инфроние

Основы кибернетики

лекц 7.09.07 Сапоженко Андр Антон

• А.А. Сапоженко „Некот. ? сложности алг." 2001г.

Инвариантн. классы

Мн-во $A \subseteq P_2$ – инв. класс $\overset{df}{\Leftrightarrow}$

① $f(x_1, \dots x_n) \in A \Rightarrow$ все g, полученные из f добавлением / изъятием фикт. перем. $\in A$

② $f(x_1, \dots x_n) \in A \Rightarrow f(x_{i_1}, \dots x_{i_n}) \in A$

③ $f(x_1, \dots x_n) \in A \Rightarrow \forall$ подф-ция $f \in A$

Подф-ия ф. f – ф, получ. подстановкой const на место нек. перем.

Если верно ③ $\Rightarrow$ наследственный класс $\Rightarrow$

$A \subseteq P_2$ – инв. класс $\Leftrightarrow$ A – наследств и удовл. ①, ②

Если Q – инв. кл. $\Rightarrow$ $Q(n) \overset{\Delta}{=} \{f(x_1, \dots x_n) \in Q\}$

$\boxed{\text{Т-ма 1}}$

$\exists\ Q$ – инв. класс $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|}$,

если $Q \neq \varnothing \Rightarrow 1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq 2$

Примеры

① L – класс лин. ф. / выраж. полином 1-й степ. / явл. инв. кл.

② M – класс мон. ф. явл. инв. кл.

7.09.07.

③ T_0, T_1, S – не инв. кл. / не вып. ③ св-во /

Д-во /т-мы 1/ или только св-во ③

$\exists\ f(x_1, \dots x_{n+1}) \in Q \Rightarrow f(x_1, \dots x_n, \alpha) \in Q$ из ③

$\underset{\in Q}{f(x_1, \dots x_{n+1})} = \bar{x}_{n+1} \underset{\in Q}{f(x_1, \dots x_n, 0)} \vee x_{n+1} \underset{\in Q}{f(x_1, \dots x_n}$

$\Rightarrow |Q(n+1)| \leq |Q(n)|^2$

т.к. f однозн. опред. парой $f = (f_0, f_1)$, всего их $|Q(n)|^2$

$\Rightarrow \sqrt[2^{n+1}]{|Q(n+1)|} \leq \sqrt[2^n]{|Q(n)|} \Rightarrow$ это не возр. ф.

$Q \neq \varnothing \Rightarrow |Q(n)| \geq 1 \Rightarrow$ огр. снизу и $\exists \lim$

верхн. оценка: $\sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[2^n]{|P_2^n|} = 2$

Хар-ка класса Q – $\sigma(Q) \triangleq \log_2 \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|}$ – это и св-во насл. кл

$0 \leq \sigma(Q) \leq 1$ если $Q(n) \neq \varnothing$

Следствие 1.

$\exists$ класс Q: $\sigma(Q) = \lambda \neq 0 \Rightarrow$

$$|Q(n)| = 2^{\lambda(1+\varepsilon_n)2^n}, \ \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$2^\lambda = 2^{\sigma(Q)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|} = \frac{\sqrt[2^n]{|Q(n)|}}{1+\varepsilon_n}$$ / $\lim \varphi_n = k \Rightarrow \varphi_n = k(1+\varepsilon_n)$

$$\Rightarrow |Q(n)| = \left(2^\lambda(1+\varepsilon_n)\right)^{2^n} = 2^{\lambda 2^n(1+\varepsilon_n'')}$$

Пример. При $Q = P_2$ $\sigma(P_2) = 1$

$Q = L$ $L(n) = 2^{n+1}$, $\sigma(L) = 0$

$2^{\frac{n+1}{2^n}}$

① ②

7.09.07
Ок лекц

Т-ма 2

$\exists$ инв. кл. Q: $\tau(Q) = 1/2$

Д-во $Q = \{ f(x_1,..x_n) = l(x_1,..x_n) \,\&\, g(x_1,..x_n) \}$,

$l \in L$,

$\forall$ сущ. перем. g — сущ. для l

$\exists\, Q' = \{ (x_1 \oplus .. \oplus x_n) \& g(x_1,..x_n) \}$,

$Q' \subseteq Q$

$|Q'(n)| = 2^{2^{n-1}}$: $|N_{x_1 \oplus .. \oplus x_n}| = 2^{n-1}$ /мн-во единиц ф. $x_1 \oplus .. \oplus x_n$/

на неч. слоях — их 2^{n-1} — произв. зн-ния

на четн. сл. — точно ноль.

$\Rightarrow \sqrt[2^n]{|Q'(n)|} = \sqrt[2^n]{2^{2^{n-1}}} = 2^{1/2} \Rightarrow \tau(Q) \geq 1/2$

$f \in L$: ① l-const

$l \equiv 0$ — всего 1 ф., $l \equiv 1 \Rightarrow f \in \{0,1\}$

$l \neq 0$ $|N_l| = 2^{n-1}$

$|Q(n)| \leq 2 + (2^{n+1} - 2)\, 2^{2^{n-1}} \leq 2^{n+1}\, 2^{2^{n-1}} \Rightarrow$

$\sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[2^n]{2^{n+1} \cdot 2^{2^{n-1}}} = 2^{1/2} \underbrace{\sqrt[2^n]{2^{n+1}}}_{\to 1}$

$\Rightarrow \tau(Q) = 1/2$ ■

Т-ма 3 /Яблонский/ без д-ва

$\forall \tau \in [0;1)$ $\exists$ continuum инв. кл. с τ

Лемма 1 $\exists$ Q — инв. кл, $Q \neq P_2$ $\Rightarrow \tau(Q) < 1$

7.09.07

Д-во /л.1/ $\exists\, m$, $\exists\, f(\tilde{x}^m) \notin Q$

$\exists\, n \geq m \Rightarrow f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{(\alpha_{m+1},..\alpha_n)} \underbrace{f(x_1,..x_m, x_{m+1},..x_n)}_{\in Q(m)} x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} .. x_n^{\alpha_n}$ /их # — 2^{n-m}/

$\Rightarrow |Q(n)| \leq |Q(m)|^{2^{n-m}} \leq \left(2^{2^m} - 1\right)^{2^{n-m}} = 2^{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{2^m}}\right)^{2^{n-m}}$

$\Rightarrow \tau(Q) < 1$ ■

$\Rightarrow$ для 1 всего 1 инв. кл, совп. с P_2

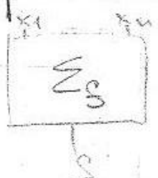
Т-ма 4 /Лупанов–Шеннон/ без д-ва : $L(n) \sim \frac{2^n}{n}$

$f(x_1,..x_n)$ — **сложная** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $L(f) = L(n)$ /её сложность макс./

$(f(x_1), f_2(x_1,x_2), .. f_n(x_1,..x_n), ...)$ — **сложная** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$

$\forall N\ \exists\, n > N$: $\exists\, f(x_1,..x_n)$ — сложная

Алгоритм $\mathfrak{A}$ — **правильный** $\Leftrightarrow$ на ряде с п-тью П он строит все ф-ции min инв. кл., содержащего П



Т-ма 5

$\forall$ прав. алг., строящий сложную п-ть ф-ций, строит все $f \in P_2$

Д-во /от против./

$\exists$ алг. строит п-ть П, $Q(П)$ — min инв. кл. содерж. П

$\exists\, Q(П) \neq P_2 \Rightarrow \tau = \tau(Q(П)) < 1 \Rightarrow$

7.09.07
Ок лекц

$\Rightarrow |Q(\Pi)| = 2^{\tau 2^n(1+\varepsilon_n)}$, $\varepsilon_n \to 0$

(n) - от n перем

$\boxed{\Pi\text{-мас}}$ /уже была/

Пусть Q - насл. класс /удовл (3) св-ву/ $\Rightarrow$

$\forall f(\tilde{x}^n)$ $\exists$ схема Σ_f, реализ. f:

сложность $L(\Sigma_f) \lesssim \tau \frac{2^n}{n}$ /асимпт-ски не превосходит/

$\Rightarrow$ по т-ме 6 $\forall f(x_1,..x_n) \in Q_n(\Pi)$:

$L(f) \lesssim \tau \frac{2^n}{n}$, Π - сложн.

$\forall N\ \exists m > N$: f_m - сл. $\Rightarrow L(f) = L(m) \sim \frac{2^m}{m} > \tau \frac{2^m}{m}$

/т.к. τ - const<1/ ■

14.09.07.

Сложность алг. - # шагов маш. Т.

Алг. - эффективен $\Leftrightarrow$ имеет полиномиальн. сложность

Поиск в дереве - квадратичн -

Будем с одност. маш. Т.

маш. Т. задается программой вида

$\Pi = \{aq \to a'q'd\}$, $d \in \{L, S, R\}$

2 типа машин < детерм - $\forall aq\ \exists \leq 1$ прав. ч.
недетерм. $aq \to a'(1)q'(1)d'(1) \ldots a'(m)q'(m)d(m)$

(5) (6)

14.09.07.

Замеч. Случай произвольного m сводится к случаю $m \leq 2$

Задача /раскраска графа/

Пусть задано $G = (V, E)$, k

$\exists$ ли правильн. раскр. верш. $\leq k$ цветов

прав. раскраска: $V \xrightarrow{\varphi} \{1, 2 .. k\}$, если $\{u, v\} \in E \Rightarrow \varphi(u) \neq \varphi(v)$
/смежн. верш. раскраш. в разн. цв/

Задача распозн. - задача, где ответ типа да/нет

преобр-ния - нужно постр. нек. ф-ию

Задача min-ции: дана f, k
$\exists$ ли ДНФ D, реал. f: $l(D) \leq k$ (длина ДНФ)

$\Rightarrow$ можно узнать $\exists$ ли ДНФ: $l(D) =$

Распознав. з. $\Leftrightarrow$ распознав. языка

Пусть есть язык $\Sigma = \{\tau_1, .. \tau_l\}$,

Σ^* - м-во всех слов конечн. дл. над Σ

язык - м-во слов $L \subseteq \Sigma^*$

Граф задаётся м. смежности: 1 … n; $e_1 \ldots e_m$

$\Rightarrow$ получаем в-р н.м.

задаётся двоичн. разлож.

необх. разделит. - их кодир. 0 и 1

$\Rightarrow$ код - набор 0 и 1

14.09.07
ОК лекц

Язык – подмн-во кодов, удовл. св-ву $l(D) \le k$

Машина Т. M распозн. язык $L \Leftrightarrow$

• $\forall$ слово $\omega \in$ языку L рез-т работы $M(\omega)=1$

Рез-т работы м. Т – $M(\omega)$ – переход в 1 из с-ний принимающ. /1/ или отвергающ. /0/
E-except
R-reflect

• и $\forall\ \omega \notin L$; $M(\omega) = \begin{cases} 0 \\ t_M(\omega)=\infty \end{cases}$

/$t_M(\omega)$ – время работы M над ω/

Машина M распозн. язык L за полином. вр $\Leftrightarrow$

① она распозн. язык L

② $M(\omega)=1 \Rightarrow t_M(\omega) \le p(\|\omega\|)$
длина слова ω
полином от длины

Класс P – класс всех языков L, к-рые расп-ся детерминир. м.Т за полином. время.

Для недет. м.Т получ. деревья распозн.

Недетерм. м.Т распозн. $L \Leftrightarrow$

• $\forall\ \omega \in L$ $M(\omega)=1$, время $\le P(\|\omega\|)$

• $\forall\ \omega \notin L$: $M(\omega) = \begin{cases} 0 \\ t_M(\omega) > P(\|\omega\|) \end{cases}$

Класс NP – класс языков, расп-ся недетерм. м.Т. за полином. время

14.09.07

Очев, $P \subseteq NP$, но неизв. верно ли $NP \subseteq P$

$\exists\ \Pi = \{f: \Sigma^* \to \Sigma^* : \exists$ детерм. м.Т, вычисляющ. f за полиномиальное время$\} \Rightarrow$

маш. Т вычисляет f.

язык L полиномиально сводится к яз. K:

$L < K \Leftrightarrow \exists f \in \Pi : f(\omega) \in K \Leftrightarrow \omega \in L$

для задач: $\exists$ преобр. вх. задач: св-во одноврем. выполн. для образа и прообр.

задача выполним-ти вх: КНФ
св-во: вып-ть

КНФ K выполнима $\Leftrightarrow K \not\equiv 0$

язык – выполнение всех КНФ

$\Sigma^* = \{(,), \vee, \&, \neg, 0, 1\}$

Пример $K = x_1 \& (x_2 \vee \bar{x}_3)$
$\hookrightarrow$ $01\&(10\vee\neg 11)$ – код КНФ в алф

Т-ма /Кука/

$L \in NP \Rightarrow L <$ языку вып-ти

Д-во $L \in NP \Leftrightarrow \exists\ p(\cdot)$, $\exists\ M$ – недет. маш. Т

• $\forall\ \omega \in L$: $t_M(\omega) \le p(\|\omega\|)$ и $M(\omega)=1$
/M приходит в приним.

• $\forall\ \omega \notin L$: $\begin{cases} t_M(\omega)=\infty \\ M(\omega)=0 \Leftrightarrow M \text{ приходит в отверг. с} \end{cases}$

8) Сведём к языку вып-ти $\Rightarrow$ построим КНФ K(

14.09.07
ОК лекц

$= K(\omega, p, M) : K(\omega) \not\equiv 0 \Leftrightarrow \omega \in L$

Пусть $\|\omega\| = n \Rightarrow T = p(n)$ полином

Если конечн. сост. не > чем в $p(n)$ → не надо ∢ ячейки с номерами $> T$

$\underline{P^i_{s,t} = 1} \Leftrightarrow$ в момент t в ячейке s наход. символ σ_i

$1 \le i \le l$
$1 \le s,t \le T$

нач. м-т: q_1 | σ_{i_1} | σ_{i_2} | … | σ_{i_n} | σ_1 | σ_1 | … | σ_1 (T)

$\sigma_{i_\nu} \in \Sigma$; σ_1 – пустой символ, $\sigma_1 = \Lambda$

$Q = \{q_1, \dots q_r\}$ – состояния, q_1 – начальн., q_r – заключительн. принимающ.

$\underline{Q^t_j = 1} \Leftrightarrow$ M находится в с-нии j в м-т t

$\underline{S_{s,t} = 1} \Leftrightarrow$ ячейка s обозрев. головкой в м-т t

Запишем через P, Q, S КНФ.

$K = B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F\cdot G$

B – ∀ t обозревается ровно 1 ячейка

B_t – в м-т t.

$\Rightarrow B_t = (S_{1,t} \vee S_{2,t} \vee \dots \vee S_{T,t}) \& \left(\&_{1\le i<j\le T} \overline{S_{i,t} \& S_{j,t}}\right)$

хотя бы 1 из ..., не м.б. 2

$B = B_1 \& B_2 \& \dots B_T$

C – в каждой ячейке ровно 1 символ

$C_{s,t} = (P^1_{s,t} \vee \dots \vee P^l_{s,t}) \& \left(\&_{1\le\nu<\mu\le l} \overline{P^\nu_{s,t} \& P^\mu_{s,t}}\right)$

хотя бы 1 символ в ячейке s, не м.б. 2

⑨

14.09.07

$C = \&_s \&_t C_{s,t}$, $1\le s,t\le T$

D – в ∀ м-т M находится ровно в 1 сост.

$D_t = (Q^1_t \vee \dots \vee Q^r_t) \& \left(\&_{1\le i<j\le T} \overline{Q^i_t \& Q^j_t}\right)$

$D = \&_{1\le t\le T} D_t$

E – выполнены нач. усл.: в начале – нужное слово, с $n+1$ яч. – симв. σ_1, м.т. в нач. сост. q_1 и головка обозрев. 1-ую ячейку

$E = \left(\underbrace{P^{i_1}_{1,1} \& \dots \& P^{i_n}_{n,1}}_{\omega} \& \underbrace{P^1_{n+1,1} \& \dots \& P^1_{T,1}}_{\text{пустые символы}}\right) \& Q^1_1 \& S_{1,1}$

обозрев. 1-ю, с-ние q_1

F – M действует в соотв. с прогр.

Пусть в ячейке s на шаге t нах. σ_i с-ние q_j и $\sigma_i q_j \to \sigma_{i_1} q_{j_1} L$, $\sigma_{i_2} q_{j_2} R$

Пусть $R_{s,t,i,j} = P^i_{s,t}\cdot Q^j_t \cdot S_{s,t} \to P^{i_1}_{s,t+1} Q^{j_1}_{t+1} S_{s-1,t+1} \vee P^{i_2}_{s,t+1} Q^{j_2}_{t+1} S_{s+1,t+1}$

$F_{s,t} = \overline{S}_{s,t}\left(\&_{1\le i\le l} P^i_{s,t} \to P^i_{s,t+1}\right) \vee S_{s,t}\left(\bigvee_{1\le i\le l,\ 1\le j\le r} R_{s,t,i,j}\right)$

ячейка не обозрев. на t — тогда и на след. шаге будет

$F = \&_{1\le s,t\le T} F_{s,t}$

G – M приходит в заключит. принимающ. с-ние q_r / хотя бы на 1-м шаге /

$G = Q^r_1 \vee \dots \vee Q^r_T$

⑩

21.09.07
OK

О задачах вып-ти КНФ

Буква - переменная или её отриц.

Скобка - ф-ла вида $(y_1 \vee \dots \vee y_r)$, где y_i - буква различн. перем.

k-КНФ - КНФ: в кажд. скобке ровно k букв.

Задача k-ВЫП -

Распозн. вып-ти произвольной k-КНФ

$\exists$ КНФ K зав. от перем. $x_1, \dots, x_n$ /не обяз. сущ./

Код КНФ K - слово $W(K)$ в алф. $\{0, 1, \&, \vee, (,)\}$, полученное заменой кажд. буквы x_i^{α} на стр. $\sigma^{\alpha_1} \dots \sigma^{\alpha_m}$, где $i = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $m = \lceil \log_2 n \rceil$

Т-ма

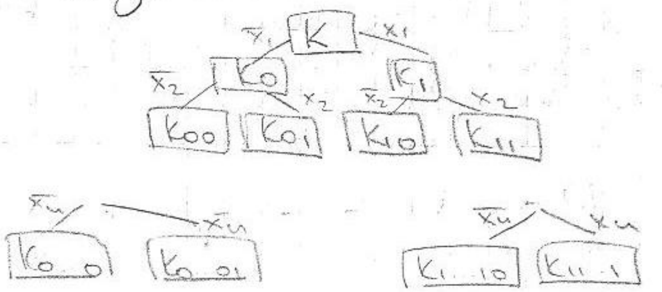
Задача ВЫП $\in$ классу NP

Д-во

Постр. НМТ

Вход: КНФ K НМТ M строит 2 КНФ: K_0, K_1

в K заменим



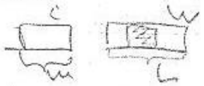
Проверка ф-лы, полученной из КНФ заменой всех перем. на const, на равенство 1 м.б. осуществлена ДМТ за $O(L)$ шагов, где L - длина вх.

11.09.07

Подстановку const на место x_i^{σ} можно осуществить так: заменяем 1-й символ записи индекса i на 1 из спец симв. $0^*, 1^*$, содержащихся в алф. м. Т

На распозн. того, что заданное сл. длины $m = \lceil \log n \rceil$ явл. подсловом сл. длины L дост. $O(mL)$ шагов

опер. $\leq L$



$\Rightarrow$ при заданном коде индекс замену x_i на const можно осуществ. за $O(L \log_2 n)$

шагов в каждом вычислении $\leq$

$O(nL^2 \log n) = O(L^3)$ ■

Следствие

Задача ВЫП явл. NP-полн.

Утв. 3 - ВЫП $\in$ NP

Д-во

Если произв. КНФ $\in$ NP $\Rightarrow$ и проходит для $k=3$

Т-ма

задача 3-ВЫП NP-полна

Д-во

Сведём зад. ВЫП полином-но к з. 3-ВЫП

$\exists$ A - алф. общих задач. Требуется $\forall \bar a \in A^*$ за пол. вр. /от дл. сл. $\bar a$/ постр. сл. $\varphi(a)$; $\varphi(\bar a)$ - вып. 3-КНФ $\Leftrightarrow$ $\bar a$ - вып. КНФ

Если $\bar a \in A^*$ - не КНФ $\Rightarrow$ оставим сл. без изм.

Если $\bar a \in A^*$ - КНФ $D_1 \dots D_s$ от $x_1, \dots x_n \Rightarrow$ преобразуем в 3-КНФ $\varphi(\bar a) = F_1 \dots F_s$:

$\exists$ $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ - перем, не встреч. в КНФ $\bar x$

$\Rightarrow$ 4 случая:

1. $D_i = t_{i_1} \vee t_{i_2} \vee t_{i_3} \Rightarrow \exists F_i = D_i$
2. $D_i = (t_{i_1} \vee t_{i_2}) \Rightarrow F_i = (t_{i_1} \vee t_{i_2} \vee y_j)(t_{i_1} \vee t_{i_2} \vee \bar y_j)$, $y_j \in Y$; $F_i = D_i$
3. $D_i = t_{i_1}$, д-м: $F_i = (t_{i_1} \vee \bar y_k \vee \bar y_l)(t_{i_1} \vee \bar y_k \vee y_l)(t_{i_1} \vee y_k \vee \bar y_l)(t_{i_1} \vee y_k \vee$

, где $y_k \ne y_l$ и $F_i = 1 \Leftrightarrow D_i = 1$

21.09.07
OK

④ $D_i = t_1 \vee \ldots \vee t_m$, $m \ge 4$

Пусть $F_i = (t_1 \vee t_2 \vee y_1)(\bar y_1 \vee t_3 \vee y_2)(\bar y_2 \vee t_4 \vee y_3)\ldots(\bar y_{m-4} \vee t_{m-2} \vee y_{m-3})(\bar y_{m-3} \vee t_{m-1} \vee t_m)$, где все y_i разл.

Лемма

В случае ④, если $F_i = 1 \Rightarrow D_i = 1$,
если $D_i = 1 \Rightarrow \exists$ набор зн-ний $y_1, \ldots y_{m-3}$: $F_i = 1$

Д-во Пусть $\tilde\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ - набор зн-ний перем. $x_1, \ldots x_n$
$\tilde\beta = (\beta_1, \ldots \beta_{m-3})$ - набор зн-ний $y_1, \ldots y_{m-3}$

Пусть $F_i(\tilde\alpha, \tilde\beta) = 1$.

Если $\beta_1 = 0 \Rightarrow t_1(\tilde\alpha) \vee t_2(\tilde\alpha) = 1$ и $D_i(\tilde\alpha) = 1$

если $\beta_{m-3} = 1 \Rightarrow t_{m-1}(\tilde\alpha) \vee t_m(\tilde\alpha) = 1$ и $D_i(\tilde\alpha) = 1$

если $\beta_1 = 1$ и $\beta_{m-3} = 0 \Rightarrow \exists k: \beta_k = 1, \beta_{k+1} = 0$

т.к. $\bar\beta_k \vee t_{k+2}(\tilde\alpha) \vee \beta_{k+1} = 1 \Rightarrow t_{k+2}(\tilde\alpha) = 1$ и $D_i(\tilde\alpha) = 1$

11 10 0
1 0

Обратно: Пусть $D_i(\tilde\alpha) = 1 \Rightarrow \exists t_k: t_k(\tilde\alpha) = 1$

если $k = 1$ или $k = 2 \Rightarrow$ Пусть $\beta_1 = \ldots = \beta_{m-3} = 0$
при этом $F_i(\tilde\alpha, \tilde\beta) = 1$

если $k = m-1$ или $k = m \Rightarrow$
Пусть $\beta_1 = \ldots = \beta_{m-3} = 1$; $F_i(\tilde\alpha, \tilde\beta) = 1$

иначе $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-2} = 1$, $\beta_{k-1} \ldots \beta_{m-3} = 0$, $F_i(\tilde\alpha, \tilde\beta) = 1$ ∎

Проделаем замены из ② ÷ ④, исп. для разл. D_i разл. перем. $y_j \Rightarrow$ если 3-КНФ $F_1 \ldots F_s$ равны 1 на нек. наборе $\Rightarrow$ на нем $= 1$ КНФ $D_1 \ldots D_s$

обратно если КНФ $D_1 \ldots D_s = 1$ на нек. наборе $\Rightarrow \exists$ набор 3-КНФ $F_1 \ldots F_s = 1$

21.09.07

$\Rightarrow$ т.к. сведение полином. $\Rightarrow$ и всё свед. полин.

$\boxed{\text{Т-ма}}$

2-ВЫП $\in P$

Д-во

выпл ли вх. сл. 2-КНФ - за полин. время

Пусть уже задана 2-КНФ $D_1 \ldots D_s$ и надо выяснить, выполнима ли она

Пусть дизъ. $D' = x_i \vee t_1$ и $D'' = \bar x_i \vee t_2$ имеют противоп. буквы x_i и $\bar x_i$ /м.б. $t_1 = \varnothing$ или $t_2 = \varnothing$/

$\Rightarrow$ резольвента дизъюнктов D' и D'' - $D = t_1 \vee t_2$

/если $t_1 = t_2 \Rightarrow t_1 \vee t_2 = t$, если $t_1 = \varnothing$ и $t_2 = \varnothing \Rightarrow D = 0$/

Лемма

$\forall$ -ых ф-л верно $(x_i \vee A)(\bar x_i \vee B) = (x_i \vee A)(\bar x_i \vee B)(A \vee B)$

Запишем алг.: $\forall$ пары дизъ, строим резольв. добавл. и запис. снова, пока все резольв. не выйдут. Если появ. резольв. $\varnothing \Rightarrow$ исх КНФ не выполнима. Если не появ. $\Rightarrow$ выполн.

Лемма

Алг. остановится и работает полин. время

Д-во Если длина исх. КНФ $= n \Rightarrow$ в ней $\le n$ перем., из к-рых можно постр. $\le (2n+1)^2$ дизъ. (и отриц., и самих пер., 1 в-т - пустой)

При этом # просматр. пар $\le (2n+1)^4$ ∎

пар

28.09.07
OK

Лемма.

Алг. правильно решает задачу 2-ВЫП

Д-во

① Пусть $K = D_1 D_2 \dots D_s$ – исх. 2-КНФ ①

Пусть в конечн. КНФ K' есть сомнож. 0.

$\Rightarrow K \equiv 0$

② Пусть в конечн. КНФ нет сомнож. 0

д-м по инд.

1° $n=1 \to K' = x_i \vee K' = \bar{x}_i$

2° Пусть утв. верно для 2-КНФ с $n<m$ перем. и пусть в K' имеется m перем. $x_1, \dots x_m$

$$\Rightarrow K' = (x_m \vee t_1)(x_m \vee t_2)\dots(x_m \vee t_k)\cdot(\bar{x}_m \vee t_1')(x_m \vee t_2')\dots(\bar{x}_m \vee t_k')\cdot C_1 \dots C_r,$$

где t_i, t_j' – буквы или 0,

$C_1 \dots C_r$ – 2-КНФ с перем. $x_1, \dots x_{m-1}$, замкнутая отн-но взятия резольвент

$\Rightarrow$ по предп. инд. $\exists$ набор $\tilde{x} = (x_1, \dots x_n)$: на нём КНФ $C_1 \dots C_r$ вып-ма

Если бы $\exists\ t_i(\tilde{x}) = 0$ и $t_j'(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow t_i(\tilde{x}) \vee (t_j'(x)) = 0$ и содержалась бы в $C_1 \dots C_r$, т.к. $t_i \vee t_j'$ – резольвента $(x_i \vee t_i)$ и $(\bar{x}_j \vee t_j') \Rightarrow$ такой пары $\nexists$

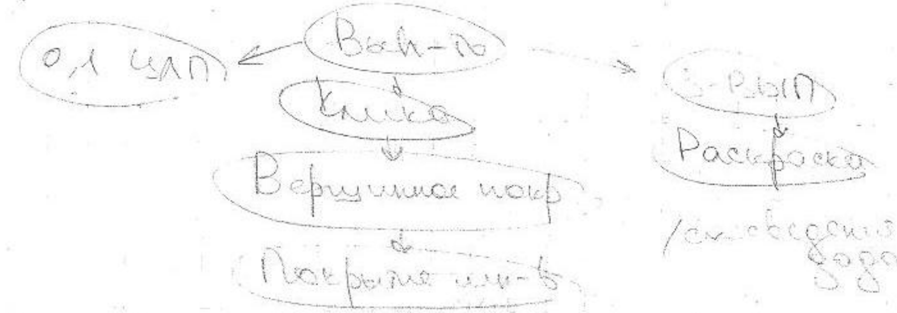
$\Rightarrow$ либо все $t_i(\tilde{x}) = 1$, либо все $t_j'(\tilde{x}) = 1$

В 1-м случае исх. КНФ вып-ма на $(\tilde{x}, 0)$, во 2-м на $(\tilde{x}, 1)$

▧

28.09.07

Некоторые NP-полные з.



0,1 ЦЛП – з. 0,1 целочисл. лин. пр-ние

Вход: м. $A^{p\times n} = (a_{ij})$ веществ. матр. и целочисл. в-р $\tilde{b} = (b_1, \dots b_p)$

Св-во: $\exists$ 01-вектор $\tilde{x} = (x_1, \dots x_n)$: $A\tilde{x}^T \geq \tilde{b}^T$

Т-ма

ВЫП < 01-ЦЛП

Д-во Пусть $C_1 \dots C_r$ – произвольн. КНФ с r скобками

Пусть A: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in C_i \\ -1, & \bar{x}_j \in C_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Пусть b: $b_i = 1 - $ (# отрицаний в скобке C_i)

$\Rightarrow$ Пусть K – вып. $\Rightarrow \exists\ \tilde{x}: K(\tilde{x}) = 1$

Д-м, что $(A_i^{стр}, \tilde{x}) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq 1 - \#$о $\forall i = \overline{1,r}$

Но $\min\limits_{x \in B^n} (A_i^{стр}, x) = -(\#$ отр в $C_i)$

Т.к. $K(\tilde{x}) = 1 \Rightarrow \forall i\ C_i(\tilde{x}) = 1 \Leftrightarrow$

[ⓐ $\exists k$: C_i содерж. x_k и $\alpha_k = 1$
ⓑ $\exists k$: C_i содерж. $\bar{x}_k$ и $\alpha_k = 0$

ⓐ C_i содерж. $x_k \Rightarrow a_{ik}=1 \Rightarrow$

$(A_i, \tilde{x}) = a_{i1}\alpha_1 + \ldots + \underset{a_{ik}\,\alpha_k}{1\cdot 1} + \ldots + a_{in}\alpha_n \geq 1-(\#\text{отр. в } C_i)$

ⓑ C_i содерж. $\bar{x}_k \Rightarrow a_{ik}=-1$

$(A_i,\tilde{x}) = a_{i1}\alpha_1 + \ldots + \overset{a_{ik}}{(-1)}\cdot\overset{\alpha_k}{0} + \ldots + a_{in}\alpha_n \geq 1-(\#\text{отр. в } C_i)$

($\Leftarrow$) ∃ ① вып. при $\tilde x=\tilde\alpha$

из ① $\Rightarrow$ ②, т.е. $\forall\, i=\overline{1,r}$ ∃ слагаемое

$a_{ik}\alpha_k$: $\left[\begin{array}{l} a_{ik}=-1, \alpha_k=0 \\ a_{ik}=1, \alpha_k=1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall\, i=\overline{1,r}\ \ C_i(\tilde\alpha)=1 \Rightarrow K(\tilde\alpha)=1$ ■

З. Клика

Вход: граф $G=(V,E)$, число k

Св-во: в G ∃ полный подграф на k верш.

Т-ма

ВЫП < Клика

Д-во

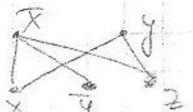
∃ $K = C_1\ldots C_r$ – КНФ: $C_i = t_{i1}\vee\ldots\vee t_{im_i}$,

V – мн-во букв K (с повторениями),

Т.е. $t_{ij}\to v_{ij}$. ∃ $(v_{i_1j_1}, v_{i_2j_2})\in E \Leftrightarrow$

$i_1\neq i_2$ и $t_{i_1j_1}\neq \bar t_{i_2j_2}$

Пример $(\bar x\vee y)(\bar x\vee\bar y\vee z)$



Д-м, что в G_K есть клика размера $k \Leftrightarrow$ КНФ K вып.

① ∃ $K(\tilde\alpha)=1 \Rightarrow \forall\, i\ \ C_i(\tilde\alpha)=1 \Rightarrow$

$\forall\, i$ ∃ j_i: $t_{ij_i}(\tilde\alpha)=1 \Rightarrow$ среди букв

$t_{1j_1},\ldots,t_{rj_r}$ нет противоположных $\Rightarrow$

подграф на $v_{1j_1}\ldots v_{rj_r}$ – r-клика

② ∃ в G есть клика размера r с верш. $v_{1j_1}, v_{2j_2},\ldots,v_{rj_r} \Rightarrow$ среди

букв $M=\{t_{1j_1},\ldots,t_{rj_r}\}$ нет противопол.

Этих скобок всего r

∃ $\alpha_i = \begin{cases} 1, & x_i\in M \Rightarrow \forall\, i\ C_i(\tilde\alpha)=1 \\ 0, & \bar x_i \in M \Rightarrow K(\tilde\alpha)=1 \\ \forall, & \text{иначе} \end{cases}$ ■

З. Вершинное покр. (ВП)

Вход: граф $G=(V,E)$, число l

Св-во: ∃ мн-во вершин R: ∀ ребро гр. инцидентно верш. из R, $|R|=l$

Т-ма

Клика < ВП.

Д-во

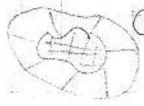
∃ задан граф $G'=(V,E')$, число l

$G = (V,E)$ – дополн. G', $l=|V|-k$

Заметим, что мн-во $A\subseteq V$ явл. кликой в $G' \Leftrightarrow$

$V\setminus A$ явл. верш. покрытием в G ■

/ ∃ A – клика $\Rightarrow$ в дополн. – нез.,



упустить может только те р: 2 верш. $\in A$, но их нет и наоборот /

Пример

{4}-ВП

З. покрытие множеств /ПМ/

Вход: семейство $F=\{S_1,\ldots,S_m\}$ подмн-в мн-ва S; $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = S$, число h

Св-во: ∃ ли подсем-во $T\subseteq F$: $|T|\leq h$ и $\bigcup_{S_i\in T} S_i = S$

нужного размера

28.09.07
OK

Т-ма

ВП < ПМ

Д-во

Пусть задан граф $G=(V,E)$, число l

Пусть $S = E$, $S_j = \{(u, v_i) \in E \mid u \in V\}_e$

Очевидно, подсем-во $T = \{S_{i_1}, \dots S_{i_n}\}$ явл. покрытием $S \Leftrightarrow$ м-во вершин $\{v_{i_1}, \dots v_{i_n}\}$ покрывает все ребра G ∎

5.10.07.

Раскраска

Вход: $G=(V,E)$, k

Св-во: G допускает прав. раскр. вершин $\le k$ цв.

$\exists \varphi: V \to \{1, \dots k\}: \varphi(v) \ne \varphi(u)$ $\forall \{u,v\} \in E$

Т-ма

3-ВЫП < Раскраска

Д-во

3-ВЫП: Вх: 3-КНФ K
Св-во: ВЫП

Пусть n - # перем.

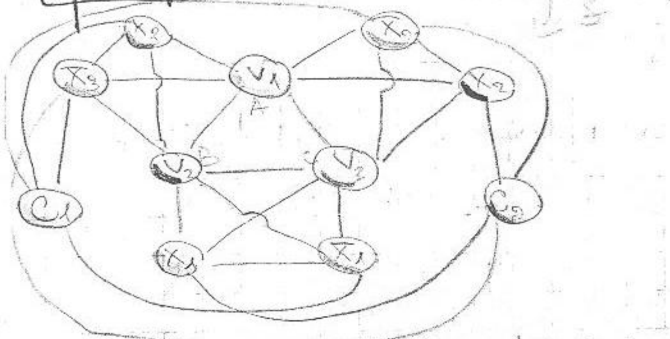
есть перем. $x_i, \overline{x_i}, v_i$, $i=\overline{1,n}$
$K = C_1 \& \dots \& C_t$, $+ C_j$, $j=\overline{1,t}$ } верш. G

ребра G:
Образуем всевозм. ребра: $\{v_i, v_j\}$, $1 \le i < j \le n$
$\{v_i, x_j\}$, $\{v_i, \overline{x_j}\}$ $i \ne j$, $1 \le i, j \le n$,
$\{x_i, \overline{x_i}\}$,
$\{x_i^\sigma, C_j\}$ - ребро, если $x_i^\sigma \notin C_j$ $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,t}$

Пусть $k = n+1$

5.10.07.

Пример. $K = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_3)$



$k=4$

проверим св-во: КНФ K ВЫП $\Leftrightarrow$ сост. гр. раскр. $\min \le 4$ цв.

На верш. $\{v_i\}$ - полный граф $/K_n/ \Rightarrow$ # цв. $\ge n$, пусть v_i верш. раскр. в i-й цвет

x_i м.б. раскр. либо в i-й цв, либо в доп.

$x_i, \overline{x_i}$ - разл. цв: $f(x_i) \ne f(\overline{x_i}) \Rightarrow$ для прав. раскр. требуется дополнит. $n+1$ цвет 'О', т.е. $\{f(x_i), f(\overline{x_i})\} = \{0, i\}$

Пусть $n \ge 4$ /иначе - трив. перебор всё д-ет/

степень вершины $C_j \ge 2n-3$ /т.к. ... но т.к. это 3-КНФ => C_j содерж. 3 перем./

$\exists i: C_j$ соед. ребр. $x_i, \overline{x_i}$; $(x_i, C_j) \in E$, $(\overline{x_i}, C_j) \in E$

C_j не м.б. расф. в доп. цвет 'О' /т.к. есть (x_i, C_j) и $(\overline{x_i}, C_j)$/ $\Rightarrow C_j$ м.б. раскр. лишь в цв. перем, вх. в C_j

$\Rightarrow$ если $\exists$ вып-щий набор $(x_1, \dots x_n)$
$\Rightarrow \exists$ раскраска вершин $C_j \Rightarrow \exists$ раскр. гр.
/все ост. раскр. принудит./ ∎

Вып. набор $\exists \Rightarrow$ ... ... можно раскр.

5.10.07
OK

Отличие врем. сложн. от сл-ти схем:

① врем. сложн. м.б. неогр, сх. всегда дает рез-т

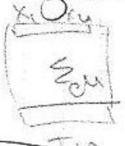
② у сх. не м.б. вх. сл. ∞-ной длины

Моделирование м.Т схем

Пусть м.Т $\mathcal{M}$ останавл. $\le T(n)$ $\forall w: \|w\| \le n$

Пусть сх. Σ имеет n вх, $T(n)$ вых.

Σ моделирует $\mathcal{M}$ $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ слова $w: \|w\| \le n$ на вых. Σ появл. $\mathcal{M}(w)$ — слово, запис. на ленте о окончании



$\tilde q$ — холостое с-ние $\quad \tilde Q = Q \cup \{\tilde q\}$

$A = \{a_1, .. a_e\}$ — алф. ленты

$Q = \{q_1, .. q_r\}$ — алф. сост.

Т-ма /Savage/

Пусть детерм. м.Т $\mathcal{M}$, работая над словами длины n останавл. после $\le T(n)$ тактов

$\Rightarrow \exists$ схема Σ, модел. $\mathcal{M}$: $L(\Sigma) = O(T^2(n))$

Д-во Δ сх: слово $\to$ слово

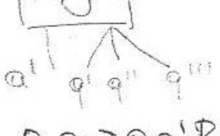
/булевы ф — если слова в двоичн. алф

Пусть задана м.Т: $\Pi = \{aq \to a'q'd\}$,

необх. по прогр. и ф. $T(n)$ постр. сх.

Δ 2 эл-та:

• преобразующий:



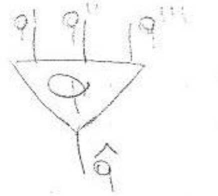
если команда вида $aq \to aq'R \Rightarrow$ попадает на q'''

$\to aq'L \Rightarrow$ на q'

на q'' при холостом с-нии

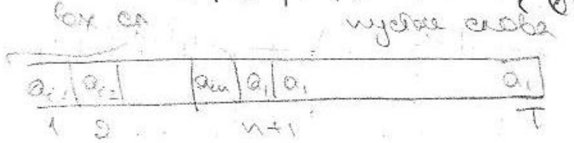
5.10.07

• фильтрующий:



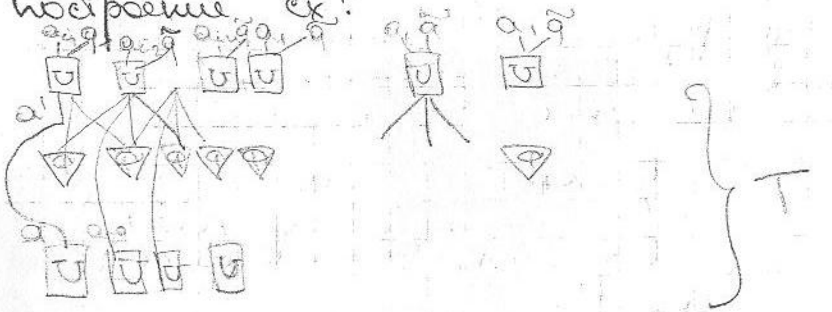
$\Phi(\tilde q, \tilde q, \tilde q) = \tilde q$

$\Phi(q_i, \tilde q, \tilde q) = q_i$ /если содерж. вх. равно не $\tilde q$ вх $\Rightarrow$ он на вых./



$t_{\mathcal{M}}(w) \le T(n) = T$ при $\|w\| \le n$

построение сх:



сх. тривиально моделирует преобр. м.Т.

$L(\Sigma) = 2T^2 = O(T^2)$

Замеч. правая диаг. бесполезная

Т-ма / Schnorr /

Пусть даны $T_{\mathcal{M}}(n)$, $S_{\mathcal{M}}(n)$, M — # команд в $\Pi_{\mathcal{M}}$

$\Rightarrow \exists\, \Sigma_{\mathcal{M}}: L(\Sigma_{\mathcal{M}}) \le O(T_{\mathcal{M}}(n) \log_2 S_{\mathcal{M}}(n) + M)$

$S_{\mathcal{M}}(n)$ — зона, # посещаемых ячеек

12.10.07

Эквивалентные УС-мы (правильные)

Постановка: ô ф. задать разл. схемами

Φ-лы $Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$ - базис, Φ - ф-лы

$\exists$ A, B - ф-лы; f_A, f_B - ф-ции, к-рые реализ. этими ф-лами

$A \sim B \overset{df}{\Leftrightarrow} f_A = f_B$

$\exists$ A - ф-ла, B - подформула / часть ф-лы, явл. ф-ой /

Пример $C = (x \vee y) \& z$, $x \vee y$ - п/ф C

$\exists$ C - ф-ла $\Rightarrow$

$S_{B,C}(A)$ - подстановка ф-лы C на место B в A

Подстановка - $\sim$-ная $\Leftrightarrow B \sim C$, при ну $\boxed{A \sim S_{B,C}(A)}$ / по опред /

$\exists$ есть с-ма тождеств $T = \{A_i' \sim A_i''\}_{i=1}^m$ / не ô ∞-ная /

$\sim$-ное подстан. над T - подстановки, использ. только тождества из T:

$B \xrightarrow[T]{} C \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists A_i' \sim A_i'' : C = S_{A_i' A_i''}(B)$

$\sim$-ное преобр - применение конечн. # подстановок к нек. ф-ле: $B_1 \xrightarrow{T} B_2 \xrightarrow{T} \dots B_s$

С-ма тождеств T - полна для $\Phi \overset{df}{\Leftrightarrow}$ если $\forall A, B \in \Phi$ из $A \sim B \Rightarrow A \underset{T}{\Rightarrow} B$

$B_1 \underset{T}{\Rightarrow} B_c = B_1 \xrightarrow{T} B_2 \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} B_s$

∞-ная полная с-ма $\exists$ всегда

12.10.07.

$\boxed{\text{Т-ма 1}}$

Для УС (правильных) Φ над $Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$ $\exists$ конечн. полная с-ма тождеств / КПСТ /

Д-во схема д-ва: $A \sim B$ ↓ ↓ канон. вид A $\Rightarrow$ канон. вид B

$\exists A: f_A \equiv 0 \Rightarrow$ канон. вид $A = x_1 \& \overline{x_1}$

$f_A \not\equiv 0 \Rightarrow$ КВ A = СДНФ f_A

Приведение к каноних. виду:

① $\overline{(\overline{x} \vee \overline{y}) \& z} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \vee \overline{z} = \overline{x}y \vee \overline{z}$

правила де Моргана: $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, $\overline{\overline{x}} = x$) для преобр. ф-л

② ф-ла $\to$ V&

$(x_1 \vee x_2) x_3 = x_1 x_3 \vee x_2 x_3$

$x_1 x_2 = x_2 x_1$

③ устранение повторяющ. сомнож.

$x_1 x_1 = x_1$

$x_1 x_2 x_3 = (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$ ассоц.: $(x_1(x_2) \cdot x_1) x_1$

④ устранение $x\overline{x}$

$(x_1 \overline{x_1}) x_3 = x_1 \overline{x_1}$

$x_1 \overline{x_1} \vee x_3 = x_3$

$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$

/ получили ДНФ

⑤ введение однородности / ДНФ $\to$ СДНФ /

$x_2 = (x_1 \vee \overline{x_1}) x_2$

⑥ группировка слагаемых

$K \vee N_1 \vee \dots N_m \vee K$ с помощью ассоц.-ти + комм. $\to K \vee K \vee \Phi$

$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \vee$ ...

12.10.07
OK

⑦ устранение вхождений $x \vee x$:
$x_1 \vee x_1 = x_1$

Приведение 1-го канон. вида к дф:

если A: $f_A \equiv 0 \Rightarrow x_1 \cdot \overline{x_1} = x_2 \overline{x_2}$
$f_A \not\equiv 0 \Rightarrow$ с помощью ⑤ добавл. перем
если $A[X]$ и $B[Y]$
$\Rightarrow$ к виду $A[Z], B[Z]$, $Z = X \cup Y$
с помощью комм $\&, \vee$,
ассоц. упорядоч. слагаемые и буквы

Замет можно ограничиться правилами (2)-(9)

] $Б = (1, \oplus, \&) \Rightarrow$ над ним тоже $\exists$ КПСТ

$\boxed{\text{Т-ма 2}}$
для замкн. кл
] есть базисы $F = \{f_1, .. f_s\}$, $\mathcal{F}$ - класс ф-л над F (формул),
$[F] = [G]$ $\quad G = \{g_1, .. g_r\}$, $\mathcal{G}$ - класс ф-л над G
] $\exists$ КПСТ над $\mathcal{F} \Rightarrow \exists$ КПСТ для $\mathcal{G}$

Д-во] T - КПСТ для $\mathcal{F}$:
$T = \{A_i'[F] \sim A_i''[F]\}_1^m$ - полна в $\mathcal{F}$
$\Rightarrow \forall f_i \in F \quad : f_i = \Phi_i[G]$
] есть $B'[G] \sim B''[G]$,
построим $T' = \{A'[\Phi_1[G], .. \Phi_s[G]] \sim A''[..]\}$
] $S' = \{f_i = \Phi_i[G]\}_{i=1}^s$

12.10.07

$\Rightarrow T' \cup S'$ - конечн. полн. с-ма тождеств для $\mathcal{G}$ (будет далее)

т.к. F - базис $\Rightarrow g_i = K_i[F]$
$\Rightarrow B'[G] \sim B''[G]$
$\hookrightarrow \tilde{B}'[G[F]] \sim \tilde{B}''[G[F]]$ $\quad S = \{g_i = K_i[F]\}$

т.к. T - полная с-ма тождеств $\Rightarrow$ в T'
$\exists$ перевод $\tilde{B}'[G[F]] \underset{T}{\Rightarrow} \tilde{B}''[G[F]]$

для этого: $\tilde{B}'[G[F[G]]] \underset{T}{\Rightarrow} \tilde{B}''[G[F[G]]]$

Т-ма Поста: $\forall$ замкн. с-мы мн-в в булев. алгебре, $\forall$ базиса $\exists$ КПСТ

$\boxed{\text{Т-ма 3}}$ / Линдон / $\Rightarrow$ для к-зн логики уже неверно

В P_7 $\exists$ замкн. класс с конечн. базисом для класса формул над Б $\nexists$ КПСТ

Д-во В качестве Б возьмем лишь одну ф

φ:

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0		1	5	6		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0		5	5	5		
6	0		6	6	6		

$Б = \{\varphi\}$
] $K[Б]$ - ф-лы над φ
$\Rightarrow$ для $K[Б]$ $\nexists$ КПСТ
$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$

д-м, что
$A_{1,2,3} \begin{cases} x_1 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_1 = x_1 \cdot 0 = 0 \\ x_1 (x_2 \cdot x_3) = 0 \end{cases}$
если $x_2 \cdot x_3 = 0 \Rightarrow$ очев.
если $x_2 \cdot x_3 \neq 0 \Rightarrow x_2 \cdot x_3 \in \{1, .. 6\}$

Т-ма 1 /Линдон/ – ∄ КПСГ для Кф D 19.10.07

OK

Д-м похд. $B_m: (\dots((x_1x_2)x_3\dots)x_m)x_1=0$

$C_m: (\dots((x_1x_2)x_3)\dots x_m)x_2 = (\dots((x_1\cdot x_2)x_3)\dots)x_m$

B_m: ⇒ д-м, что $D\cdot x_1=0 \Leftrightarrow$

~~а) $D\equiv 0$ ⇒ B_m следует из A_2~~

~~б) $D\not\equiv 0$ ⇒ $D\in\{1,5,6\}$~~

$x_1\in\{0,1,5,6\}$

⇒ $D\cdot\{1,5,6,0\}=0$

$x_1\in\{2,3,4\}$

⇒ $x_1\cdot x_2=0 \Rightarrow D=0$

C_m: д-м, что $Dx_2=D$

а) $D\equiv 0$ ⇒ очев. из A_2

б) $D\not\equiv 0$ ⇒ $D\in\{1,5,6\}$

$D=1$ ⇒ $D=((x_1x_2)x_3)\dots x_m$ ⇒ $x_2=2 \Rightarrow Dx_2=D$

$D=5$ ⇒ $x_2\in\{2,3,4\}$ но $5\cdot\{2,3,4\}=5=D$

$D=6$ аналог.

⇒ если ф-ла реализ. непуст. ф., в ней невозм. умнож. слева и нулевые сомнож. ⇒ мы д-ем только ф-лы вида $((x_1\cdot x_2)x_3)\dots)$

/д-во т-мы 1 – позднее/

Т-ма 2° /Мурский/

∃ $\mathfrak{A}(x_1,\dots x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1,\dots x_n)$ – 2 ф-лы,

$T_n=\{A_{123}, B_m, C_m\}_{m=1}^{n} \Rightarrow \mathfrak{A} \underset{T_n}{\Longrightarrow} \mathfrak{B}$ /ф-ла $\mathfrak{B}$ выводима из $\mathfrak{A}$ с пом. T_n/

Д-во

определим канон. вид A:

① $f_A\equiv 0$ ⇒ кан. вид $A=x_1\cdot x_1$ /$=0$ по A_1/

② $f_A\not\equiv 0$ ⇒ кан. вид $A=(x_{c_1}\cdot)\cdot)x_{c_n}$, где перем. не повт. и умнож. только справа

/⇒ ф-лы различ. только порядком следов.../

Д-м, что $\mathfrak{A}$ ⇕ кан. вид $\mathfrak{A} \Rightarrow$ кан. вид $\mathfrak{B}$ ⇑ $\mathfrak{B}$

19.10.07

Если $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ и $f_{\mathfrak{A}}\equiv 0$ ⇒ ∃ мов умн. ся, либо ... при $m=1$ $B_m \Rightarrow x_1\cdot x_1=0$ /при помощи $A_{1,2,3}$ всегда можно свести к нулю ⇒ к $x_1\cdot x_1$/

∃ $f_{\mathfrak{A}}\not\equiv 0$ ⇒ можно свести к виду $(((x_{c_1}x_{c_2})x_{c_3})\dots)x_{c_m}$, перем. могут повтор., но ∄ фрагмента с x_1x_1 ⇒ по ф-ле C_m можем ликвидир. кратные вхожд.

⇒ получим $x_{c_1}\dots x_{c_n}$, скобки расстав. правильно

⇒ получим канон. вид $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$

Сведем 1 кан. вид к др. – д-м, что кан. вид опред-ся однозначно.

$0=x_c\cdot x_c = x_cx_c\cdot 0 = x_cx_cx_1\cdot x_1 = x_1\cdot x_1$

∃ I кан. вид $= x_{c_1}\dots x_{c_m}$, II кан. вид $= x_{j_1}\dots x_{j_k}$

Д-м, что

① состав перем. одинаков – от против.:

∃ $x_{j_\nu}\notin$ I; ∃ $x_{c_1}=1$, $x_{c_\mu}=2$ $\mu\neq 1,\nu$

$x_{j_\nu}=0$

⇒ I $=1\cdot 2\dots 2=1$

II $=2\cdot 2\cdot 1\,0\,2\,2=0$ ⇒ I $\not\sim$ II

② $x_{c_1}=x_{j_1}$ – от против.:

$x_{c_1}=1$, $x_{c_\mu}=2$, $\mu\neq 1,\nu$

⇒ I $=1\cdot 2\dots 2=1$

II $=2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\dots 2=0$ ⇒ противоречие

не на 1 месте

③ порядок перем. одинаков

∃ I $=x_{c_1}\dots x_{c_k}\dots x_{c_\mu}$

II $=x_{c_1}\dots x_{c_{k+1}}\dots x_{c_\mu}\cdot x_{c_k}$

$x_{c_1}=1$, $x_{c_\nu}=2$, $\nu\neq k,\mu$, $x_{c_k}=3$, $x_{c_\mu}=4$

⇒ I $=1\cdot 2\dots 3\dots 2\dots 4\cdot 2\dots = 5$

II $=1\cdot 2\dots 2\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 2\dots = 6$

⇒ канон. вид однозначен ∎

19.10.07
Ок

Следствие $\exists\ T_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$

$\Rightarrow T_\infty$ полна в классе множеств K_φ
/ $\exists$ n-max индекс $\Rightarrow T_n$ переводит $\forall$ ф-лу в её $\sim$-ную / $\Rightarrow$ БЕСКОНЕЧНАЯ ПОЛНАЯ СИСТ. ТОЖД.
т-ма Линд. – $\nexists$ кон ПСТ.

Ф-ла $\mathcal{A}$ облад. св-вом $C_n \overset{df}{\Leftrightarrow}$
① $\mathcal{A}$ зав. от $x_1, \dots x_n$
② $\mathcal{A}$ не содерж. 0 и умнож. слева
③ x_i встреч. в $\mathcal{A} > 1$ раз $\Rightarrow$ между 1 и 2 вх встреч. все $x_1, \dots x_n$

Пример левая ч. B_n обладает св-вом C_n, правая ч. – нет

Лемма 1

$\exists\ \mathcal{B}(x_1, \dots x_n)$ получ. из $\mathcal{O}(x_1, \dots x_n)$ преоб. над T_k, $k<n$: $\mathcal{O} \underset{T_k}{\Rightarrow} \mathcal{B}$ и $\exists\ \mathcal{O}$ обл. св-вом $C_n \Rightarrow \mathcal{B}$ обл. св-вом C_n

Д-во

$\exists\ \mathcal{O} = A_1 \underset{T_k}{\rightarrow} A_2 \underset{T_k}{\rightarrow} \dots \underset{T_k}{\rightarrow} A_m = \mathcal{B} \Rightarrow$

назх. д-ть, что однокр. применение тожд. сохр. C_n
Т.к. нет нулей и лев. умнож. $\Rightarrow$
тожд $A_{1,2,3}$ не применимо.
B_m – тоже не применимо, т.к. между 2-мя вхожд. содержится и вхожд. ост. перем.: $x_{i_1} \dots x_{i_1} \Rightarrow$ лев. часть B_m короче, чем у нас

Применение C_m сохраняет св-во C_n ∎

Следствие 2 B_{n+1} не выводимо в T_n
/ иначе если B_{n+1} облад. св-вом $C_{n+1} \Rightarrow$ св-во C_{n+1} сохр. /

19.10.07

/ продолж. д-ва т-мы Линдона:/
$\nexists$ КПСТ для K_φ — класс Линдона
предп. противн.: $T = \{A_i' \sim A_i''\}_{i=1}^{m} \Rightarrow$
по т-ме Мурск. все $A_i' \sim A_i''$ выв. в T_n
/ $A_i' \underset{T_n}{\Rightarrow} A_i''$ / $\Rightarrow T_n$ полна в K_φ
Но B_{n+1} не выводимо в $T_n \Rightarrow$?!0 ∎

Эквив-ть схем СФЭ

$\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \overset{df}{\Leftrightarrow} f_{\Sigma_1} = f_{\Sigma_2}$ / реализ. 1 и ту же ф. или с-му ф. /

Σ_1 – подсх. Σ_2: $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \overset{df}{\Leftrightarrow}$
Σ_1 – сх и часть Σ_2

Тождество – пара $\sim$-ных сх $\Sigma' \sim \Sigma''$, соединенных символом „$\sim$"

$\exists$ есть сх. Σ и Σ_1, Σ_2: $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$

Подстановка $S_{\Sigma_1, \Sigma_2}(\Sigma)$ – подст. Σ_2 вместо Σ_1

Σ_2

Подстановка $S_{\Sigma_1, \Sigma_2}(\Sigma)$ – $\sim$-ная $\overset{df}{\Leftrightarrow} \Sigma_1 \sim \Sigma_2$

Эквив. преоб над T сх. Σ' в Σ'': $\Sigma' = \Sigma_1 \underset{T}{\rightarrow} \Sigma_2 \underset{T}{\rightarrow} \dots \underset{T}{\rightarrow} \Sigma_k = \Sigma''$

Если Σ_1 – подсх. $\Sigma \Rightarrow$
① $\forall$ полюс Σ явл. полюсом Σ_1
② $\forall$ верш $v \in \Sigma_1$: $\exists$ вершина $u \in \Sigma \setminus \Sigma_1$: u, v смежн $\Rightarrow v$ – полюс Σ_1 (отдельно)
③ некот. внутр. верш Σ_1 м.б. полюсами

СФЭ схем функц. эл-тов

$\exists\ S$ – множество всех СФЭ в базисе $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$

19.10.07 Ok

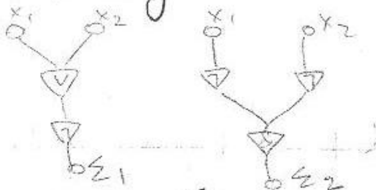
$\boxed{T^1\text{-ма } 3}$ / т-ма Горобовицкой /

$\exists$ КПСТ для S

Д-во. T_0: в классе формул над $Б_0$ $\exists$ КПСТ

Выведем из этого т-му

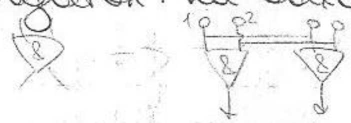
$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \Leftrightarrow$



включим в с-му тожд $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$

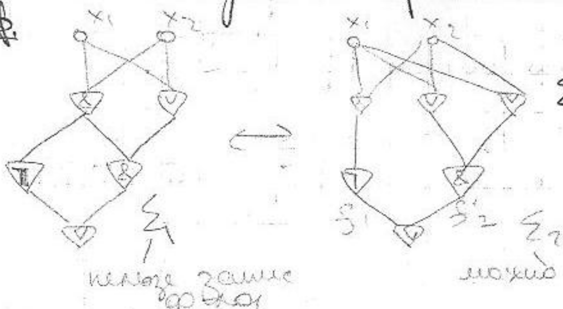
Если бы не было разветвл. выхода $\Rightarrow$ хватило бы предыд. 14 тождеств $\Rightarrow$

если $\exists$ разветвл. на выходе - продублир. вход:



$\Rightarrow$ можно перегнать преобр. на вх. схем / последов-но применяем преобр. /

Пример.



Σ_2: $f = f_1 \vee f_2$,

$f_1 = \overline{x_1 \& x_2}$

$f_2 = (x_1 \& x_2) \& (x_1 \vee x_2)$

/ продолж. д-ва /

26.10.07.

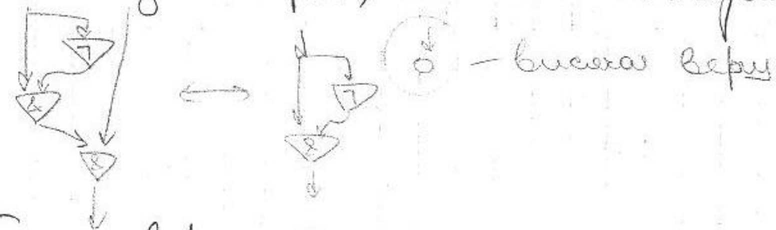
Σ_1 $\quad$ Σ_2

кан в $\Sigma_1 \to$ кан в Σ_2

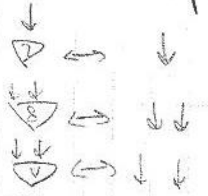
$\forall$ сх. !-но соотв. ф-ла. Если 2 сх $\to$ СДНФ это делается как аналог. ф-ла $\to$ СДНФ

26.10.07.

Когда мы убираем ветвл. на выходе, могут появ. доп. верш, не явл. выходами.



Такие верш. будем удалять:



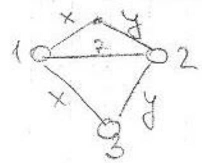
Далее преобр. к кан. виду / по тожд, аналог. тожд. для ф-л /. Если при этом возн. ветвл. на выходе - их убираем.

Т.к. соотв. с-ма для формул полна $\Rightarrow$ для кажд. сх. мы можем привести к кан. виду. ■

Эквивалентн. преобр. КС

КС $\Sigma' \sim \Sigma'' \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists$ взаимооднозн. соотв. T между их полюсами и матрицы $\|f'_{ij}\| = T\|f''_{ij}\|T^{-1}$

Пример.



$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

f_{ij} - ф. пров-ти между соотв. полюсами

$$\to \begin{pmatrix} 1 & xy \vee z & x \vee zy \\ xy \vee z & 1 & y \vee xz \\ x \vee yz & y \vee xz & 1 \end{pmatrix}$$

Подмн-во Σ_1, сост. из нек. верш. сх. Σ' и части контактов, их соедин. - подсх. Σ' $\Leftrightarrow$ в ней выделены полюса так, что:

26.10.07
Ok

ⓐ полюс Σ' - полюс Σ_1
ⓑ если верш. инцидентна контакту из $\Sigma' \setminus \Sigma_1 \Rightarrow$ она явл. полюсом Σ_1
ⓒ нек. мн-во внутр. вершин /м.б. пустое/ из Σ_1 назначено полюсами

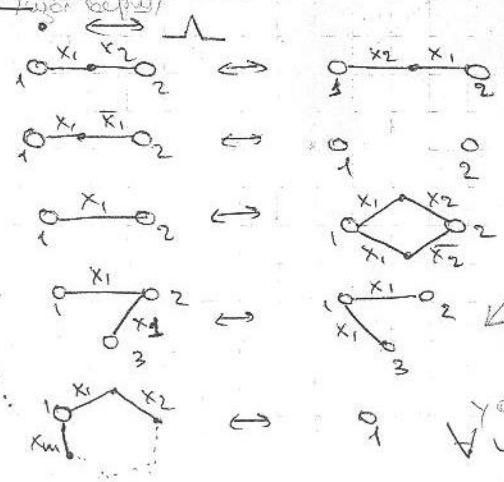
Для полюсов Σ_1 выбирается нек. нумерация. Если $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, T - вз.одн. соотв. их полюсов, Σ_1 - подсх. $\Sigma_2 \Rightarrow$ подстановка Σ_2 вместо Σ_1, согласованная с T - ~-ная подстановка

Тождество $\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_2$ понимается с точностью до
ⓐ согласованную перенумерацию полюсов
ⓑ согласованных перенумераций и отождествлению переменных
ⓒ согласованных замен для нек. i
$x_i \to \bar{x}_i$ или $\bar{x}_i \to x_i$

Тождества /основные/

нет верш.

t_1:
t_2:
t_3:
t_4:
t_5:
$t_6^{(m)}$:



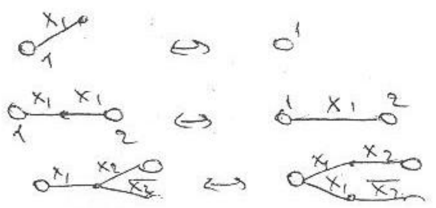
допускают совпадение вершин

убрали внутр. цикл

$\forall m \in \mathbb{N}$

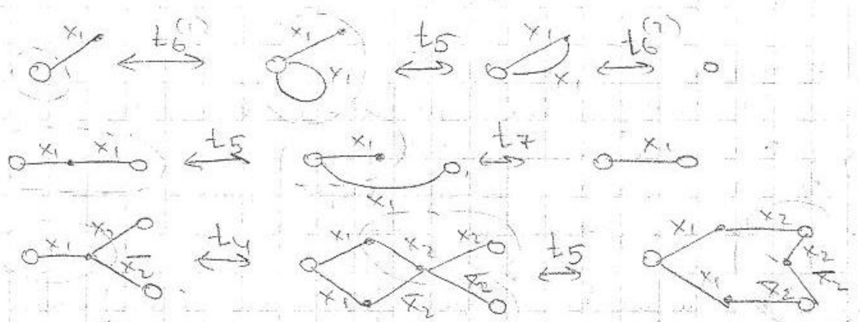
Пример.

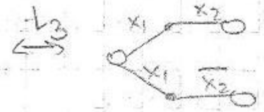
t_7:
t_8:
t_9:



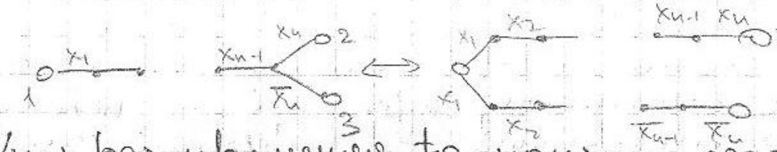
26.10.07

t_7:
t_8:
t_9:





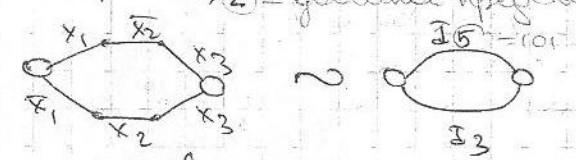
$t_9^{(n)}$:



/n-1 раз применим t_9, получим это тожд./

] I_i - цепочка, сост. конъ. $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$, где $i = (\sigma_1 \dots \sigma_n)_2$ — двоичное представление

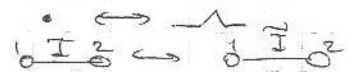
Пример.



I - цепочка, сост $x_1 \dots x_n$

Вспомог. тожд.: /для цепочек/

T_1:
T_2:

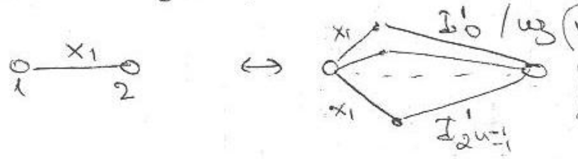


$\tilde{I}$ - произвольная перестановка контактов

T_3:

/м.б. $\forall$ отожд. полюсов/

T_4:



I'_0 /из (n-1) других переменн./

! но м.б. что среди этих n-1 есть отожд. с x_1

26.10.07
OK

T_5: 

T_6:  /убирает кратн. цепочки/

T_7:  /убирает висячие цепочки/

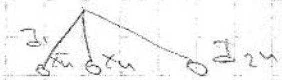
Лемма. Тожд. $T_1 \div T_7$ м.б. получены из $t_1 \div t_6^{(m)}$, $m \le n$ с помощью эк-ных преобр.

Д-во $T_1 = t_1$

T_2 – многокр. примен. t_2 /двигаем попарно/

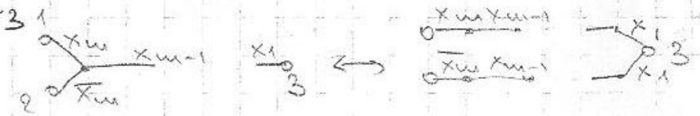
T_3 и T_4 док. по инд.: базис – t_3 и t_4 /$n = 1, 2$/

2.11.07.

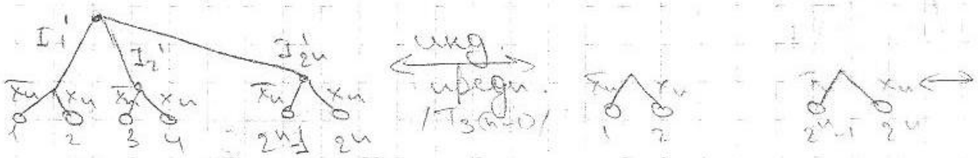
Д-м T_3.  $I_1 = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$, $I_{2^n} = x_1 \dots x_n$

по инд.

базис → t_3

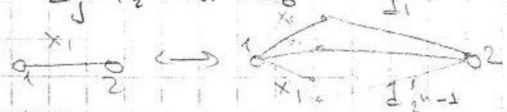
по t_9^{n}: 

⇒ /в исх. сх. 1-ые 2 ветви отлич. только $\bar{x}_n$ и x_n/



2^{n-1} раз $\xleftrightarrow{t_3}$ 

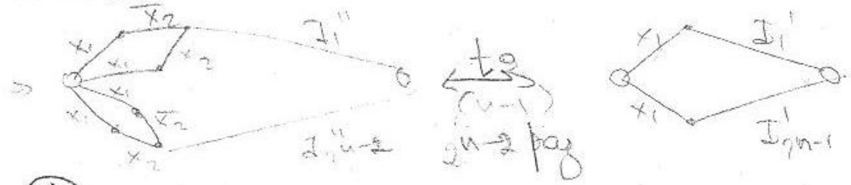
$I'_j = x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} = I'_\sigma$

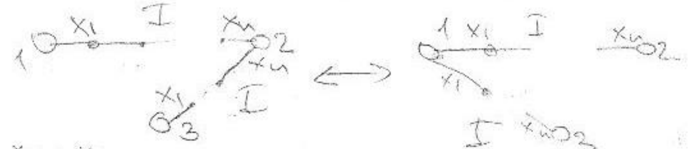
Д-м T_4 /по инд./ 

базис – t_4

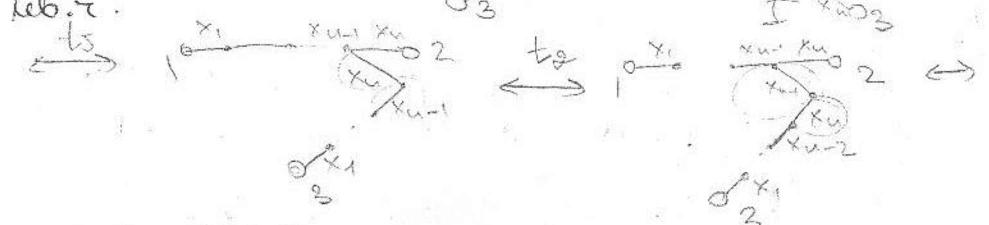
 $I''_k = x_3^{\sigma_3} \dots x_n^{\sigma_n}$

2.11.07

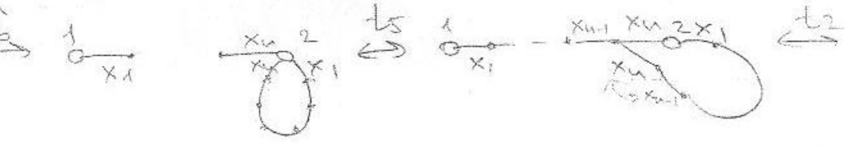


Д-м T_5: 

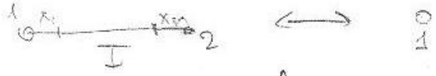
лев. ч.



Д-м T_6: 

прав. ч. 

посл. применяя t_5 и t_2 получим необх.

Д-м T_7: 

посл. применяя t_7 получим ∎

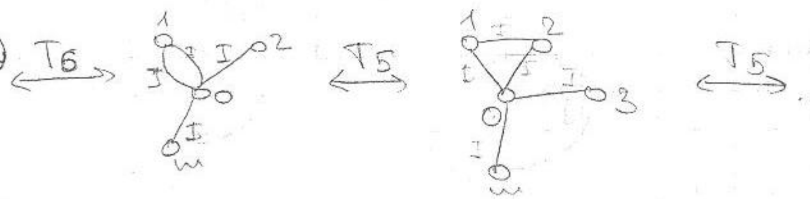
Лемма /о звездах/

A) 

/можно заменить «циклом» рядов/

B) 

2.11.07
OK

(A) 

(B) следует из (A) по T_7 ■

$\boxed{\text{Т-ма}}$ /Мурского/

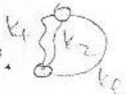
$\exists\ \Sigma' \sim \Sigma''$, $\Sigma' = \Sigma[x_1, .. x_n]$, $\Sigma'' = \Sigma[x_1, .. x_n]$) схемы

$\Rightarrow \Sigma' \xRightarrow[t_{6m}]{} \Sigma''$ / т.е. в классе конт. ∃ перех. с-ма полна /

<u>Д-во</u>. <u>Каноническ. вид</u> Σ 

/$\exists\ f_{ij}$ - ф. проводим. между полюсами i, j/

- это Σ: все полюса Σ сохр. и:
если $f_{ij} \equiv 0 \Rightarrow$ нет соедин.
$f_{ij} \not\equiv 0 \Rightarrow$ схема по СДНФ:

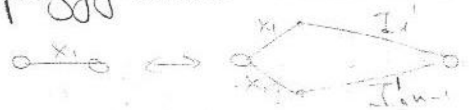
схема, постр. по СДНФ $D = K_1 \vee .. K_\ell$: 

Д-м: Σ' Σ''
$KB\Sigma' \longleftrightarrow KB\Sigma''$ /с помощью полной с-мы тожд./

T следует из $t \Rightarrow$ если д-м для $T_1 \div T_7 \Rightarrow$ будет д-но для $t_1 \div t_{6m}$

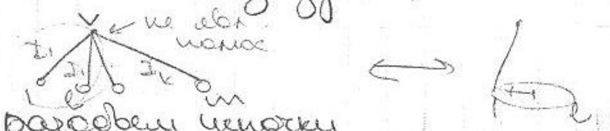
Приведение к КВ:

(1) раздувание контактов



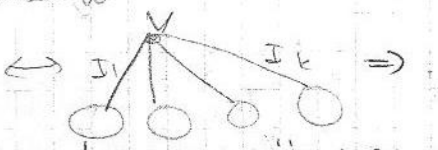
2.11.07

(2) Исключение узлов, не являющ. полюсами по н. о звёздах:



разобьем цепочки на кл. ~ -ти
/типа одноимен./

Если только 1 тип $\Rightarrow$ можно уничтож. верш: 

если неск. типов $\Rightarrow$ 

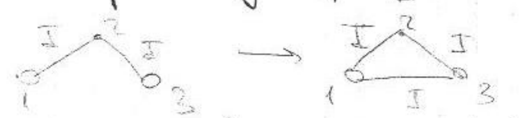
у верш. v все цепочки разноимённые $\Rightarrow$ по T_3 это $\Leftrightarrow$ o^1 o^k

<u>Замеч.</u> утв. для $k = 2^n$, но его легко обобщ.:

добавл. фиктивн. верш, не явл. полюс
$\Rightarrow$ те, к-рые не полюса потом просто уберем

$\Rightarrow$ после (2) мы имеем Σ_2: в качестве узл. верш. - только полюса

(3) приведение f_{ij} к СДНФ:
по правилу транз-ти



(37) (38) $\Rightarrow$ после (3) все необх. пров-ти реализуются +

2.11.07

Ok

+ чтобы избав. от лишних, исп. Γ_6

Приведение 1КВ к другому:

• м.б. разл. порядок перем $\Rightarrow \Gamma_2$: переставл. верш

$\Rightarrow$ все упорядочив. по возр. индексов перем $\Rightarrow$ сводим 1 КВ к др.

Следствие

$\exists\ t_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} t_6^m \Rightarrow$ с-ма t_∞ полна в КС

класс контакт. сх

беск-ная

$\exists$ задана сх. Σ

$\exists\ \varphi_\Sigma(x_1, \dots x_n)$:

$$\varphi_\Sigma(\tilde\alpha) = p - b + k$$

фикс набор; ребро; верш; # компонент связ-ти

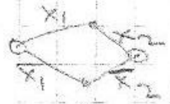
$G_\alpha = \Sigma(\tilde\alpha)$ − граф

если $x_i^{\sigma} = \sigma \Rightarrow$ остав. контакт, иначе − убираем

Индекс сх. $Ind(\Sigma) = \sum_{\tilde\alpha} \varphi_\Sigma(\tilde\alpha)$

сумма по mod 2

Пример



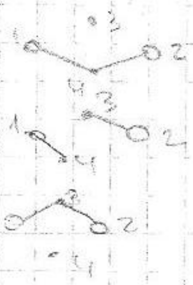
Σ

$\varphi_\Sigma(00) = 2-4+2 = 0$

$\varphi_\Sigma(01) = 2-4+2 = 0$

$\varphi_\Sigma(10) = 0$

$\varphi_\Sigma(11) = 0$



$m = n$

Σ_m

$\varphi_{\Sigma_m}(\underbrace{1 \dots 1}_{n}) = 1$ $/ = n - n + 1 /$

$\varphi_{\Sigma_m}(11011..1) = (n-1) - (n) + 1 = 0$

2.11.07

$\varphi_{\Sigma_m}(\underbrace{1101..0..1}_{\text{к нулю}}) = 0$ / # ребер кажд. раз ↓ на ..., а # комп. связ. ↑ на ...

$\Rightarrow Ind(\Sigma_n) = 1 + \underbrace{0 + \dots 0}_{2^n - 1} = 1$

$\exists\ m < n$ / перем. от $m+1$ до n − фиктивные /

$\Rightarrow Ind(\Sigma_m) = \sum_{\alpha_1..\alpha_m} \varphi_{\Sigma_m}(\alpha_1, \dots \alpha_m) = \sum_{(\alpha_1, \dots \alpha_m)} 2^{n-m} \varphi(\alpha_1, \dots \alpha_m) \equiv 0 \pmod 2$

фиктив

четное # по mod 2

Лемма 1.

$\exists\ \Sigma_1(x_1, \dots x_{n+1}) \xrightarrow[t_n]{} \Sigma_2(x_1, \dots x_{n+1})$

$\Rightarrow Ind(\Sigma') = Ind(\Sigma'')$

.11.07

Д-во $\Sigma_1 \underset{t_n}{\Rightarrow} \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_1 = \Sigma^1 \xrightarrow[t_n]{} \Sigma^2 \xrightarrow[t_n]{} \dots \Sigma^m = \Sigma_2$

Достаточно проследить следствие на 1 м шаге. Д-м, что индекс не изм., где

$Ind\Sigma = \sum_{\tilde\alpha} \varphi_\Sigma(\tilde\alpha) \pmod 2$, $\varphi_\Sigma(\alpha_1, \dots \alpha_n) = p - b + k$

t_1: Σ_1: $\Sigma\bullet \longleftrightarrow$ Σ_2: Σ /добавлен 1 верш/

$\varphi_{\Sigma_2}(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \varphi_\Sigma(\alpha_1, \dots \alpha_n)$

$\varphi_{\Sigma_1}(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \varphi(\Sigma) + 0 - 1 + 1 = \varphi_\Sigma(\tilde\alpha) = \varphi_{\Sigma_2}(\tilde\alpha)$

t_2:

$\tilde\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$

Если $\alpha_1 \alpha_2 = (00)$ или (11)

$\Rightarrow$ одинаковые картинки

$\Rightarrow \varphi_{\Sigma_1}(\tilde\alpha) = \varphi_{\Sigma_2}(\tilde\alpha)$

Если $\alpha_1 \alpha_2 = (01)$ или (10)

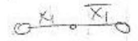
$\Rightarrow$ ...

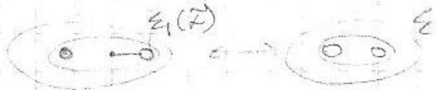
9.11.07 Ok

$\exists\ \Delta\varphi = \varphi_{\Sigma_1}(\tilde{x}) - \varphi_{\Sigma_2}(\tilde{x})$

\# верш, ребер и комп. связности = const

$\Rightarrow \Delta\varphi = 0$

t_3:  $\longleftrightarrow$ o o

$\exists\ x_1 = 0$ /1/ $\Sigma_1(\tilde{x})$ $\Sigma_2(\tilde{x})$  /0 - нет ребра, 1 - есть ребро/

при $x_1 = 1$ - симметр картина

\# комп. связности не изм.
/т.к. если $\exists$ цепь на $\tilde{x}$ $\Rightarrow$ она $\exists$ и в Σ_2 и наоборот/

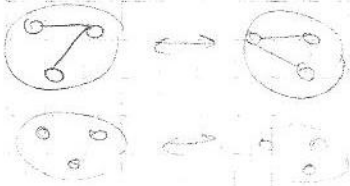
$\Delta\varphi(\tilde{x}) = 1 - 1 + 0 = 0$

t_4: $x_1 = x_2 = 1$ $\Sigma_1(\tilde{x})$ $\Sigma_2(\tilde{x})$  $x_2 = 0 \rightarrow$ симметр

$\Delta\varphi(\tilde{x}) = -2 + 2 + 0 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1$  $x_2 = 0 \rightarrow$ симметр

$\Delta\varphi(\tilde{x}) = -1 + 2 - 1 = 0$

t_5: $x_1 = 1$  $\Delta\varphi = 0$

$x_1 = 0$ $\Delta\varphi = 0$ /всё остается постоянным/

t_6: $m = n+1$, $\tilde{x} = (1 \ldots 1)$ Σ_1  преобразов. не применимо

$\Rightarrow$ схема переходит в себя

$m \le n$ Σ_1 Σ_2 

если $m = n \Rightarrow \Delta\varphi(\overbrace{1 \ldots 1}^{n+1}) = m - m + 0 = 0$

$\Delta\varphi(1101 \ldots 1) = m - 1 - m + 0 = 1$

9.11.07

$\Delta\varphi(\overbrace{1101110}^{m+1}) = \Delta\varphi = 1$

$\Rightarrow$ в совокупности вклад $= 2$, а по mod 2

$\mathrm{Ind}\ \Sigma = \sum_{\tilde{x}} \varphi(\tilde{x}) \Rightarrow$ индекс $= 0$

$\Rightarrow$ каждое преобр не изм. индекс

Следствие: Тождество t_6^{n+1} не выводимо в t_n

 $\longleftrightarrow$ o,

но $\mathrm{Ind}(\ldots) = 1$, а $\mathrm{Ind}(o) = 0$

$\varphi_o(\tilde{x}) = 0 - 1 + 1 = 0$

$\boxed{\text{Т-ма 1}}$ /Мурского/

В классе конт. схем $\nexists$ конечн. полн. с-мы тождеств
/В КС $\nexists$ КПСТ/

Д-во /от против./

$\exists$ с-ма тождеств T полна в КС,

$T = \begin{cases} \Sigma_1^{(1)} \leftrightarrow \Sigma_2^{(1)} \\ \Sigma_1^{(m)} \leftrightarrow \Sigma_2^{(m)} \end{cases}$

$\exists\ n$ - max индекс перем в схемах с-мы T

По д-ной лемме (Т-ма Мурск.), если $\Sigma_1(x_1, \ldots x_n) \sim \Sigma_2(x_1, \ldots x_n)$

$\Rightarrow \Sigma_1 \underset{T_n}{\Rightarrow} \Sigma_2$

$\Rightarrow$ т.к. T полна $\Rightarrow t_n$ полна

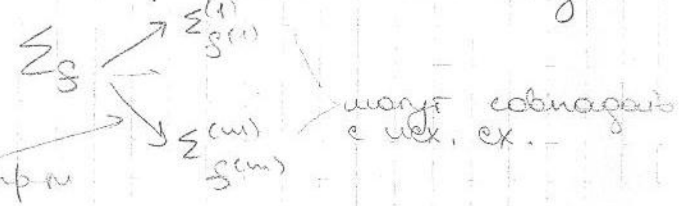
$?^0$ сл. 1 ■

$\boxed{\text{Вывод}}$ Для схем аналог. со сх. функц. ~~элем~~ устройств.

9.11.07
ОК

Самокорректирование

∃ есть нек. неисправность и сх. выходит из строя:



Под действ. источн. неиспр-ти сх. может изм., но при этом ф. остается.

Усл. самокорр. отн. ИН (источн. неиспр.):

$\forall i \in [1, m] : f^{(i)} \equiv f$

Виды неисправн.:

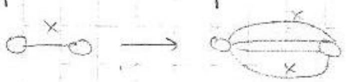
- замыкание
- обрыв

∃ хотим исправить m неисправностей

① $\Sigma \longrightarrow \Sigma$ (замыканий m)

⇒ проводимость = const

② коррекция обрыва



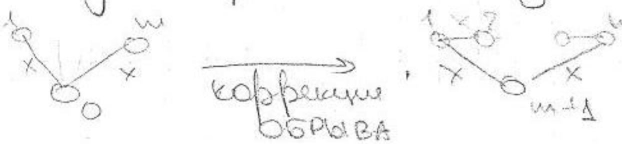
⇒ ∀ разрыва проводимость = const

Но добавление # контактов ↑ вер-ть неисправности сх. ⇒ худший пример.

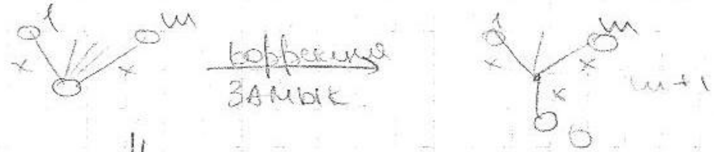
③ m обрыв, k замык.

9.11.07

Введем огранич. на вид сх.:

①


⇒ сложность схемы от m → m+1 ⇒ несильно изм.

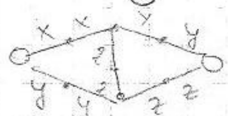
②


конт. от m → m+1

Пример

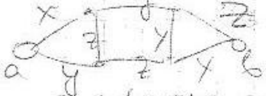
$f_\Sigma = xy \vee xzz \vee yz \vee yz = xz \vee yz \vee xy$ — медиан

корр. отн-но 1 замык.:



5 контактов → 10 контактов

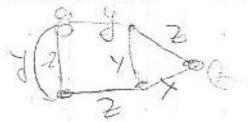
нетрив. корр.:



сложн. = 8

она предотвращ. неиспр. в замык. ∀ контакта:

∃ 1й контакт → 6 / совместились верш.,



$f_{\Sigma'} = yz \vee (y \vee z)z(yz \vee x) \vee yyx = yz \vee xz \vee xy$

⇒ необх. придумать "умный" метод самокоррекции

④ Для сложн. сх. почти всегда: $\xrightarrow{\text{асимпт. сх.}}$ min сх.

9.11.07
OK

$\boxed{\text{Т-ма}}$ /Потапов, Яблонский/

$\forall f(x_1,\dots x_n)\ \exists\ \Sigma_f^{об} / \Sigma_f^{зам} /$, корректир. $\forall$ 1 обрыв /замык/: $L(\Sigma_f) \le \frac{2^n}{n}$

самокорр.

сложность

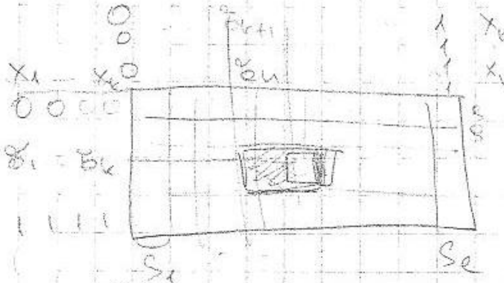
по т-ме Лупанова-Шеннона: почти все $f(x_1,\dots x_n)$: $L(f) \ge \frac{2^n}{n}$,

$L(f) = \min_{\Sigma_f} L(\Sigma_f)$

$\Rightarrow$ нижняя оц. справедлива $\forall \Sigma_f$.

16.11.07

Д-во аналог. мет. Луп.:
Пусть $f(x_1,\dots x_n)$ задана таблицей.



Разрежем табл. на полосы ширины s

Среди последних перем. выдел. r шт и отн-но них разобьём наборы на

$B^r = S_1' \cup \dots \cup S_l'$, S_l' - полусферы, попарно н-щиеся

$(\sigma_{k+1},\dots \sigma_r \sigma_{r+1} \dots \sigma_n) \in S_j$, если $(\sigma_{k+1} \dots \sigma_{k+r}) \in S_j'$

Разобьём в соотв. с этими мн-вами на верт. полосы - $S_1 \dots S_l$, $s' \le s$, $П_1 \dots П_p$

$p = \lceil \frac{2^k}{s} \rceil$, $l \le 1 + \frac{2^r}{r} \ln r$

16.11.07

Пусть $f_{ij}(\tilde x^n) = \begin{cases} f(\tilde x^n), & \text{если } \tilde x^n \in П_i \cap S_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\Rightarrow f = \bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{j=1}^{l} f_{ij}$

В мет. Луп. Σ форм. и получ. сх. исх. ф.
? как реализ. f_{ij}.

$f_{ij}(x_1,\dots x_n) = \bigvee_{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in S_j} x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots x_n^{\sigma_n} f_{ij}(x_1 \dots x_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_n) =$

$= \bigvee_{\sigma \in S_j} K_\sigma f_{ij\sigma}(\tilde x^k)$ /ненулевые наборы бывают только на этих наборах/

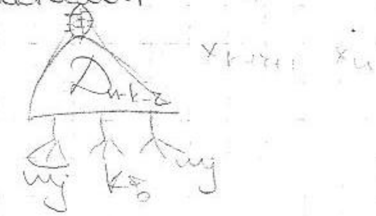
Эти ф. = 1 только на неск. наборах $\in$ j-й горизонт. полосе

Все наборы на j-й полосе:
$\psi_j(x_{k+1} \dots x_{k+r})$

полусф: $S_j'(\tilde r)$

— эта ф. = 1 на этих наборах

Реализуем ф. и „приклеиваем" дер, реализ. хар-ную ф. на этих наборах: к кажд. выходу дер-мешку с ψ_j контактами



между вых. реализ. $K_{\sigma j}$: $\sigma \in S_j$

В дер(ю) - все конъ. перем. $x_{k+r+1} \dots x_n$
$\Rightarrow$ эта сх. реализ. все конъ $\in S_j$

16.11.07 Ok

Реализуем $f_{ij\delta}$ схемой, постр. по СДНФ.

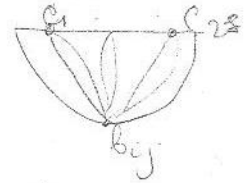
$|N_{f_{ij\delta}}| \le s$ — кол-во единиц $\Rightarrow$

$L(D^{сов}_{f_{ij\delta}}) \le s\cdot k$

сложность СДНФ — каждое завис. от k перем

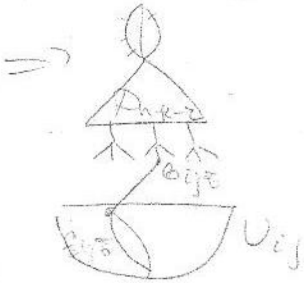
$\Rightarrow$ сложность КС $\le s k$.

Реализ. все такие ф. — ортог. многополюсн.:



высота ств — $s \Rightarrow$ # ств $\le 2^s \Rightarrow$ ф. $\le 2^s$

Кажд. ф. реализ. своей СДНФ $\rightarrow U_{ij}$ — ф-ции, в одном полюсе



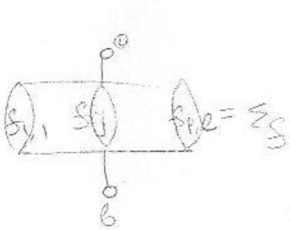
I ярус

II

III $\Rightarrow$ реализуем f_{ij}

IV ярус

Чтобы реализ. f: $f = \vee\vee f_{ij} \Rightarrow$



Найдем её сложность:

$L(\Sigma_I) \le r^2$ / кажд. цепочка r контактов, цепочек m_j, но $m_j \le r$ / — не > разделит. дерев-а

сложность подск. I ярус

$L(\Sigma_{II}) = L(D_{n-k-r}) = 2^{n-k-r+1}+2 \le 2^{n-k-r+1}$

$L(\Sigma_{III}) = m_j \cdot 2^{n-k-r}$ / кажд. метка m_j конт, подсоед. к 2^{n-k-r} вых.

$L(\Sigma_{IV}) \le 2^s \cdot ks$

различ. ф. — сложность кажд. из

47

16.11.07

$\Rightarrow L(\Sigma_S) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{i=1}^{l} L(\Sigma_{f_{ij\delta}}) \le \sum_i\sum_j (r^2+2^{n-k-r+1} + ks2^s + m_j 2^{n-k-r}) \cancel{=}$ $\sum m_j = 2^r$ / m-мерн. куб по полуреф. /

$= pl(r^2+2^{n-k-r+1}+ks2^s) + p\cdot 2^{n-k}$

$\exists\ k = \lfloor 2\log_2 n\rfloor,\ r = \lfloor\sqrt{n}\rfloor,\ s = \lfloor n - 2\sqrt{n}\rfloor$

$\Rightarrow$ I. $r^2 \le n$

ясны II. $2^{n-k-r+1}$

IV. $(2\log_2 n)\, n \cdot 2^s$

$pl \le \left\lceil \frac{2^k}{s}\right\rceil \left(1+\frac{2^r}{r}\ln er\right) \le \frac{2^{k+r}}{s\cdot r}\ln er$

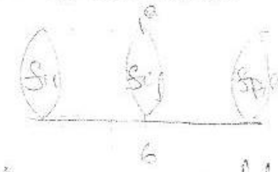
① $\Rightarrow pl\, r^2 \le n\cdot\frac{2^{k+r}}{sr}\ln er \lesssim n\,\frac{2^{2\log(n+\sqrt{n})}}{n\sqrt{n}}\log n = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$

② $pl\cdot 2^{n-k-r+1} \lesssim \frac{2^{k+r}}{sr}\ln n\, 2^{n-k-r+1} = \frac{2^{n+1}\ln n}{n^{3/2}} = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$

④ $pl\cdot(2\log_2 n)\, n\, 2^s \lesssim \frac{2^{k+r}}{sr}\ln n\,(2\log n)\, n\cdot 2^{n-2\sqrt{n}} \lesssim \frac{2^{n-\sqrt{n}+2\log n}}{n^{3/2}}\cdot(2\log n)^3\cdot \cancel{n} = o\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$

$p\cdot 2^{n-k} = \left\lceil\frac{2^k}{s}\right\rceil\cdot 2^{n-k} \sim \frac{2^n}{n}$

$\Rightarrow$ основная ч. сложности на III ур. метелок



$\le \frac{2^n}{n}$

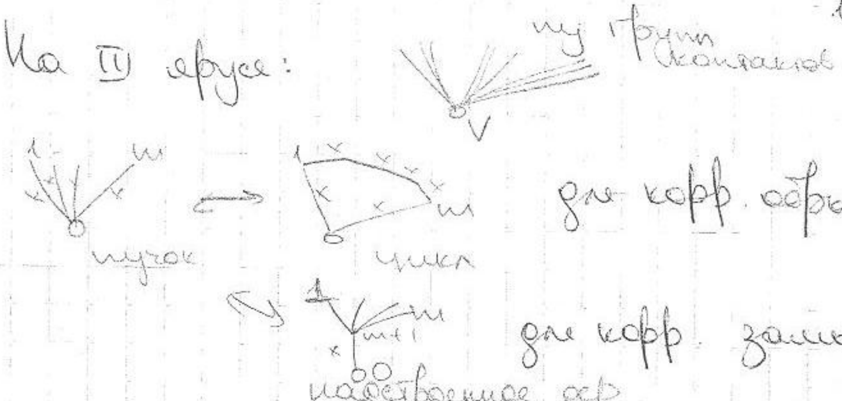
если корр. обрыв $\Rightarrow$ контакт заменяем на 2 || нах конт

если корр. замык $\Rightarrow$ на 2 послед.

аналог. на II и IV ярусе — тривиальн. самокорр.

16.11.07 Ok

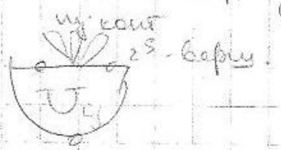
На II ярусе:



для корр. обрыва

для корр. замык.

⇒ оценим # дополнит. контактов.



в каждом U_{ij} добавится

$$\sum_{i,j} 2^s m_j = \sum_i 2^{s+r} = p\cdot 2^{s+r} \sim \frac{2^{k+s+r}}{s} \sim \frac{2^{2\log n + n - \sqrt{n}}}{n} = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

⇒ в средн. части добавится $o\left(\frac{2^n}{n}\right)$

В остальных /I, II, IV/ частях доб. $o\left(\frac{2^n}{n}\right)$

$$2\cdot o\left(\frac{2^n}{n}\right) = o\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow L(\Sigma_S^{самокорр}) \underset{ас-ки}{\sim} L(\Sigma_S^{лун}) \sim \frac{2^n}{n} \quad \blacksquare$$

Замеч. Мы корректир. всего 1 замык., могли сэкономить >; можно корректир. ∀ m контактов, $m \to \infty$, но не оч. такие /$m \sim \sqrt{n}$/

16.11.07

Надежность

Σ схемы из ФЭ, в к-рых м.б. неиспр.

Есть базис $Б = \{F_1^{n_1}, \dots, F_m^{n_m}\}$

реализ. ф. от n_i перем.

Базисн. эл-ты могут выходить из строя:

$F_i^{n_i} \to F_{i,1}^{n_i}, \dots, F_{i,r}^{n_i}$

вх не изм, но эл-т реализ. ф. $f_i \to f_{i,1}, \dots, f_{i,r}$

Неисправность м.б. формальной — эл-т изм, а ф. осталась той же. А может и нет. Но мы считаем, что у кажд. есть вер-ть перехода p_ν и $\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu = 1$, $p_\nu \geq 0$

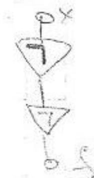
Будем считать, что задан ИН /источн. неиспр-ти/

Произошла форм. неиспр-ть ⟺ хотя бы в 1-м эл-те произошла неиспр-ть.

∃ $P(\Sigma)$ — вер-ть неисправности сх. Σ при заданном ИН

$$F_i^{n_i} \to \begin{pmatrix} F_{i,1}^{n_i} & \dots & F_{i,r}^{n_r} \\ p_1 & \dots & p_r \end{pmatrix}$$ — характеризует ИН /распред. вер-тей/

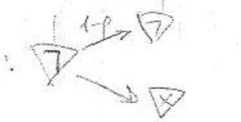
Пример



Σ

$f(x) = x$

неиспр:



$$\Rightarrow P(\Sigma) = 2p(1-p)$$

16.11.07 23.11.07.
OK

$\exists\ P_\Phi(\Sigma)$ – вер-ть формальной неиспр.

Лемма 1 /д-во очев/

$P(\Sigma)\quad P_\Phi(\Sigma) = 1-\prod_{i=1}^{L(\Sigma)}(1-p_i)$, ?

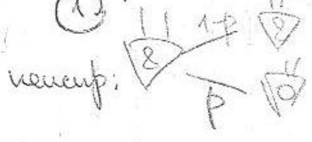
$\Sigma_{L(\Sigma)}$

p_i – вер-ть неправильного срабатыв. i-го эл-та

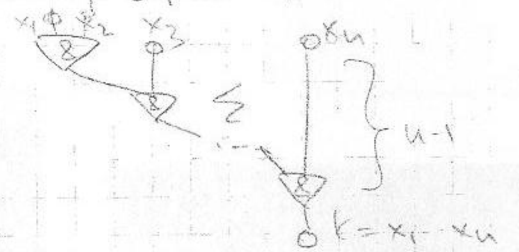
Пример /нарастание ненадежности/

① вер-ть неиспр. сраб. $=1$

неиспр.:



сх.:



$P(\Sigma) \triangleq P(\Sigma$ неиспр. сраб. на $(1\ldots1)) =$
$= 1-(1-p)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \forall p>0$

$\Rightarrow$ схема может работать сколь угодно ненад.

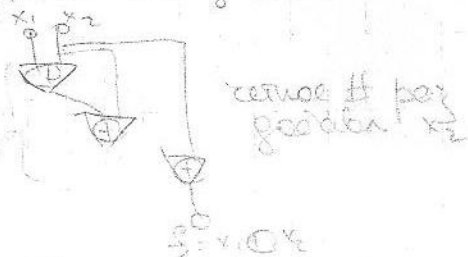
② /усиление выразительной способности/ реализ. > ф-ций, чем исходн. сх.

$Б = \{\oplus\}$

неиспр.:

штрих Шеффера

сх.:



четное # раз добавл. x_2

$f = x_1 \oplus x_2$

$x_1 x_2$	$\oplus$	|
0 0	0	1
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	0	0

$\measuredangle$ набор $(0,0)$ и $\exists$ произошла неиспр. $\Rightarrow$ получ. 1 и она будет до конца

$\Rightarrow$ сх. реализ. $f' = x_1 | x_2$

$\Rightarrow P(\Sigma) = P(\Sigma$ неиспр. на $(0\,0)) =$
$= 1-(1-p)^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ сколь угодно ненадежно

$\exists$ задана база $Б$ и ИН /источн. неиспр./
f реализуется в $Б$ сколь угодно надежно $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \Sigma_f^\varepsilon : P(\Sigma_f^\varepsilon) \le \varepsilon$ вер-ть

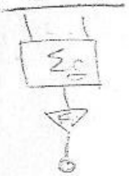
Лемма 1

$\exists\ Б = \{F_1, \ldots F_m\}$, ИН: $\forall i\ F_i \xrightarrow{} F_i^{(1)} - f_i$, $\xrightarrow{p_{i2}} F_i^{(2)} - f_{i2}$ схема реализ.

$\exists$ ф. : $f_{ik_1}\equiv 0$ и $f_{ik_2}\equiv 1$ и
для этих ф. : вер-ть перехода $p_0, p_1 > 0$ $/F_i \to F_i^{(2)}/$

$\Rightarrow$ невозможно реализ. $\forall f_i$ в $Б$ сколь угодно надежно.

Д-во $\measuredangle$ ф. f и схему для неё – Σ_f
$\exists\ F_i$ – последний эл-т, с к-рого снимаем выход схемы



$P(\Sigma_f)$ – вер-ть того, что сх. выдает неправ. рез-т на наборе $\tilde{b}$

схема, выдающ. f_i

$P(\Sigma_{f_i}) \geq P[\exists \tilde{x} : f(\tilde{x}) = b$ и выход эл-та $F_i = \bar{b}$
вер-ть перехода

$\geq p_{i,\bar{b}} \geq \min(p_{i0}, p_{i1})$

вер-ть того, что F_i выдает на выходе const $\bar{b}$

$\Rightarrow P(\Sigma_f) \geq \min\limits_i \min\{p_{i0}, p_{i1}\}$ вся схема

$\Rightarrow$ если фикс. $\varepsilon = \frac{\min}{2}$ получим $\varepsilon > 0$ ▨

ИН – Неймановский $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ среди ф-ций неисправностей встречаются все ф-ции от n_i переменных и все $p_i > 0$

$F_i \xrightarrow{n_i\ p_1} f_1$
$\xrightarrow{p_2\ n_i} f_2^{n_i}$

Следствие. Если ИН – Кум. $\Rightarrow$ в нём нельзя реализ. произвольн. ф. сколь угодно надежно

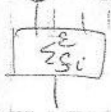
Лемма 2 /крит. $\exists$-ния сколь уг. над. сх/

В базисе Б при заданном $\overline{\pi\,(\text{ИН})}$ ИН можно реализ. произв. ф. сколь угодно надежно $\Leftrightarrow$ в Б при (ИН) можно было реализ. все ф-ции некоторой полной в P_2 с-мы ф-ций сколь угодно надежно.

Д-во ($\Rightarrow$) очев.

замыкание

($\Leftarrow$) $\exists$ все ф. с-мы $A: [A]=P_2$ реализуемы в Б (ИН) сколь угодно над.
Построим $\Sigma^{\varepsilon}_{f_i}$ $\forall \varepsilon$ в базисе A, реализ. ф-ции этой с-мы



$\Rightarrow$ для заданной ф. f соотв. ей Σ_f

$\exists\, L(\Sigma_f)=L$, фикс. $\varepsilon>0$

сложность

$\forall f_i$ построим сх. в базисе Б:

$\Sigma^{\delta}_{f_i}: \delta = \frac{\varepsilon}{L}$

В схеме Σ_f кажд. ф, реализ f_i, заменим сх, реализ. с $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ – вер-ть неправ. срабатыв.

Д-м, что у неё вер-ть непр. сраб $\le \varepsilon$:

$$P(\Sigma^{\varepsilon_1}_f) \le P(\text{форм. неиспр } \Sigma^{\varepsilon_1}_f) \le \sum_{i=1}^{L} p_i \le$$

формальная обиность; вер-ть неправ. сраб эл-та

$$\le L\delta \le \varepsilon$$

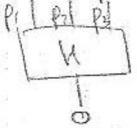
$\Rightarrow$ если в базисе $\nexists$ надежн. эл-тов, то нельзя постр. сколь уг. над. реализацию.

$\exists$ Б $=$ Б$_1 \cup$ Б$_2$, где в Б$_1$ реализуются все ф. некот. полной с-мы, Б$_2$ состоит из надежн. эл-тов

$\exists$ Б$_2 \neq \varnothing$ /$\Rightarrow$ вер-ть неправ. сраб. их $=0$/

$\exists$ Б$_2 = \{H\}$ – ф-ция голосования:
реализ. ф. $f = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$

Попробуем $\uparrow$ надежность



$\exists$ на вх. 1 и тот же сигнал – x, он искажается на 1-м вх. с в-тью p_1, на 2-м – с p_2, на 3-м – p_3

С вер-тью p_i – реализ. отрицание, $1-p_i$ – срабат. прав.: $x \xrightarrow{p_i} \bar{x}$, $x \xrightarrow{1-p_i} x$

$\exists\, \Theta(p_1,p_2,p_3)$ – вер-ть неправ. срабатыв. ($\Leftrightarrow \ge 2$ из 3 вх. выдали сиг)

$$\Theta(p_1,p_2,p_3) = p_1p_2(1-p_3)+p_1p_3(1-p_2)+p_2p_3(1-p_1) + p_1p_2p_3 = p_1p_2 \vee p_1p_3 \vee p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$$

Д-м, что $\Theta(p_1,p_2,p_3)$ монот. по кажд. из пер.

Д-м для p_1:

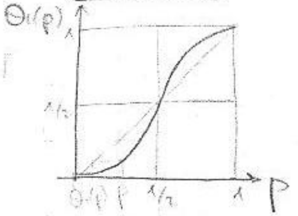
$\exists\, \Delta\Theta = \Theta(p_1+\Delta, p_2, p_3) - \Theta(p_1,p_2,p_3) =$
$= \Delta(p_2+p_3) - 2\Delta p_2p_3 \ge \Delta(p_2+p_3)^2 \ge 0$

Аналог. для ост.

$\exists\, p = \max(p_1,p_2,p_3)$,
$\Theta_1(p) = \Theta(p,p,p) = 3p^2-2p^3$

Впредь считаем, что $p_i < 1/2$ (если $> 1/2 \Rightarrow$ эл-т скорее реализ. ту др. ф-цию, к-рая с в-тью $1-p$ /

Замеч. $\Theta_1(p) \geq \Theta(p_1, p_2, p_3)$



$\Theta_1'(p) = 6(p-p^2)$

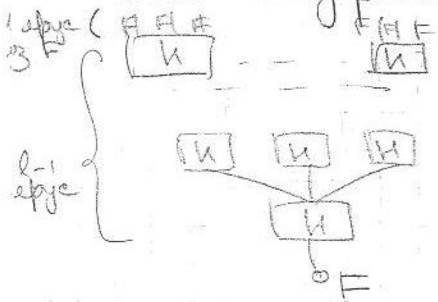
$\Theta_1''(p) = 6 - 12p$ $>0,\ p<1/2$; $<0,\ p>1/2$

$\Rightarrow$ при $p < 1/2$: $\Theta_1(p) < p$

$\Rightarrow$ ↑ надежность

F о $\Theta_1(p) < p < 1/2$

Если в дерево из таких ф.:



$\exists\ P(F) = p$, найдем вер-ть неправ. срабатыв. и сложность сх

$$L(\Sigma) = \underbrace{3^l}_{\text{эл-тов } F} + \sum_{i=1}^{l} 3^{i-1} = 3^l + \frac{3^l - 1}{2} \leq 3^{l+1}$$

$$P(\Sigma_1) = \Theta(p) = 3p^2 - 2p^3 < 3p^2$$

$\exists\ \Theta_l(p) = \Theta_1(\Theta_{l-1}(p))$

Д-м, что $\Theta_l(p) < \frac{1}{3}(3p)^{2^l}$, по инд.

базис инд. $l=1$ д-но

$$\Theta_l(p) \leq \frac{1}{3}(3\Theta_{l-1}^2) = \frac{1}{3}\left(3\left(\frac{1}{3}(3p)^{2^{l-1}}\right)^2\right) = \frac{1}{3}(3p)^{2^l}$$

Следствие $p < 1/6 \Rightarrow \Theta_l(p) = o(2^{-2^l})$

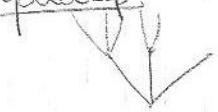
$\Rightarrow$ вер-ть ↓ сверхэкспоненциально, а сложн ↑ эксп-но

Деревья /q-однор/

Σ-ная схема = дерево

q-однородное дерево $\Leftrightarrow$ ① в нем q висяч. вершин /остальные – „внутренние"/; ② из кажд. внутр. верш., кроме, м.б. 1-й, вверх исходят ровно 3 ребра; из этой исключит. верш. исходят 2 ребра и она находится в верхнем ярусе; ③ все 3^i вершин i-го яруса при $i < l$ присутствуют в дереве.

Пример



$q = 6$, 1 исключит. внутр. верш, 3 внутр. верш. /степени > 1/

Утв. 1 Если D – q-одн. дер. $\Rightarrow$ # внутр. верш $= \lfloor q/2 \rfloor$

Д-во $\exists\ r$ = # внутр. верш $\Rightarrow$ # ребер $= q + r - 1$ /всего верш $= q + r$, а ребер на 1 </

$$\sum_{i=1}^{\#\text{верш}} \underset{\text{степень}}{\deg v_i} \overset{\text{граф}}{=} 2|E| \ (\#\text{ребер}) \Rightarrow$$

а) нет исключит. верш

$\Rightarrow 3 + 4(r-1) + q = 2(q + r - 1)$ (висячие)

$2r = q - 1$

б) $\exists$ исключит. вершина /степени 2/

$\Rightarrow 2 \cdot 3 + (r-2) \cdot 4 + q = 2(q + r - 1)$

$2r = q$

$\Rightarrow r = \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$

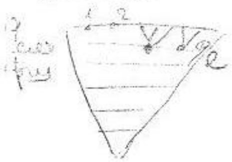
Утв. 2 $\exists$ D – q-одн. дер $\Rightarrow \exists\ D_i'$ – поддерево:

① корни D, D_i' совпадают

② все висячие верш. D_i' явл. висячими в D

③ из $\forall$ внутр. верш. D_i' исходит вверх ровно 2 ребра

④ висяч. верш. $i \in D_i'$



23.11.07 Ok

Д-во. $\lessdot$ висяч. верш. с № i,
$\exists!$ цепь, соедин. её с корнем
Из внутр. верш. исходят 3 ребра.
Оборвем 1 из них /произв./ и продолжим движение, произвольно выкидывая по 1 му ребру
$\Rightarrow$ продвигаюсь вверх до висяч. верш
$\Rightarrow$ для кажд. i – свое поддерево
i – центр дерева D_i'

30.11.07

Из этих дер. будем строить сх:
кажд. внутр. верш. заменяем соотв. эл-том H
$\Rightarrow$ для кажд. дер. сопоставл. однозначно сх. Σ из эл-тов ф. полосов
Для эл-та со степенью 2 подаем на 1 из входов ноль.
$\lessdot$ св-ва полученной сх.

$\lessdot$ для i-верш. дер. $D_i' \Rightarrow$ все висяч. верш. нах. в 1-м ярусе.
На все висяч. верш $\in$ дер. подадим 1,
$\notin$ -ище – подадим 0
$\Rightarrow$ на выходе сх. появится x.

Д-во. пройдем по цеп. соедин. e_2 верш с корнем. От H ровно 2 эл-та $\in$ дер.

$$H(x_1, x_2, x_3) = m(x_1, x_2 x_3) = x$$

$\Rightarrow$ на выходе этого яруса появится эл-т x
2 вых – $1 \in D_i'$, др-нет
Т.к. там были 1 $\in$ др и ноль $\Rightarrow$ аналогично ей повторится

30.11.07

$\boxed{\text{Т}^1\text{-ма 1}}$

$\exists$ базис $Б = \{V, \&, \neg, H\} \Rightarrow \forall f\ \exists$ сх. $\Sigma(f)$ в $Б$:

$m = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$

① $L^Б(\Sigma_f) \leq \frac{2^{n-1}}{n}$

② $L^{V,\&,\neg}(\Sigma_f) = O\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right)$

\# дизъ, конъ и отриц в сх Σ

Д-во. Зададим f таблично:

$\exists$ разрежем на полосы дл. s
Π_i – i-ая полоса

$$f_i(\tilde{x}^n) = \begin{cases} f(\tilde{x}^n), & \text{если } (x_1, \dots x_k) \in \Pi_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$f(b_1, \dots b_n)$

$$\Rightarrow f = \bigvee_{i=1}^{q = \lceil 2^k / s \rceil} f_i$$

$$f_i = \bigvee_{(b_{k+1}, \dots b_n)} x_{k+1}^{b_{k+1}} \dots x_n^{b_n}\, f_i(x_1, \dots x_k, b_{k+1}, \dots b_n) =$$

$$= \bigvee_{b} K_b\, f_{i,b}$$

Реализуем K и f_i в базисе $V, \&, \neg$,
$f_{i,b}$ реализуем в сх. Σ_H /состоящ. из эл-тов ф. полосов/

$f_{i,b}$: $b_1 \dots b_k$, ненулевые с исх. ф.

$\exists$ $\varphi_j(x_1, \dots x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1, \dots x_k) \in \Pi_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ – характер. ф. Π_j

$\exists$ $g_b^i(x_1, \dots x_k) = \begin{cases} f_i(x_1, \dots x_k), & (x_1, \dots x_k) \in \Pi_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$G_b^i(x_1, \dots x_k) = g_b^i(x_1, \dots x_k) \vee \bigvee_{j \neq i} \varphi_j(x_1, \dots x_k)$$

$j \in$ 0 i – ...-во верш

$\Rightarrow$ G на j-й полосе $= g$

Если $j \in D_i \to$ берём единичн. х.ф

$\quad\;\; \notin \to$ б нулевую

Из g, G и Ψ построим f_i в базисе $\&, \vee, \neg$

Д-м для этого л.

Лемма 1

$\exists\, H(z_1, \dots z_q)$ - ф, реализуемая сх. Σ_H, полученной из D - q-единор. деф

$\Rightarrow f_\sigma(x_1,..x_k) = H\left(G_\sigma^1(x_1,..x_k), .. G_\sigma^q(x_1,..x_k)\right)$

Д-во на кажд. вх. Σ_H подаём $G_\sigma^1, .. G_\sigma^q$, д-м, что на выходе будет $f_\sigma(x_1, .. x_k)$

Возм. в-ты:

① $(\sigma_1, .. \sigma_k) \in \Pi_i \Rightarrow$ на i-м входе:

$G_\sigma^i(\sigma_1, .. \sigma_k) = g_\sigma^i(\sigma_1, .. \sigma_k) = f_\sigma^i(\sigma_1, .. \sigma_k)$

② $\exists\, j \in D_i, j \neq i \Rightarrow G_\sigma^j(\sigma_1, .. \sigma_k) = 1$

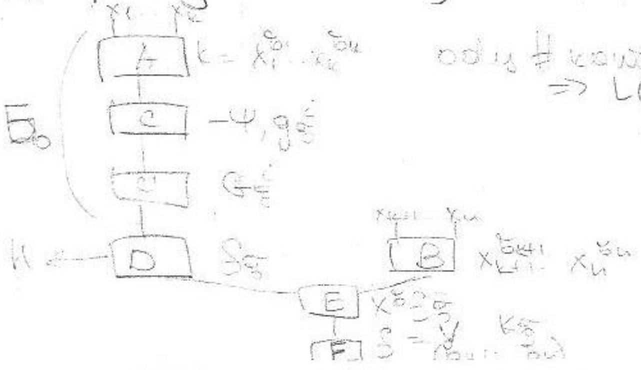
③ $j \notin D_i \Rightarrow G_\sigma^j = 0$

$\Rightarrow$ этот сигнал дойдёт до конца: $f_\sigma^i(\sigma_1, .. \sigma_k)$

$\Rightarrow$ ф-ия H даёт нужный рез. ■ /лемма 1/

$\Psi_j, g_\sigma^i, G_\sigma^i, Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$

f_σ^i - реализ. в $Б_1 - \{H\}$



одн # конъ $\leq 2k \cdot 2^k$ $\Rightarrow L(A) \leq 2k \cdot 2^k$

длина сверху ДНФ $g_\sigma^i \leq s$, $g_\sigma^i = K_{i1} \vee .. \vee K_{iL}$, $L \leq s$

$\Rightarrow L(g_\sigma^i) \leq s$ /t-1 дизъю./

$\Rightarrow L(C) \leq s \cdot 2^s q$

/$i = q = \lceil \frac{2^k}{s} \rceil$, # типов $g_\sigma^i \leq 2^s$/

$L(C') \leq \underbrace{q}_{\text{выбор } i} \cdot \underbrace{2^s}_{\text{выбор } \sigma}$

$L(D) = \underbrace{\frac{q}{2}}_{\text{кажд. блок } \sigma} \cdot \underbrace{2^{n-k}}_{\#\text{ блоков}} + 2$

$L(B) \leq \underbrace{2(n-k)}_{\text{сложн. кажд. конъ}} \cdot \underbrace{2^{n-k}}_{\text{всего \# конъ}}$

$L(E), L(F) \leq 2^{n-k}$ (конъ, дизъ)

$\exists\, k = \lfloor (m+3)\log_2 n \rfloor$, $s = \lfloor n - (3m+6)\log_2 n \rfloor$, $m = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$

$\Rightarrow L(A) \leq 2k \cdot 2^k \leq 2(m+3)\log_2 n\, 2^{(m+3)\log_2 n} \leq$
$\leq 2n\, 2^{o\left(\frac{n}{\log n}\right)\log(n)} \leq 2^{o(n) + \log n + 1} = o\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right)$

$L(C) \leq s \cdot 2^s \cdot q \leq \frac{n\, 2^{n-(3m+6)+k}}{s} \leq 2^{n-(2m+3)\log_2 n}$

$L(C') \leq 2^s q^2 \leq \frac{2^{n-(3m+6)\log n + 2(m+3)\log_2 n}}{n^2} =$

$= \frac{2^{n - m\log n}}{n^2} = O\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right)$

$L(D) \leq 2^{n-k}\frac{q}{2} \approx 2^{n-k}\frac{2^k}{2s} \sim \frac{2^{n-1}}{n}$

$2(n-k)2^{n-k} \leq 2n \cdot 2^{n-(m+3)\log n} = O\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right)$

$L(E), L(F) \leq 2^{n-k} = o(L(B))$

$\Rightarrow \leq O\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right)$ эл-тов из базиса $\vee, \&, \neg$

см. след. лекцию

$G^i_{\pi_\delta} = g^i_\delta \vee \bigvee_{j\neq i} \psi_j$

д-м, что $L(C') \le 2^s q^2$

$q = \lceil \frac{2^n}{s} \rceil$

вершин ≤ # верш. в дереве ⇒ ≤ q /для G^i_δ/

Проделываем это для кажд. полосы и для кажд. типа ф-ции.

типов $g^i_\delta \le 2^s$ /= # стб. высоты s/

$\Rightarrow$ получаем $\le \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{t(i)} q \le 2^s q^2$ /т.к. $t(i) \le 2^s$/

типов; сложн. реализации g^i_δ

$\boxed{\text{Т-ма 1}}$

∃ ~~...~~ задан базис $Б_\rho = \{H\} \cup Б_0^\rho$, (абс. надежн.)

$Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$, $o \in Б_0 \Rightarrow P(o) \le p < \frac{1}{2}$ (вер-ть неправ. сработ.)

$\Rightarrow \forall \varepsilon_0, \forall f(x_1, x_n)\ \exists\ \Sigma^\varepsilon_f$ -схема, реализ. f:

① $L(\Sigma_f^\varepsilon) \le \frac{2^{n-1}}{n}$

② $P(\Sigma_f^\varepsilon) \le \varepsilon$

⇒ для к. [illegible] схема, [illegible] верно [illegible] функцию с малым [illegible]

Д-во

по предыд. т-ме для $m = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$, $Б = \{H, \vee, \&, \neg\}$

$\forall f(\tilde{x}^n)\ \exists\ \Sigma_f \quad L_Б(\Sigma_f) \le \frac{2^{n-1}}{n}$

$L_{\vee,\&,\neg}(\Sigma_f) \le O\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$

$\Rightarrow f \longrightarrow \Sigma_f$

Для кажд. ненад. эл-та построим дост. над.

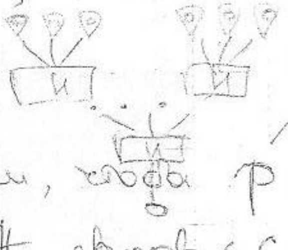
$L_Б(\Sigma_f) \le \frac{2^{n-1}}{n} \longrightarrow$ сложн. возр., но не ас-ки, но надежность будет

Сначала повысим надежн. кажд. эл-та /он с б-того p выходит из строя/

Будем делать это в 2 этапа:

1) $o \in \{\vee, \&, \neg\}$

Построим сх.:

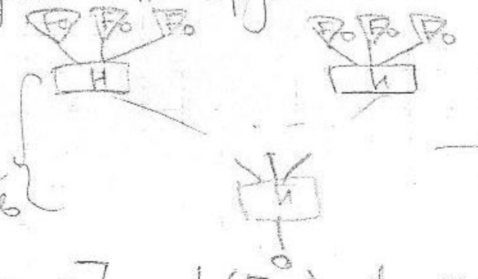


$\longrightarrow$ схема F_0 (вер-ть неправ. сработ.)

хотим, чтобы $P(F_0) < \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ потребуется # ярусов ≤ C

2) ∠ схему



l ярусов $\longrightarrow$ схема Σ_0

∃ $l = \lceil \log_2 n \rceil$, $L(F_0) = d_0 = const$

Сверху 3^l эл-тов F_0,

в центре $\sum_{i=0}^{l-1} 3^i$ эл-тов H $\le \frac{3^l}{2}$

$\Rightarrow L(\Sigma_0) \le d_0 \cdot 3^l + \frac{3^l}{2} \cdot \underbrace{1}_{\text{сложн. H}} \le (d_0 + \frac{1}{2}) 3^l \le$

$\le (d_0+1)\, 3^{\lceil \log_2 n \rceil + 1} \le 3(d_0+1)\, n^{\log_2 3} \le 3(d_0+1)n$

$P(\Sigma_0) = ?$

д-но, что если $p < \frac{1}{6} \Rightarrow P(\Sigma^l) = o(2^{-2^l})$,

$l = \log n \Rightarrow P(\Sigma_0) = o(2^{-n})$

7.12.07
Ok

оценим сложность при $\Sigma_g \to \Sigma_g^{\varepsilon}$

$$L(\Sigma_g^{\varepsilon}) \le L(\Sigma_g) + L_{V\&\neg}(\Sigma_g)\cdot c\cdot n^2 \le$$

вместо кажд. эл-та ... ск. ... $\le L(\Sigma_g)$

$$\le \frac{2^{n-1}}{n} + O\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right) c n^2 \le \frac{2^{n-1}}{n} + O\left(\frac{2^n}{n^m}\right)\Big|_{m=2} \sim \frac{2^{n-1}}{n}$$

$$P(\Sigma_g^{\varepsilon}) \le P(\text{форм. неиспр. } \Sigma_g^{\varepsilon}) \le \sum_{G \in G_0} P_{\varepsilon}(G) \le$$

$$\le O\left(\frac{2^n}{n^{m+2}}\right) o(2^{-n}) = o\left(\frac{1}{n^{m+2}}\right)\Big|_{m=2} = o(n^{-4}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Мы д-ли, что $L(\Sigma) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}$

Этот рез-т нельзя улучш.:

Лупанов: $\exists$ есть базис $Б = \{f_1, \dots f_m\}$,
k_i — арность f_i (# пер-х, от к-рых зав. вх), $\max k_i = k$

$\Rightarrow$ почти все булевы ф. $f(x_1, \dots x_n)$: $L_Б(f) \gtrsim \frac{2^n}{n}\cdot c$,
$c = \frac{1}{k-1} = const$

У нас $k = 3$; $Б = \{И, \&, V, \neg\}$ $\Rightarrow \frac{2^{n-1}}{n}$ (3 вх, 2, 2, 2 → max = 3)

Тесты

$\Sigma_g \to \Sigma_{g1}, \dots$, неиспр. $\to \Sigma_{gm}$

Хотим диагностировать факт и хар-р неиспр-ти

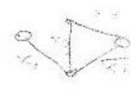
Набор вх. возд., позволяющ. определить исправна ли ск — проверяющ. тест

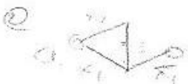
Набор, позв. определить, какая именно неиспр. произошла — диагностич. тест

7.12.07

Пример  могут выходить из строя $x_1, \bar{x}_1, x_2$ и 4 конт.

$f = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_1 x_3$ — реализ. медиану

1)  $f_1 = x_1 x_3$

2)  $f_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3$

3)  $f_3 = x_2(x_1 \vee x_3)$

4)  $f_4 = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$

построим табл. неиспр-ти

x_1	x_2	x_3	f	f_1	f_2	f_3	f_4	
0	0	0	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
0	0	1	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
0	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	1	1	0	3
1	0	0	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
1	0	1	1	1	0	0	1	5
1	1	0	1	0	0	1	1	6
1	1	1	1	1	0	1	1	7

интересуют различающ. наборы для f и f_i
$\Rightarrow$ одинаков. вычеркив.

Остается:

	f	f_1	f_2	f_3	f_4
3	1	0	1	1	0
5	1	1	0	0	1
6	1	0	0	1	1
7	1	1	0	1	1

(1) пара наборов, отлич. наб. f от строки $\{3,5\}_{T_1}$ проверяющ. тест

(2) $T_2 = \{3, 5, 6\}$ — диагностич. тест

эта подтаблица: все стб. попарно разл.

Тест — минимальный (кратч.) $\Leftrightarrow$ содержит min # наборов — тест T_1

Тест — тупиковый $\Leftrightarrow$ после отбрас. $\forall$ набора перестает быть тестом

Будем искать min тест
$\Rightarrow$ 2 задачу как для матриц:

$\exists$ есть матрица из $\{0,1\}$ m стр., n стб.
Σ диагн. тесты

Тест для таблицы — мн-во строк, различ. все стб. / разл. стб. в тесте различны /
различимые

7.12.07

© Мн-во двоичн. матриц $m \times n \to \{0,1\}^{mn}$ Ск.

Ⅎ $m=n$ и единичн. матр $\Rightarrow$ дл. min теста $n-1$

$\exists$ матр. дл. min теста $= n$ / пример не дан приводим/

Лемма 1.

Ⅎ $A \in \{0,1\}^{mn}$, все стб попарно разл., T-тест для A

$\Rightarrow |T| \geq \lceil \log_2 n \rceil$

Д-во $\leq$ подтаблицу из k строк $< \log_2 n$

$\Rightarrow \exists$ 2 стб одинаковых: всего 2^k разл. стб $< n \Rightarrow$?

Фикс m, n

Почти все матр. $A \in \{0,1\}^{mn}$ обладают св-вом Ф $\Leftrightarrow$ доля тех A, к-рые не обладают Ф $\underset{\substack{n\to\infty \\ m(n)\to\infty}}{\longrightarrow} 0$

Лемма 2

Для почти всех $A \in \{0,1\}^{mn}$ (*) $\exists$ тест T:

$|T| \leq 2\log_2 n + \varphi(n)$, где $\varphi(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Д-во Ⅎ $Q(n)$ - # m, облад. св-вом (*)

$Q_1(n)$ - # m : 1-ые $\underbrace{\lceil 2\log_2 n+\varphi(n)\rceil}_{k}$ строк являются тестом

$\Rightarrow Q(n) \geq Q_1(n)$

если 1ые k стб - тест $\to$ все стб разл.
выбрали 1й стб 2^k спос.,
2-й стб $- 2^k-1$ ...

$\Rightarrow Q_1(n) = 2^k(2^k-1)\cdot\ldots\cdot(2^k-n+1)\,2^{(m-k)n}$

произвольно заполняем оставш. матрицу

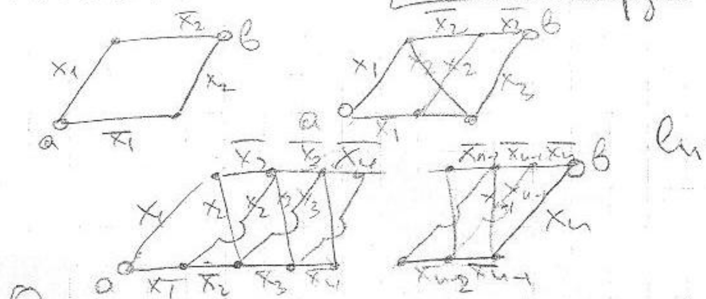
7.12.07

$$\frac{Q_1(n)}{2^{mn}} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{2^k}\right) \geq 1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{2^k} \geq 1-\frac{n^2}{2^k} =$$

$$= 1-\frac{n^2}{2^{2\log_2 n+\varphi(n)}} = 1-\frac{1}{2^{\varphi(n)}} \longrightarrow 1$$

$\Rightarrow$ для почти всех m. $\exists$ тест длины $\leq 2\log_2 n+\varphi(n)$ ■

14.02.07. Схема Кардо



$l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$

Оценим длину теста: ИН обрыв $\forall$ 1 контакта

$L(\Sigma_n) = 4(n-1)$ /внутр. конт. $4n-2$, внешн. 4/

ф. неиспр. $= l(\Sigma_n)+1 = 4n-3$

Ⅎ $\tau(\Sigma_n)$ - длина min теста

Утв. 1

$\tau(\Sigma_n) \geq \lceil \log_2(4n-3) \rceil$

Д-во

x_1	x_n	ф. неиспр.

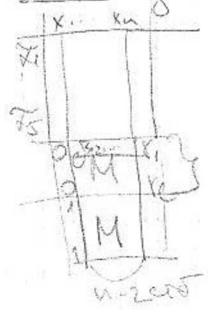
min тест $\Leftrightarrow$ различ. все стб
если высота $< \log_2(4n-3)$
$\Rightarrow$ в таблице $\exists$ min 2
одинак стб / # разл. комбин. стб $< 4n-3$/
разл. стб

Т-ма 1

$\tau(\Sigma_n) \leq 5 + 2\lceil \log_2(n-2) \rceil$

14.02.07
OK

Д-во дост. д-го для теста единич. дл.



∀ подматр M все стб попарно разл

$l = \lceil \log_2 (n-1) \rceil$

∃ $\gamma_i = \sigma^{\beta_2} \oplus \ldots + \sigma^{\beta_{n-1}} \oplus 1$

n-2 стб

Верхняя ч. таблицы обеспечив:

① позволяет выяснить, произошла ли ош /обрыв/

② если да => произошел в концевых /контактных/ или внутр. конт.

③ если в => какой именно оборван

④ выдел. цепи $z_1, \ldots z_4$ => какой цепи ∈ оборв. контакт

проводящий набор

$z_1 = x_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \Leftrightarrow (10 \ldots 0) = \tilde{\alpha}_1$

$z_2 = x_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n x_n \Leftrightarrow (00 \ldots 1) = \tilde{\alpha}_2$

$z_3 =$ или $\Leftrightarrow (\underbrace{1 \ldots 1}_{n-3}\, \delta) = \tilde{\alpha}_3$, $\delta = 1$, если n-нечет; $\delta = 0$

$z_4 = \ldots \Leftrightarrow (01 \ldots 1 \bar{\delta})$
или

=> эти цепи в совокупн. содержат все конт, кажд концев. входит ровно 2 р., ∀ внутр-конт содержится ровно в 1й цепи

=> можем выяснить ①, ②, ④

/для ③ м. б. 5я цепь/

∃ $n = 3$ /нечет/

$\tilde{\alpha}_1 = (100)$ $\tilde{\alpha}_3 = (111)$
$\tilde{\alpha}_2 = (001)$ $\tilde{\alpha}_4 = (010)$

14.12.07

x_1	x_2	x_3	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1

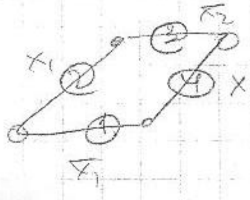
Все стб попарно разл => если оборв концевой, можно опред. какой именно.

① : если x_2 оборв => должен наб ∅ и ровно если оборв конт конт => > нулю

=> вып ② ÷ ④

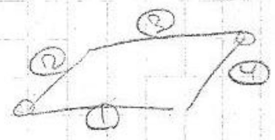
∃ n четное

	x_1	x_2	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
$\tilde{\alpha}_1$	1	0	1	1	0	0	1
$\tilde{\alpha}_2$	0	1	1	0	1	1	0



~~добавим в тест (11) =>~~ все ост наборы непроводящие => нельзя никак провер

∃ $n = 4$



x_1	x_2	x_3	x_4	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4

Набор должен различ. (x_1 и $\bar{x}_4$) и ($\bar{x}_2$ и x_4) => д. б. нечет. # един. 1 0 1 1 дают разл. зн-ия в x_1 и $\bar{x}_4$

∃ $\tilde{\alpha}_5 = (\underbrace{1 \ldots 1}_{\text{нечет. \# един}})$ => все получится, напр. 1011

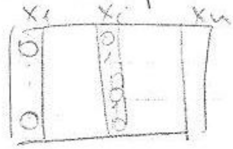
=>

Мы знаем, что ош на конц. и на какой цепи. Осталось найти № конт. Все стб. в матр M и M попарно разл, 1-я перем. указ, какая из пар цепей /z_1, z_3 или z_2, z_4/ оборв. конт.

Найдем № набора.

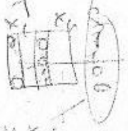
14.12.07 OK

∃ обрв. конт. с z_r, z_l /аналог. для z_1, z_3/



∃ обрв. конт. имеет вид x_i, набор имеет вид $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

⇒ там где нули соотв. гориз. наборам, ф. сохр. свое зн-ние ⇒ будут 1, там где един ⇒ будут нули



оборван x_i

Если оборван $\bar{x}_i$ ⇒ там будет набор /нулем соотв. 0, 1 соотв. 1/

⇒ мы выискиваем набор, к-рому мы сопост. с этим, мы приписали ему і устанавл. из того, что мы знаем какой р.о. контакт, какой горизонт. т.к. знаем какой именно (z_r или z_l) цепи ⇒ знаем №

Можем преобр. матр: стб = двоичн. запись № набора

Пример

$$l\left\{\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & b_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & b_l & 1 \end{array}\right.$$

степень двойки

⇒ получаем № контакта по $(b_1, \dots b_l)$

⇒ оценка: $\boxed{\log_2(n) < |T| < 2\log_2 n}$ ⇒ $|T| = c\log_2 n$, $c \in (1;2)$ /точно никто не знает/

Замеч. схема Карно — минимальна /д-во от. длинное/

14.12.07

Алгоритм постр. туп. тестов.

Тест для схемы ⇔ тест для двоичн. табл ⇔ построение всех тупиковых покрытий

∃ есть матр $m \times n$ → A, ищем все туп. тесты

$= A^{(2)}$

стб$(i,j) = i \oplus j$

стб стб

Утв. набор строк B в A явл. тестом ⇔ соотв. набор B' явл. покрытием $A^{(2)}$

Д-во строка покрыв. стб ⇔ там на пиш 1 ⇔ в $\oplus_2$ 1 ⇔ соотв. стб. различ.

⇒ свели з. к з. о покрытии, а алг. получ. всех тупик. покрытий известен: строим КНФ для тех строк в стб, где 1, выписываем их номер в скобку: $K(A^{(2)}) = (i_1 \vee \dots i_{s_1})(\dots)$

⇒ получ. ДНФ ⇒ созд. поглощение

⇒ сокращ. ДНФ: $K_1 \vee \dots \vee K_t$

где $K_j = i_1 \dots i_r$ ⇒ каждая конъ. соотв. тупиковому покр.: строки $i_1 \dots i_r$ — тупик. покр. для матр

945-34-21