на $T \times T$. Тогда на некотором $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\exists$ гауссовский прцесс $X = \{X_t, t \in T\}$, т.ч. $a(t) = EX_t, r(s,t) = cov(X_s, X_t)$
Замечание. Выделенные условия являются необходимыми и достаточными.
Доказательство.
$\circ$ Для $\forall n \geq 1 \forall t_1, \dots, t_n \in T$ рассмотрим вектор $(a(t_1), \dots, a(t_n))$ и матрицу $(r(t_k, t_l))_{k,l=1}^n$, в силу выделенных условий мы можем ввести х.ф.

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := exp\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \lambda_l r(t_k, t_l)\}$$

. Теперь проверим согласованность мер (это означает, что, если подставить 0 вместо λ_n, например, мы получим "укороченную"х.ф. - прим.ред.) $\bullet$

Опр.:* Процесс $\mathbf{W} = \{W_t, t \geq 0\}$ называется *винеровским (или броуновским движением)*, если

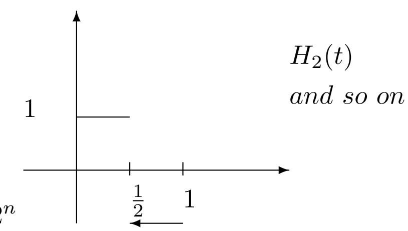
1. $EW_t = 0 \ \forall t$
2. $cov(W_t, W_s) = min(s,t) \ \forall t, s \geq 0$
3. W - гауссовский процесс
4. Траектории непрерывны.

Напомним, гауссовость означает, что $\forall n \geq 0 \forall t_1, \dots, t_n - (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ - гауссовский вектор.

<u>Упражнение</u> Д-ть, что определения эквивалентны

Докажем, что процесс существует. Достаточно проверить $r(s,t) = min(s,t)$ - является симметричной и неотрицательно определенной (по Замечанию к теореме). Мы уже видели, что существует процесс в смысле исходного определения (процесс с независимыми приращениями) $cov(W_s, W_t) = cov(W_s, W_t - W_s + W_s) = cov(W_s, W_t - W_s) + cov(W_s, W_s) = D(W_s - W_0) = s$, т.к. во-первых, процесс с независмсимыми приращениями, а во-вторых, $W_0 = 0$. Итак, функция $r(s,t)$ - является неотрицательна определена, как ковариационная функция процесса с независимыми приращениями. Будем строить броуновское движение на [0,1]. Рассмотрим последовательность независимых гауссовских величин на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, распределенные по $N(0,1)$ ξ_k^ω. Введем неслучайные функции Шаудера $S_k(t) = \int\limits_0^t H_k(u)du$ $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $W_T(\omega) := \sum\limits_{k=a}^{\infty} \xi_k(\omega) S_k(t), t \in [0,1]$ - явная конструкция броуновского движения

$H_1(t) \equiv 1, t \in [0,1]$
$H_2(t)$
$\ldots$
$H_k(t)$



$H_{2^n+k}(t) = 2^{n/2}\mathbf{I}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}]}(t) - 2^{n/2}\mathbf{I}_{(\frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^n}]}$, $1 \le k \le 2^n$
Лирическое отступление. *Молодой архитектор сдает проект, ну и понятно, волнуется. Более опытный советует ему установить на фасаде собачку...и все обсуждения сведуться к тому, чтобы убрать собачку. Так вот можно было определить и не через функции Шаудера*
$\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2[0,1]$

Упражнение. Проверить ортонормированность и полноту (д-ть, что индикаторы промежутков могут быть аппроксимированы в метрике функциями Хаара).

Вспомним следствие из равенства Парсеваля:

$$< f, g >= \sum_{k=1}^{\infty} < f, H_k >< g, H_k >$$

Л Е М М А 1. Пусть $a_k = O(k^\varepsilon)$, где $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$, $t \in [0,1]$ является непрерывной функцией на отрезке [0,1].

Доказательство.

$\circ$ Достаточно убедиться, что $\sup\limits_{t \in [0,1]} \sum\limits_{k > 2^n} |a_k| S_k(t) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Оценим: $(*) = \sum\limits_{2^n < k \le 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \le 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-\frac{n}{2}-1} = c' 2^{-n(\frac{1}{2}-\varepsilon)}, \varepsilon < \frac{1}{2}$.

$S_k(t) \le 2^{-\frac{n}{2}-1}$, носители этих функций: $2^n < k \le 2^{n+1}$, носители не пересекаются. $(*) \le \sum\limits_{n\le m} 2^{-m(\frac{1}{2}-\varepsilon)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. По теореме Вейерштрасса $\sum\limits_k a_k S_k(t)$ является непрерывной функцией (ряд сходится равномерно), ч.т.д. $\bullet$

Л Е М М А 2. Пусть ξ_1, ξ_2,... - последовательность стандарртных гауссовских величин, т.е. $\xi_k \sim N(0,1), k = 1,2,...$(независимость не предполагается). Тогда $\forall c > \sqrt{2}$ и п.в. $\omega \in \Omega\ \exists\ N = N(\omega, c) : |\xi_k(\omega)| \le a\sqrt{logk}, \forall k \ge N$, где a=const.

Доказательство.

$\circ$ Начиная с некоторого $N = N(\omega, c)$, все $\xi_k(w)$ лежат внутри полосы $Y \in [-a\sqrt{logk}, a\sqrt{logk}]$. $\bullet$.

Доказательство (леммы 2).

$\circ$ Пусть $\xi \sim N(0,1)$. $\mathrm{P}(\xi > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$=/по частям/=$\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty \frac{1}{u} d(e^{-\frac{u^2}{2}}) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{u^2}\mathrm{d}u \le \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, так как $\int\limits_x^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{u^2}\mathrm{d}u \ge 0$ при $x > 0$.

при $x \to \infty$ функция $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ - является асимптотически эквивалентной исходному интегралу (для проверки надо ещё раз проинтегрировать по частям).

$\mathrm{P}(|\xi_k| > c\sqrt{logk}$ беск. часто по k)

Вспомним 2-ой курс: $\mathrm{P}(A_k.) = 0$, если $\sum\limits_k \mathrm{P}(A_k) < \infty$ по Борелю-Кантелли.

$\mathrm{P}(A_k$ беск. часто)=$\mathrm{P}(\bigcap\limits_n \bigcup\limits_{k\ge n} A_n)$.

Таким образом,

$\mathrm{P}(|\xi_k| > c\sqrt{logk}) \le \sum\limits_{k\ge N} \frac{1}{c\sqrt{logk}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{c^2 logk}{2}} \le$const$\sum\limits_{k\ge N}\frac{1}{\sqrt{logk}}k^{\frac{c^2 u}{2}} < \infty$, если $c > \sqrt{2}$.

Следовательно, по лемме Бореля-Кантелли для п.в. $\omega \in \Omega\ |\xi_k(\omega)| \le c\sqrt{logk},\ k \ge N(c,\omega)$. $\bullet$

Лирическое отступление (еще пара советов). *Мы должны привыкнуть, что идей не так много, в интегрировании - две глубких идеи: по частям и сведение кратных к повторным (есть, правда, и третья - перенос меры с одного пространства на другое (замена то бишь - замеч.ред.)). Если нужно иметь оценку хвостов, понятное дело - интегрируем по частям.*

Т Е О Р Е М А. Процесс $W_t(\omega) = \sum\limits_{k=1}^\infty \xi_k(\omega)S_k(t)$ (*) является виннеровским процессом на [0,1].

Доказательство.

$\circ$ По лемме 2 $|\xi_k(\omega)| \le c\sqrt{logk} \le c'k^\varepsilon, \varepsilon \le \frac{1}{2}, k \ge N \Longrightarrow$ по лемме 1 ряд (*) сходится равномерно на отрезке [0,1] для п.в. $\omega \in \Omega \Longrightarrow$ по теореме Вейерштрасса это непрерывная функция. Следовательно, траектории W

непрерывны с вер 1. Проверим пункты 1-3 из **Опр.***.

1)Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)S_k(t)$ сходится в средне-квадратическом к величине W_t $\forall t \in [0,1]$. (Нужно проверить, что ряд сходится, т.е. проверить фундаментальность, т.е. $\mathrm{E}\sum\limits_{M}^{N} |\xi_k S_k|^2 \longrightarrow 0, M, N \longrightarrow 0$) [Потому, что и та и другая сходимости влекут сходимость по вероятности, а раз поточечно ряд сходится к $W(t)$, то сходится в среднеквадратичном]. Тогда $EW(t) = 0$: $|EW(t)| = |E(W(t) - W_n(t))|$ [т.к. $EW_n(t) = 0$] $\le$ [неравенство Коши-Буняковского] $\le$
$\le \sqrt{|E(W(t) - W_n(t))|^2} \to 0$. Т.к. $W_n(t) \to W(t)$ в среднем квадр.

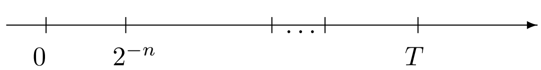
<u>Упражнение</u>. $cov(W(s), W(t)) = min(s,t)$ - равенство Парсеваля

<u>Упражнение</u>. $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ - гауссовский $\Leftrightarrow$ $\forall c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ $\sum\limits_k c_k \zeta_k$ - гауссовский $\Rightarrow$ $\sum c_k W_k$ - гауссовская величина •

(В лекциях этот кусок доказательства действительно скомкан - прим.ред.)

Задачи.

1.



$W_t:$ $\sum\limits_k |W(t_{k,n}) - W(t_{k-1,n})|^2 \longrightarrow T$ п.н. - доказать

2. $N = \{N_t,\ t \ge 0\}$ - пуассоновский процесс интенсивности λ

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{?} ?\ \ t \to \infty$$

Лекция 4

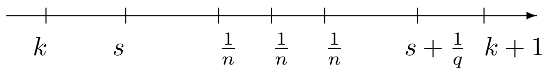
Т Е О Р Е М А.

Т Е О Р Е М А. (Виннер-Зигмунд-Пэли). С вероятностью единица траектории броуновского движения. $W = \{W_t, t \ge 0\}$ не дифференцируемы ни в одной точке полуоси $[0, +\infty)$.

Доказательство.

○ Рассмотрим промежуток $[k, k+1)$, где $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Если $W_t(\omega)$ дифференцируемы в точке $s \in [k, k+1)$, то $|W_t - W_s| \le l|t-s|$, для некоторого $l \in \mathbf{N}$ и $t \in [s; s + \frac{1}{q})$ $q \in \mathbf{N}$. Из дифференцируемости следует дифференцируемость справа. А l - зависит от s и ω и q зависит от ω, s и

l. Рассмотрим совокупность $A_{l,n,i} = \{|W(k+\frac{j+1}{n}) - W(k+\frac{1}{n})| \le \frac{7l}{n}\}$ $j = i+1, i+2, i+3$. Пусть n>4q. Найдем i=i(s,n)



Если $W_t(\omega)$ дифференцируема в точке $s \in [k, k+1)$, то

$$\left|W\left(k+\frac{j+1}{n}\right) - W\left(k+\frac{j}{n}\right)\right| = \left|\left(W\left(k+\frac{j+1}{n}\right) - W(s)\right) - \left(W\left(k+\frac{j}{n}\right) - W(s)\right)\right| \le$$

$$\le \left|W\left(k+\frac{j+1}{n}\right) - W(s)\right| + \left|W\left(k+\frac{j}{n}\right) - W(s)\right| \le \frac{4}{n}l + \frac{3}{n}l = \frac{7l}{4}$$

Пусть D_k - множество таких точек на $[k; k{+}1)$, для которых W_t - дифференцируема
Тогда

$$D_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcap_{i=1}^{n} A_{l,n,i}$$

Для каждых $l, q \in \mathbf{N}$ $P(\bigcap\limits_{n>4q} \bigcup\limits_{k=l}^{n} A_{l,n,i}), P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n) \le \liminf\limits_{n} P(B_n)$.

Следовательно, $P(\bigcap\limits_{n>4q} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{l,n,i}) \le \liminf\limits_{n} P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{l,n,i}) \le \liminf\limits_{n} \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_{l,n,i})$

$P(A_{l,n,i})$ =[т.к. приращения независимы]=

$= P^3\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \frac{7l}{n}\right) \overset{D}{=} \left|W\left(k+\frac{j+1}{n}\right) - W\left(k+\frac{j}{n}\right)\right|$

$P\left(\frac{\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}} < \frac{\frac{7l}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = P(\left(|\xi| < \frac{7l}{\sqrt{n}}\right) = [\xi \sim N(0,1)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{7l}{\sqrt{n}}}^{\frac{7l}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{14l}{\sqrt{n}} = c\frac{l}{\sqrt{n}}$

В итоге

$$P(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}) \le \liminf_{n>4q} n \left(c\frac{l}{\sqrt{n}}\right)^3 = 0$$

Т.е.

$$P\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{l,n,i}\right) = 0$$

Всегда можно считать, что вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ пополнено. Т.е. если $P(A) = 0$, а $B \subset A$, то $\overline{P}(B) = 0$, имеем $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$

Т.о. $D_k \subset A, P(A) = 0$, т.к. пространство полное $P(D_k) = 0$, т.о. $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k) =$

0. •

Следущая теорема называется ТЕОРЕМОЙ Какутани - легко запомнить "как у Тани".

Т Е О Р Е М А. (Марковское свойство). $\forall$ фиксированного $a > 0$ процесс $Y_t = W_{t+a} - W_a, t > 0$ является броуновским движением, причем $\{Y_t, t \geq 0\}$ и $\sigma\{W_s, s \in [0; a]\}$ независимы.

Доказательство.

∘

Ясно, что $Y_0 = 0,\ Y_t$ имеет независимые приращения, $Y_t - Y_s \sim N(0, t-s)$ и траектории непрерывны.
Достаточно убедиться, что $(W_{s_1}, ..., W_{s_n})$ и $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n})$ независимы, $0 \leq t_1 < ... < t_n$. Вектор $(W_{s_1}, ..., W_{s_n})$ получается из вектора $(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, ..., W_{s_n} - W_{s_{n-1}})$ линейным преобразованием (домножением на матрицу).
Вектор $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n})$ получается линейным преобразованием из вектора $(Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, ..., Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})$.
То есть достаточно проверить независимость векторов $(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, ..., W_{s_n} - W_{s_{n-1}})$ и $(Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, ..., Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}})$, что очевидно. •

Можно ли в утверждении последней теоремы вместо константы a использовать случайную величину τ? Тогда $X_t = W(t + \tau) - W(\tau),\ t \geq 0$.

Опр.: Поток σ-алгебр F=$(F_t)_{t \in T},\ T \subset R^1$, называется *фильтрацией*, если $F_s \subset F_t\ \forall s < t,\ s, t \in T$.

Пример: $X = X_t, t \in T,\ \mathrm{F}^X = (F_t^X)_{t \in T}$ - естественная фильтрация, если $F_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}, s \in T$.

Опр.: $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ называется *марковским моментом относительно фильтрации* $(F_t)_{t \in T}$, если $\{\tau \leq t\} \in F_t\ \forall t \in T$. Если $\tau < \infty$ п.н., то τ называется *моментом остановки*.

Пример: $\{X_n, n \in N\}$ - последовательность действительных случайных величин, B - борелевское множество в R^1, $\tau = inf\{n : X_n \in \mathrm{B}\ \}, (\tau = \infty$, если $X_n \in \mathrm{B}\ \forall n)$.
В дискретном случае τ - марковский момент $\Leftrightarrow \{\tau = n\} \in F_n,\ \{\tau = n\} = \{X_1 \mathrm{B}, X_2 \mathrm{B}, ..., X_{n-1} \mathrm{B}, X_n \in \mathrm{B}\} \in F_n$.

Задача на 5+

Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ - процесс с п.н. непрерывными траекториями, принимающий $\forall t$ значения в метрическом пространстве (S, ρ). Определим $\tau = inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathrm{F}\}$, где F - завкнутое подмножество S. Тогда τ - марковский момент

остановки относительно F.
В частности для виннеровского процесса $W = \{W_t, t \geq 0\}$ и $\forall a > 0$ $\tau_a = inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$ - марковский момент, т.к. $\{a\}$ - замкнуто.

Упражнение: доказать, что τ_a - момент остановки.

Лекция 5

Т Е О Р Е М А. (Строго марковское свойство броуновского движения). Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ - броуновское движение. Пусть τ - момент остановки относительно естественной фильтрации $\mathrm{F}^W = (F_t^W)_{t \geq 0}$. Тогда
$X_t = W(t + \tau) - W(\tau),\ t > 0$ является броуновским движением, причём $X = \{X_t, t \geq 0\}$ и $F_\tau = \{\mathrm{A} : \mathrm{A} \cap \{\tau \leq t\} \in F_t\}$ независимы.

Доказательство.
$\circ$ Возьмем $\forall A \in \mathcal{F}_\tau$ и $\forall 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m$ $(m \in \mathbf{N})$. Для доказательства независимости $\mathcal{F}_\tau$ и X достаточно убедиться, что $P(A \cap ((X(t_1), \ldots, X(t_m)) \in B)) = P(A)P(\xi \in B)$ Здесь $\xi = (X(t_1), \ldots, X(t_m))$, а $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

Упражнение. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ независимы $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_1)$ и $\sigma(\mathcal{A}_2)$ независимы.

Если $\mathcal{A}$ - алгебра, то $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall A \in \sigma(\mathcal{A})$ $\exists A_\epsilon \in \mathcal{A} :\ |P(A) - P(A_\epsilon)| < \varepsilon$

$X(t, \omega) = W(t + \tau(\omega), \omega) - W(\tau(\omega), \omega)$
Считаем, что если $\tau(\omega) = \infty$ (с вероятностью 0), то $X(t, \omega) = 0$
Рассмотрим $t_{k,n} = k2^{-n},\ k = 0, 1, \ldots$. Пусть:

$$A_{1,n} = \{\tau \leq 2^{-n}\}$$

$$\vdots$$

$$A_{k,n} = \{(k-1)2^{-n} < \tau \leq k2^{-n}\}$$

Введем $\tau_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} k2^{-n}\mathbf{I}_{A_{k,n}},\ n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\tau_n \to \tau$ п.н. $n \to \infty$
Кроме того, τ_n - марковский момент, т.к. $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau \leq k2^{-n}\}$, где $k = max\{l\ :\ l2^{-n} \leq\}$.
Потому, что $\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}^W_{k,n} \subset \mathcal{F}_t$
$W(t + \tau(\omega), \omega) \overset{n \to \infty}{\to} W(t + \tau(\omega), \omega)$ п.н. [в силу непрерывности п.н. траекторий W]. $\{W(t + \tau_n(\omega), \omega) \leq z\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{W(t + k2^{-n}, \omega) \leq z, \tau_n = k2^{-n}\}$. Выражение в скобках принадлежит $\mathcal{F}$

На втором курсе мы должны были усвоить, если есть последовательность сл.в., будет ли предел их сл.в.?$(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\eta_n \to \eta$ п.н., $\eta_n \in \mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$, тогда $\eta \in \overline{\mathcal{F}}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$, если пространство пополнено, тогда предел - с.в.

Мы хотим доказать, что $P(A \cap \{\xi \in B\}) = P(A)P(\xi \in B)$,
где $\xi = (X(t_1), \dots, X(t_m))$.

$$E(\mathbf{I}_A \mathbf{I}_{\{\xi \in B\}}) = E\mathbf{I}_A E\mathbf{I}_{\{\xi \in B\}} \qquad (*)$$

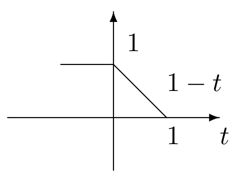
Достаточно рассматривать лишь *замкнутые* $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$

Упражнение. (Свойство регулярности) $\forall B$ (борелевского множества) в метрическом пространстве и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_\varepsilon$(замкнутое), G_ε(открытое), т.ч. $F_\varepsilon \subset B \subset G_\varepsilon$ и $P(G_\varepsilon \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Для проверки (*) достаточно установить, что

$$E(\mathbf{I}_A f(\xi)) = E\mathbf{I}_A Ef(\xi)$$

Где f непрерывна и ограничена: $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$
Почему же можно использовать f вместо $\mathbf{I}_{\{\xi \in B\}}$? Введем $\varphi(t)$:



и рассмотрим $g_k(x) = \varphi(k\rho(x, B))$, где $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) : y \in B\}$.
Расстояние до замкнутого множества есть непрерывная функция. g - является непрерывной и ограниченной, кроме того, очевидно, что $g_k(x) \overset{k\to\infty}{\to} \mathbf{I}_A$.
(Вспомним, ту самую "шляпку", которую часто рисует лектор). По теореме о мажорируемой сходимости Лебега, из соотношения $E\mathbf{I}_A f(\xi) = E\mathbf{I}_A Ef(\xi)$
("вроде сказки о Кащее: дуб $\to$ сундук ....")
$\mathbf{I}_A f(\xi)$, введем вектор
$\xi_n = (W(t_1 + \tau_n) - W(\tau_n), \dots, W(t_m + \tau_n) - W(\tau_n))$
$\xi_n \to \xi$ п.н. в силу непрерывности бр.дв.
Снова по теореме Лебега:
$E\mathbf{I}_A f(\xi) = \lim\limits_n E\mathbf{I}_A f(\xi_n)$
В силу счетной аддитивности интеграла Лебега:

$$E\mathbf{I}_A f(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} E\mathbf{I}_A f(\xi_n)\mathbf{I}_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\mathbf{I}_{A\cap\{\tau_n = k2^{-n}\}} f((W(t_1 + k2^{-n}) - W(k2^{-n}) \dots W(t_m + k2^{-n}) - W(k2^{-n}))) =$$

$A_{k,n} \in \mathcal{F}_{k2^n}$
по марковскому свойству броуновского движения:
$(W(t_1 + k2^{-n}) - W(k2^{-n}), \dots, W(t_m + k2^{-n}) - w(k2^{-n})) \overset{D}{=} (W(t_1), \dots, W(t_m))$

независит от $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$
Следовательно

$$E(f(W(t_1),\dots,W(t_m)))\sum_{k=1}^{\infty}E_{\mathbf{I}_{A\cap\{\tau_k=k2^{-n}\}}}=$$
$$=E(f(W(t_1),\dots,W(t_m)))E\mathbf{I}_A$$

Таким образом, мы доказали, что $E\mathbf{I}f(\xi)=E\mathbf{I}_AEf(W(t_1)\dots W(t_m))$. Независимость: $\mathcal{F}_\tau$ и X доказана.
Возьмем $A=\Omega\Rightarrow\xi\overset{D}{=}(W(t_1)\dots W(t_m))$
$Ef(\xi)=Ef(W(t_1)\dots W(t_m))$ •

Принцип отражения

Пусть τ - м.о. относительно $\mathcal{F}^W$

Т Е О Р Е М А. "Отраженный процесс"$\{Z=Z_t,t\geq 0\}$ является броуновским движением. Если $\tau=\infty$ (с вер. 0), то полагаем $Z(t,\omega)=W(t,\omega)$ (Т.е. отраженный процесс равен первоначальному)

Доказательство.
$\circ$ $Z(t,\omega)=W(t,\omega)\mathbf{I}_{\{\tau\geq t\}}+(2W(\tau(\omega),\omega)-W(t))\mathbf{I}\{\tau,t\}$
Очевидно, что $Z(t)$ при каждом t является случайной величиной. Кроме того, траектории Z лежат в пространтстве $(C_0[0,\infty),\rho)$, являющееся польским пространством.

Упражнение. Доказать, что, поскольку траектории Z непрерывны, то Z является сл. элементом со значениями в $C_0[0,\infty]$
Введем отображение "склеивания"в точке $b\in[0,\infty)$ - $h(b,f,g)$, где $f,g\in C_0[0,\infty)$ $h(b,f,g)=f(b)+g(t-b),t\geq b$
Отображение является непрерывным отображением $[0,+\infty)\times C_0[0,+\infty)\times C_0[0,+\infty)\to C[0,+\infty)$ Определим процесс $U(t)=W(t\wedge\tau)$ $(=W(min(t,\tau)))$
$W=h(\tau,U,X)$
$Z=h(\tau,U,-X)$

$$(\tau,U,X)\overset{D}{=}(\tau,U,-X)\leftarrow \text{нужно доказать}$$

Дело в том, что (τ,U) является (доказать это в качестве Упражнения) $\mathcal{F}$ - измеримым вектором, а по строго марковскому свойству X и $\mathcal{F}_\tau$,$-X$ и $\mathcal{F}_\tau$ - независимы. Следовательно,
$Law(\tau,U,X)=Law(\tau,U)\bigotimes Law(X)$ $(Law(X)=Law(W))$.
Аналогично раскладывается в силу независимости $Law(\tau,U,-X)$.

Т Е О Р Е М А. (Башелье). $\forall z>0$ $P(\sup\limits_{t\in[0,T]}W(t)>z)=2P(W(T)>z)$

Т Е О Р Е М А. (Хинчин). С вероятностью 1 :

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2tlnlnt}} = 1$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2tlnlnt}} = -1$$

Лирическое отступление. *Произошел пожарв больнице, потушили его и начальник расчета докладывает: "4 человека пострадало- 2 откачали". Главврач: "Странно, горело паталогоанатомическое отделение, а сотрудников в нем не было..."*

Л Е М М А. $\forall t, x, y \geq 0$ $P(W(t) < y - x, M(t) \geq y) = P(W(t) > Y + x)$, где $M(t) = \max\limits_{s\in[0,t]} W(s)$.
(Доказательство будет в следующей лекции.)

Лекция 6

Доказательство. (леммы)
$\circ \tau_y = \inf\{s : \ W(s) = y\}$. τ_y - момент первого попадания в замкнутое множество $\{y\}$ непрерывного процесса W. τ_y - момент остановки (вопрос лекции 4). $\{M(t) \geq y\} = \{\tau_y \leq t\}$. Пусть $\sigma_y = \inf\{t \geq 0, \ Z(t) = y\}$. Очевидно, $\tau_y = \sigma_y$. Заметим, что $(\tau_y, W) \stackrel{D}{=} (\sigma_y, Z)$
$P(\tau_y \leq t, W \in B) = P(M(t) \geq y, W \in B) = P(W \in G_t \cap B)$. С другой стороны, $P(\sigma_y \leq t, \ Z \in B) = P(Z \in G_t \cap B) = P(W \in G_t \cap B)$
$P(\tau_y \geq t, W(t) < y - x) = P(\sigma_y \leq t, Z(t) < y - x) = P(\sigma_y \leq t, W(t) > y + x) =$
$= P(\tau_y \geq t, W(t) > y + x) = P(W(t) > y + x)$. Заметим, что если $W(t) > y + x$, то $M(t) \geq y$. А $\{M(t) \geq t\} \ \sim \ \{\tau_y \geq t\}$ •

Следствие. (Башелье) $P(M(t) \geq y) = 2P(W(t) \geq y)$
Доказательство.
$\circ$ $P(M(t) \geq y, W(t) < y - x) = P(W(t) > y + x)$
Положим x = 0
$P(M(t) \geq y, W(T) < y) = P(W(t) > y)$
Далее
$P(M(t) \leq y) = P(M(t) \geq y, W(T) < y) + P(M(t) \geq y, W(T) \geq y) =$
$= P(W(t) > y) + P(W(t) \geq y) = 2(W(t) \geq y)$ •

Слабая сходимость вероятностных мер.

Опр.: Последовательность мер Q_n, заданных на метрическом пространстве (S, ρ) с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(S)$, называется *слабо сходящейся* к мере Q (на (S, $\mathcal{B}(S)$)), если $\int\limits_S f dQ_N \to \int f dQ$ (*)

$\forall f \in C_b(S, \mathbf{R})$ (можно $\mathbf{C}$), т.е. для любой непрерывной и ограниченной функции $f: S \to \mathbf{R}$

Часто пишут $\langle f, Q \rangle$ вместо $\int\limits_S f dQ$.

Л Е М М А. Если $Q_n \Rightarrow Q$ и $Q_n \Rightarrow Q'$, то $Q = Q'$

Доказательство.

$\circ$ из (*) вытекает, что

$$\int\limits_S f dQ = \int\limits_S f dQ' \ \forall f \in C_b(S, \mathbf{R})$$

Следовательно,

$$\int\limits_S \mathbf{I}_F dQ = \int\limits_S \mathbf{I}_F dQ'$$

Для любого замкнутого F. Отсюда вытекает, что $Q(B) = Q'(B) \ \forall B \in \mathbf{B}(S)$.

Т Е О Р Е М А. (А.Д. Александров). $Q_n \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

1^o $\limsup\limits_n Q_n(F) \le Q(F)$ $\forall$ замкнутого F

2^o $\liminf\limits_n Q_n(F) \ge Q(F)$ $\forall$ открытого G

3^o $\lim\limits_n Q_n(B) = Q(B) \ \forall B \in \mathcal{B}(S): \ Q(\partial B) = 0$

Доказательство.

$\circ$ Заметим, что исходное определение (*) равносильно следующему

$$\limsup_n < f, Q_n > \le < f, Q > \ \ \forall f \in C_b(S, \mathbf{R})$$

Достаточно взять $(-f) \in C_b(S, \mathbf{R})$.

$\limsup\limits_n \langle -f, Q_n \rangle \ \le \ \langle -f, Q \rangle$

$\liminf\limits_n \langle -f, Q_n \rangle \ \ge \ \langle -f, Q \rangle$

Покажем, что (*) $\Rightarrow 1^o$. Пусть F - замкнутое множество в S. Введем фиксированные $f_F^\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon\rho(x, F))$. $f_F^\varepsilon(x)$ - непрер. и огр. $\mathbf{I}_F(x) \le f_F^\varepsilon(x), \ \forall x \in S \ \forall \varepsilon > 0$

Тогда $\langle \mathbf{I}_F, Q_n \rangle \ \le \ \langle f_F^\varepsilon(x), Q_n \rangle$. Поэтому $\limsup\limits_n Q_n(F) \le \limsup\limits_n \langle f_F^\varepsilon(x), Q_n \rangle \le \langle f_F^\varepsilon(x), Q \rangle$

По теореме Лебега $\langle f_F^\varepsilon(x), Q \rangle \overset{\varepsilon\downarrow 0}{\to} \langle \mathbf{I}_f, Q \rangle = Q(F)$.

Итак, $\limsup\limits_n Q_n(F) \le Q(F)$ $\ \forall$ замкнутых F. Докажем теперь, что $1^o \Rightarrow (*)$.

Достаточно убедиться, что

$$\limsup_n \langle f, Q_n \rangle \le \langle f, Q \rangle$$

$\forall$ непрерывной ф. f, такой что $0 < f(x) < 1 \ \forall x \in S$. Для других f получаем линейным преобразованием af+b.

Введем для $k \in \mathbf{N}$ множества $F_i = \{x: \ f(x) \geq \frac{i}{k}\}$ $i = 0, 1, \ldots, k$.. F_i-замкнут как прообраз замкнутого при непрерывном отображении. Положим $C_i = F_{i-1} \setminus F_i \ \ i = 1, \ldots, k$
На множестве C_i $\ \frac{i-1}{k} \leq f(x) < \frac{i}{k}$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} Q(c_i) \leq \int\limits_S f dQ \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} Q(c_i)$$

$Q(c_i) = Q(F_{i-1}) - Q(F_i)$, тогда

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Q(F_i) \leq \int\limits_S f dQ \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum i = 1^k Q(F_i)$$

Аналогично можно написать

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Q_n(F_i) \leq \int\limits_S f dQ_n \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} Q_n(F_i)$$

Следовательно, $\langle f, Q_n \rangle \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} Q_n(F_i)$, т.е. $\limsup\limits_n \langle f, Q_n \rangle \leq \limsup\limits_n (\ldots)$ и в силу $1^o \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum\limits_{i=1}^{k} Q(F_i) \leq \frac{1}{k} + \langle f, Q \rangle$, т.к. F замкнуто. Осталось устремить k в бесконечность. В итоге

$$\limsup_n \langle f, Q_n \rangle \leq \langle f, Q \rangle$$

$\forall$ непрер. $f \in (0, 1)$.

$$\begin{array}{ccc} (*) & & \\ \updownarrow & & \\ 1^o & \leftrightarrow & 2^o \end{array}$$

Импликация из 1 в 2 и обратно очевидна.

Докажем, что $1^o (2^o) \mapsto 3^o$
Пусть [B] - замыкание B
B^o - внутренность B
$B^o \subset B \subset [B]$
В силу 1^o и 2^o имеем для $\forall B \in \mathcal{B}(S)$

$$Q(B^o) \leq \liminf_n Q_n(B^o) \leq \liminf_n Q_n(B) \leq \limsup_n Q_n(B) \leq \limsup_n Q_n([B]) \leq Q([B])$$

Если $Q(\partial B) = 0$, то $Q(B^o) = Q([B])$. Следовательно $\exists \lim\limits_n Q_n(B) = Q(B)$. Итак, 3^o доказано. Покажем $3^o \mapsto 1^o$. Пусть F- замкнутое множество в S. Рассмотрим $F^{(\varepsilon)} = \{x \in S: \ \rho(X, F) < \varepsilon\}$. $\partial F^{(\varepsilon)} \cap \partial F^{(\delta)} = \emptyset \ \ \varepsilon \neq \delta$.
Следовательно существует не более счетное множество ε_n : $\ Q(\partial F^{(\varepsilon_n)}) > 0$
Возьмем $\{\nu_n\}$ $\ \nu \downarrow 0$ $\ Q(\partial F^{(\nu_m)}) \neq 0$ По свойству 3^o, $Q_n(F^{(\nu_m)} \to Q(F^{(\nu_m)})$

$$\limsup_n Q_n(F) \leq \limsup_n Q_n(F^{(\nu_m)}) = Q(F^{(\nu_m)})$$

Устремим $m \to \infty$. Тогда $Q(F^{(\nu_m)}) \to Q(F)$. В силу непрерывности меры, т.к. $F^{(\nu_m)} \to F$.

Опр.: $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ называется *слабо относительно компактным*, если из любой последовательности $\{Q_n\}$ можно извлечь слабо сходящуюсю подпоследовательность.

Упражнение. $Q_n \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда
1. $\{Q_n\}$ слабо относительно компактным.
2. сущ. $\mathcal{H} \subset C_b(S, \mathbf{R})$
2.a. $\forall h \in \mathcal{H}$ сущ. $\lim\limits_n \langle h, Q_n\rangle$
2.b. если $\langle Q, h\rangle = \langle Q', h\rangle$
$\forall h \in \mathcal{H}$, то $Q = Q'$ на $\mathcal{B}(S)$.

Опр.: Семейство мер $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ называется *плотным*, если $\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ компакт $K_\varepsilon \subset S$, такой что $Q_\alpha(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon \quad \forall\alpha \in \Lambda$.

Т Е О Р Е М А. (Прохоров). Если $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ плотно, то $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ является слабым относительно компактным. И наоборот, если семейство мер $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ слабо относительно компактное и пространство (S, ρ) - польское, то $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ - плотно.

Опр.: С.э. $X_n \quad (X_n : \ \Omega_n \to S)$ называется сх-ся по распределению к сл. элементу X ($X : \ \Omega \to S$), если

$$P_n X_n^{-1} \Rightarrow P X^{-1}$$

т.е. распределение X_n слабо сходится к распределению X. Иначе говоря $X_n \xrightarrow{D} X$, если $E_n f(X_n) \to Ef(x)$ $n \to \infty$ $\forall f \in C_b(S, \mathbf{R})$.

Упражнение. Пусть $X_n \xrightarrow{D} X$ и $h : \ S \to \mathbf{R}$ - непрерывное отображение. Тогда $h(X_n) \xrightarrow{D} h(X)$
Эквивалентная формулировка. $Q_n \Rightarrow Q$, тогда $Q_n h^{-1} \Rightarrow Q h^{-1}$. Об этом говорили на первой лекции: $X = \{X_t, \ t \in T\} \ : \ \omega \mapsto X(\omega)$. Возникает мера P_x на $\mathcal{B}_T$. Вся теория "стройно"работает, если $\mathcal{B}_T =$ борелевской σ-алгебре в пространстве $(S_T, \mathcal{B}(S_T)$.
Упражнение. В пространстве $C[0,1]$ выполнено $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}(S_T)$.

Упражнение. $Q_n \Rightarrow Q$ в пространстве $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда
1). $\{Q_n\}$ плотно (по т. Прохорова это равносильно слабой относительной компактности)
2). Слабо сх-ся все конечномерные распределения мер Q_n к к.м.р. Q, т.е. $Q_n \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k} \Rightarrow Q\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_k}$, где $\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1), \ldots, x(t_k))$ - непрерывное отображение $C[0,1]$ в R^k, а $x \in C[0,1]$.

Для процессов $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, \ t \in [0,1]\}$ с непрерывными траекториями

$X^{(n)} \xrightarrow{D} X$
1. Семейство распределений $X^{(n)}$ плотно.
2. $(X^{(n)}_{t_1}, \dots, X^{(n)}_{t_k}) \xrightarrow{D} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ $\forall t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ $\forall k \in \Lambda$.

У нас есть последовательность $\xi_1, \xi_2, ...$ - н.о.р.с.в., $\mathrm{E}\xi_1 = 0$, $\mathrm{E}\xi_1^2 = 1$. Разделим отрезок [0,1] на n равных частей. $S_k(w) = \xi_1(w) + ... + \xi_k(w)$.
С помощью линейной интерполяции построим график функции $S_k(w)/\sqrt{n}$.
Получаем случайную ломанную $S^{(n)}(t, w)$.

график график график график график график график график график

$\mathrm{P}_{S^{(n)}} \Rightarrow \mathbf{W}$, $S^{(n)} \xrightarrow{D} \{W_t, t \in [0,1]\}$ (принцип инвариантности).
При каждом t траектория $S^{(n)}$ - непрерыфвные функции $\to S^{(n)}$ является случайным элементом со значениями в пространстве $C[0,1]$ (польское).
$\rho(x(t), y(t)) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$, - метрика. Обозначение: $P_n = Law(S^{(n)})$ - распределение на $B(C[0,1])$.

Лекция 7

Т Е О Р Е М А. (Донскер). $P_n \Rightarrow \mathbf{W}$ при $n \to \infty$,
где $\mathbf{W} = Law(\{W_t, t \in [0,1]\})$ - мера Виннера, т.е. распределение броуновского движения.

Напоминание: $P_n \Rightarrow P$ на (S, ρ), если $\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_s f dP$, $\forall\ f : S \to R$, f - непрер. и огр.
$\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ (случайный элемент), если $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$, т.е. $\mathrm{E}_n f(\xi_n) \to \mathrm{E} f(\xi), n \to \infty$.
Здесь E_n - усреднение по P_n на том вероятностном пространстве, где заданы ξ_n. Е - усреднение по Р на том вероятностном пространстве, где заданы ξ.

Таким образом, для любого непрерывного функционала $h : C[0,1] \to R$ выполнено $h(S^{(n)}) \xrightarrow{D} h(\{W_t, t \in [0,1]\})$.

При построении $S^{(n)}$ мы рассматривали $X_1, X_2, ...$ -н.о.р.; $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1$ (*). Закон распределения X_i может быть любым, удовлетворяющим условиям (*). Тогда для любого непрер. функционала h верно $h(S^{(n)}) \xrightarrow{D} h(\{W_t, t \in [0,1]\})$.
В этом и состоит инвариантность.

Этот результат содержит ЦПТ.
Для таких X_i ЦПТ утверждает: $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$. Почему тогда ЦПТ является следствием принципа инвариантности? Возьмём функционал h : $h(x(\cdot)) = x(1)$, где $x \in C[0,1]$. Очевидно, что h - непрерывный функционал. Итак, если мы рассмотрим $h(S^{(n)}) \xrightarrow{D} h(\mathbf{W}) = W(1), \mathbf{W} = \{W_t, t \in [0,1]\}, S^{(n)}$

- ломанная. Значит, так как
$h(S^{(n)}) = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ и $W(1) \sim N(0,1)$, то $\Longrightarrow$ ЦПТ.
Этот подход позволяет находить распределение $h(W)$, отправляясь от распределения $h(S^{(n)})$.

Т.е. имеется принцип инвариантности и мы можем рассмотреть любые ломанные, тогда выберем $X_1, X_2, ...$ - простыми, а именно: $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = 1/2,\ EX_k = 0,\ EX_k^2 = 1$.

По этой схеме можно найти $\sup\limits_{t\in[0,1]} S^{(n)}(t)$, тогда по принципу инвариантности

$$\sup_{t\in[0,1]} S^{(n)}(t) \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} W_t \text{ и } \sup_{t\in[0,1]} S^{(n)}(t) = \frac{\max\limits_{0\le k\le n} S_k}{\sqrt{n}} .$$

Упражнение. Показать, что $\frac{\max\limits_{0\le k\le n} S_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sup\limits_{t\in[0,1]} W_t$.

Пусть $X_{n,i}, i = 1, ..., m_n$ - независимые случайные величины т.,ч. $EX_{n,i} = 0,\ EX_{n,i}^2 = \sigma_{n,i}^2 > 0$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = 1$ - условие нормриовки (если это не выполнено, то без ограничения общности можно разделить все с.в. на константу). Определим случайную ломанную более общим способом:

Замечание: если $X_1, X_2, ...$ - последовательность, то $X_{n,i} = \frac{X_i}{\sqrt{n}}, i = 1, ..., n, \Longrightarrow$ это действительно более общая схема.

Т Е О Р Е М А. (Прохоров). Пусть серии независимых случайных величин $X_{n,i}, i = 1, 2, ...$таковы, что выполнено условие Линдеберга:
$\forall\varepsilon > 0 \sum\limits_{k=1}^{m_n} E|X_{n,k}|^2 I\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} \to 0\ (n \to \infty)$, тогда

$$U_n \xrightarrow{D} W = \{W_t, t \in [0,1]\} \text{ - броуновское движение.}$$

Из этой теоремы также вытекает ЦПТ (опять берём $h(x(\cdot)) = x(1)$).

Эти условия (Линдеберга) оптимальны: они являются необходимыми и достаточными, если слагаемые удовлетворяют условию равномерной малости: $\max\limits_{1\le k\le m_n} \sigma_{n,k}^2 \to 0,\ n \to \infty$. (Это условие Феллера)

Введём *метрику Леви-Прохорова*:
$\pi(P,Q) := \inf\{\varepsilon > 0 :\ P(B) < Q(B^\varepsilon) + \varepsilon$ и $Q(B) < P(B^\varepsilon) + \varepsilon,\ \forall B \in B(S)\}$, где (S,ρ) - польское пространство, а $B^\varepsilon = \{x \in S :\ \rho(x,B) < \varepsilon\},\ \rho(x,B) = \inf\limits_{y\in B} \rho(x,y)$.

Т Е О Р Е М А. $P_n \Rightarrow P$ тогда и только тогда, когда $\pi(P_N, P) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Т Е О Р Е М А (Боровков). Пусть $E|X_{n,i}|^s < \infty$ для некот. $s \in (2,3]$. Для серий $X_{n,i},\ i = 1, ..., m_n$ - нез. и $EX_{n,i} = 0,\ E|X_{n,i}|^s < \infty$ введём дробь Ляпунова: $L_{n,s} := \sum\limits_{k=1}^{m_n} E|X_{n,k}|^s$. (Почему дробь? Так как если бы сумма $\sum\limits_{k=1}^{m_n} \sigma^2_{n,k} = 1$, иначе бы поделили.) Итак, теорема:

$$\pi(Law(U_n), \mathbf{W}) \le C L_{n,s}^{1/(s+1)}.$$

Оценка скорости сходимости. Улучшение можно получить, только улучшив const, а так скорость правильная, в смысле, что правильный порядок.

Т Е О Р Е М А (Скороход). Пусть $X_1, X_2, ...$ - нез. и $EX_i = 0,\ E|X_i|^2 = 1$. Тогда на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P) можно построить новую последовательность $Y_1, Y_2, ...$ такую, что $Law(X_1, X_2, ...) = Law(Y_1, Y_2, ...)$ и построить броуновское движение $W = \{W_t, t \ge 0\}$ таким образом, что $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k = S_n = W(\sum\limits_{k=1}^{n} T_k)$, где сл. вел. $T_k \ge 0,\ ET_k = EX_k^2$.
(Суммы независимых случайных величин можно рассматривать как броуновское движение, остановленное в случайный момент времени.)

Т Е О Р Е М А (Штрассен). $S_n - W(n) = O(\sqrt{n \ln\ln n})$ п.н. при $n \to \infty$. (Сумму независимых случайных величин можно приблизить гауссовским законом, сильный принцип инвариантности.)

Т Е О Р Е М А (Штрассен, функциональный закон повторного логарифма). Пусть $X_1, X_2, ...$ - нез. и $EX_i = 0,\ E|X_i|^2 = 1$. РИСУНОК!!!

С вероятностью 1 множество $\{V_n(t)\}$ предкомпактно в $C[0,1]$ и множество предельных точек этого семейства совпадает с "шаром Штрассена", т.е. множеством $\mathbf{K} = \{x(t) = \int\limits_0^t y(s)ds,\ \int\limits_0^1 y^2(s)ds \le 1,\ t \in [0,1]\}$.
Из этой теоремы легко вывести обычный закон повторного логарифма.

МАРТИНГАЛЫ.

Пусть есть пространство $(\Omega, F, P),\ \xi-$ случ. вел. $A-\sigma-$алгебра и $A \subset F$.

Опр.: $\eta = E(\xi|A)$ - *условное математическое ожидание*, если
1) $\eta \in A/B(R)$ - измерима относительно $\sigma-$алгебры A;
2) $\forall G \in A:\ E\eta I\{G\} = E\xi I\{G\}$.

Если $E|\xi| < \infty$, то $\eta = E(\xi|A)\exists$ и определена однозначно с точностью до значений на множестве меры 0.

Опр.: пусть F=$(F_t)_{t\in T}$ - некоторая фильтрация в (Ω, F, P). Процесс $\{X_t, t \in T\}$ называется *мартингалом (относительно фильтрации)*, если
1. $X_t \in F_t/B(R), t \in T$ - изм. отн. F_t;
2. $E|X_t| < \infty$ (интегрируемость всех с.в.);
3. $E(X_t|F_s) = X_s$ п.н., $\forall\ s \le t; s, t \in T$.

Упражнение. Пусть $E\xi^2 < \infty$. Тогда $E(\xi|A) = Proj_{L^2(\Omega,A,P)}\xi$.

Часто пишут $(X_t, F_t)_{t\in T}$, подчёркивая роль фильтрации в определении мартингала.

Опр.: $F_t^X = \sigma\{X_s,\ s \le t,\ s \in T\}$ - порождена течением процесса X до момента времени t. F_t^X - естественная фильтрация.

Примеры.

1) Пусть $\{X_t,\ t \le 0\}$ - процесс с нез. приращениями. Пусть $EX_t = a\ \forall t$. Тогда $(X_t, F_t^X)_{t\ge 0}$ - мартингал.
Проверка. Первые два условия, очевидно, выполнены. Проверим третье:
$E(X_t|F_t^X) = E(X_t - X_s + X_s|F_s^X) = E(X_t - X_s|F_s^X) + E(X_s|F_s^X)$.(*)
Вспомним, что $E(\xi|A) = \xi$, если ξ - изм. отн. A ; $E(\xi|A) = E\xi$, если ξ не зависит от A, $E|\xi| < \infty$. Таким образом, второе слагаемое в (*) $E(X_s|F_s^X) = X_s$, а первое $E(X_t - X_s|F_s^X) = EX_t - X_s = a - a = 0$, т.к. процесс - с независимыми приращениями, т.е. $X_t - X_s$ не зависит от F_S^X.
Отсюда видно, что броуновское движение - мартингал, а пуассоновский процесс - нет, т.к. $E()$ зависит от t.

Если $(X_t, F_t)_{t\in T}$ - мартингал, то $EX_t = E(E(X_t|F_s)) = EX_s,\ \forall s, t \in T$.

$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ - сумма нез. сл.в.; $F_n = \sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\},\ E|\xi_k| < \infty$. Суммы независимых сл. величин. образуют мартингал $\Longleftrightarrow$ центрированы.

2) Пусть P и Q - меры на (Ω, F). Пусть $(F_t)_{t\in T}$ - некоторая фильтрация. Предполагаем, что $\exists X_t = \frac{dP_t}{dQ_t}$ - производная Радона-Никодима, где $P_t = P|_{F_t}, Q_t = Q|_{F_t}$. Тогда (X_t, F_t) - мартингал, т.к.
$\forall s \le t; s, t \in T,\ E(X_t|F_s) = X_s \Longleftrightarrow \int\limits_A X_t dP = \int\limits_A X_s dP$.

3) Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ - нез.сл.вел; $E\xi_k = 1, k \ge 1$. Положим $X_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Тогда $(X_n, F_n)_{n\ge 1}$ - мартингал, где $F_n = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$.

4) *Мартингал Леви.* Пусть $(F_t)_{t\in T}$ - некоторая фильтрация. Пусть ξ - сл.вел. т.,ч. $E|\xi| < \infty$. Положим $X_t = E(\xi|F_t), t \in T$. Тогда (X_t, F_t) - мартингал.

Упражнение. Доказать, что не каждый мартингал можно представить в виде мартингала Леви.

Опр.: Семейство случ. величин $\{\xi_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если $\lim\limits_{c\to\infty} \sup\limits_{\alpha}\{\ E\ |\xi_\alpha| I\{|\xi_\alpha| > c\}\ \} = 0.$

В виде мартингала Леви представляются те и только те мартингалы, которые равномерно интегрируются.

Опр.: $(X_t, F_t)_{t\in T}$ - *субмартингал*, если:
1. $X_t \in F_t/B(R), t \in T$ - изм. отн. F_t;
2. $E|X_t| < \infty$;
3. $E(X_t|F_s) \geq X_s,\ \forall\ s \leq t; s, t \in T.$

Опр.: $(X_t, F_t)_{t\in T}$ - *супермартингал*, если:
1. $X_t \in F_t/B(R), t \in T$ - изм. отн. F_t;
2. $E|X_t| < \infty$;
3. $E(X_t|F_s) \leq X_s,\ \forall\ s \leq t; s, t \in T.$

Если (X_s, F_s) - супермартингал, то $(-X_s, F_s)$ - субмартингал.

Пример. Пусть $(X_t, F_t)_{t\in T}$ - мартингал и h - выпуклая функция, тогда $(h(X_t), F_t)_{t\in T}$- субмартингал.

Опр.: последовательность $(\xi_n, F_n)_{n\geq 0}$ называется *мартингал-разностью*, если $E(\xi_n|F_{n-1}) = 0$ п.н.
(Происх. названия. Если $(\xi_n, F_n)_{n\geq 0}$ - мартингал, то $\xi_n = \triangle X_n = X_n - X_{n-1}, \triangle X_0 = 0$. Надо проверить, что $E(X_n|F_m) = X_m \iff E(\triangle X_n|F_{n-1}) = 0$.)

Опр.: процесс $\{A_n,\ n \geq 0\}$ -называется *предсказуемым*, если $A_n \in F_{n-1}/B(R)$. (Пишут (A_n, F_{n-1}).)

Т Е О Р Е М А (Дуб). Пусть (X_n, F_n) - некоторый случ. процесс, $E|X_n| < \infty$. Тогда $X_n = M_n + A_n$, где M_n - мартингал, A_n - предсказуемый процесс и $A_0 \equiv 0, F_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$. Такое разложение единственно.

Упражнение. $P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = 1/2\ , S_n = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n,\ S_0 = 0.$ Доказать, что $|S_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} sgn(S_{k-1})\triangle S_k + L_n(0)$, где $L_n(0)$ - число нулей, $\{k = \{1, ..., n\},\ S_{k-1} = 0\}$. Это дискретный вариант формулы Танака.

Лекция 8

Доказательство:(теоремы Дуба)
$\circ$ Пусть (*) разложение справедливо. Тогда $\triangle X_n = \triangle M_n + \triangle A_n$. $E(\triangle X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(\triangle M_n|\mathcal{F}_{n-1}) + E(\triangle A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \triangle A_n$, т.к.

во-первых $E(\triangle M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$, т.к. это мартингал-разность.

во-вторых A - предсказуемая, а значит $\mathcal{F}_{n-1}$-измерима.

Итак, $\triangle A_n = E(\triangle X_n|\mathcal{F}_{n-1})$, т.к. $A_0 = 0$, то $A_n = \sum E(\triangle X_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Единственность доказана.
Обратно. Положим $A_0 \equiv 0$
$A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} E(\triangle X_k|\mathcal{F}_{k-1})$ - предсказ. Пусть $M_n = X_n - A_n$, тогда $\triangle M_n = \triangle X_n - \triangle A_n = \triangle X_n - E(\triangle X_n|\mathcal{F}_{n-1})$
$E(\triangle M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0, \bullet$
Замечание. Из доказательства видно, что
X -субмартингал $[E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n]$
$\Updownarrow$
A - не убывает $[\triangle A_n \geq 0]$

Пример. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ - н.о.р.с.в. $\varepsilon_k = \pm 1$ с вер. $\frac{1}{2}$
$S_0 = 0, S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$. Процесс $X_n = |S_n|$ с $h(x) = |x|$ выпукла вниз. А процесс X_n - субмартингал.

$\triangle A_n = E(\triangle X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}$
$X_n = |S_n|$
$E(|S_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(|S_{n-1} + \varepsilon_n| \mid \mathcal{F}_{n-1})$
Запишем без модуля $|S_{n-1}+\varepsilon_n| = (S_{n-1}+\varepsilon_n)\mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} + |\varepsilon_n|\mathbf{I}\{S_{n-1} = 0\} -$
$- (S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\}$.
$|\varepsilon_n| = 1$
$E(|S_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(S_{n-1}\mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} \mid \mathcal{F}_{n-1}) +$
$+ E(\varepsilon_n \mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} \mid \mathcal{F}_{n-1}) + E(\mathbf{I}\{S_{n-1} = 0\} \mid \mathcal{F}_{n-1} -$
$- E(S_{n-1}\mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{n-1}) - E(\varepsilon_{n-1}\mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_n)$
В этом выражении $E(\varepsilon_n \mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ и $E(\varepsilon_{n-1}\mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_n) = 0$. Т.к.

1.$E(\xi\eta|\mathcal{A}) = \eta E(\xi|\mathcal{A})$, если η - измерима относительно $\mathcal{A}$ и $E|\xi\eta| < \infty$ $E|\xi| < \infty$.
2. Если ξ и $\mathcal{A}$ независимы, то $E(\xi|\mathcal{A}) = E\xi$.

По этим свойствам, $E(\varepsilon_n \mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\} \mid \mathcal{F}_{n-1}) =$
$= \mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} \quad \underset{\displaystyle E\varepsilon_n = 0}{\underset{\displaystyle \|}{E(\varepsilon_n|\mathcal{F}_{n-1})}}$ Таким образом,
$E(|S_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}\mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} + \mathbf{I}\{S_n = 0\} - S_{n-1}\mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\}$
$|S_n| = (S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} + \mathbf{I}\{S_{n-1} = 0\} - (S_{n-1} + \varepsilon_n)\mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\}$
$\triangle A_n = |S_n| - E(|S_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \varepsilon_n \mathbf{I}\{S_{n-1} > 0\} - \varepsilon_n \mathbf{I}\{S_{n-1} < 0\} =$
$= (\triangle S_n) sgn(S_{n-1})$
$A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \triangle S_k sgn(S_{k-1}) \;\; (A_0 = |S_n| = 0)$

$M_n = L_n(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{I}\{S_{k-1} = 0\} =$
=количество$\{k \in \{0; \ldots; k-1\},\ S_k = 0\}$
Доказана формула (*дискретный вариант фурмулы Танака*)
$|S_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} \triangle S_k sgn(S_{k-1}) + L_n(0)$
$E|S_n| = EL_n(0) \quad EL_n(0) \overset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}n}$
По ЦПТ $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$

Вспомним ЛЕММУ $Y_n \xrightarrow{D} Y.h$ -непрерывное отображение. Тогда $h(Y_n) \xrightarrow{D} h(Y)$. Возьмем в качестве $h(x) = |x| \Rightarrow$
$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} |Z|$
А что значит $\xrightarrow{D}$:
$Ef(Y_n) \to Ef(Y)\ \forall f$ непрерывной и ограниченной.
Если $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ и $\{\xi_n\}$ - равномерно интегрируемы, то
$E\xi_n \to E\xi$, что же значит равномерная интегрируемость:
$\limsup\limits_{k\to\infty} E(|\xi_n|\mathbf{I}\{|\xi_n| > c\}) = 0$. Рассмотрим еще достаточное условие равномерной интегрируемости (р.и.):
$\sup\limits_{n} E|\xi_n|^{1+\delta} < \infty$ для некотрого $\delta > 0$, т.к.
$E(|\xi_n|\mathbf{I}\{|\xi_n| > c\}) \leq \frac{E|\xi_n|^{1+\delta}}{C^\delta}$ - по неравенству Чебышева.

$$E\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{ES_n^2}{n} = \frac{DS_n}{n} = \frac{D\varepsilon_1 + \ldots + D\varepsilon_n}{n} = \frac{1 + \ldots + 1}{n} = 1$$

Следовательно, $E\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right) \to E|Z| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Л Е М М А. Пусть $Y = \{Y_t,\ t \geq 0\}$- процесс с независимыми приращениями, т.ч. $Ee^{\alpha Y_t} < \infty$ и $Ee^{\alpha(Y_t - Y_s)} < \infty$ для некоторой $\alpha \in \mathbf{R}$ и всех $s, t \in [0; +\infty)$
Определим $Z_t = \frac{e^{\alpha Y_t}}{Ee^{\alpha Y_t}},\ t \geq 0$.
Процесс $Z = \{Z_t,\ t \geq 0\}$ является мартингал-разностью тогда и только тогда, когда

$$E\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{e^{\alpha Y_s}}\right) = \frac{Ee^{\alpha Y_t}}{Ee^{\alpha Y_s}}$$

Доказательство.
$\circ\ E(Z_t|\mathcal{F}_S) = Z_s \quad s \leq t$

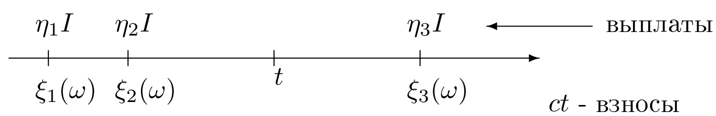
$$E(Z_t|\mathcal{F}_s) = \frac{E\left(e^{\alpha Y_t}|\mathcal{F}_s\right)}{Ee^{\alpha Y_t}} = \frac{E\left(e^{\alpha Y_s}e^{\alpha(Y_t - Y_s)}|\mathcal{F}_s\right)}{Ee^{\alpha Y_t}} =$$
$$= \frac{e^{\alpha Y_s}}{Ee^{\alpha Y_t}} E\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{e^{\alpha Y_s}}\right) \overset{?}{=} Z_s$$

А так как $Y_t - Y_s$ и $\mathcal{F}$ независимы, то $E\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{e^{\alpha Y_s}}\right) = \frac{Ee^{\alpha Y_t}}{Ee^{\alpha Y_s}}$ •

Здесь опять дается определение модели Крамера-Лундберта.

$$Y_t = y_0 + ct - \sum_{j=1}^{X_t(\omega)} \eta_j(\omega)$$

$t \geq 0.\{\xi_j\}$ и $\{\eta_j\}$ - независимы. (Модель страхования)



Момент разорения $\tau = \inf\{t \ : \ Y_t < 0\}$. Вопрос такой: оценить $P(\tau < \infty) \leq ?$

Докажем, что $Y = \{Y_t, \ t \geq 0\}$ - процесс с независимыми приращениями:

$$\begin{array}{ccc} Y_{t_1} & Y_{t_2} - Y_{t_1} & \ldots \quad Y_{t_m} - Y_{t_{m-1}} \\ \| & \| & \\ \xi_1 & \xi_2 & \end{array}$$

$\xi_1, \ldots, \xi_m$- независимы $\Leftrightarrow$ $Ee^{i\nu_1\xi_1 + \ldots + i\nu_m\xi_m} = \prod_{k=1}^{m} e^{i\nu_k\xi_k}$

$\forall \nu_k \in \mathbf{R}$ $k = 1, \ldots, m$
$Ee^{i\xi_k} = Ee^{i\nu_k(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})} =$

[без ограничения общности $Y_t = \sum_{j=0}^{N_t} \eta_j$]

$$= \sum_{r=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{\infty} Ee^{i\nu_k(N_{t_k} - N_{t_{k-1}})} \mathbf{I}\{N_{t_{k-1}} = j\} \mathbf{I}\{Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = r\} =$$

$$= \sum_{r=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{\infty} Ee^{i\nu_k \sum\limits_{l=j+1}^{j+r} \eta_l} \mathbf{I}\{N_{t_{k-1}} = j\} \mathbf{I}\{Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = r\} =$$

[если η_j и ξ_j независимы]

$$= \sum_{r=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{\infty} Ee^{i\nu_k \sum\limits_{l=j+1}^{j+r} \eta_l} \frac{(\lambda t_{k-1})^j}{j!} e^{-\lambda t_{k-1}} \frac{\lambda^r (t_k - t_{k-1})^r}{r!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (Ee^{\nu_k \eta_1})^r \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^r}{k!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} =$$

$$= e^{-\lambda(t_k - t_{k-1}) + \lambda(t_k - t_{k-1}) Ee^{i\nu_k \eta_1}} = e^{\lambda(t_k - t_{k-1})(Ee^{i\nu_k \eta_1} - 1)}.$$

Но лучше проверить выкладки здесь $\nwarrow$

Упражнение. Вычислить

$$E\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{e^{\alpha Y_s}}\right) = Ee^{\alpha(Y_t - Y_s)}$$

$Z_t = \frac{e^{\alpha Y_t}}{Ee^{\alpha Y_t}}$, $a = const,\ t \geq 0$

Л Е М М А. $\{X_t,\ t \geq 0\}$ - март., имеющий п.н. непрерывные справа траектории. Тогда для любых ограниченных опциональных моментов (относительно $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) τ и σ:

$$EX_\tau = EX_\sigma$$

лемма будет еще раз сформулированна и доказанна на следующей лекции.

Упражнение. X - имеет п.н. непрерывные справа траектории, G - открытое. Тогда $\tau_G = \inf\{t \geq 0 \ :\ X_t \leq G\}$ - опциональный момент относительно $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$.

Следствие. $\tau = \inf\{t \geq 0,\ Y_t < 0\} = \inf\{t \geq 0,\ Y_t \in (-\infty; 0)\}$ - опциональный момент. (См. "Последовательный статистический анализ"Ширяев)

Лекция 9

Предположение. (*) $\psi(v) = Ee^{v\eta_1} < \infty\ \forall v \in \mathbf{R}(\eta_i \geq 0)$. Условие справедливо, если $|\eta_i| < const$

Пропущено немного. Нужно допечатать.

Следовательно, $e^{vY_t} = e^{tg(v) - vy_0}$
$Ee^{-vY_s} = e^{sg(v) - vy_0}$

$$E\left(\frac{e^{-vY_t}}{e^{-vY_s}}\right) = e^{(t-s)g(v)} = \frac{Ee^{-vY_t}}{Ee^{-vY_s}}$$

Итак, $Z_t = \frac{e^{-vY_t}}{Ee^{-vY_T}} = e^{-vY_t - tg(v) + vy_0}$
Если Z_t матрингал, то $constZ_t$ - тоже март. Таким образом, $X_t = e^{-vY_t - tg(v)},\ t \geq 0$ - мартингал.
$\tau = \inf\{t > 0,\ Y_t < 0\} = \inf\{t > 0,\ Y_t \in (-\infty; 0)\}$. Замети, что Y_t- процесс, имеющий непрерывные справа траектории. Поэтому $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ - т.е. опциональный момент.

Л Е М М А. $\{X_t,\ t \geq 0\}$ - март., имеющий п.н. непрерывные справа траектории. Тогда для любых ограниченных опциональных моментов (относительно $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) τ и σ:

$$EX_\tau = EX_\sigma$$

если $\tau \leq c$ и $\sigma \leq c$ (ограниченные моменты).

Доказательство.

$\circ$ $0 \le \tau \wedge t \le t$. Следовательно, $EX_0 = EX_{\tau\wedge t}$

$X_t = e^{-vY_t - tg(v)} \quad t \ge 0$

Y_t -непрер. справа., а $tg(v)$ - непрер.

$EX_0 = e^{-vy_0}$

$EX_{\tau\wedge t} = Ee^{-vY_{\tau\wedge t} - (\tau\wedge t)g(v)} \ge$

$\ge Ee^{-vY_{\tau\wedge t} - (\tau\wedge t)g(v)}\mathbf{I}\{\tau \le t\} =$

$= Ee^{-vY_\tau - \tau g(v)}\mathbf{I}\{\tau \le t\} \ge$

$[-vY_\tau \ge 0$, т.к. $v > 0$, $Y_\tau < 0$, т.к. τ - момент выхода к отриц. значениям.$]$

$\ge Ee^{-\tau g(v)}\mathbf{I}\{\tau \le t\} \ge \inf\limits_{0\le s\le t} e^{-\tau s}E\mathbf{I}\{\tau \le\}.$

$[E\mathbf{I}\{\tau \le t\} = P(\{\tau \le t\}) \le e^{-vy_0} \sup\limits_{0\le s\le t} e^{sg(v)}, \quad e^{-vy_0} = EX_0]$

Выберем $v = v_0$ так, чтобы $g(v_0) = 0$. Вспомним устройство функции $g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - vc$

Что такое $\psi(v) = Ee^{v\eta_1}$, $\psi(0) = 1$, $\psi'(v) = E\eta_1 e^{v\eta_1}$, $\psi'(0) = E\eta_1 = a > 0$ - предположим, что $g'(v) = \lambda\psi'(v) - c$, $g'(0) = \lambda a - c < 0$

Возникает $c > \lambda a$

$E\eta_1$ - мат. ожидание выплат. λ - плотность пуас. потока. $\psi''(v) = E(\eta_1^2 e^{v\eta_1}) > 0$

$\exists! v_0$ на $(0; +\infty)$.

Итак, существует единственная точка, т.ч. $g(v_0) = 0$. Тогда $P\{\tau \le t\} \le e^{-v_0 y_0}$

В итоге

$$P\{\tau \le \infty\} \le e^{-v_0 y_0}$$

-это называется основной теорема страховой математики. Осталась ЛЕММА:

Т Е О Р Е М А (Дуб) Пусть $(X_n)_{n\ge 0}$ - мартингал. Пусть τ и σ - марковские моменты, такие что $\sigma \ge \tau \ge const$. Тогда

$$E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$$

Пусть $\{X_t, t \ge 0\}$ - мартингал, имеющий непрерывные справа траектории. Пусть τ и σ - ограниченные опциональные моменты. Тогда

$$EX_\sigma = EX_\tau$$

Введем $\tau(n) = 2^{-n}[2^n\tau + 1]$

$\sigma(n) = 2^{-n}[2^n\sigma + 1]$

Тогда τ и σ - марковские моменты относительно фильтрации $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$, $k = 0, 1, \ldots$

$\{\tau(n) \le k2^{-n}\} = \{\tau < k2^{-n}\}\ in\mathcal{F}_{k2^{-n}}$

$\tau(n) \downarrow \tau \quad \sigma(n) \downarrow \sigma$

В силу непрерывности справа траекторий $\{X_t, t \ge 0\}$ имеем $X_{\tau(n)} \to X_\tau$ и

$X_{\sigma(n)} \to X_\sigma$. Заметим, что $\sigma(n) < \tau(n)$. По т. Дуба $E(X_{\tau(n)}|\mathcal{F}_{\sigma(N)}) = X_{\sigma(n)}$

В силу сказанного $\{X_{\sigma(n)}\}$ - явл. равн. интегр. Поэтому $X_{\sigma(n)}$ будет измеримо относительно $\mathcal{F}_{\sigma(m)}$ при $n \geq m$. Таким образом, X_σ - будет изм. относительно $\mathcal{G} = \bigcap\limits_n \overline{\mathcal{F}}_{\sigma(n)}$. Если $Y_n \in \mathcal{A}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$ и $Y_n \to Y$ п.н. и $Y \in \overline{\mathcal{A}}|\mathcal{B}(\mathbf{R})$

$$E(X_\tau|\mathcal{G}) = X_\sigma$$

$\Rightarrow EX_\tau = EX_\sigma$
X_σ является $\mathcal{G}$-измеримой величиной. Следовательно требуется проверить:

$$EX_\tau \mathbf{I}_A = EX_\sigma \mathbf{I}_A \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

- это вытекает из того, что $X_{\tau(n)} \to X_\tau$ п.н. и в L^1
$X_{\sigma(n)} \to X_\sigma$ п.н. и в L^1
$E(X_{\tau(n)}|\mathcal{F}_{\sigma(n)}) = X_{\sigma(n)}$ $\bullet$

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ.

(Андрей Андреевич Марков)

Пусть $X + \{X_t, t \in T\},\ T \subset \mathbf{R}$
$X_t:\ \Omega\ rightarrow S_t,\ \mathcal{F}_{\geq t} = \sigma\{X_s,\ s \geq t,\ s \in T\}$
Пусть имеется фильтрация $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, т.ч. $X = \{X_t,\ t \in T\}$ согласована с $\mathbf{F}$.
Опр.: X - **марковский процесс**, если $\forall c \in \mathcal{F}_{\geq t} \quad P(C|\mathcal{F}_t) = P(C|X_t)$.

Упражнение. Если $S_t, t \in T$ - борелевское пространство, то

$$E(h(X)|X_{S_1} \ldots X_{S_m}, X_t) = E(h(X)|X_t)(**)$$

$\forall s_1 < \ldots < s_m < t < u$, где s,t,u $\in T$ и h - произвольная огр. и изм. Обычно $T = \mathbf{R}_+$ или $T = \mathbf{Z}_+$

Опр.: Марковский прцесс называется **цепью Маркова**, если все $S_t = S$ и δ н.б.ч.с. (не более, чем счетно), т.ч. S или $\{0, 1, \ldots, r\}$, или $\mathbf{Z}_+$.
Для цепей Маркова определение (**) $\Leftrightarrow$ $P(X_n = j|X_{S_1} = i_1, \ldots, X_{S_m} = i_m, X_t = i) =$
$= P(X_n = j|X_t = i)$, если $P(X_{S_1} = i_1, \ldots, X_{S_m} = i_m, X_t = i) \neq 0$

Т Е О Р Е М А. Пусть $\{X_t,\ t \geq 0\}$ - процесс с независимыми приращениями (со значениями в $\mathbf{R}^k$). Тогда X - марковский процесс (относительно естетственной фильтрации).

Следствие. Виннеровский процесс является марковским. Пуассоновский процесс - марковский.

Доказательство.(теорема)
∘ Рассмотрим $s_1 < \ldots < s_m < t < u$, $\sigma\{X_{S_1}, \ldots, X_{S_m}, X_t\} = \sigma\{X_{S_1}, X_{S_2} - X_{S_1}, \ldots, X_{S_m} - X_{S_{m-1}}, X_t - XS_m\}$

Требуется проверить, что
$E(h(X_n)|X_{S_1}, ..., X_{S_n}, X_t) = E(h(X_n)|X_t)$, то есть почему выполнено равенство $E(h(X_n)|\xi_1, ..., \xi_m, \xi) = E(h(X_n)|X_t)$? Со второго курса нам известно: если ξ, η - независимые случайные вектора в R^k и R^1 и g - ограниченная измеримая функция, $g : R^{k+1} \to R$, то $E(g(\xi, \eta)|\eta = x) = Eg(\xi, x)$. Также

$$E(Z|Y = x) = \phi(x)$$

и

$$E(Z|Y) = \phi(Y),$$

где ϕ - борелевская. Тогда в нашем случае

$$E(h(X_n)|\xi_1 = x_1, ..., \xi_m = x_m, \xi = x) = Eh(X_n - X_t + X_1 + ... + X_{m+1}) =$$
$$= \psi(X_1 + ... + X_{m+1}),$$

где ψ - борелевская функция, а $\xi_1 = X_{s_1}, \xi_2 = X_{S_2} - X_{S_1}, ..., \xi_m = X_{S_m} - X_{S_{m-1}}, \xi = X_t - X_m; X_n = X_n - X_t + (X_t - X_m) + ... + X_{S_1}$. Это необходимо пояснить: строим аппроксимацию

$$E(h(X_n)|X_t) = E(E(h(X_n)|X_{S_1}, ..., X_{S_{m+1}}, X_t)|X_t)$$

Используя телескопическое свойство, получим: если $A_2 \subset A_1$, то

$$E(E(\xi|A_1)|A_2) = E(\xi|A_2) =$$

$$= E(\psi(\sum_{k=1}^{m+1} \xi_k)| \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k) = \psi(\xi_1 + ... + \xi_{m+1}),$$

ч.т.д.●

Лекция 10

$(X_t, \mathcal{F})_{t \in T}$ $X: \ \Omega \to S_t$ (S_t, B_t)
$T \subset \mathbf{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$P(C|\mathcal{F}_t) = P(C|X_t) \quad (*)$$

$C \in \mathcal{F}_{\geq t} = \sigma\{X_u, \ u \geq t, \ u \in T\}$ $\quad E(\mathbf{I}_C|\mathcal{A}) = P(C|\mathcal{A})$
$\mathcal{F}_t^X$ - естетственная фильтрация. Если $(S_t, \mathcal{B}_t)$ - борелевское пространство, то (*) $\Leftrightarrow E(f(X_t)|X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}, X_s) = E(f(X_t)|X_s)$,
где $s_1 < \ldots < s_M < s \geq t$ f - любая измеримая : $S_t \to \mathbf{R}$.

Пример. Пусть $X_0, \xi_1, xi_2, \ldots$ - независимые сл. величины.

$$X_0 : \ \Omega \to \mathbf{R}^m$$

$$\xi_k : \ \Omega \to \mathbf{R}^m, k = 1, 2, \ldots$$

Положим $X_{n+1} = h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1}), \ n = 0, 1, \ldots,$ где h(изм.):$\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^m$
Тогда $\{X_n\}$ - марковский процесс (Верно и для непрерывного времени)

Доказательство.
$\circ$

$$E(f(X_{n+1}|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) =$$

$E(\xi|\eta) = \phi(\eta), \quad E(\xi|\eta = x) = \phi(x)$

$$= E(f(h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1}))|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) =$$

$E(g(\xi, \eta)|\eta = x) = Eg(\xi, x)$ если ξ и eta - независимы.

$$= E(f(h_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}) =$$

$$= E(f(X_{n+1})|X_n = x_n)$$

Следовательно, $\{X_n\}$ - Марковский процесс. $\bullet$
Рассмотрим случай, когда $S_t \subset S_n$. S - конечное и счетное множество $S = \{0, 1, \ldots, r\}$ или $S = \{0, 1, \ldots\}$. Введем в S метрику:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Тогда S - польское пространство. В этом случае $\{X_t\}_{t \in T}$ - марк. процесс.
$\Leftrightarrow P(X_t = j|X_{s_1}, \ldots, X_{s_m} = i_m, X_s = i) = P(X_t = j|X_s = i)$ для
$\forall s_1 < \ldots < s_m < s \geq t$ (все $\in T$) и $\forall i_1, \ldots, i_m, i$, т.ч. $P(\ldots) \neq 0$.
Введем $S_s = \{i \in S : \ P(X_s = i) \neq 0\}$, тогда определены формулы

$$p_{ij}(s, t) := P(X_t = j|X_s = i) \ \ s \leq t, \ s, t \in T. \ i \in S_s, \ j \in S_t$$

Очевидно, функции p_{ij}, называемые переходными вероятностями, обладают следующими свойствами:
1).$p_{ij}(s, t) \geq 0 \ \ \forall i \in S_s, \ j \in S_t \ s \geq t$
2).$\sum\limits_j p_{ij}(s, t) = 1$
3).$p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$
4).$p_{ij}(s, t) = \sum\limits_{k \in S_u} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t) \ \ \forall s < u < t$ -ур-е Колмогорова-Чепмена.
Замечание. Легко определить $p_{ij}(s, t) \ \forall i, j \in S \ \ s \leq t$, так чтобы выполнялись 1)-4). А именно, положим:

$p_{ij}(s; t) = 0$, если $i \in S_s$ и $j \in S_t$

$p_{ij}(s;t) = p_{i_0(s),j}(s;t),\ j \in S$, где $i_0 = i_0(s) \in S$
Поэтому далее без ограничения общности считаем, что $p_{ij}(s;t)$ заданы для $s \le t$ $(s, t \in T)$ и всех $i, j \in S$.
Посчитаем $P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) = P(X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) =$ [в силу марковости можно выкинуть всю предысторию, получим] $= p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1}, t_n) P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}) =$ [эти формулы верны при вероятности условия не равной нулю, аналогичным образом получаем] $= p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1}, t_n)(t_{n-2}, t_{n-1}) \cdot \dots \cdot p_{j_1,j_2}(t_1;t_2) P(X_{t_1} = j_1) =$

$$= P(X_{t_1}) \cdot p_{j_1,j_2}(t_1;t_2) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1};t_n)$$

Рассмотрим $T = [0, \infty)$ или $T = \mathbf{Z}_+$
$P(X_{t_1} = j_1) =$[по формуле полной вероятности] $= \sum\limits_i p_i(0) \cdot p_{ij_1}(0;t_1)$, где $p_i(0) = P(X_0 = i), i \in S$ - начальное распределение. Тогда

$$P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = \sum_i \sum_{(j_1,\dots,j_n) \in B} p_i(0) p_{ij_1}(0;t_1) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1};t_n)$$

Т Е О Р Е М А Пусть S - дискретное пространство. Пусть для мн-в $S_t \subset S, t \in T$ (непустых) заданы функции $p_{ij}(s;t), s \le t, i \in S_s, j \in S_t$, удовлетворяющие условиям 1)-4). Пусть $p_i(0) \ge 0$ и $\sum\limits_i p_i(0) = 1$. Тогда на некотором пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P) \exists$ марковский процесс $\{X_t\}_{t \in T}$ $(t = [0, \infty)$ или $T = \mathbf{Z}_+)$, т.ч. $p_i(0) = P(X_0 = i)$, $p_{ij}(s;t) = P(X_t = j | X_s = i)$.
Итак, марковская цепь может быть построена с помощью переходных вероятностей; необходимо только выполнение условий 1)-4).
Примечание. (пуассоновский процесс) Пусть $m(B), B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+)$ - локально конечная мера, т.е. $m(B) < \infty$ для ограниченных множеств B $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.
Определим :

$$p_{ij}(s;t) = \begin{cases} \frac{m((s;t])^{j-i}}{(j-i)!} e^{-m((s;t])}, & j \ge i; \\ 0 & j < i. \end{cases}$$

Пусть $p_{ij}(s;s) = \delta_{ij}$
Легко видеть, что 1),2),3) очевидно выполняются (разложение экспоненты в ряд). Проверим 4):
$p_{ij}(s;t) = \sum\limits_k p_{ik}(s;u) p_{kj}(u;t), \quad s < u < t$. Что получается:

$$\sum_{i \le k \le j} \frac{m\left((s;u]\right)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-m((s;u])} \cdot \frac{m\left((u;t]\right)^{j-k}}{(j-k)!} e^{-m((u;t])} =$$

$$= e^{-m((s,t])} \frac{\sum\limits_{i \le k \le j} \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!}}{(j-i)!} m((s;u])^{k-i} m((u;t])^{j-k}$$

Используем : $\sum\limits_{l=0}^{N} C_N^l a^l b^{N-l} = (a+b)^N$
Теперь, если взять $p_i(0) = \delta_{i0}$, то эквивалентное определение пуассоновского

процесса такое: $\{N_t, t \geq 0\}$ - марковский процесс (цепь Маркова со значениями в $S = \{0, 1, \ldots\}$, имеющий $p_i(o) = \delta_{i0}$ и $p_{ij}(s;t) = \{\ldots$ (m называется **ведущей мерой**). В частности, при $m\left((s;t]\right) = (t-s)\lambda, \lambda = const > 0$ получается стандартный пуассоновский процесс интенсивности λ.

Упражнение. Доказать эквивалентность определений пуассоновского процесса:
1. $N_0 = 0$
2. N - имеет независимые приращения.
3. $N_t - N_s \sim \pi(m(s;t]), s \leq t$ и того определения, которое было раньше.

Замечание. Предыдущая теорема является следствием теоремы Колмогорова.

Опр.: Функция $P(s,x,t,B)$ называется **переходной функцией**, если выполнены условия ($s, t \in T \subset \mathbf{R}, x \in S_s, B \in \mathcal{B}_t$, т.е. имеется семейство измеримых пространств $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$
1). $P(s,x,t,\cdot)$ является мерой на $\mathcal{B}_t$
2). $P(s,\cdot,t,B) \in \mathcal{B}_s | \mathcal{B}(\mathbf{R})$
3). $P(s,x,s,B) = \delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & xnotinB \end{cases}$
4). для $\forall s < u < t:$
$P(s,x,t,B) = \int\limits_{S_u} P(s,x,u,dy) P(u,y,t,B)$ (уравнение Колмогорова-Чепмена, интегрируем по всем промежуточным значениям y)

Опр.: Марковский процесс $\{X_t, t \in T\}$ **обладает переходной функцией**, если:

$$P(s,x,t,B) = P(X_t \in B | X_s = x)$$

или так $P(s,X_s,t,B) = P(X_t \in B | X_s)$

Упражнение. Найти переходные функции виннеровского процесса со значениями в $\mathbf{R}^m$.

В дискретном случае $P(s,i,t,B) = \sum\limits_{j \in B} p_{ij}(s;t)$.

Т Е О Р Е М А. (Эргодическая). Пусть $\exists j_0 \in S$ и $h, \delta > 0$, такие что $p_{ij_0}(h) \geq \delta$ для $\forall i \in S$. Тогда для $\forall i, j \in S$ существует:

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \widetilde{p}_j \quad (*)$$

Что такое $p_{ij_0}(h)$ -?
Опр.: Марковская цепь называется однородной, если $p_{ij}(s;t) = p_{ij}(t - s) \quad t \geq s$.

Смысл определения состоит в том, что система осуществляет переход из i в j за t-s. Смысл (*) состоит в том, что система, как бы, забывает из какого состояния она стартовала.

Доказательство. (теоремы)

○ Обозначим $m_j(t) = \inf\limits_i p_{ij}(t), M_j(t) = \sup\limits_i p_{ij}(t)$. Очевидно, что $m_j(t) \leq p_{ij}(t) \leq M_j(t)$. Докажем, что у них общий предел. Заметим, что $m_j(t)$ не убывает и $M_j(t)$ не возрастает с ростом t. Тогда $m_j(s+t) = \inf\limits_i p_{ij}(s+t)$.
Для однородной цепи уравнение Колмогорова-Чемпена дает:
$p_{ij}(s+t) = \sum\limits_k p_{ik}(s)P_{kj}(t)$
поэтому $m_j(s+t) = \inf\limits_i \sum\limits_k p_{ik}(s)p_{kj}(t) \geq m_j(t)\inf\limits_i \sum\limits_k p_{ik}(s) = m_j(t)$
Аналогично для $M_j(t)$.
Осталось убедиться, что $M_j(t) - m_j(t) \to 0,\ t \to \infty$:

$$M_j(t) - m_j(t) = \sup_a p_{aj}(t) - \inf_b p_{bj}(t) = \sup_{a,b}(p_{a,j}(t) - p_{b,j}(t)) =$$

Уравнение Колм.-Чепм. :

$$= \sup_{a,b}\{\sum_K p_{ak}(h)p_{kj}(t-h) - \sum_k p_{bk}(h) - p_{kj}(t-h)\} =$$

$t > h$

$$\sup_{a,b}\sum_k (p_{ak}(h) - p_{bk}(h))p_{kj}(t-h) = \sup_{a,b}(\sum a^+ + \sum^-) \leq$$

[$\sum^+$ берется по k, т.ч. $p_{ak}(h) - p_{bk}(h) \geq 0$ (это множество индексов зависит от a и b). Заметим, что $\sum\limits_k p_{ak}(h) = \sum\limits_k p_{bk}(h) = 1$, поэтому
$\sum^+(p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) + \sum^-(p_{ak}(h) - p_{bk}(h)) = 0$]

$$\leq \sup_{a,b}(\sum^+(p_{ak}(h) - p_{bk}(h))M_j(t-h) + \sum^-(p_{ak}(h) - p_{bk}(h))m_j(t-h)) =$$

По замечанию выше

$$\sup_{a,b}\sum^+(p_{ak}(h) - p_{bk}(h))(M_j(t-h) - m_j(t-h))$$

Итак,

$$M_j(t) - m_j(t) \leq [M_j(t-h) - m_j(t-h)]\sum_{a,b}^+(p_{ak}(h) - p_{bk}(h))$$

Если j_0 не принадлежит$J_{a,b}$ $(\sum^+ = \sum\limits_{J_{a,b}})$, то

$$\sum_k^+ p_{ak}(h) - p_{bk}(h) \leq \sum_k^+ p_{ak}(h) \leq 1 - p_{kj_0} \leq 1 - \delta$$

Если $j_0 \in J_{a,b}$, то $\sum^+ < 1-\delta$:
$\sum\limits_k^+ p_{ak}(h) - p_{bk}(h) \le \sum^+ p_{ak}(h) - p_{bj_0} \le 1-\delta$. В итоге

$$M_j(t) - m_j(t) \le (1-\delta)[M_j(t-h) - m_j(t-h)] \le$$

$$\le (1-\delta)^{\left[\frac{t}{h}\right]}[M_j(u) - m_j(u)]$$

$u = t - h\left[\frac{t}{h}\right] \quad 0 < u < t$

<u>Замечание.</u> В условиях эргодической теоремы: $|p_{ij}(t) - \widetilde{p}_j| \le (1-\delta)^{\left[\frac{t}{h}\right]}$. Т.е. скорость сходимости экспоненциально быстрая.

Лекция 11

$p_{ij}(s,t) = P(X_t = j | X_s = i)$ - переходные вероятности.

Опр.: Цепь *однородная*, если $P_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s)$
Для однородных цепей уравнение Колмогорова-Чепмена записывается просто:

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \ \ \forall i, js, t \ge 0$$

$P(s+t) = P(s)P(t)$ - полугрупповое свойство. $P(t) = (p_{ij}(t))$ - матрица.
$(P(t))_{t \ge 0}$ - полугруппа (стохастическая)
$[p_{ij}(t) \ge 0, \sum\limits_j p_{ij}(t) = 1, p_{ij}(0) = \delta_{ij} \Leftrightarrow P(O) = I]$
$p_{ij}(t)$ и $p_i(0)$ - позволяют строить марковскую цепь.

$P(t)$ - стандартная стохастическая полугруппа $\Rightarrow$
$\exists Q = \frac{d^+}{dt}|_{t=0} P(t)$ - итератор полугруппы. Т.е. $\exists q_{ij} = \frac{d+}{dt}|_{t=0} p_{ij}(t)$

$$Af = \frac{T^t f - f}{t}$$

Матрица Q называется *инфинитиземальной.*

Т Е О Р Е М А. Если стохастическая полугруппа стандартна (т.е. $p(t) \to I$ при $t \to 0+$), то $\forall i \ne j$ $\exists$ конечные $q_{ij} \le 0$ и $\forall i$ $\exists q_i = q_{ii} \in [0, \infty]$

Без доказательства.
Эргодическая теорема: (*) $p_{ij}(t) \to \widetilde{p}_j$ $\forall j$ при $t \to \infty \Rightarrow P(X_t = j) \to \widetilde{p}_j$, $t \to \infty$, т.к. $p_j(t) = \sum\limits_i p_i(0) p_{ij}(t)$

$$|p_j(t) - \widetilde{p}_j| = |\sum_i p_i(0)(p_{ij}(t) - \widetilde{p}_j)| \to 0$$

в силу (*).

Системы массового обслуживания. Поступает поток заявок на обслуживание. n - приборов, "система с отказом", заявки образуют пуас. поток. $\eta \sim exp(\mu)$

$$p_\eta(z) = \begin{cases} \mu e^{-\mu z}, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

X_t -число занятых приборов. $P(X_t = j) \xrightarrow{?} \widetilde{p}_j$

Формулы Эрланга..Описывают в этой модели стационарное распределение.

$$\widetilde{p}_j = \frac{\frac{\rho^j}{j!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ Докажем крупно-блочно.

Упражнение. $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \ldots)$ является собственным вектором матрицы $P^*(t)$ $\forall t$ (отвечающий собств. значению 1). Пусть выполнены условия эргодической теоремы, тогда $\exists \widetilde{p}$

Л Е М М А. Пусть выполнено условие эргодической теоремы, тогда $\sum\limits_j \widetilde{p}_j = 0$ или $\sum\limits_j \widetilde{p}_j = 1$

Если $\sum\limits_j \widetilde{p}_j = 1$, то $\widetilde{p}$ называется *стационарно распределенным.*

Опр.:Процесс $\{X_t, t \in T\}$ называется *стационарным* (*стационарным в узком смысле*), если $\forall n, \forall t_1, \ldots, t_n \in T \quad \forall h \; t_1 + h \ldots t_n + h \in T$
$Law(X_{t_1}, dots, X_{t_n}) = Law(X_{t_1+h} \ldots X_{t_n+h})$

Т Е О Р Е М А.Если у однородной марковской цепи $\{X_t, t \geq 0\}$ $\exists$ стационарн. распределение $\widetilde{p}$, то М.Ц. $Y - \{Y_t, t \geq 0\}$ имеющая начальное распределение $\widetilde{p}$ и те же переходные вероятности p_{ij}, что и цепь X, является стационарным процессом.
Мы докажем, что $\exists$ процесс Y

Доказательство.
$\circ$

$$P((Y_{t_1} \ldots Y_{t_n}) \in B) \stackrel{?}{=} P((Y_{t_1+h} \ldots Y_{t_n+h}) \in B)$$

$$\sum_i p_i(0) \sum_{(j_1 \ldots j_n) \in B} p_{ij_1}(t_1) \ldots p_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1}, t_n) \stackrel{?}{=} \sum_i \sum_{j_1 \ldots j_n \in B} P(X_{t_1} = i) \ldots$$

Заметим, что $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) = p_{ij}(s+h, t+h)$. Если взять $p_i(0) = \widetilde{p}_j = p_j(t)$. Тогда равенство (первое) верно. $\widetilde{p}$ - собственный вектор $p^*(t)$ $\bullet$