

Основы кибернетики

В.02

Кибернетика — наука, изучающая
управляющие системы

Упр. система — пара (Σ, f) , где
 Σ — ^{схема} множество, f — функция

$\Sigma = \{P_n: V^8\}, \{ДНФ\}, \{СФЭ\}, \{КС\},$
 $\{Автоматы\}, \{О-Д-функции\}$

Рассматриваемые задачи:

Синтез: $f \rightarrow \Sigma_f$ — постр. схему для
задачи усложняется. Вводится
функционал сложности

Задача базис: ∇, ∇, ∇ , надо по
продв. функ. постр. миним. схему

Анализ: по заданной схеме определить
функцию: $\Sigma \rightarrow f_\Sigma$

$\Sigma \xrightarrow{\Sigma_1} \Sigma_m$ по неупорядочен. схеме
восстановить, пропуская и ошибки,
если неупорядочен

Тренирование: по температур. схеме
коэф. воздействия на вход, тогда
можно было описать температурность

Вопрос о сложности алгоритмов.

Рассм. класс упр. схем, в
которых в кач-ве Σ выступает ДНФ.

Ф-ия вида $K = x_{i_1}^{z_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q}^{z_q}$ - конъюнкция

Элементарная конъюнкция: $D \neq 1 \Rightarrow i_j \neq j$

$$x^z = \begin{cases} x, & z=1 \\ \bar{x}, & z=0 \end{cases}$$

z - ранг конъюнкции K (кол-во единиц)

$D = K_1 \vee \dots \vee K_m$, где K_i - конъюнкции, -

ДНФ, K_i - слагаемые, m - длина D

Сложность ДНФ: $L(D) = \sum_{i=1}^m \text{rank}(K_i)$

Задача минимизации:

По f . найти кратчайшую ДНФ

— " — минимальную ДНФ

ДНФ Ф-ии f наз-ся совершенной, если

1) ранг $\forall$ слагаемого равен числу
переменных Ф-ии f

2) все слагаемые попарно различны

ДНФ $D = X_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_1 X_2$ - сов. ДНФ $f = x_1 \oplus x_2$

$$D_f^{cov} = \bigvee_{(b_1, \dots, b_n)} x_1^{b_1} \& \dots \& x_n^{b_n}$$

$$f(b_1, \dots, b_n) = 1$$

$$f = \bar{x} \vee y = \bar{x} \vee xy = \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \vee xy$$

мин. кратч. ДНФ кратч. ДНФ сов. ДНФ

Операции упрощения

1) отбрасывание буквы

2) отбрасывание слагаемых

Операция допустима, если в результате ее применения получается ф-ция $f' \sim f$

ДНФ D ф-ции f наз-ся минимальной, если к D не применима ни одна из операций упрощения

Упр. 1 Всякая мин. ДНФ ф-ции f явл. минимальной

Упр. 2 Для $\forall$ кратчайшей ДНФ D ф-ции f f минимальная кратчайшая ДНФ D'

Опр Умножителем - элемент конъюнкции, K

т.ч. $K \vee f = f$, или $K \& f = K \iff N_K \subseteq N_f$

$$N_f = \{ \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n) : f(\tilde{x}) = 1 \}$$

$$\forall N_K \cap N_f = N_K$$

Умножителем K_i ^{$\tilde{L}$ -тип $\tilde{L}$} наз-ся K_i кратной, если к ней не применимо отображение букв.

Докажем упр. 2:

Пусть $D = K_1 \vee \dots \vee K_s$ - кратная, но не мультипликативная ДНФ. Выберем непересекающую мультипликативную и выберем букву и т.д. $\Rightarrow$ оставим только простые множители. Тогда ДНФ D' будет кратчайшей и мультипликативной. итд

Пусть $D = K_1 \vee \dots \vee K_s$ - мультипликативная
опр $\tilde{L}$ -сод-ств. точка конъюнкции K_i ,
если $K_i(\tilde{L}) = 1$, $\forall j \neq i \quad K_j(\tilde{L}) = 0$

лем Пусть D - мультипликативная ДНФ, Тогда
 $\forall i \exists \tilde{L}_i$ т.ч. $\tilde{L}_i$ - $\tilde{L}$ -сод-ств. точка K_i

Док-во от противного:

Пусть K_1 не имеет $\tilde{L}$ -сод-ств. точек

$\Rightarrow K_1$ можно отбросить:

$\{\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_t\} = N_{K_1}$, но $\forall \tilde{L}_i, i = 1 \dots t \exists K_j$

т.ч. $K_j(\tilde{L}_i) = 1 \Rightarrow K_1$ можно отбросить (!?)

Следствие: Пусть D - муник. ДНД, $e(D) = 5$ -
число элементов (длина). Тогда

$$e(D) \leq 2^n, \quad \text{где } n - \text{число переменных } D$$

Док-во: $N_D \subseteq B^n, \quad |B^n| = 2^n \Rightarrow 5 \leq e(D) \leq 2^n$
эмг

Зам. $\nexists$ сложная муниковой ДНД явл-ся
простой или импликацией f , реализ. D .

Док-во: от противного. Пусть K -слож D
и K -не простая импликация $\Rightarrow$ её
можно сделать простой введя булев,
но тогда D - не муник. (!!) эмг

Зам. $\nexists$ муниковая ДНД f может быть
получена из сов. ДНД, муник. упрощения

Док-во: $D_{\text{сов}}^f = K_1 \vee \dots \vee K_5$

муник. $D = L_1 \vee \dots \vee L_m \Rightarrow \exists \nexists$ слож. f со слож

мощью. $\tilde{L}_1 \dots \tilde{L}_m$

$\nexists \tilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ составили $X^{\tilde{\alpha}} = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$

$\nexists i = [1..n]$ конъюнкция $X^{\tilde{\alpha}_i}$ - слож. $D_f^{\text{сов}}$

- это следует из упр. совершен. ДНД

$$D_f^{\text{сов}} = X^{\tilde{d}_1} V_1 \dots V X^{\tilde{d}_m} V K_{m+1} V \dots V K_S$$

упорядочили дуги в первом слагаемом:
внутри те, кон. те входят в L_1

$$X^{\tilde{d}_1} = X_{i_1}^{\text{dir}} \dots X_{i_c}^{\text{dir}} L_1$$

Учитываем первые дуги, затем
текущие слагаемое

$$\text{правильно помножения: } KV KL = K$$

Пусть $\tau(S)$ - число путей ДНД f эмг

т.е. $\tau(S) \leq 2^{n!} (n!)^{2^n}$

Доказ-во. Пусть S - длина сов. ДНД

$\Rightarrow S!$ способов упорядочить, слагаемое

$(n!)^S$ - способы упорядочить дуги

в слагаемых, т.к. $S \leq 2^n$, получаем

$$\text{сумму } \tau(S) \leq (2^n)! (n!)^{2^n} \quad \text{эмп}$$

Сокращенная ДНД $D_f^{\text{сокр}}$ - ДНД,
составл. из всех проемов минимал.

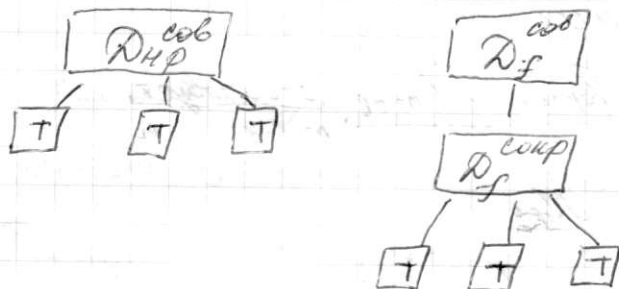
1) $D_f^{\text{сокр}}$ упр. однозначно

2) $\forall$ путей ДНД $(n!n)$ м.б. получена
из сокр. ДНД путем выбора слагаемых

Лит-ра. С.В. Яковлевский "Введение в ДН"'

А.А. Самошников "ДНФ" ВМК

Синатъя Васильев, Моголов
, Дискр. мат. и мат. вопр. кибернетики



10.02

Метод получения $D_f^{сопр}$:

I. КНФ $\mathcal{K}$ ф-ции $f \Rightarrow D_f^{сопр}$

$$\mathcal{K} = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

1.) Раскрытие скобок

$$D_1 = x_1 x_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3$$

2.) $xx = x$, $x\bar{x} = 0$

$$D_2 = x_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_1 \vee x_2 x_3$$

3.) Правилье поглощения $K \vee KL = K$

$$D_3 = x_1 \vee x_2 x_3$$

Утв.: $D_3 = D_f^{сопр}$

Доказ-во. трудно доказать, что если K - простая импликация, то K - сеп. D_3

и если K -сложное D_3 , то K -простая
импликация f .

$$D = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$$

K_1 - импликация φ -гип f , реализ. D

Без оп. обозначим

$$K = \underbrace{x_1 \dots x_m}_{m+1 \dots n} \underbrace{\bar{x}_{m+1} \dots \bar{x}_{m+l}}_{\text{отсутствует}}$$

$$N_K \in N_f = N_{\bar{f}}$$

$$K = \left(\begin{smallmatrix} \\ c_1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \\ c_2 \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} \\ c_k \end{smallmatrix} \right)$$

$$N_K = \left\{ \underbrace{111\dots 00\dots 0}_m \underbrace{}_l x_{m+l+1} \dots x_n \right\}$$

Чтобы K обратилась в 1 на произв.
наборе N_K , необходимо, чтобы

$\forall c_j: x_1, \dots, x_m, \bar{x}_{m+1}, \dots, \bar{x}_{m+l}$ - одна из
допускаемых букв входит в c_j .

Импликация K' состоит из доп. букв,
но не всех, K' получается из K
удалением букв

$\Rightarrow$ если K - простая импликация f ,
то K -сложное D_3 .

Пусть K - слаг. D_3 . $\forall K$ из D_3 св-ся импликацией $\Rightarrow K$ импликация нек. ф-уны.

В D_3 только простые импликации (м.к. помогающая теореме)

3 м.г.

Этот метод может приводить к эквивалентальному расписанию букв

Пример 1 $L = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \dots (x_{2m-1} \vee x_{2m})$

$n = 2m$, m скобок,

$L(L) = 2m$ (число букв)

$$L(D_3) = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$$

$$K_i = \underbrace{x_{i1} \dots x_{im}}_m$$

$$L(L) = m 2^m = n 2^{\frac{n}{2}-1}$$

II Построение сокр. ДДР по совершенной

Консенсус: $D_f^{cov} = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$

Пример: $K = x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$

$$L = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

$K \circ L = x_2 \bar{x}_3$ - оставшимся те буквы,

которые составленным образом входят в обе конъюнкции

$$1.) M_1 = \{ K_i \circ K_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq m \}$$

Пример $D_f^{cov} = \underset{K_1}{x_1} \underset{K_2}{x_2} \vee \underset{K_3}{\bar{x}_1} \underset{K_2}{x_2} \vee \underset{K_3}{x_1} \underset{K_3}{\bar{x}_2}$

$$M_1 = \{ K_1, K_2, K_3, x_2, x_1, 1 \}$$

2.) M_2 получ. из M_1 отбрасыванием конъюнктов, которые не являются простыми импликациями

$$M_2 = \{ K_1, K_2, K_3, x_2, x_1 \}$$

$$K = \underbrace{x_{i_1}^{z_1} \dots x_{i_r}^{z_r}}_{\text{ном. } 2^{n-r} \text{ K-изий из } D_f^{cov}}$$

$$x_1 \text{ ном. } x, \bar{x}_2$$

требуется $|M_1|/m$ операций сравнения напоминание

3.) M_3 получ. из M_2 помощью

$$K \vee KL = K$$

Посчитаем кол-во операций:

$$1. M_1 \quad C_{m+1}^2 = m + C_m^2 = \sim \text{кол-во конъюнктов} = O(m^2)$$

$$2. |M_1|/m \leq C_{m+1}^2, m = O(m^3)$$

$$3. C_{|M_2|}^2 \leq C_{|M_1|}^2 \leq C_{C_{m+1}^2}^2 = O(m^4)$$

Лем. 2 Число операций, достаточное для построения M_3 , равно $O(m^4)$, где m — длина $D_f^{\text{сов}}$

Лем. 3 $D_f^{\text{сопр}} = \bigvee_{K \in M_3} K$

Доказ-во: Пусть $K = x_1 \dots x_m \overline{x_{m+1}} \dots \overline{x_{m+l}}$ — простая импликация f

Докажем, что K принадлежит M_1 :

добавим "хвост" $K = x_1 \dots x_m \overline{x_{m+1}} \dots \overline{x_{m+l}}, \overline{x_{m+l+1}} \dots \overline{x_n}$
 $\downarrow$
 $x_{m+l+1} \dots x_n$

$K \in M_1$

Т.к. K — простая импликация, то она останется в M_3 .

В M_2 по определению остаются только импликации, а в M_3 — только простые импл.

$\Rightarrow$ утверждение доказано, т.н.д.

$$l(D_f^{\text{сопр}}) = O(l^2(D_f^{\text{сов}}))$$

Алгоритмы получения всех минимов

ДНФ формулы f :

Рассм. попарную Квайна (Quane)

	$\bar{\alpha}_1 \dots$	$\bar{\alpha}_i \dots$	$\bar{\alpha}_s$	из N_f
I_1				
$\vdots$				
рости илилик.				
I_j		$I_j(\bar{\alpha}_i)$		
$\vdots$				
I_m				

$$K = (I_1 \vee \dots \vee I_j \vee \dots \vee I_m) \dots (i \dots) =$$

S сработок

$$= K_1 \vee \dots \vee K_S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{пр. пошам}}}{=} M_1 \vee \dots \vee M_k$$

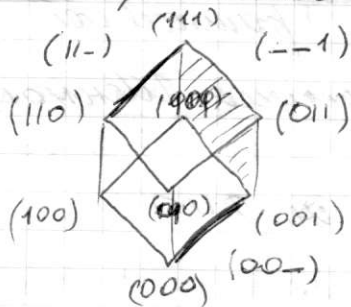
$$M = I_{j_1} \dots I_{j_k}$$

$$D = I_{j_1} \vee \dots \vee I_{j_k} \text{ — минимовая ДНФ}$$

m может быть порядка $\frac{3^n}{n}$

$$S \sim 2^n$$

Геометрическая интерпретация



$$N_f \subseteq B^n$$

Пр. импликаты

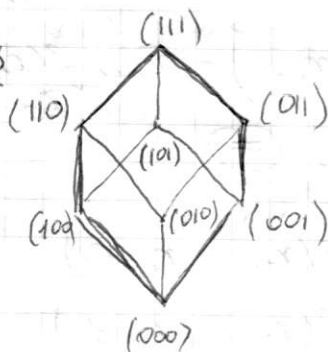
$$K = x_1 \bar{x}_3 \rightarrow (1-0) \leftrightarrow$$

$\{(100), (110)\}$ - граница

Если K импликация $M_K \subseteq N_f$

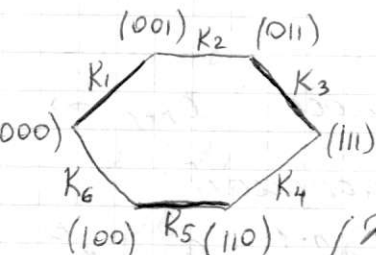
$$D_f^{\text{сопр}} = x_1 x_2 \vee x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 - \text{ед. пункт.} \rightarrow \text{min ДНД}$$

Пример



$$D_f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) / (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \Rightarrow$$

$$D_f^{\text{сопр}} = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_1 \vee x_3 x_2$$



$$D_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5$$

$$D_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6$$

$$D_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5$$

$$D_4 = K_1 \vee K_6 \vee K_3 \vee K_4$$

$$D_5 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6$$

пункт, но
не миним.

кратчай.
миним.

Обозн. $\ell(f)$ - длина кратчайшей ДНФ f

$\ell(n) = \max_{f \in P_n} \ell(f)$ - функция Шеннона

$L(f)$ - сложность мин. ДНФ

$L(n) = \max_{f \in P_n} L(f)$

теор. 1 $\ell(n) = 2^{n-1}$, $L(n) = n \cdot 2^{n-1}$

Док-во: оценка сверху по индукции:

$n=1$: ф-ция: $0, 1, x, \bar{x}$ $f \neq 0$

$n \rightarrow n+1$: $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \bar{x}_{n+1} f(x_1, \dots, x_n, 0) \vee$
 $\vee x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n, 1) \quad (\equiv)$

$\vee x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n, 1) \quad (\equiv)$

D_0 - кратчайш. ДНФ $f(x_1, \dots, x_n, 0)$

D_1 - — — — $f(x_1, \dots, x_n, 1)$

$\ell(D_i) \leq 2^{n-1}$ (по оцр.), $i=0, 1$

$\Rightarrow \bar{x}_{n+1} D_0 \vee \bar{x}_n D_1$

$\Rightarrow \ell(D) \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{(n-1)+1} = 2^n$

$L(D_i) \leq n \cdot 2^{n-1}$

Каждое слагаемое увеличилось: $x_{n+1} \Rightarrow$

ранг $(n+1)$ - макс. возможный

$\Rightarrow L(D) \leq (n+1) \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot 2^{n-1} = (n+1) 2^n$
 (доказано Лундкеном О.Б.)

Судимы стигу:

$$\lambda(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$$

$$\ell(\lambda) = 2^{n-1}, \quad L(\lambda) = n \cdot 2^{n-1}$$

Заметим, что все простые множители
р-факт λ имеют ранг n .

Пусть K - простой множитель $\lambda(\tilde{x}^n)$

$$\Rightarrow N_K \subseteq N_\lambda$$

Пусть $\text{rank}(K) < n$. Без оп. общности

$$K = x_1^{v_1} \dots x_k^{v_k}, \quad k < n$$

Возьмем пару соседних наборов

$(d_1, \dots, d_{n-1}, 0)$
 $(d_1, \dots, d_{n-1}, 1)$ - ровно 1 набор обращает
 $d(\tilde{x}^n)$ в 1, в формуле
неизвестное место единицу

$$\begin{aligned} N_K &\subseteq (v_1 \dots v_k, d_{k+1}, \dots, d_n) \\ &\subseteq (v_1 \dots v_k, d_{k+1}, \dots, 0) \\ &\subseteq \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{оба набора обр.} \\ \text{на } K \text{ в единицу} \\ \text{(?!) } \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{rank } K = n$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_\lambda^{\text{сов}} = \mathcal{D}_\lambda^{\text{сов}}$$

$$\ell(\mathcal{D}_\lambda^{\text{сов}}) = 2^{n-1} = |N_\lambda|$$

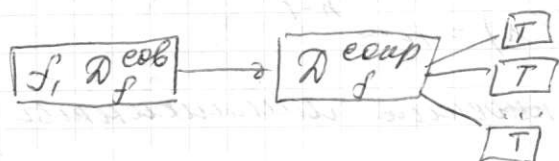
$$\mathcal{D}_\lambda^{\text{сов}} = K_1 \vee \dots \vee K_{2^{n-1}} \quad \text{канона конъюнкция}$$

"содержит" за собой набор $\Rightarrow$ отображение
на одну единицу $\Rightarrow$ DND тупик, мин. и крат.

$$\ell(\mathcal{D}_\lambda^{kp}) = 2^{n-1}, \quad L(\mathcal{D}_\lambda^{\text{min}}) = n \cdot 2^{n-1},$$

202

7 век 2 р-ции с макс. плотностями и
гипотезы $(x \oplus 1, x \oplus \dots \oplus x_n)$



$\Rightarrow$ чтобы найти кратн. ДНД, надо перебрать
минимовые

$$\tau(f) = \# \text{ мин. ДНД}_f$$

$$\mu(f) = \# \text{ мин ДНД}_f$$

$$\tau(n) = \max_{f \in P_n} \tau(f)$$

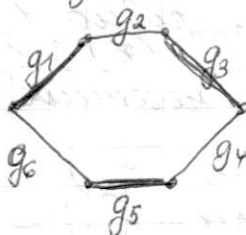
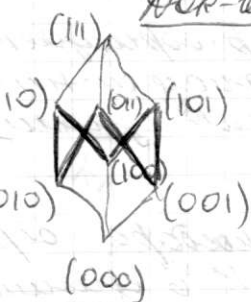
$$\mu(n) = \max \mu(f)$$

Теор. 2

$$5 \cdot 2^{n-4} \leq \tau(n) \leq 2^{c \cdot n \cdot 2^n (1+o(1))}, \quad c = \log_2 \frac{3}{2}$$

Доказ.

$$\text{Обозн. } \varphi(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

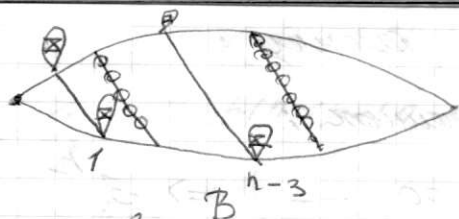


$$\Rightarrow \tau(\varphi) = 5$$

$$\mu(\varphi) = 2$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\tilde{x}^3) \wedge (x_4 \oplus \dots \oplus x_n)$$

$\wedge_{n-3}$



$$B^n = B^3 \times B^{n-3}$$

из вершин тетраэдра слоёв расщепляет
содержательной B^3 , содержащий φ
Получим покрытие, что $\tau(f) = 5^{2^{n-4}}$,

$$\mu(f) = 2^{2^{n-4}}$$

Если взять минимальное покрытие B^3 ,
получим минимальное покрытие B^n
В каждой B^3 можно выбрать 5 способами
миним. покрытие и 2 способами - минимальное

$\Rightarrow \tau(f) = 5^m$, где m - число "содержательных"
подобов, $m = 2^{n-4}$ (т.к. $|N_1| = 2^{n-1}$)

$$\Rightarrow \tau(f) = 5^{2^{n-4}}, \quad \mu(f) = 2^{2^{n-4}}$$

$$\frac{\tau(f)}{\mu(f)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-4}}$$

$\Rightarrow$ начал выбрав из миним. ДНД минимальную
скорей всего огибающую

$$\frac{\text{Длина пр. } (\varphi)}{\text{Длина миним. } (\varphi)} = \frac{2 \cdot 2^{n-4}}{5 \cdot 2^{n-4}} = \frac{2}{5}$$

Но $\exists$ функции $f(\tilde{x}^n)$ т.е. у них $\exists D_1, D_2$ - минимальные:
 $L(D_1) : L(D_2) = 2^{n(1-\varepsilon)}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Докажем верхнюю оценку:

конъюнкций и переменных:

$$x_{i_1}^{z_1} \dots x_{i_k}^{z_k} (11..00..--) \Rightarrow 3^n$$

Пусть $\mathcal{D}_f^T$ - миним. ДНФ f , тогда

$$|\mathcal{D}_f^T| \leq 2^n$$

$$\mathcal{D}_f^T = K_1 \vee \dots \vee K_e$$

для $\forall$ слои. $\exists$ особ. точка $\tilde{x}_i$, к-е. обр. в 1
только таких точек $\leq 2^n$

$$\Rightarrow T(f) \leq \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}_f^T|} C_{|\mathcal{D}_f^T|}^i \leq \sum_{i=1}^{2^n} C_{3^n}^i \leq$$

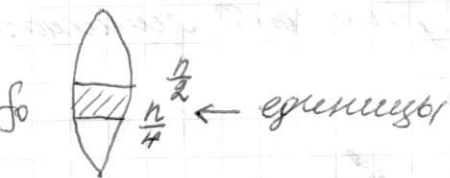
$$\leq 2^n \cdot C_{3^n}^{2^n}$$

$$C_n^k \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \Rightarrow T(f) \leq 2^n \cdot \left(\frac{e \cdot 3^n}{2^n}\right)^{2^n} = 2^{2^{C \cdot n \cdot 2^n}}$$

$$c = \log_2 \frac{3}{2}$$

А.П. Чирков гек-н, то $T(n) \geq 2^{c_1 n 2^n}$

Пример: $T(f) \geq 2^{c \sqrt{n} \cdot 2^n}$ 9.19.9



Лемма 1 $C_n^k \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ (*) 6.03

○ $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \quad (1)$

$k! \geq \frac{k^k}{e^k} \quad (2) \quad (1), (2) \Rightarrow (*)$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^k}{k!}, \quad e^k \geq \frac{k^k}{e^k} \quad (\text{пополним } x=k)$

$\sum_{0 \leq i \leq k} C_n^i \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ (Сантошико, Проблемы Деревьев и метод функций, ВЛК)

Пусть $S(f) = \mathcal{L}(D_f^{\text{comp}})$ - длина комп. ДДР f

$S(n) = \max_{f \in P_n} S(f)$

Теор. 1 $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \frac{3^n}{n} \leq S(n) \leq c_2 \frac{3^n}{\sqrt{n}}$

Док-во: всего комбинаций от n перем. 3^n

функция оурика : расем $f(x_1, \dots, x_n)$.

$n=3k, N_f = \binom{3n}{k} B_k^n$, т.е. $\frac{3n}{3} \binom{3n}{k} B_k^n$

Докажем, что $\mathcal{L}(D_f^{\text{comp}}) \geq c_1 \frac{3^n}{n}$

Каждая минимальная - комбинация, которой совов. грань

$g = N_k \Leftrightarrow \text{code}(g) = (g_1, \dots, g_n)$

$\tilde{g}(0 \dots 1) = g_g = \{ \textcircled{000}, 0011, 0101, \textcircled{0111} \}$

У каждой грани есть нижняя и верхняя точки, опред. целую грань

$$g = \{ \tilde{\delta} : \tilde{\alpha} \leq \tilde{\delta} \leq \tilde{\beta} \}$$

Число максимальных граней в "коне" $[\frac{n}{3}; \frac{2n}{3}]$ ($\tilde{\alpha}$ линия до $\frac{n}{3}$, $\tilde{\beta}$ — " — до $\frac{2n}{3}$) $\therefore$

Число способов выбора $\tilde{\alpha}$ из $B_{\frac{n}{3}}^n$: $C_n^{\frac{n}{3}}$

Пусть $\tilde{\alpha}$ фиксир.: $\tilde{\alpha} = (1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-k})$
 $k = \frac{n}{3}$

Число выборов $\tilde{\beta}$: $\# \{ \tilde{\beta} \geq \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B_{\frac{2n}{3}}^n \} = C_{n-k}^k$

$$\|\tilde{\beta}\| = 2k$$

$$k = \frac{n}{3} \Rightarrow S(f) = C_n^k \cdot C_{n-k}^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} =$$

(выбор $\tilde{\alpha}$) (выбор $\tilde{\beta}$)

$$= \frac{n!}{k! \cdot k! \cdot (n-2k)!} = \frac{n!}{(\frac{n}{3}!)^3} \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}}{(\sqrt{\frac{2\pi n}{3}})^3 (\frac{n}{3})^n e^{-n}} =$$

Вспомог. р-той Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

$$\approx \frac{3^{n+\frac{3}{2}}}{2\pi n}, \quad C_1 = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{2\pi}$$

Верхняя оценка:

$$G^n = \{ (g_1, \dots, g_n) : g_i \in \{0, 1, -\} \}$$

Рассм. частично упорядоч. мн-во:

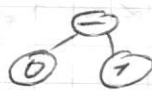
$$\tilde{g} = (g_1, \dots, g_n) \leq (\delta_1, \dots, \delta_n) = \tilde{\delta}$$

$\tilde{\delta}$ м.б. получена из $\tilde{g}$ расстановлением

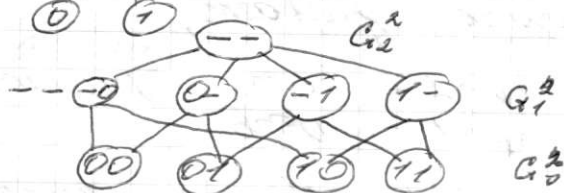
прогеров как некоторыми значениями координат

$$(01-0) \leq (---0)$$

$$n=1 \quad G^1$$



$$n=2 \quad G^2$$



Введём понятие $G_k^n = \{ \tilde{g} \in G^n : \tilde{g} \text{ имеет } k \text{ прогеров} \}$
 $\| \tilde{g} \| = \# \text{ прогеров}$
 $(---)$



$$|G^n| = 3^n$$

$$|G_k^n| = C_n^k 2^{nk}$$

Цель - найти наборов $\tilde{g}_1 < \tilde{g}_2 < \dots < \tilde{g}_k$ - возраст. цель

Цель сложная, если $\tilde{g}_{i+1}$ непосредственно предшествует набору $\tilde{g}_i$

Будем рассм. сложные цели до $n+1$:

$(\tilde{g}_0 < \tilde{g}_1 < \dots < \tilde{g}_n)$ - полная цель

Ми-во $A \in G^n$ - антицель, если $\forall a, b \in A$ a и b несравнимы, (теорема, то $\tilde{a} \leq \tilde{b} \leq \tilde{b} \leq \tilde{a}$)

Для любого $k \in V_k^n$ - антицелень

Обозн. $a_k = C_n^k 2^{n-k}$

Рассм. $\lambda_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_n^{k+1} 2^{n-k-1}}{C_n^k 2^{n-k}} = \frac{(n-k)}{(k+1) 2}$

величина убывает,

если $\lambda_k > 1$ - возр. график

$\lambda_k < 1$ - убыв.



Когда $n-k = 2(k+1)$ - точка перегиба

$$k = \frac{n-2}{3}, \quad k_0 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Как измеримы размер макс.
антицели в G^n

$$m(n) = \max_k |V_k^n| = C_n^{k_0} 2^{n-k_0}, \quad k_0 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

Пусть $A \subseteq G$ - антицелень, $|A| = \max |C|$
 C - антицелень G^n

Когда $|A| \geq m(n)$

Лемма 2 $\mu(n) = m(n) = C_n^{k_0} \cdot 2^{n-k_0}$

Доказ. $Z(n)$ - # полных цепей в G^n

$$(2n)(2(n-1)) \dots (2 \cdot 1) = 2^n \cdot n!$$

$Z_k(n)$ - # полных цепей в G_k^n , состоит

фактор, вершины $\tilde{x} \in G_k^n$

$\tilde{x} \in G_k^n \cdot \left(\underbrace{\quad}_k \underbrace{01001}_{n-k} \right)$ - "поднимаем наверх"
заменив цифру k на 0

"Случайная биты", замена строки на биты

$$\Rightarrow Z_k(n) = (n-k)(n-k-1)\dots \cdot 1 \cdot (2k)(2k-1)\dots (2 \cdot 1) = \\ = 2^k \cdot k! \cdot (n-k)!$$

$$Z_n(n) = n! \cdot 2^n$$

Пусть A -аннигилятор, $z(n) \geq \sum_{\tilde{f} \in A} z(\tilde{f})$

$$\Rightarrow z(n) = n! \cdot 2^n \geq \sum_{\tilde{f} \in A} z(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^n \sum_{\tilde{f} \in A \cap G_{2^k}^n} z_k(n) =$$

$$= \sum_k \sum_{A_k} k! \cdot (n-k)! \cdot 2^k \geq \frac{k_0! \cdot (n-k_0)! \cdot 2^{k_0}}{|A|} \quad (\text{минимум достигается на } k_0)$$

$$\Rightarrow n! \cdot 2^n \geq |A| \cdot k_0! \cdot (n-k_0)! \cdot 2^{k_0}$$

$$\Rightarrow |A| \leq m(n)$$

Пусть D_f^{comp} тек. функции f имеют вид

$$D_f^{\text{comp}} = K_1 \vee \dots \vee K_s$$

Рассм. количество таких комбинаций $\{z_1, \dots, z_s\}$ — это аннигилятор (т.е. минимально простое)

$$S \leq m(n),$$

т.е. если доказано, то $S(n) \leq m(n)$

Решение. р-лог Спиральна.

$$S(n) \leq C n^{k_0} \cdot 2^{n-k_0} \sim C_2 \frac{3^n}{\sqrt{n}}$$

$$k_0 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

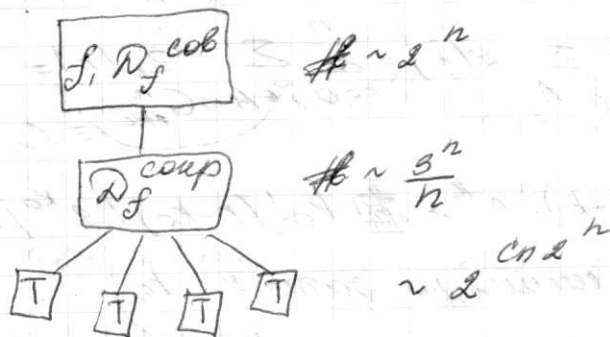
константа C_2
здесь

$$C_1 \frac{2^n}{n} \leq S(n) \leq C_2 \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

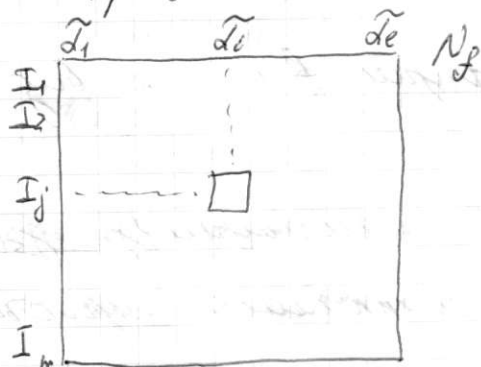
Блонский) (Владимир) ~ 562

Целя док-ва - Yamamoto, Мешалкин, Lubars

$|A| \leq C_n^{\frac{1}{2}}$ - Лемма Уттерера о мале. длине аппроксимации в B^k



Графовый алгоритм



Матрица Quine

Отбросить строку с макс. числом 1 и заключить её в скобки

Пример

1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	0	1	0	1

→

2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1

$P_{pr} = \{1, 2, 3, 4\}$
графикное

$P_{pr} = \{2, 3, 4\}$
кратчайшее

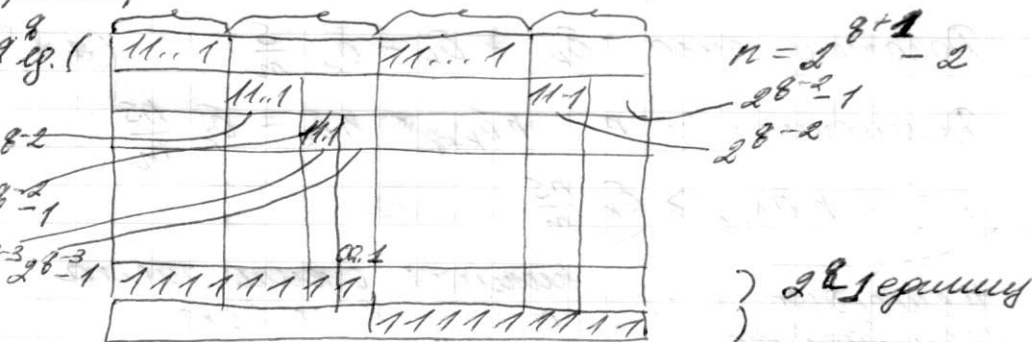
Строка I_j покрывает столбец i , 13.03

если $a_{ij} = 1$

Множество P -строк m -го A наз-ся покрывающим (строк) m -го A , если $\forall i \exists j$: столбец i покр. строкой I_j , $a_{ij} = 1$

Жадный алгоритм выбирает строки с наиб. числом единиц

Пример: 2^{8-1} 2^{8-1} 2^{8-1} 2^{8-1}



$$P_{kr} = \{8+1, 8+2\}$$

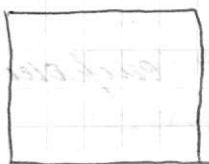
$$P_{kr} = \{1, 2, \dots, 8\}$$

$$\Rightarrow \frac{|P_{kr}|}{|P_{kr}|} = \frac{8}{2} = \frac{\log_2(n+2)-1}{2}$$

$$8 = \log_2(n+2)-1$$

Теор. 1 Пусть A — $m \times n$ матрица из 0 и 1
и $\forall$ строке ≥ 5 единиц. Тогда
 $|P_{\text{гр}}| \leq 1 + \frac{m}{5} \ln \frac{ens}{m}$

Док-во: Пусть δ_k — доля непокрытых
столбцов после k шагов граф. алгоритма



$$\delta_0 = 1.$$

$$\text{Обозн. } \alpha = \frac{5}{m}$$

$$\text{Покажем, что } \delta_k \leq (1 - \alpha)^k \quad (*)$$

$$\text{Покажем, что } \delta_{k+1} \leq \delta_k - \delta_k \frac{5}{m} \quad (**)$$

$$\text{Допустим же н: } n\delta_{k+1} \leq n\delta_k - \delta_k \frac{ns}{m}$$

$$\underbrace{n\delta_k - n\delta_{k+1}}_{\substack{\text{\# столбцов,} \\ \text{покрываемых} \\ \text{на } (k+1) \text{ шаге}}} \geq \underbrace{\delta_k \frac{ns}{m}}_{\substack{\text{миним. сумма чисел} \\ \text{единиц в строке}}}$$

столбцов,
покрываемых
на $(k+1)$ шаге

миним. сумма чисел
единиц в строке

$$\Rightarrow \exists \text{ строка, содержащая } \geq \frac{n\delta_k 5}{m} \text{ единиц}$$

$$\Rightarrow \delta_{k+1} \leq \delta_k (1 - \alpha) \quad (***)$$

Далее по индукции:

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k (1 - \alpha) \leq \delta_{k-1} (1 - \alpha)^2 \leq (1 - \alpha)^{k+1}$$

$$\text{Теперь } \forall k \quad |P_{\text{гр}}| \leq k + n\delta_k \leq$$

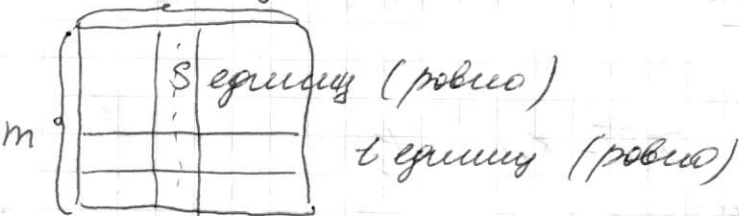
$$\leq k + n(1 - \alpha)^k \leq k + ne^{-\alpha k} \leq 1 + \frac{1}{\alpha} \ln n\alpha +$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{\alpha} \ln n\alpha \right\rceil$$

$$+ n e^{-\ln n \alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha} \ln n \alpha + \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{m}{5} \ln \frac{e n s}{m},$$

9md

Рассматриваем n -у-у.



$$m t = n s$$

$$|P_{kp}| \leq 1 + \frac{n}{t} \ln n t$$

$$|P_{kp}| \geq \left\lceil \frac{m}{t} \right\rceil \sim \frac{m}{t}$$

$$\text{При } t \rightarrow \infty \quad \frac{|P_{kp}|}{|P_{kp}|} \sim \ln n t$$

$$A_n \leq P_2^n \quad \text{Векторная норма в } p\text{-норме,}$$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{2^{2^n}} = 1$$

$$\text{У нормы в } p\text{-норме} \quad l_p \sim c \frac{2^n}{\log_2 n \log_2 \log_2 n}$$

$$l_p \sim c' \frac{2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$$

$$\frac{c'}{c} \sim 1.6$$

$$f: D_f^{\text{сов}} \leq 2^n$$

$$D_f^{\text{сов}} \quad \frac{2^n}{n}$$

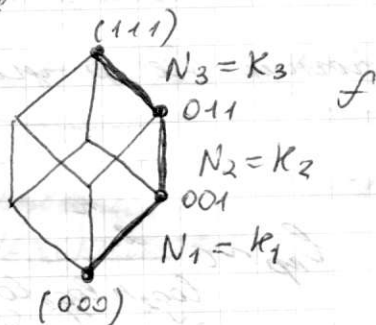
$$D_f^{\text{OT}}$$

$$D_f^{\text{OT}} = K_1 \vee \dots \vee K_S$$

K_i - пр. импл., входящ. хотя бы в 1 миним. ДНФ f

D_f^{OT} - ДНФ, состоящ. из пр. импликаций, входящих во все миним. ДНФ

$D_f^{\text{УМ}}$ — мин. ДНФ



Пр. импликация K -ядровая, если

$$\exists \tilde{x}: K(\tilde{x}) = 1$$

$$\forall \text{ пр. импликация } H \quad H(\tilde{x}) = 0$$

Упр. Если K -ядровая $\Rightarrow K \in D_f^{\text{OT}}$

соед. точка N



G - $\mathbb{Z}_2$ -м-во всех $\mathbb{Z}_2$ -композиций
Решето N_2 порождается элем. N_1, N_3

$\Rightarrow N_2$ не входит ни в одну из них

Введем **ЯНФ Квайне** (Quine) -
ЯНФ, получ. из $\mathcal{D}_f^{\text{сопр}}$ удалением всех
слагаемых, порожд. $\mathbb{Z}_2$ -композициями.

$\tilde{\alpha} \in N_f$ - **регулярна** относительно K ,
если $\Pi(\tilde{\alpha}, f)$ - **пухляк** ч.д. : 1) $K(\tilde{\alpha}) = 1$,
2) $\exists \tilde{\beta} \in N_f: \Pi(\tilde{\beta}, f) \subset \Pi(\tilde{\alpha}, f), K(\tilde{\beta}) = 0$

Пухляк с центром $\tilde{\alpha}$ - м-во $K \in \mathcal{D}_f^{\text{сопр}}$
 $K(\tilde{\alpha}) = 1 \Rightarrow \tilde{\alpha} \in N_K$

$\tilde{\alpha} = (001)$ - **регулярн. элем.** K_2 :

$$\Pi((001), f) = \{K_1, K_2\}$$

$$\beta = (100), \Pi((100), f) = \{K_1\}$$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}$ **регулярна** **отн.** K_2

$K \in \mathcal{D}_f^{\text{сопр}}$ **наз-ся** **регулярной композицией**,
если $\forall \tilde{\alpha}: K(\tilde{\alpha}) = 1$ - **регулярна** **отн.** K

K_2 - **регул. композиция**: (011) **регул. элем.** K_2
($\beta = (111)$)

Зад. (Муромцев 10.11.)

$K \in \mathcal{D}_f^{UT} \Leftrightarrow K$ — экв. регулярной

Док-во: 1) K — экв. регулярной

Докажем, что $\exists$ регуляр. АНД: $K \in \mathcal{D}$

K регул. $\Rightarrow \forall \tilde{\alpha} \in N_K$ — регул. отн. K

$\forall \tilde{\alpha} \in N_K \exists \tilde{\beta} \notin N_K \quad \Pi(\tilde{\beta}, f) \subset \Pi(\tilde{\alpha}, f)$

K — экв. регул. $\Rightarrow \exists \tilde{\alpha} \in N_K \quad \forall \tilde{\beta} \quad K(\tilde{\beta}) = 0$

$\Pi(\tilde{\beta}, f) \subset \Pi(\tilde{\alpha}, f)$



Углубим $L \in \Pi(\tilde{\alpha}, f) \setminus \{K\}$

При углублении не „ослывается“

ни одна из точек: пусть это так

и $\exists \tilde{\beta}$, кот. ослывается $\Rightarrow \Pi(\tilde{\beta}, f) \subset \Pi(\tilde{\alpha}, f)$

Сформируем покрытие, покр. K и точки, (?)

которые K не покрывает

$\Rightarrow \exists$ миним. покр., соед. $K \Rightarrow K \in \mathcal{D}_f^{UT}$

2) K — регулярн. $\Rightarrow K \notin \mathcal{D}_f^{UT}$

$\Rightarrow \forall \tilde{\alpha}_i \in N_K \exists \tilde{\beta}_i \notin N_K : \Pi(\tilde{\beta}_i, f) \subset \Pi(\tilde{\alpha}_i, f)$

$K \notin \bigcup_{i=1}^s K_{\beta_i} \cup \bigcup_{j=1}^m K_j$

оставшиеся компоненты

от K

Окрестность порядка r простого шипшика K
мн-во $S_r(K, f)$, $S_0(K, f) = \{x\}$

$$S_{r+1}(K, f) = \{L : \exists M \in S_r(K, f) : \\ N_L \cap N_M \neq \emptyset\}$$

$$S_0(K_1, f) = \{K_1\}$$

$$S_1(K_1, f) = \{K_1, K_2\}$$

$$S_2(K_1, f) = \{K_1, K_2, K_3\}$$

$$S_r(K, f) \subseteq S_{r+1}(K, f)$$

Пусть K порядк. дробовики в-цимми
Можно ли установить это по окр-ти

$$S_r(K, f) : r = ?$$



$r=2$ - можно окр, дробовые
и конъюнкция

Для выявления регулярности можно
восст. окр-ти второго порядка

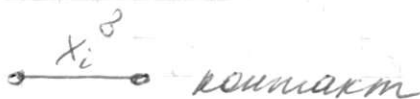
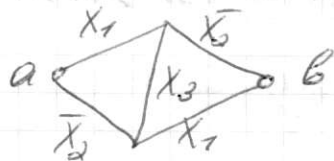
$g = \{r, r+1\}$ термитное?

27.03

Контактные схемы

Сеть-граф с помехами

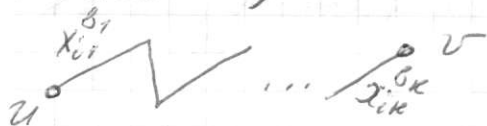
Контактная схема - сеть, в которой каждое ребро помечено $X = \{X_1, \dots, X_n, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n\}$



$$L(\Sigma) = \# \text{ контактов}$$

$[u, v]$ = цепь, соед. u, v

$$f_{[a,b]}(\tilde{x}^h) = x_{i1}^{b_1} \cdot x_{i2}^{b_2} \cdot \dots \cdot x_{ik}^{b_k}$$



$$f_{a,b} = \bigvee_{[a,b]} f_{[a,b]}$$

$$f_{a,b}(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 x_1 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_1 = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3$$



f реализ. схемой Σ , если $\exists a, a'$

$$f_{a,a'} = f$$

$$L(f) = \min_{\varepsilon \text{ разн. } f} L(\varepsilon)$$

$$L(n) = \max_{f \in P^n} L(f)$$

Ф-гид Шеннона

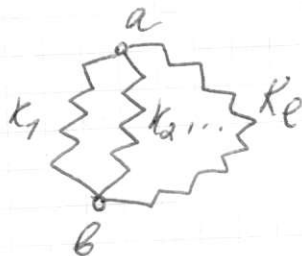
$$f \rightarrow \varepsilon_f$$

Сенсус коммутатора цепи по ДНФ

$$K = x_{i1}^{\beta_1} \dots x_{ik}^{\beta_k}$$



$$f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_e$$



$$l \leq 2^n$$

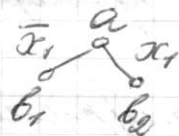
$$\text{rank } K_i \leq n$$

$$\forall f \in P^n$$

$$L(f) \leq n \cdot 2^n$$

Синтез по контактичному дереву

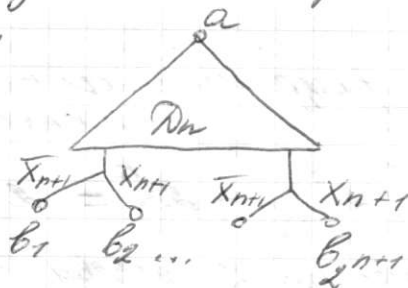
$n=1$



конт. дерево

Пусть для n построено к. дерево

$n \rightarrow n+1$



в D_n имеется дело с $(1, k)$ контактами
(реализ. в функции)

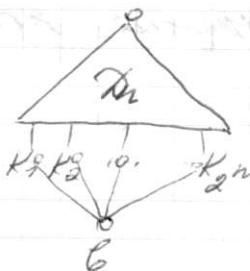
К. дерево реализ. контактным ядром n :

$$K = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$$

Представим f в виде сов. ДУД

$$f = K_1 \vee \dots \vee K_n = D_f^{\text{сов}}$$

К. дерево



$$f_{a,b}(\tilde{x}^h) = f$$

св-во: $\sum v_i v_j = 0$ (т.к. всегда "пропорция целой")
разделимость

$(1, k)$ -помощник - разделимый, если

$$\forall i, j, \sum_{i \neq j} v_i v_j = 0$$

Лемма: D_n - разделимый $(1, 2^n)$ -
помощник

$$L(D_n) = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$\forall f \in P_n$ сумма по к. дереву $L(f) \leq 2^{n+1}$

Метод Шеннона

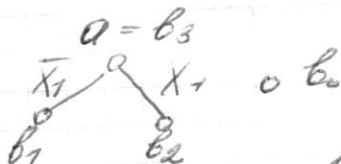
U_n - универсальный многопомощник -
 схема, реализ. все $f(x_1, \dots, x_n)$

$(1, 2^n)$ - помощник

Лемма 1 $L(U_n) \leq 2 \cdot 2^{2^n}$

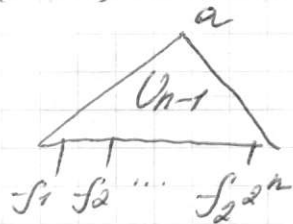
Док-во: Индукция по n :

$n=1$ $q_1, \bar{x}_1, x_1$



$$L(U_1) = 2 \leq 2 \cdot 2^{2^1}$$

$$(n-1) \rightarrow n$$



$$f_i(x_1, \dots, x_{n-1})$$

Разделим $f(x_1, \dots, x_n)$ на 3 типа:

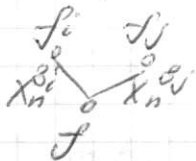
- 1) $f(x_1, \dots, x_n)$ не зависит от x_n
- 2) $\bar{x}_n g, x_n h$, g, h зависят от $(n-1)$ перемен. (из $2^{2^{n-1}}$)
- 3) $f = \bar{x}_n g \vee x_n h$

Ф-ция 1) типа уже реализована

Для ф-ции 2) тип добавим к

$f_1, \dots, f_n$ "переменную" x_n и $\bar{x}_n$

Для ф-ции 3) тип добавим к $f_1, \dots, f_n$



$\Rightarrow$ то создание ф-ции 2) типа тривиально

1 контакт, для ф-ции 3) тип - 2L-то

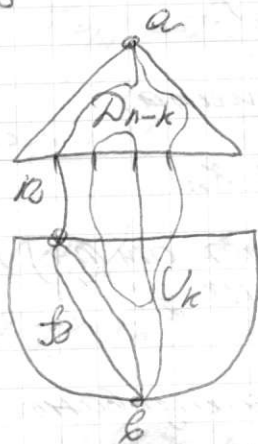
$$L(\Sigma) \leq L(U_{n-1}) + 2(2^{2^{n-1}} - 1) +$$

всего $f=0$

$$+ 2(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} - (2^{2^{n-1}} - 1)) \leq 2 \cdot 2^{2^n}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\beta_1, \dots, \beta_{n-k})} x_1^{\beta_1} \dots x_{n-k}^{\beta_{n-k}} f(\beta_1, \beta_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{\tilde{\beta}} K_{\tilde{\beta}} f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x})$$



$$\bigvee_{\tilde{\beta}} K_{\tilde{\beta}} f_{\tilde{\beta}}$$

"лишних" конъюнкций нет,
т.к. D_{n-k} обладает св-вом
проводимости: $f_b, b_j = 0$

$$L(\Sigma_f) \leq L(D_{n-k}) + L(U_k) \leq 2^{n-k+1} + 2 \cdot 2^{2^k} \leq 2^{n - \log_2(n - 2 \log_2 n) + 2} + 2 \cdot 2^{2^{\log_2(n - \log_2 n)}} =$$

$$K = \lfloor \log_2(n - 2 \log_2 n) \rfloor$$

$$= \frac{2^{n+2}}{n - 2 \log n} + 2 \cdot \frac{2^n}{n^2} \sim 4 \cdot \frac{2^n}{n}$$

Лемма 2 (Шеннон)

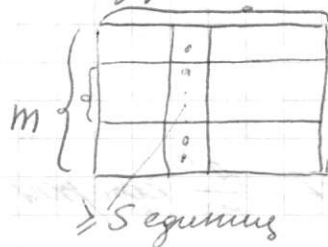
$\forall f(\tilde{x}^n) \exists \Sigma_f$ (постр. по методу Шеннона)

т.ч. $L(\Sigma_f) \leq 4 \frac{2^n}{n}$

Сформулируем $S_{\tilde{x}}^n(\tilde{x})$ как-то иначе

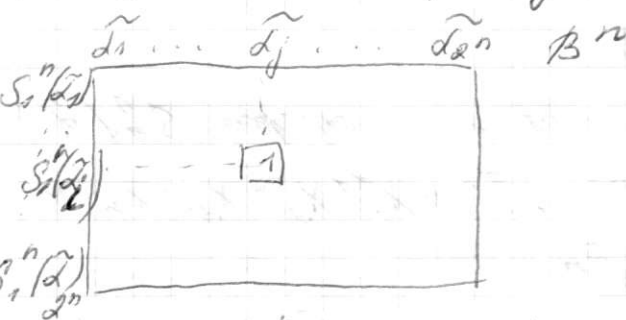
$$\{ \tilde{\beta} \in B^n \mid \rho(\tilde{x}, \tilde{\beta}) = q \} \quad (\rho(\tilde{x}, \tilde{\beta}) = \# \text{ разн. координат})$$

Лемма 3 Куб B^n можно покрыть сферами радиуса 1, # сфер $\leq 1 + \frac{2^n}{n} \ln(en)$



$|P_{\text{раз}}| \leq 1 + \frac{m}{5} \ln\left(\frac{en}{m}\right)$
Градиентный алгоритм

Возьмем матрицу



$m \rightarrow 2^n$, $n \rightarrow 2^n$, $S \rightarrow n$ в n -столбце $\geq n$ единиц

получили требуемую оценку.

Полусфера - произв. подмн-во вершин сферы

Следствие 1 Т покрытие куба B^n

ℓ пересек. полусферами, $\ell \leq 1 + \frac{2^n}{n} \ln(en)$



"волееркивание" из сфер уже покрытые вершины

Пример



Куб гиперплоскости $n=2^k$ корп. $\frac{2^n}{n}$ гиперплоск.

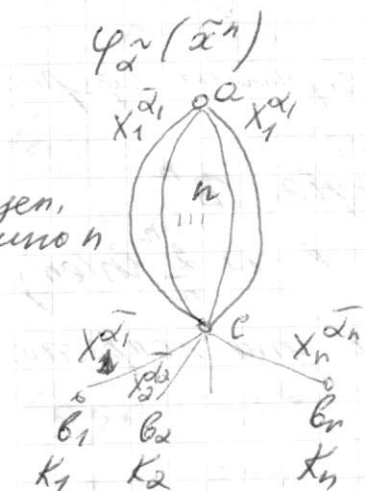
$$\text{Рассм. } S_1^n((d_1 \dots d_n)) = \{(\bar{d}_1 d_2 \dots d_n)(d_1 \bar{d}_2 d_3 \dots d_n) \dots (d_1 \dots d_{n-1} \bar{d}_n)\}$$

$\varphi_{\alpha}^{\sim}(\tilde{x}^n)$ - канон. ф-ция гиперплоскости $S_1^n(\tilde{\alpha})$

$$\varphi_{\alpha}^{\sim}(\tilde{x}^n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\bar{\alpha}_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n} \vee \dots \vee x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\bar{\alpha}_n}$$

$$1) \varphi_{\alpha}^{\sim}(\tilde{x}^n) \cdot x_i^{\bar{\alpha}_i} = x_1^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\bar{\alpha}_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n}$$

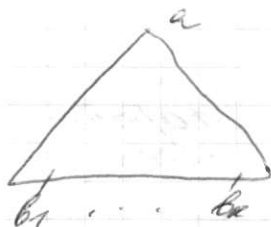
$$2) \varphi_{\alpha}^{\sim}(\tilde{x}^n) \cdot x_i^{\bar{\alpha}_i} x_j^{\bar{\alpha}_j} \equiv 0$$



$$S_{\alpha} = \varphi_{\alpha}^{\sim}(\tilde{x}^n)$$

$$S_{\alpha}(\tilde{x}^n)$$

Рассм. $(1, k)$ -полосник



он обладает в-вом полноты, если $\sum a_i \cdot \sum b_i \equiv 0$

Контактные схемы

3.04

Обозн. Q_n - контактной $(1, 2^n)$ -полосник,
реализующий систему контактных функций n
от переменных $x_1, \dots, x_n$

Лемма 1 $\exists Q_n$, т.е. $L(Q_n) \sim 2^n$

Док-во: $\exists$ разбиение $B^2 = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \dots \cup \Pi_r$,

(это мы знаем)

$$r \leq 1 + \frac{2^n}{\epsilon} \ln(\epsilon)$$



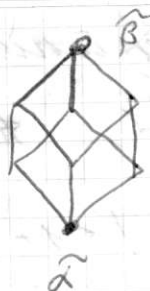
$$S_1^n(\tilde{a})$$

$$\tilde{a} = a_1 \dots a_n$$

$$\varphi_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = K_1 \vee \dots \vee K_n$$

$$b_0 \rightarrow K_i = x_1^{a_1} \dots x_{i-1}^{a_{i-1}} \cdot x_i^{\tilde{a}_i} \cdot x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_n^{a_n}$$

Пример



Куб размерности $n=2^k$ корп. $\frac{2^n}{n}$ сферич.

Рассм. $S_1^n((d_1 \dots d_n)) = \{(\bar{\alpha}_1 d_2 \dots d_n) / (d_1 \bar{\alpha}_2 d_3 \dots d_n) \dots$
 $\dots (d_1 \dots d_{n-1} \bar{\alpha}_n) \}$

$\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n)$ - хар-кт. φ -группы сферич. $S_1^n(\tilde{\alpha})$

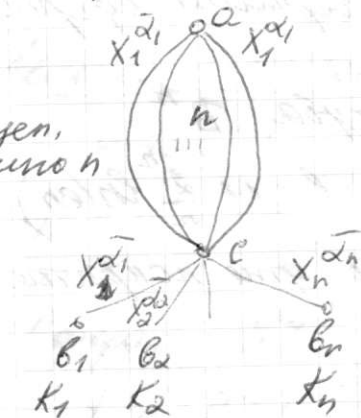
$$\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n} \vee \dots \vee$$

$$\vee x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$$

1) $\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n) \cdot x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n}$

2) $\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n) \cdot x_i^{\alpha_i} x_j^{\alpha_j} \equiv 0$

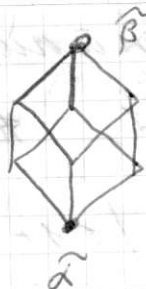
$\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n)$



$$I_{ac} = \varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n)$$

$$I_{ab}(\tilde{\alpha}^n)$$

Пример



Куб размерности $n=2^k$ корп. $\frac{2^n}{n}$ сепарат

Рассм. $S_1^n((d_1 \dots d_n)) = \{(\bar{d}_1 d_2 \dots d_n) / (d_1 \bar{d}_2 d_3 \dots d_n) \dots$
 $\dots (d_1 \dots d_{n-1} \bar{d}_n)\}$

$\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n)$ - изобраз. φ -групп сепарат $S_1^n(\tilde{\alpha})$

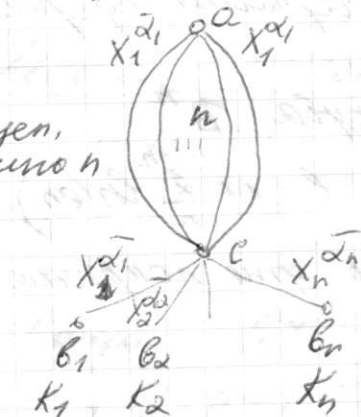
$$\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n) = x_1^{\bar{d}_1} x_2^{\bar{d}_2} \dots x_n^{\bar{d}_n} \vee x_1^{\bar{d}_1} x_2^{\bar{d}_2} x_3^{\bar{d}_3} \dots x_n^{\bar{d}_n} \vee \dots \vee$$

$$\vee x_1^{\bar{d}_1} \dots x_{n-1}^{\bar{d}_{n-1}} x_n^{\bar{d}_n}$$

1) $\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n) \cdot x_i^{\bar{d}_i} = x_1^{\bar{d}_1} \dots x_{i-1}^{\bar{d}_{i-1}} x_i^{\bar{d}_i} x_{i+1}^{\bar{d}_{i+1}} \dots x_n^{\bar{d}_n}$

2) $\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n) \cdot x_i^{\bar{d}_i} x_j^{\bar{d}_j} = 0$

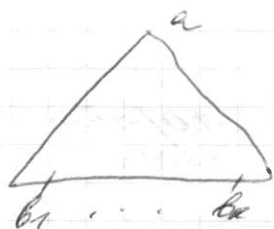
$\varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n)$



$$Iac = \varphi_{\alpha}(\tilde{\alpha}^n)$$

$$Iac(\tilde{\alpha}^n)$$

Рассм. $(1, k)$ -полигоник



он обладает св-вом полурегулярности,

$$\text{если } f_{a, b_i} \cdot f_{b_j, b_k} = 0$$

Контактные схемы

3.04

Обозн. Q_n - контактной $(1, 2^n)$ -полигоник,
реализ. систему контактных реле на n
от перем. $x_1, \dots, x_n$

Лемма 1 $\exists Q_n$, т.ч. $L(Q_n) \sim 2^n$

Док-во: $\exists$ разбиение $B^k = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \dots \cup \Pi_r$,

(это мы знаем)

$$r \leq 1 + \frac{2^k}{k} \ln(k)$$



$$S_1^n(\tilde{\alpha})$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_n$$

$$\varphi_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha}) = K_1 \vee \dots \vee K_n$$

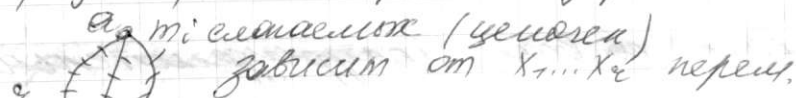
$$b_0 \rightarrow K_i = x_1^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \cdot x_i^{\alpha_i} \cdot x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Функция потерь: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|^2$

$$\psi_{\tilde{a}}(\tilde{x}^n)$$

Длина λ конусовых волн зависит от характ.

Ф-цию, построили дерево:



$$\varphi_{\alpha}^{\sim} = K_{\alpha 1} \vee \dots \vee K_{\alpha m_{\alpha}}$$

зависит от $x_{i+1}, \dots, x_n$ перемен.

$$\rightarrow d^{n-1}$$

контактов в т.ч. "мемёнке"

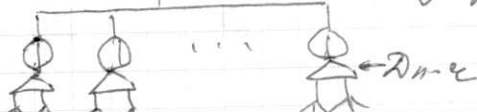
$$\uparrow$$

$$b_j \quad \varphi_{a_j} \in K \& x_j \cdot \overline{a_j} = K_j \cdot K$$
$$(d_1, \bar{d}_1, d_2, \bar{d}_2, \dots, d_n)$$

$$\tilde{K} = x_1^{d_1} \dots x_i^{d_i} \dots x_r^{d_r} x_{r+1}^{d_{r+1}} \dots x_n^{d_n}$$

Такая же форма, как все конгломераты,
у которых начало - характ. ф-ция конусов.

Знаешь получить все конъюнкции,
надо посчитать схему:
а) е полусфера



Оценим сложность этой схемы:

 $\varepsilon \cdot m_i$
узлов
контрактов

 $2^{n-\varepsilon+1} - 2$
 $m_i \cdot 2^{n-\varepsilon}$
контрактов веток из дерева

$$\Rightarrow L(Q_n) \leq \sum_{i=1}^{\ell} (\varepsilon \cdot m_i + 2^{n-\varepsilon+1} + m_i \cdot 2^{n-\varepsilon}) \Leftrightarrow$$

Заметим, что $\sum m_i = 2^{\varepsilon}$ (т.к. были разбиты кубы B^{ε} на непересекающиеся гиперкубы)

$$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot 2^{\varepsilon} + \ell \cdot 2^{n-\varepsilon+1} + 2^{\varepsilon} \cdot 2^n \leq$$

$$\ell \cdot 5 + \frac{2^{\varepsilon}}{\varepsilon} \ln(\ell \cdot 2^{\varepsilon})$$

Возьмем $\varepsilon = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

$$\leq \varepsilon \cdot 2^{\sqrt{n}} + \frac{2^{\sqrt{n}} \ln(\ell \cdot 2^{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}} + 2^{\sqrt{n}} \sim 2^{\sqrt{n}}$$

г.м.г.

Теор. 1 (О.Б. Лупанов)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \forall f(x_1, \dots, x_n)$

Сущ-т схема Σ_f м.ч. $L(\Sigma_f) \leq (1+\varepsilon) \frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

Лемма 1 $L^{KC}(n) \leq \frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

(Ф-ция Шеннона для кон. схем)

по ДИФ сложность $n \cdot 2^n$

по дереву — $O(2^n)$

по Шеннону — $O(\frac{2^n}{n})$

Док-во лем. 1

Реализ. ф-цию надписей:

$x_1 \dots x_k$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$	$\} \epsilon$
$0 \dots 0$				$\} S$	(P_1)
$\vdots$					
$b_1 \dots b_k$				$\} S$	(P_i)
$\vdots$					
$1 \dots 1$				$\} S' \cup S$	

Параметры: $\Pi_1 \dots \Pi_j$ $\Pi_{k+1} \dots \Pi_n$ ϵ, S

S - размер полосы, ϵ - число полос,

$$\epsilon = \lceil \frac{2^k}{S} \rceil$$

$B^+ = \tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2 \cup \dots \cup \tilde{\Pi}_\epsilon$ - переходящие подпоследовательности

$$\ell \leq 1 + \frac{2^k}{\epsilon} \ln(\epsilon \epsilon)$$

$$\tilde{d} = (\underbrace{d_{k+1} \dots d_{k+\epsilon}}_{\in \tilde{\Pi}_i}, d_{k+\epsilon+1} \dots d_n) \in \Pi_j$$

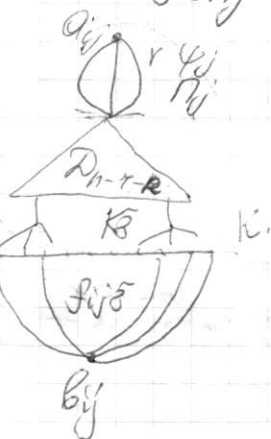
если $\tilde{d} \in \tilde{\Pi}_i$

$$f_{ij}(\tilde{d}) = \begin{cases} f(b_1 \dots b_n), & d_1 \dots d_n \in \Pi_i \cap \Pi_j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}$$

$$f_{ij} = \sum_{(v_{k+1}, \dots, v_n) \in \Pi_j} x_{k+1} \dots x_n f_{ij}(x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n) =$$

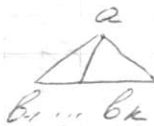
$$= \sum_{\tilde{\sigma} \in \Pi_j} K_{\tilde{\sigma}} f_{ij} \tilde{\sigma}$$



$$\frac{1}{h_{k+1}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{k+1} \cdot x_k$$

Свойство полуразделимости:

$\mathcal{L}_a$



$$\forall i, j, k \quad \mathcal{L}_{a, v_i} \& \mathcal{L}_{a, v_j} = 0$$

$$K_i x_e \otimes x_m \otimes x_n = 0 \text{ (по св-ву хар. ф-ции н/сфера)}$$

$\Rightarrow$ остальные ф-ции вида

$$f_{ij} = \sum_{\tilde{\sigma} \in \Pi_j} K_{\tilde{\sigma}} f_{ij} \tilde{\sigma}$$

$$f_{ij} \tilde{\sigma} = M_1 v_1 \dots v_{M_{L-1}} \quad L \leq 5$$

$$|N_{f_{ij} \tilde{\sigma}}| \leq 5 \quad (\text{единица только в строке})$$

$$L(f_{ij} \tilde{\sigma}) \leq K \cdot 5 \quad \text{число ненулевых ф-ций в строке}$$

$$\text{Векторов в строке } S \leq 2^5$$

$$\Rightarrow \text{различных ф-ций} \leq 2^5$$

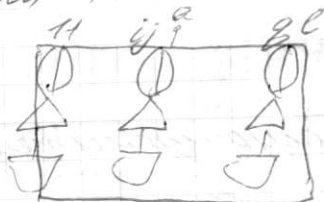
Для каждой ij (характеристика j и n)

каждо $m_j \cdot 4$ контактов

На дереве $\leq 2^{n-k-1}$ контактов

Для элементов $- m_j \cdot 2^{n-k}$

Для каждого элемента $\leq k \cdot 5 \cdot 2^5$



Суммируя все элементы Σf

$$L\left(\sum_{i=1}^l f\right) \leq \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \left(m_j \cdot 4 + 2^{n-k-1} + m_j \cdot 2^{n-k} + \right.$$

$$\left. + k \cdot 5 \cdot 2^5 \right) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^l m_j = 2^k$$

$$(2) \sum_{i=1}^l \left(4 \cdot 2^k + l \cdot 2^{n-k-1} + 2^{n-k} + l \cdot k \cdot 5 \cdot 2^5 \right) \leq$$

$$(3) 8(-4) \leq$$

Введем k, l, S :

$$k = \lfloor \lg n \rfloor$$

$$k = \lfloor 2 \lg_2 n \rfloor$$

$$S = \lfloor n - 2\sqrt{n} \rfloor$$

$$8 = \left\lceil \frac{2^k}{S} \right\rceil \sim \frac{2^k}{n}, \quad l \leq 1 + \frac{2^k}{2} \ln(2n) \leq \frac{2^k}{\ln n}$$

$$\leq \frac{2^k}{n} \left(\sqrt{n} \cdot 2^{\sqrt{n}} + 2^{n-k+1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} + 2^{n-k} + \frac{2^{S+k} (2 \log n) n}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{O(2^{n-k})}{\sqrt{n}} \sim O(2^{n-k})$$

$$S+k \sim n - 2\sqrt{n} + \sqrt{n} + O(\log n)$$

$$n-k \sim n - 2\log_2 n$$

$$\sim \frac{2^n}{n} (1 + O(1)) \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{n} \right) 2^n$$

З.М.Г.

Лемма 2 $H_n^k = C_{n+k-1}^k$ (число составных с повторениями)

Доказ.

$a_1, \dots, a_k$

$i_1, i_2, \dots, i_n$ - число повторений

$$\sum_{j=1}^n i_j = k$$

Составим в выборке двоичн. вектор

$$\left(\underbrace{111}_{i_1} \underbrace{101}_{i_2} \dots \underbrace{10\dots 01}_{i_n} 1 \right) \begin{matrix} \#1 = k \\ \#0 = n-1 \end{matrix}$$

в вектору двоичн. составили
каждо a_1, a_k

#координат = $n+k-1$ и среди них $\#1=k$

$$\Rightarrow H_n^k = C_{n+k-1}^k$$

З.М.Г.

2.04

Лемма

$$S(h) \leq (12h)^h$$

Доказ. Если h ребёр в функции
сери, то сколько вершин?

$$\# \text{вершин} \leq 2h+2$$

(Мы рассматриваем серию без петель, но с
крайними ребрами)

Тогда ребра - пары $\{i, j\}$

$$\# \text{типов} \leq C_{2h+2}^2$$

$$S(h) \leq H_{C_{2h+2}^2}^h + h-1 \quad \text{из типов выбираем}$$

по h ребёр

$$C_{2h+2}^2 = \frac{(2h+2)(2h+1)}{2} = (h+1)(2h+1) = 2h^2 + 3h + 1$$

$$\Rightarrow S(h) \leq C_{2h^2+3h+1}^h$$

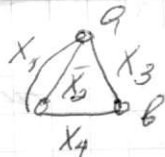
$$C_n^k \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \Rightarrow S(h) \leq (e(2h+4))^h$$

$$\text{При } h \geq 2 \quad S(h) \leq (e \cdot 4h)^h \leq (12h)^h$$

Мы получили много серий с h ребрами

ребрами

Если много много конт. экв.



Пусть $N(n, k)$ — # двоичных комбинаций, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, элемент $\leq k$

Лемма $N(n, k) \leq d(24nk)^k$

Док-во
$$N(n, k) \leq \sum_{h=1}^k S(h) \cdot (2n)^h \leq \sum_{h=1}^k (12h)^h (2n)^h \leq (24kn)^k \sum_{h=1}^k (24kn)^{-h} \leq (24kn)^k \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^h = (24kn)^k$$
 з.м.г

Теор. 1 1) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \exists f(x_1, \dots, x_n)$

$$L(f) > (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}$$

2) $\delta_n = \max_x f(\tilde{x}^n): L(f) \leq (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}$

$$\Rightarrow \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Заметим, что (2) $\Rightarrow$ (1)

Док-во: 1) $\delta_n \leq \frac{|N(n, (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n})|}{2^{2^n}}$

так как для элемент $\leq (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}$ он n раз.

$$\log_2 \delta_n \leq (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n} \cdot \underbrace{\log_2 \left(\frac{1}{2} (24n(1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}) \right)}_{n + O(1)} - 2^n \leq$$

$$\leq (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n} (n + O(1)) - 2^n \leq -\varepsilon \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$L(n) = \max_{f \in P_k^n} L(f(x_1, \dots, x_n)) \text{ функция Шеннона}$$

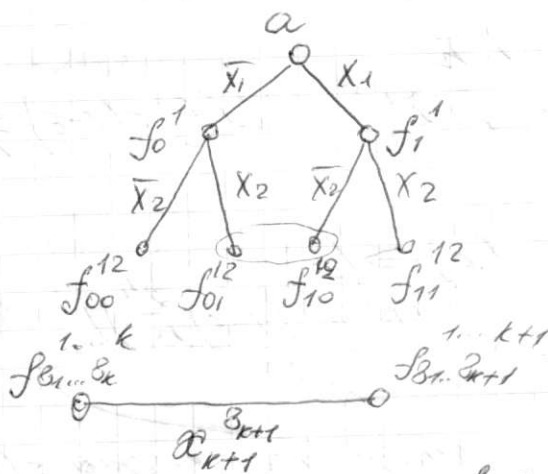
Теор. 2 $L(n) \sim \frac{2^n}{n}$ (Шеннон, Хаттанов)
(Среднее значение)

Метод каскадов

Основан на разном. функции по перемен.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \dots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \bar{x}_1 f_0^1 \vee x_1 f_1^1$$

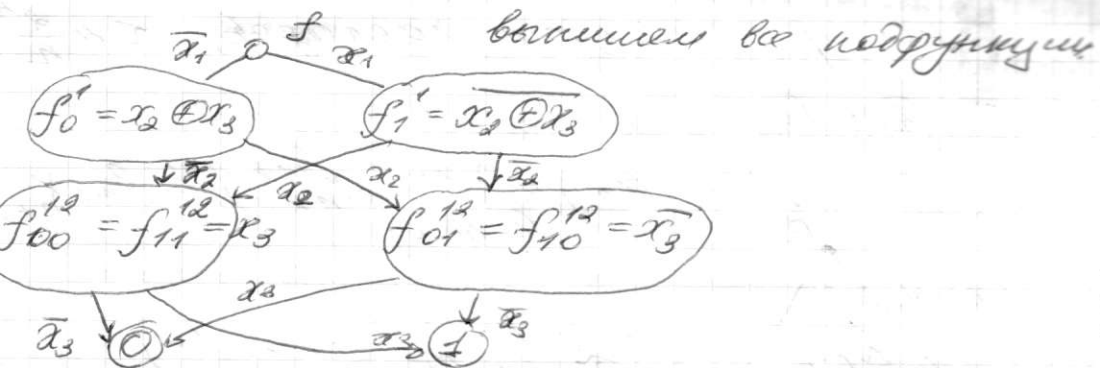
$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{z_1, \dots, z_k} x_1^{z_1} \dots x_k^{z_k} \underbrace{f_{z_1, \dots, z_k}^{1, 2, k}(\dots, x_{k+1}, \dots, x_n)}_{\text{подфункции}}$$



сменяем именах.
вершина

$$\begin{aligned} f_{ab} &= f \\ f_{ac} &= F \end{aligned}$$

Пример $f(x^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$



обрубаем кольцо

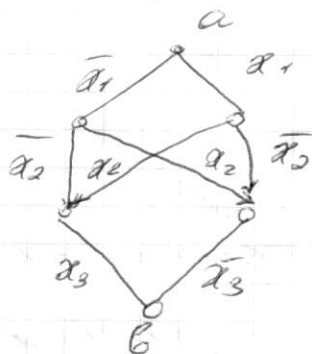


Схема Карно

$x_1 \oplus \dots \oplus x_n$
Эта схема минимальна

$f(x^2) = x_1 \vee x_2$

Миним. схема:

```

graph TD
    x1((x1)) -- a --> x2((x2))
    x2 -- a --> one((1))
  
```

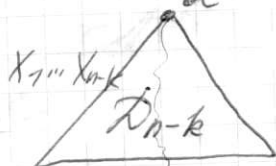
Методом расщепления по переменной



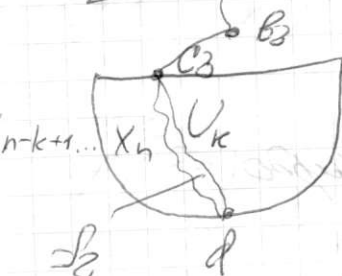
Теор. 3 Сложность КС $V f(x_1, \dots, x_n)$,
 постр. методом каскадов, $\leq 4 \frac{2^n}{n}$

Доказ.

$$f(x_1, \dots, x_n) = V_{(b_1, \dots, b_{n-k})}^{x_1, \dots, x_{n-k}} f(b_1, \dots, b_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$



$$= V_{\mathcal{D}} K_{\mathcal{D}} f_{\mathcal{D}}(x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$

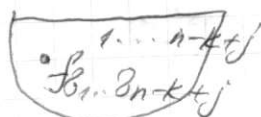


Если $k = \lfloor n - 2 \log_2 n \rfloor$ сложн. $\leq 4 \frac{2^n}{n}$
 сравним с методом каскадов:



$$2 + 4 + \dots + 2^{n-k}$$

Но некоторые вершины
 сдвигаются, а нек. уходит
 в 0 и аннотироваться
 $\Rightarrow$ много верш. $\leq$ много в. в D_{n-k}



Вершин будет $\leq 2^{2^k}$ вершин и из
 $\forall$ вершина ≤ 2 конъюнктов

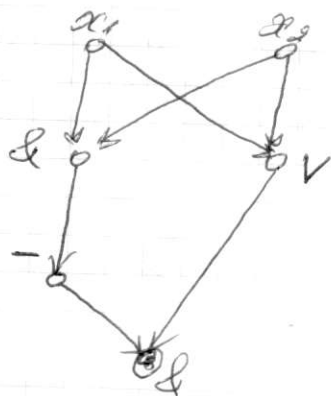
$$\Rightarrow \leq 2 \cdot 2^{2^k} \text{ конъюнктов внизу,}$$

$$\leq 2 \cdot 2^{n-k} \text{ — — — — — сверху}$$

гм

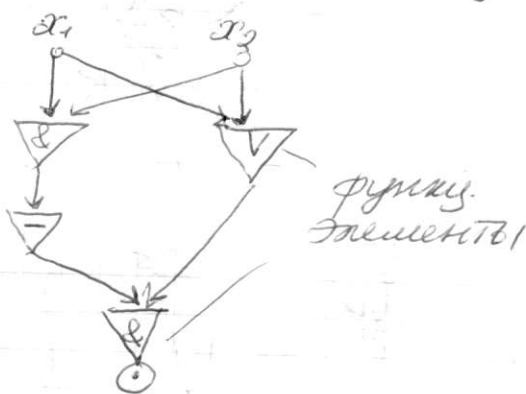
Схема из функции элементов (СФЭ)

Опр. СФЭ - это бесконечный ориентированный граф, т.ч. вершины со степенью входа $= 0$ помещены символами из алфавита $X = \{x_1, x_2\}$, всякая внутр. вершина помещена символом логической связи из нек. базиса, выход помещен $\odot$.



$$f = \overline{x_1 \& x_2} \& (x_1 \vee x_2) = x_1 \oplus x_2$$

Стандартный базис $B_0 = \{ \vee, \&, \neg \}$



Будем обозн. $f_{V, \Sigma}$ - бул. ф-ция, реализ. в V схемой Σ

1) $V \in$ нулевому кругу $\Rightarrow f_{V, \Sigma} = x_i$

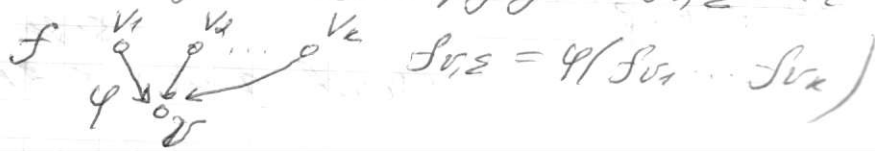


Схема Σ реализует f , если

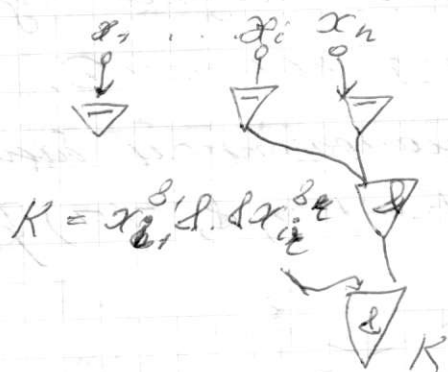
$$\exists V: f_{\Sigma} = f$$

Очень простые методы синтеза

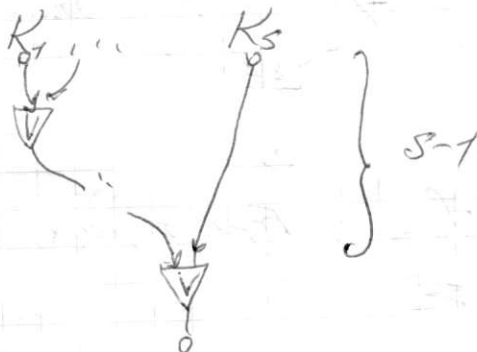
Синтез СФЭ по ДНФ

$$B_0 = \{V, \&, \neg\}$$

$f = K_1 V \dots V K_s$, где K_i - элем. конъюнкции



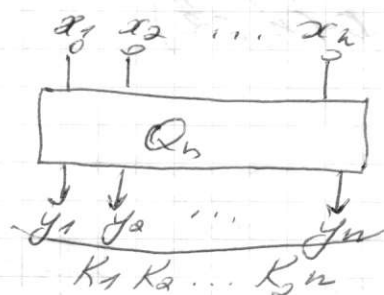
Сложность K $9 + 4 - 1 \leq 22$



$$L^{ДНФ}(f) \leq n \cdot 2^n$$

Сложность реализ. произв. ф-ции $\leq \frac{S \cdot 2n}{2} \leq 2n \cdot 2^n$

Дешифратор



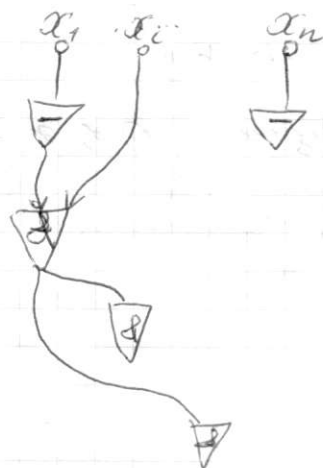
$b_1 \dots b_n$

$0 \dots 010 \dots 0$

$\downarrow$
 $\nu(b_1 \dots b_n)$

Номер набора $\nu(b_1 \dots b_n) = 1 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot 2^{n-i}$

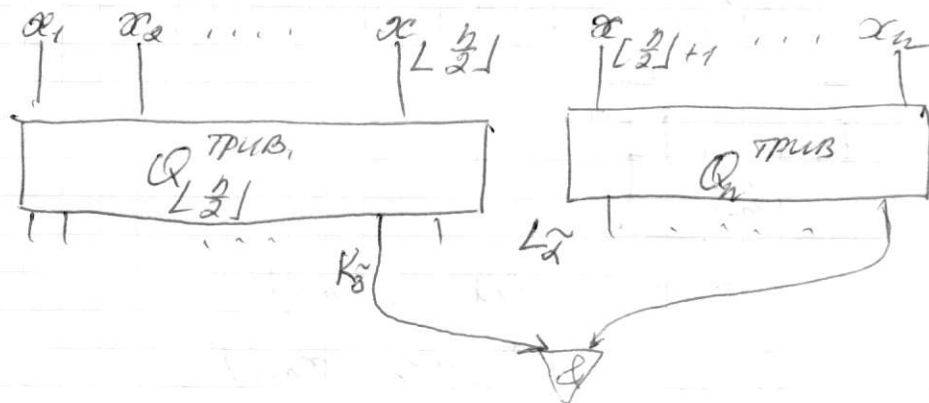
$K = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$



$$n + 2^n(n-1) \leq n \cdot 2^n$$

$$L(Q_n) \leq n \cdot 2^n$$

Уменьшим сложность:



$$L(\Sigma) \leq L(Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\text{TP}}) + L(Q_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{\text{TP}}) + 2^n$$

Сложность $\forall n \geq 0$ $O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$

$$\Rightarrow L(\Sigma) \sim 2^{\frac{n}{2}}$$

4.04

U_n - схема, реализ. все ф-ции $f(\tilde{x}^n)$

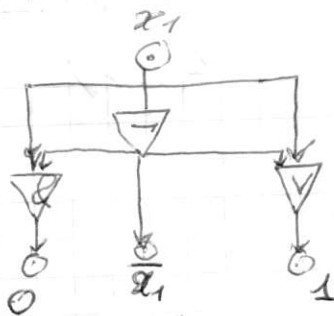
Лемма 1 $\exists$ СФЭ U_n : сложность

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

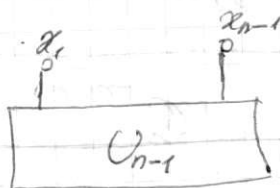
Доказ-во: индукция по n :

$n=1$ Имеем 4 функции $0, 1, \bar{x}, x$

схема:



$$L(U_1) = 3 = 2^{2^1} - 1$$



1 шаг

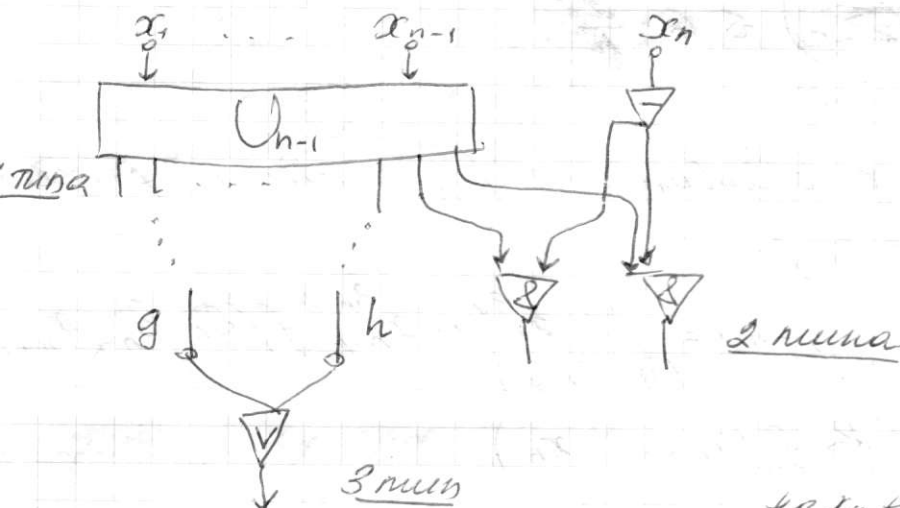
$$f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

2 шаг

$$x_n^{B_n} g(x_1, \dots, x_{n-1})$$

3 min $f = \bar{x}_n g \vee x_n h$ $g, h \in P_2^{n-1}$

Для $n-1$ построим C_{n-1} :



$\downarrow$ 5 min
 $L(V_n) = L(V_{n-1}) + 2(2^{2^{n-1}} - 1) - 1$ (+)
 Imuna: $2(2^{2^{n-1}} - 1)$

$$\textcircled{+} \quad 2^{2^n} - (2^{2^{n-1}} + 2(2^{2^{n-1}} - 1)) \quad \textcircled{=}$$

$\uparrow$ $\quad \quad \quad \nwarrow$
 p-гүй 1 нмр $\quad$ p-гүй 2 нмр

$$\textcircled{=}$$

$$\frac{2^{2^{n-1}} - (n-1) + 2(2^{2^{n-1}} - 1) - 1 + 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} - 2(2^{2^{n-1}} - 1)}{\text{при индукции}} = 2^{2^n} - n,$$

S.M.G.

Теор. 1 (Менсон)

$\forall f(x_1, \dots, x_n) \exists$ схема Σ_f :

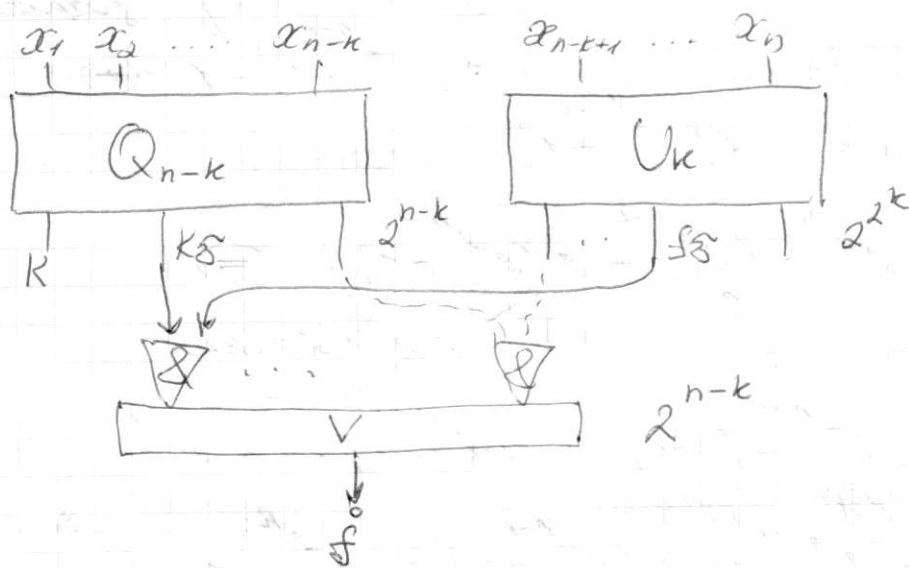
$$L(\Sigma_f) \leq 6 \cdot \frac{2^n}{n}$$

Доказ-во:

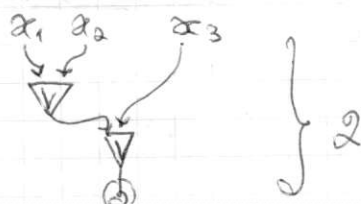
Метод основан на разложении ф-ции f по переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(b_1, \dots, b_{n-k})} x_1^{b_1} \dots x_{n-k}^{b_{n-k}} f(b_1, \dots, b_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$

$$= \bigvee_{\beta} K_{\beta} f_{\beta}(x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$



$$n-k=3$$



$$L(\Sigma_g) = L(Q_{n-k}) + L(U_k) + \underbrace{2^{n-k}}_{\text{"S"}} + \underbrace{2^{n-k-1}}_{\text{"V"}} \leq$$

$$k = \lfloor \log_2(n - 2 \log_2 n) \rfloor$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad 2^{n-k} + 2^{2^k} + 2 \cdot 2^{n-k} &= 3 \cdot 2^{n-k} + 2^{2^k} \\ &\leq 3 \cdot 2^{n - \log_2(n - 2\log_2 n) + 1} + 2^{n - 2\log_2 n} \\ &\leq 6 \cdot 2^{n - \log_2 n - 2\log_2 n} + 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n^2} \sim 6 \cdot \frac{2^n}{n - n^2} + \frac{2^n}{n^2} \\ &\sim 6 \cdot \frac{2^n}{n} \end{aligned}$$

G.M.G.

Прер. 2 (Лупанов О.Б.)

$$\forall \epsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \quad \forall f(\tilde{x}^n) \in \text{Formas } \Sigma_f.$$

$$L(\Sigma_f) \leq (1+\varepsilon) \frac{2^n}{n}.$$

Реш-во: представим $f(x^n)$ таблицей:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & & 1 \\
 \hline
 x_1 \dots x_n & 0 & & 1 \\
 \hline
 0 \dots 0 & & & \\
 & & & \\
 b_1 \dots b_k & & \boxed{} & \\
 & & & \\
 1 \dots 1 & & &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} S$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} S' \leq S$$

$$P_i - i\text{-th number}$$

$$q = \left\lceil \frac{2^k}{5} \right\rceil,$$

З - ширина носов
З - число носов

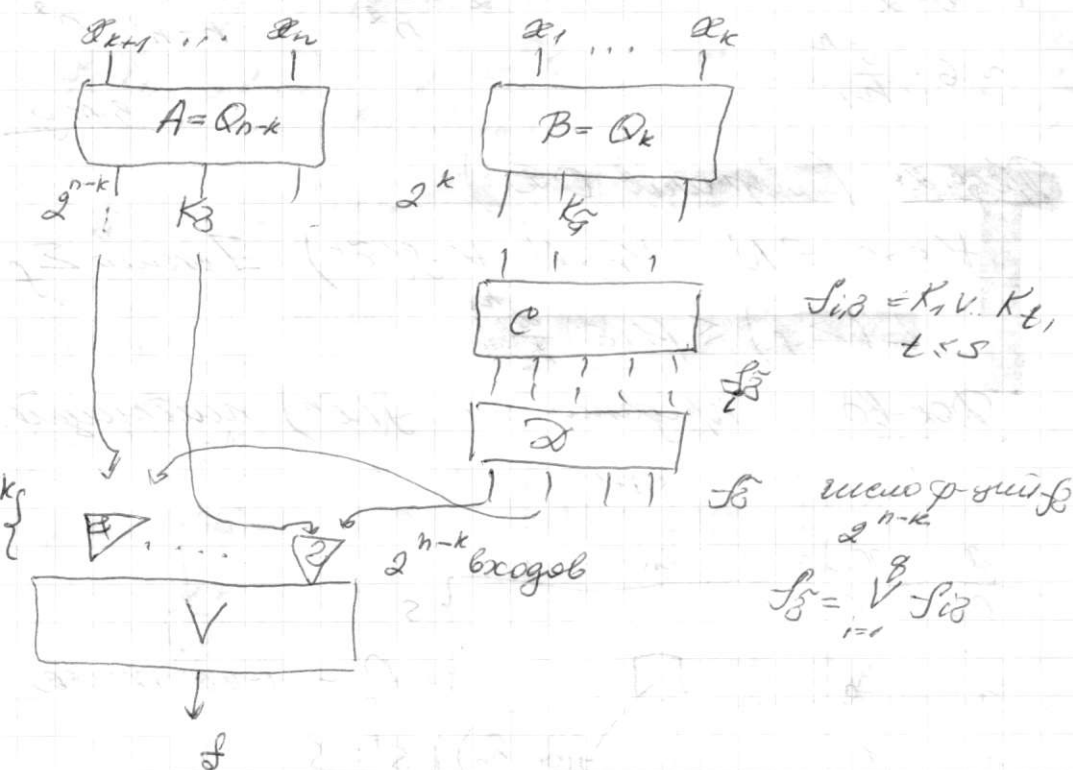
$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), & (x_1, \dots, x_n) \in P_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Разложим $f_i(x_1 \dots x_n)$ по переменным:

$$f_i(x_1 \dots x_n) = \sum_{\beta_{k+1} \dots \beta_n} x_{\beta_{k+1}} \dots x_{\beta_n} f_{i\beta}(x_1 \dots x_k \beta_{k+1} \dots \beta_n) =$$

$$= \sum_{\beta} K_{\beta} f_{i\beta}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \sum_i \sum_{\beta} K_{\beta} f_{i\beta} \tilde{x}_i = \sum_{\beta} K_{\beta} \sum_i f_{i\beta} \tilde{x}_i = \sum_{\beta} K_{\beta} S_{\beta}$$



$$L(A) \sim 2^{n-k}$$

$$L(B) \sim 2^k$$

$$L(C) \leq 5 \cdot 2^s$$

$$L(D) \leq 2^{n-k} (s-1)$$

$$\Rightarrow L(\Sigma_S) \leq \underbrace{2^{n-k}}_A L(Q_{n-k}) + \underbrace{L(Q_k)}_B + L(C) + \\ + L(D) + \underbrace{2 \cdot 2^{n-k}}_{("S" + "V")} \leq 3 \cdot 2^{n-k} + 2^k + 5q \cdot 2^S + \\ + q \cdot 2^{n-k}$$

$$K = \lfloor 3 \log_2 n \rfloor,$$

$$S = \lfloor n - 5 \log_2 n \rfloor$$

$$3 \cdot 2^{n-k} \leq 3 \cdot 2^{n-3 \log_2 n + 1} = 6 \cdot \frac{2^n}{n^3} = O\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

$$2^k \leq 2^{\lfloor 3 \log_2 n \rfloor} \leq n^3 = O\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

$$5q \cdot 2^S \leq 5 \left(\frac{2^k}{5} + 1\right) 2^S \sim 2^{k+S} \leq 2^{3 \log_2 n + n - 5 \log_2 n} = \\ = \frac{2^n}{n^2} = O\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

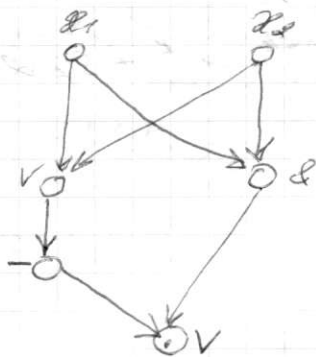
$$q \cdot 2^{n-k} \leq \left(\frac{2^k}{5} + 1\right) \cdot 2^{n-k} \sim \frac{2^n}{5} \sim \frac{2^n}{n}$$

$$\Rightarrow L(\Sigma_S) \leq \frac{2^n}{n}$$

г. м. г.

Самый сложный блок - D

Пример СРЭ

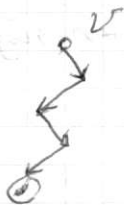


Бесконечной
ориентированной
граф

Вершины со степенью
дерева 1 помечены
 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

внутренние вершины-
 $B_0 = \{V, S, \dots\}$

Неприводимая СРЭ. Из V внутр. вершины
∃ путь в вершину, явл. выходом



Замечание: Вектор Грэфа ϕ -функции м.б.
реализована непривод. схемой



Наша задача - сделать сверху
число неприводимых схем

$N(n, k)$ - # неупр. сфэ в $E_0 = \{V, E, \tau\}$

реализ. $f(\tilde{x}^n)$ сложности $\leq k$

Лемма 2 $N(n, k) \leq (32(n+k))^{n+k}$

Док-во.

Из графа можно удалить лишнее:
выкинем δ дуг.

Останется неметильное дерево $\leq k+m$
(метильн.)
- в нем $(k+m-1)$ рёбер

- 1) выберем вершину для входов
- 2) пометим входы
- 3) пометим внутр. вершины
элементами из базиса
- 4) воссоздание дуг

Выбор дерева с корнем

$N(n, k_1, k_2, m)$ - # неупр. схем, в которых
число входов равно m из n -дуг алге-
бры, k_1 m -тов τ и k_2 m -тов V и δ

$k_1 + k_2 = k$ (сложность схемы)
(внутр. вершины)

вершин дерева $n+k$

$$N(n, k) \leq \sum_{m \leq n} \sum_{k_1 \leq k} N(n, k_1, k_2, m)$$

У дерева с корнем $(m+k)$ вершин $\Rightarrow$
 $(m+k-1)$ дуг

деревьев с h ребрами $t(h) \leq 4^h$

$$t(m+k-1) = 4^{m+k-1}$$

способов выбора вершин для входов $\leq$
 $\leq C_{m+k}^m \leq 2^{m+k}$

пометка входов: выбор переменных $\leq$
 $\leq C_n^m$

+ расстановка переменных - $m!$ способов

Выбор вершин для инвертиров $(\neg) \leq C_K^{k_1}$

Выбор помечен $V, \delta \quad 2^{k-k_1}$

Восстановление дуг

$$\# \text{ дуг} = 2k_2 + k_1 = 2k - k_1$$

$$\begin{aligned} \# \text{ добавленных дуг} &= 2k - k_1 - (m+k-1) = \\ &= k - k_1 - m + 1 \end{aligned}$$

$\downarrow$
 $(m+k-1)$ способов восстановить ориентированную дугу

$$\begin{aligned} \Rightarrow \# \text{ способов восстановить дуги} &\leq \\ &\leq (m+k-1)^{(k-m-k_1+1)} \end{aligned}$$

$$N(n, k, 2) \leq 4 \sum_{m+k-1}^n \sum_{k_1 \leq k}^n 2^{m+k-1} \cdot 2^m \cdot C_n^{k_1} \cdot 2^{k-k_1} \cdot \frac{(m+k-1)!}{(n+k-1)!} \leq 24.04$$

$$\sum_{m+k-1}^n \sum_{k_1 \leq k}^n 4 \cdot 2^{m+k-1} \cdot 2^m \cdot C_n^{k_1} \cdot 2^{k-k_1} \cdot \frac{(m+k-1)!}{(n+k-1)!} \leq 8 \sum_{m+k-1}^n \sum_{k_1 \leq k}^n \frac{n^m (n+k-1)^{-m+1}}{C_n^{k_1} \cdot 2^{k-k_1} (n+k-1)^{k-k_1}} \leq (2(n+k)-1)^k$$

$$\sum_i C_n^i a^{n-i} = (a+1)^n$$

$$\leq 8^{n+k} (2(n+k))^k \sum_{m+k-1}^n \frac{n^m (n+k-1)^{-m+1}}{b_m} \leq$$

$$b_m = \frac{n^m}{(n+k-1)^{m-1}} \quad m \geq 2 \Rightarrow b_m \leq n \quad k \geq 1 \quad m=1 \Rightarrow b_1 = n$$

$$\sum_{m \leq n} b_m \leq n \cdot 2$$

$$\leq 8^{n+k} (2(n+k))^k (n+k)^n \leq (16(n+k))^{n+k}$$

$$N(n, k) = \sum_{m \leq n} \sum_{k_1 \leq k} N(n, k, k_1, m) \leq (16(n+k))^{n+k} \leq (32(n+k))^{n+k}$$

Q.E.D.

Теор. 1 (Менсон)

1) $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \exists f(\tilde{x}^n)$

$$L^{\text{CPD}}(f) > (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}$$

2) Пусть δ_n - ~~max~~ $\max f(\tilde{x}^n)$:

$$L^{\text{CPD}}(f) \leq (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}$$

Тогда $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Заметим, что 2) $\Rightarrow$ 1)

Док-во: докажем 2).

$$\delta_n \leq \frac{N(n, (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n})}{2^{2^n}}$$

$$\log_2 \delta_n \leq \log_2 N(n, (1-\varepsilon) \frac{2^n}{n}) - 2^n \leq$$

$$\leq \left((1-\varepsilon) \frac{2^n}{n} + n \right) \frac{\log_2 \left(32 \left(n + \frac{2^n}{n} \right) \right)}{n + O(1)} - 2^n \leq$$

$$\leq \left((1-\varepsilon) \frac{2^n}{n} + n \right) (n + O(1)) - 2^n \leq$$

$$\leq -\varepsilon \cdot 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \quad \left. \vphantom{\frac{2^n}{n}} \right\} \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

з.м.г

Результат 1 $L^{\text{CPD}}(n) \geq \frac{2^n}{n}$

Результат 2 $L^{\text{CPD}}(n) \sim \frac{2^n}{n}$

(Теор. 2 - Лунин, Менсон)

$Q \in P_2$ - нормир-во φ -ый алгебра логики наз-ся наследственным классом, если из того, что $f \in Q$ следует, что $\forall n \in \mathbb{N} \varphi^n f \in Q$

Пример $\underbrace{L, M, T_0, T_1, S}_{\text{наследств.}} \quad \underbrace{\text{не наследств.}}$

$$\alpha \in T_0, \Delta \subset X \notin T_0$$

$\emptyset, P_2$ - наслед. классы

Q - наследств. класс

Обозн. $Q(n) = \{ f(\tilde{x}^n) \in Q \}$

Введем φ -число $\lambda_Q(n) = \sqrt[n]{|Q(n)|}$

Лемма 1 Если Q -наследств. класс и $Q \neq \emptyset$, то $1 \leq \lambda_Q(n) \leq 2$

Док-во:

$$1 \leq \sqrt[n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[n]{|P_2^n|} = \sqrt[n]{2^{2^n}} = 2, \quad \text{q. m. d.}$$

Лемма 2 $\lambda_Q(n)$ - невозр. φ -число по n .

Док-во: $f(\tilde{x}^n) = \tilde{x}_n g \vee x_n h, \quad g, h \in Q(n-1)$
 $f \in Q(n)$

$$|Q(n)| \leq |Q(n-1)|^2$$

$$\#f \leq \#(g, h) \Rightarrow \lambda_Q(n) = \sqrt[n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[n]{|Q(n-1)|^2} =$$

$$= 2^{n-1} \sqrt{|Q(n-1)|} = 2^{n-1},$$

г. м. г.

б) Пусть Q -ненасыщенный класс, $Q \neq P_2$

Тогда $\lambda_Q(n) < 2$

Док-во: По упр. $\exists k: Q(k) \neq P_2^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow |Q(k)| \leq 2^{2^k} - 1$$

$$\lambda_Q(n) = 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{|Q(n)|} \leq 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{|Q(k)|} 2^{n-k} \quad (5)$$

$\forall f(\tilde{x}^n)$ можно разл. по переменным

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\beta_{k+1}, \dots, \beta_n)} x_{k+1}^{\beta_{k+1}} \dots x_n^{\beta_n} f(x_1, \dots, x_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n) =$$

$$= \bigvee_{\tilde{\beta} \in Q(k)} K_{\tilde{\beta}} f_{\tilde{\beta}}(\tilde{x}^k)$$

$$\Rightarrow |Q(n)| \leq |Q(k)|^{n-k}$$

$$\text{б)} 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{|Q(k)|} \leq (2^{2^k} - 1)^{\frac{1}{2^k}} < 2$$

г. м. г.

В дальнейшем предполагаем, что если Q -класс, то $Q \neq \emptyset$

Следствие 3 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_Q(n) = \lambda(Q)$

Док-во: $2 \geq \lambda_Q(n) \geq 1$ в силу неустойчивости

$\lambda_Q(n)$ не возрастает по n

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_Q(n),$$

с.т.д.

Характеристика $Q = \log_2 \lambda(Q) = \beta(Q)$

Следствие 4 $0 \leq \beta(Q) \leq 1$

Лемма 3 $\beta(Q) = \beta > 0$

$$\Rightarrow |Q(n)| = 2^{(\beta + o(1))2^n}$$

$$|Q(n)| = (\lambda_Q(n))^{2^n} = (\lambda(Q) + \varepsilon(n))^{2^n} =$$

$$= 2^{2^n \log_2(\lambda(Q) + \varepsilon_n)} =$$

$$= 2^{2^n (\beta(Q) + \log_2(1 + \frac{\varepsilon_n}{\lambda(Q)}))} = 2^{2^n (\beta + o(1))}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

с.т.д.

Теор. 3 (Лушанов, Яблонский)

Q -наслед. класс, $\beta(Q) = \beta > 0$

$$\Rightarrow \forall f \in Q(n)$$

$$L^{ср}(f) \leq \frac{\beta 2^n}{n}$$

$$= \sqrt[2^{n-1}]{|Q(n-1)|} = \lambda_Q(n-1),$$

г. м. г.

лв Пусть Q -ненулевой класс, $Q \neq P_2$

$$\text{Тогда } \lambda_Q(n) < 2$$

Доказ. То же. $\exists k: Q(k) \neq P_2^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow |Q(k)| \leq 2^{2^k} - 1$$

$$\lambda_Q(n) = \sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[2^n]{|Q(k)|} 2^{n-k} \quad (5)$$

$\forall f(\tilde{x}^n)$ можно разл. по переменным

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(z_{k+1}, \dots, z_n)} x_{k+1}^{z_{k+1}} \dots x_n^{z_n} f(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_n) =$$

$$= \bigvee_{\tilde{z}} \underbrace{K_{\tilde{z}} f_{\tilde{z}}(\tilde{x}^k)}_{\in Q(k)}$$

$$\Rightarrow |Q(n)| \leq |Q(k)|^{n-k}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[2^k]{|Q(k)|} \leq (2^{2^k} - 1)^{\frac{1}{2^k}} < 2$$

г. м. г.

В дальнейшем предполагаем, что если Q -ненул. класс, то $Q \neq \emptyset$

Док-во:

Рассм. $Q(k)$ $k \rightarrow \infty$, $k < n$

$$|Q(k)| = 2^{(b+1)2^k}$$

Обозн. $|Q(k)| = \mu_k$, $\mu_k = 2^{(b+1)2^k}$

$$f \in Q(k) = 1, 2, \dots, \mu_k \rightarrow (f_1^i, \dots, f_e^i) \dots$$

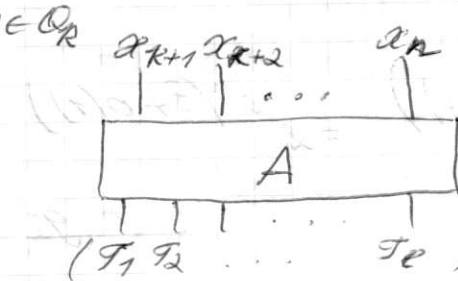
$$(f_1^{\mu_k}, \dots, f_e^{\mu_k})$$

$$(\forall i \rightarrow (f_1^i, f_e^i) \sim 2^{2^k})$$

$$e = \lceil \log_2 \mu_k \rceil$$

Пусть $f(\tilde{x}^n) \in Q_n$, разложим её по первым k переменным:

$$f = \sum_{\tilde{z}} \underbrace{V \tilde{z} f_{\tilde{z}}(\tilde{x}^k)}_{\in Q(k)}$$

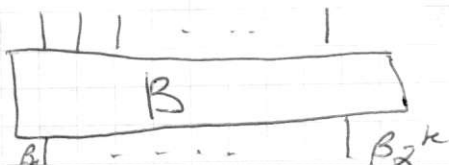


реализ.
в ф-ции от $(n-k)$ перемен.

$(f_1, f_2, \dots, f_e)$ - код $f_{\tilde{z}}$ (если $f_{\tilde{z}}$ входе $\tilde{z}$)

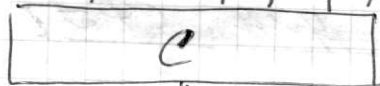
$$g \in Q(k)$$

$(\beta_1, \dots, \beta_{2^k})$ - набор значений g



реализ. 2^k ф-ций
от k переменных

$$\beta_1 \mid \mid \beta_2 \mid \mid \dots \mid \beta_k$$



$$\downarrow f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

Сложность блока A $L(A) \leq l \frac{2^{n-k}}{n-k}$

Сложность блока B $L(B) \leq 2^k \frac{2^l}{l} \leq 2^k \frac{2^{(B+\epsilon_k)2^k}}{(B+\epsilon_k)2^k}$

Сложность блока C $L(C) \leq \frac{2^{k+2^k}}{k+2^k}$

$$L(A) \leq l \frac{2^{n-k}}{n-k} \leq 3 \cdot 2^k \frac{2^{n-k}}{n-k} \approx 3 \frac{2^n}{n}$$

$$L(B) \leq 2^k \frac{2^{(B+\epsilon_k)2^k}}{(B+\epsilon_k)2^k} = \frac{2^{(B+\epsilon_k)2^k}}{B+\epsilon_k} = 2^{\frac{O(\sqrt{n})}{2^k}} = \tilde{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

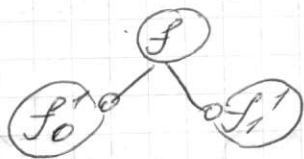
$$L(C) \leq 2^{2^k} \leq 2^{\sqrt{n}} = \tilde{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow L(\Sigma) \leq \frac{3 \cdot 2^n}{n} + \tilde{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$$

3.10.9

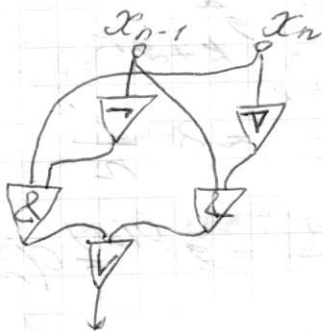
$$M(n) = \varphi(n) = 2^{2^n} \leq \frac{2^{2^n}}{n}$$

Метод каскадов для СФЭ



звуч (n-2): ф-ция
зависит от 2 перемен.

$f(x_{n-1}, x_n)$



$$f(x, y) = \begin{cases} \text{const } 0, 1 \\ x^3, y^7 \\ x y^3 \vee \bar{x} y^7 = f \end{cases}$$

$$g = \bar{x}_{n-2} \wedge x_{n-2} \vee x_{n-2} \wedge \bar{x}_{n-2}$$

Пусть ф-ции (n-2) звуса реализованы

const можно же реализовать

Инвариантные классы

4.09

$A \subseteq P_2$ назыв-во ф-ций наз-ся инвар. классом, если

1) $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ & g - констр. из f добавлением (убавлением) фикт. перем. $\Rightarrow g \in A$

2) $f(x_1, \dots, x_n) \in A \Rightarrow f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in A$

3) $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ & g экв. н/р $f \Rightarrow g \in A$

Если A соотв-вом 3) $\Rightarrow A$ - замкнутый класс

Примеры:

L, M - инв. классы
 $L = \{x_0 \oplus x_1 x_1 \oplus \dots \oplus x_n x_n\}$

T_0, T_1, S - не экв. ЛК (не принадлежат всем трем)

Пусть Q - ЛК. Обозн. $Q(n) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in Q\}$

Введем величину $\mu_n(Q) = \sqrt[n]{|Q(n)|}$

лем. 1 Если $Q = \emptyset$ $\mu_n(Q) = 0$

$Q \neq \emptyset \quad 1 \leq \mu_n(Q) \leq 2$

Докажем:

$$\sqrt[n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[n]{|P_2|} = \sqrt[n]{2^n} = 2 \quad \blacksquare$$

лем. 2 $\mu_n(Q)$ не возрастает по n .

дог-во:

Пусть $f(x_1, \dots, x_{n+1}) \in Q$. Разложим:

$$\begin{array}{ccc} f(x_1, \dots, x_{n+1}) & = & x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n, 0) \vee x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n, 1) \\ \in Q(n+1) & & \begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \in Q(n) & \in Q(n) \\ f_0^{n+1} & f_1^{n+1} \end{array} \end{array}$$

$$f = (f_0^{n+1}, f_1^{n+1}) \Rightarrow |Q(n+1)| \leq |Q(n)|^2$$

$$\mu_n(Q) = \sqrt[n+1]{|Q(n+1)|} \leq \sqrt[n+1]{|Q(n)|^2} = \sqrt[n]{|Q(n)|} = \mu_n(Q) \text{ эмг}$$

лмб. 3 $Q = L, |L^n| = 2^{n+1}$

$$\mu_n(L) = \sqrt[n+1]{2^{n+1}} = 2^{\frac{n+1}{n+1}} \rightarrow 2^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(L) = 1$$

$\mathcal{B}(Q) = \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(Q)$ - характеристика ИК Q

$$Q \neq \emptyset \Rightarrow 0 \leq \mathcal{B}(Q) \leq 1$$

$$\mathcal{B}(L) = 0, \mathcal{B}(P_2) = 1$$

$$\exists Q: \mathcal{B}(Q) = \frac{1}{2}$$

теор $\forall \tau: 0 \leq \tau \leq 1 \exists \text{ ИК } Q: \mathcal{B}(Q) = \tau$

Если $\tau < 1 \Rightarrow \exists$ континуум ИК $Q: \mathcal{B}(Q) = \tau$.
(основываясь на буле)

лмб. 4 Q - ИК, $\mathcal{B}(Q) < 1 \Leftrightarrow Q \neq P_2$

Доказ. Пусть $\exists K: Q(K) \neq P_2^K$

$$|Q(K)| \leq 2^{2^K} - 1$$

$$n > k \Rightarrow |Q(n)| \leq |Q(k)|^{2^{n-k}} \leq (2^{2^K} - 1)^{2^{n-k}} =$$

$$= \left(\left(1 - 2^{-2^K}\right) 2^{2^K} \right)^{2^{n-k}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2^K}}\right)^{2^{n-k}} \cdot 2^{2^{n-k}}$$

$$\mu_n(Q) \leq \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{2^{2^K}}\right)^{2^{n-k}} \cdot 2^{2^{n-k}}} = 2 \cdot \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{2^{2^K}}\right)^{2^{n-k-1}}} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2^{2^K}}} < 2$$

$$\beta(Q) = \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(Q) < 1$$

3мг

Упр. 5 $\exists$ ИК Q : $\beta(Q) = \frac{1}{2}$

Пример: $Q(n) = \{ f(x_1, \dots, x_n) = l(x_1, \dots, x_n) \&$

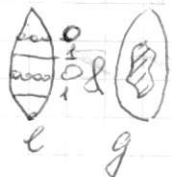
$g(x_1, \dots, x_n) \mid l \in L \& \text{ все сущ. перемен. } g \text{ явл. сущ. перемен. } l \}$

Нижняя оценка: $Q'(n) = \{ (x_1 \oplus \dots \oplus x_n) \& g(x_1, \dots, x_n) \}$

$$\mu_n(Q) \geq \mu_n(Q') \geq \sqrt[n]{2^{2^{n-1}}} = 2^{\frac{1}{2} \frac{2^n}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

Пусть l -лин. p -числ, сущ. завис. от ≥ 1 аргумента

$$\Rightarrow |N_l| = 2^{n-1}$$



— сколько таких p -числ?

всего наборов в n -бит. словах 2^{n-1}
и любая комбинация единиц там может встретиться

$$\Rightarrow \#f(x_1, \dots, x_n) = 2^{2^{n-1}}$$

$$Q'(n)$$

$$\Rightarrow \beta(Q) = \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(Q) = \frac{1}{2}$$

Верхняя оценка: $\mu_n(Q)$

$$|Q(n)| \leq 2 + (2^{n-1} - 2) 2^{2^{n-1}} \leq 2^{n+1} 2^{2^{n-1}}$$

$$\mu_n(Q) \leq \sqrt[n]{2^{n+1} 2^{2^{n-1}}} = 2^{\frac{1}{2} \frac{2^n}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(Q) = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \beta(Q) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta(Q) = \frac{1}{2}$$



теор. 1 (Хабонекский)

Для любого $0 \leq \epsilon < 1$ $\exists$ континуум ИК в $\mathbb{R}$.

$f(\tilde{x}^n) \in P$ - ^{сложность} сложная: $L(f) = \Omega(n)$ -

ϕ -функция Шеннона для СРЭ в базе $\{v, s, ?\}$

$\exists$ поср. ϕ -ии $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ - сложная,

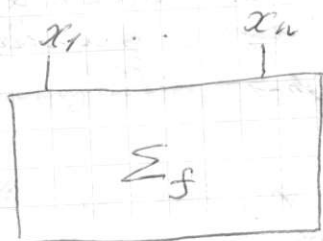
если $\forall N \exists n \geq N: f_n$ - сложная

Алгоритм A , стр. поср-ть ϕ -ии,

правильной, если вместе с поср-ов

π алгоритм строит все ϕ -ии из

минимального ИК, содержащего π



$f(x_i, \dots, x_n)$

g - получена доб. (узым.)
решет. переменной f

g - n/p f .

Целью поср. ϕ -ии $L(f(x_1, \dots, x_n)) \geq n^2$

Хватит: можно поср. миним. схему
 $L(\Sigma f) \leq n^2$

Теор. 2 (Яблонский С.В.)

Всякий правильный алгоритм при построении сложной последовательности φ -цией строит все φ -ции из P_2 .

Док-во: $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$ - многочл. класс с характеристикой 3
 $\Rightarrow L(f(x_1, \dots, x_n)) \leq 3 \frac{2^n}{n} \quad (*)$

Сл. 1 $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$ - ИК с хар. 3, то вст. (*)

От противного: пусть A - прав. алгор-м строит сложную пос-ть π и ИК $Q \neq P_2$

$$\Rightarrow 3(Q) < 1$$

$$\text{По сл. 1 } \forall f(x_1, \dots, x_n) : L(f) \leq 3 \frac{2^n}{n} < \frac{2^n}{n}$$

и $f \in \pi$, но π - сложная пос-ть ~~сложная~~

$$\Rightarrow \exists f(x_1, \dots, x_n) : L(f(x_1, \dots, x_n)) \sim \frac{2^n}{n} \quad (?!) \quad \underline{\text{q.m.g}}$$

$$D_f^{\text{сов}} \rightarrow D_f^{\text{сопр}}$$

$$l(D_f^{\text{сопр}}) = O(l(D_f^{\text{сов}}))^4 - \text{пример}$$

комбинаторного алгоритма
преобразовательной (одну ф-лу преобр. в другую)

$$m = \nu(d_1, \dots, d_n) = \sum_{i=1}^n d_i 2^{n-i} - \text{номер}$$

$$m \rightarrow (d_1 \dots d_n) \rightarrow \underbrace{1 \dots 1}_{m \text{ раз} \geq 2^n} = 1^m \text{ требуется}$$

по вектору постр. слово из m единиц

$$n \leq \lceil \log_2 m \rceil$$

Распознавательные алгоритмы

по тек. коду — О или 1 (машина
принимает или отвергает)

Например, по КНФ K — вход

выявить св-во: выполнима ли K ,

т.е. $K \neq \emptyset$ (задача ВКН)

MT 1) Сущ-т 2 запн. состояния

a — приним. (accept)
 r — отверг. (reject)

2) Односторонняя лента



Символ команды $\{aq \rightarrow a'q'd\}$

$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_e\}$$

$$\{ag \rightarrow a'g'd\}$$

$$Q = \{q_1, \dots, q_m\}$$

$$d \in \{L, S, R\}$$

$$\text{Дадим } \Sigma = \{a_1, \dots, a_e\}$$

Σ^* - мн-во всех слов конечной длины

$L \subseteq \Sigma^*$ - язык (набор слов)

НМТ μ распознаёт L , $w \in \Sigma^*$

$$\mu(w) = \{A\} \iff w \in L$$

$$\mu(w) = \emptyset \iff \forall \alpha \iff w \notin L$$

НМТ μ детерминирована, если $\forall ag \exists \leq 1$

команда с началом $ag \rightarrow a'g'd$

μ - недетерм., если $\exists ag \begin{cases} \rightarrow a'g'd^1 \\ \rightarrow a'g'd^2 \\ \rightarrow a'g'd^m \end{cases}$

$m \leq 2$ - всегда можно свести (m конечно)
к 2м разветвлениям

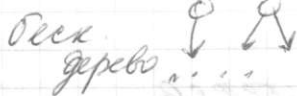
Вычисление - послед-ть конфигураций

конфигурация $q_1, \dots, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, \dots, q_s$

начальная: $q_1, a_1, \dots, a_s, \Lambda, \dots$

Длина вычисления (сложность) - # шагов НМТ

НМТ μ w q_1 вычисление - цепочка



ДМТ μ распознает L , если можно
из нач. вершины достичь приемн.
состояния $\Leftrightarrow w \in L$

Если $w \notin L \Rightarrow \nexists$ возмещение либо беск,
либо отрицательное

Класс $P = \{ L \text{ распознает. дет. МТ за полином. время} \}$

$L \in P \Leftrightarrow \exists$ полином $P: \forall w \in L \quad t_{\mu}(w) \leq P(\|w\|)$
($\exists$ МТ μ распознает L) длина w
время работы μ над w

Класс $NP = \{ L \text{ распознает. детет. МТ за полином. время} \}$

$L \in NP \Leftrightarrow \mu$ распознает L
 $\exists$ полином $P: \forall w \in L \quad \exists q_A: \text{много шагов вычисления} \leq P(\|w\|)$

1) $P \subseteq NP$

2) $NP \subseteq P$ Этот вопрос до сих пор нерешен

$\Sigma = \{ (,), 0, 1, \vee, \&, \neg \}$

Σ^+

Б6117

$$K = (X_1 \vee X_2)(\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2)$$

корр. перем. номером индекса

→ $(1 \vee 10) \wedge (71 \vee 710) = c(K)$ код КНФ K

Язык выполнимости ВЫП = { мн-во всех слов в Σ^* , соотв. выполнимости КНФ }

Рассм. задачу: ВХОД: граф G , номер K

Св-во: $\exists$ остовное дерево веса $\leq K$
(непрям. св. вершины)

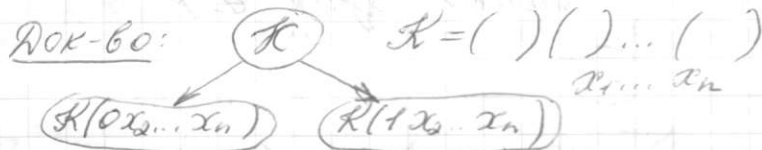


вес $1+3+7+6=17$

Алгоритм: 1) построение дерева мин. веса

2) выбираем ребро мин. веса, которое соединяет циклов с уже построенным (даже неостовное)
Kruskal

Зуб. 1 Язык ВЫП $\in NP$



$\bigcirc \bigcirc 2^n$ вершин, соотв. константам
Если $\exists$ хотя бы 1 вершина с 1, то $\exists$ QA

$l(K) \sim$ кол-во букв в лек. слове

$l(\text{возмощ.}) \leq n + l(K)$

Полим. свертимость языков

$\Pi = \{f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* \mid \exists \text{ ДМТ, реализ. } f\}$
сводится
к полим. св.

$L \leq K$ полиномиально к языку K

$\Leftrightarrow \exists f \in \Pi: \forall w \in \Sigma^* f(w) \in K \Leftrightarrow w \in L$

Если $L \leq K$ и $K \leq L$, то $K \sim L$ эквивалентно

св-ва: 1) $L \leq K$ и $K \leq H \Rightarrow L \leq H$

2) $L \in P$ и $K \leq L \Rightarrow K \in P$
Р-зам. NP

L - NP-трудный, если $\forall K \in NP, K \leq L$

L - NP-полный, если 1) L - NP-трудный
2) $L \in NP$

Либо все NP-полные языки $\in P$, либо
ни один NP-полный язык $\notin P$

$P \rightsquigarrow NP$

Теор (S. Cook) 1971

ВЫП является NP-трудным языком
(полным)

2.09

Опр NP-трудная задача $A \Leftrightarrow$

$\forall L \in NP \Rightarrow L$ сводится к A полиномиально

Док-во т. Кука

Пусть $L \in NP \Rightarrow \exists$ НМТ M , которая за полин. время распознаёт L , т.е.

$\forall e \in L$ время работы M на $e \leq p(|e|)$

Цель: по слову e построить за полин.

время КНФ $K(e)$, т.ч. $K(e)$ выполнима

$\Leftrightarrow e \in L$, т.е. свести вып. полином. к L

Задача: M работает не больше, чем $p(|e|)$ тактов $\Rightarrow$ достаточно рассмотреть M на длине слова $2p(|e|)$.

Переменные КНФ

пустой
 $\{a_1, \dots, a_k\}$ — лексикон алфавита M
 $\{v_1, \dots, v_k\}$ — алф. состояний

$S_{ij}^t = 1 \Leftrightarrow$ на t -м такте выполнения

в ячейке ленты с номером i находится a_j
 $0 \leq t \leq p(e); \quad 0 \leq i \leq 2p(e); \quad 1 \leq j \leq k$

$m_i^t = 1 \Leftrightarrow$ в момент времени t НМТ M
находится в состоянии i
 $0 \leq t \leq p(e) \quad 1 \leq i \leq k$

$h_i^t = 1 \Leftrightarrow$ в мом. вр. t M одозр. запись n_i
 $0 \leq t \leq p(e) \quad 0 \leq i \leq 2p(e)$

3) В момент t в перуши i должен быть ровно один из символов $\{a_1, \dots, a_n\}$
 $\Rightarrow \forall t \in [0; p(e)] \quad \forall i = [0; 2p(e)]$

$$(s_{i1}^t \vee s_{i2}^t \vee \dots \vee s_{in}^t) \& \& (\bar{s}_{ij_1}^t \vee \bar{s}_{ij_2}^t)$$

$1 \leq j_1, j_2 \leq n$

4) В момент t должна быть ровно 1 клетка

$$\Rightarrow \forall t (h_1^t \vee \dots \vee h_{2p(e)}^t) \& \& (\bar{h}_{j_1}^t \vee \bar{h}_{j_2}^t)$$

$0 \leq j_1, j_2 \leq 2p(e)$

5) В момент t M ровно 6 1 соединении

$$\Rightarrow \forall t (m_1^t \vee \dots \vee m_6^t) \& \& (\bar{m}_{i_1}^t \vee \bar{m}_{i_2}^t)$$

$1 \leq i_1, i_2 \leq 6$

6) В текущий момент машина останавливается в принятой ссн. (нулю q_2)

$$(m_1^0 \vee m_1^1 \vee \dots \vee m_1^{p(e)})$$

7) Переход от конфигурации M в момент t к конфигурации в момент $(t+1)$ должен быть выполнен в соотв. с программой M

$$\{ a_k \& b_j \rightarrow a'_k \& b'_j \mid L, R, S \}$$

$$\& \quad \bigvee$$

$0 \leq t \leq p(e)-1$ по правилам перехода

если клетка i не одгр. в момент t , то в момент $(t+1)$ её содерж. не изменится

$$\delta(h_i^t \rightarrow \delta s_{ij}^t = s_{ij}^{t+1})$$

Если ячейка i обнов в момент t

$$h_i^t \rightarrow (s_{ik}^t \& m_j^t \rightarrow s_{ik'}^{t+1} \& m_{j'}^{t+1} \& h_{i+1}^{t+1})$$

Д/З: Проверить, что при преобраз. формулы в КНФ длина p ограничена n и c (тоже $|c|$)

б) Кодирует тот факт, что в момент $t=0$ на ленте было записано слово $L = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{|L|}}$

$$s_{i_1}^0 \ s_{i_2}^0 \ \dots \ s_{i_{|L|}}^0 \ \underbrace{s_{c+1}^0 \ \dots \ s_{q|c|+1}^0}_{\text{считает } a_i \text{ нулями}} \quad \boxed{\text{слово записано в середине}}$$

Фактически, теор. доказана - мы можем записать КНФ, длина кон. стр. $|c|$.

и M вып. $K \Leftrightarrow c \in L$

7мз

Теор. 1

2-выполнимость $\in P$

Теор. 2

3-выполнимость - NP-трудно.

Опр k-КНФ - это КНФ, у которой в каждой скобке ровно k букв

ур K -ВЫП - группа разложения
вотомитности K -КНД

Док-во теор. 2

Сведем ВЫП K к 3-ВЫП коммутативно

Пусть задана КНД $K = C_1 \otimes C_2 \dots \otimes C_r$

Рассм. $C_1 = (x_{i_1}^{s_1} \vee x_{i_2}^{s_2} \vee \dots \vee x_{i_s}^{s_s}) \Rightarrow$

$$(x_{i_1}^{s_1} \vee x_{i_2}^{s_2} \vee y_1) (\bar{y}_1 \vee x_{i_3}^{s_3} \vee y_2) (\bar{y}_2 \vee x_{i_4}^{s_4} \vee y_3) \dots \\ \dots (\bar{y}_{s-3} \vee x_{i_{s-1}}^{s_{s-1}} \vee x_{i_s}^{s_s})$$

ув. Исходная скобка равно 1 на наборе
значений $x_{i_1} \dots x_{i_s} \Leftrightarrow$ построенное
произведение скобок вер. в 1 на том же
наборе значений $x_{i_1} \dots x_{i_s}$

Док-во: пусть $(x_1 \dots x_s)$ - набор, т.е. ком.

$C_1 = 1 \Rightarrow \exists x_{i_k}^{s_k} = 1$ т.е. x_k . Можно предпр.

у так, чтобы произв. обратилось в 1.

Пусть $(x_1 \dots x_s): C_1 = 0 \Rightarrow x_i^{s_i} = 0 \forall i$

$\Rightarrow$ не можем предпр. у так, чтоб произв. = 1
7.11.9.

Теперь в скобку в K заменим на
произведение 3-КНД

Пусть длина K равна n . $\Rightarrow$ Длина

космр. 3-КНД $\leq n^3$. длину $K \sim n^4$

$\Rightarrow$ свел ВБП к 3-ВБП комбинаторно

Т.к. ВБП $\in NP$, то 3-ВБП тоже

NP полная задача,

9.14.9.

ВБП - NP -трудная

NP -полная

25.09

3-ВБП - NP -полная

2-ВБП $\in P$

Упр. Пусть K - 2КНД, $K = (x_{i_1}^{b_1} \vee x_{i_2}^{b_2}) \dots (x_{i_{s-1}}^{b_{s-1}} \vee x_{i_s}^{b_s})$
Проверить $\exists$ набор $d_1 \dots d_s$, на котором
 K равна 1, можно за полин. время по S .

Реш. 60:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Если описыв. комбинации } x_{i_1}(\dots) & \\ x_{i_1}(x_{i_1} \vee x_{i_2}) \binom{c_2}{\dots} \dots \binom{c_s}{\dots} &= x_{i_1} x_{i_2} c_2 \dots c_s \\ x_{i_1}(x_{i_1} \vee x_{i_2}) c_2 \dots c_s &= x_{i_1} c_2 \dots c_s = \dots = \\ &= x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \underbrace{c_j \dots c_n}_{\text{в этих скобках нет входящий}} \end{aligned}$$

$x_{i_1} \dots x_{i_k}$

$\Rightarrow$ можем "забыть" про $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, т.к. если $K=1$, то $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 1$

"выполнимость" K сводим к выполнимости $c_j \dots c_n$ - в ней нет уже описыв. комбинаций

2) Сводка двухбуквенное

2.1) есть сводка $(x \vee \bar{x})$ - упрощаем

2.2) Рассматриваем переменную x_k и рассмотрим

сводки для 3 случаев:

I. x_k входит без отриц.

II x_k вх. с отриц.

III x_k не входит

$$K_{\text{НД}} = \frac{(x_1 \vee y_1) \dots (x_k \vee y_k) (\bar{x}_k \vee z_1) \dots (\bar{x}_k \vee z_p) K'}{(y_1 \dots y_k \vee z_1 z_2 \dots z_p)} =$$

$K'_{\text{НД без } x_k}$

$$= \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq p}} (y_i \vee z_j)$$

Мы пришли к КНД без перемен. x_k ,

длина которой не больше, чем в

количестве раз превосходит длину K

з.т.з.

2/3 Почему эту схему не применим прямо-
тисне к ЗВБП? Что пойдет не так?

NP-трудные задачи



Задача 0,1-УЛП

Вход: A -матр., $\vec{b}$ -вектор

Вопрос: Есть ли вектор из $0, 1$ и $\vec{x}$, т.е.
 $A\vec{x} \geq \vec{b}$ координатно

Умв 0,1-УЛП - NP трудна

Реш-во: требуется показать, что Эллис, алгоритм, который по заданной КНД K строит систему линейных нер-в с целочисл. коэф., т.е. она (система) имеет решение из 0 и $1 \iff K$ выполнима

Решим. $K = C_1 \dots C_j$

$$C_j = (\bar{x}_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3} \vee \bar{x}_{i4})$$

$$j \left\{ \begin{array}{l} (1-x_{i1}) + x_{i2} + x_{i3} + (1-x_{i4}) \geq 1 \\ \dots \end{array} \right.$$

гмд

Задача КЛИКА

Вход: граф G , K -нат. число

Вопрос: Есть ли в G клика размера K ?

Клика - полный подграф из K вершин



K_5

Фив КЛИКА - NP-трудно

Для во: $K = C_1 \dots C_S$

Список граф G :

$$C_{j^1} = (x_i) \cdot x_i^{j^1}$$

$$C_{j^2} = (x_i) \cdot x_i^{j^2}$$

$V(G)$ = всевозможные буквы K (если
на те перест., вх. в разные скобки,
образуют разные вершины)



$E(G)$ - ребро проходит между вершинами
 $\Leftrightarrow$ когда состав. вершины лежат в разн. C_i
и одна из них не x_i окружена другой
 $k = S$ (число скобок)

Если есть цикл разн. S в графе,
 K выполнимо (т.к. все скобки сгр. в $\perp$)

9.11.9

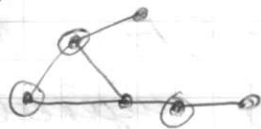
Задача. Верш. ПОКР.

Вход граф G , число k

Вопрос: $\exists$ ли в G покрытие размера k ?

Утв. Верш. Покр. - NP-трудная

Опр Верш. покрытие графа G - набор k -во A вершин G , т.ч. $\forall$ ребра e графа G найдётся вершина $v \in A$, инцидентная ребру e .



Лемма Пусть B в G есть клика из k -и-во вершин B . Тогда в G k -и-во $V(G) \setminus B$ образует вершинное покрытие



Док-во (по определению)

Пусть B - клика в G . Покажем, что $\forall$ ребро e в G инцидентно нек. вершине из $\bar{B}$. Допустим, что в G есть ребро (u, v) , оба конца которого лежат вне $\bar{B} \Rightarrow$ лежат в B

$\Rightarrow$ δ G нет ребра из вершин (u, v)

(?!), с тем, что B -клика

г. м. г.

Док-во утверждения:

по входу КЛИКА строим вход ВЕРШ. ПОКР.

$G, k \rightarrow G, |V(G)| - k$

по тем же данным эквивалентно,

г. м. г.

Задача ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВ

Вход: $\{F_1, \dots, F_s\}$ $F = \bigcup_{i=1}^s F_i$, $k \in \mathbb{N}$

Вопрос: $\exists$ ли такой набор индексов

$i_1, \dots, i_k$, что $F_{i_1} \cup F_{i_2} \cup \dots \cup F_{i_k} = F$?

Упр. Покр. мн-в — NP-трудно.

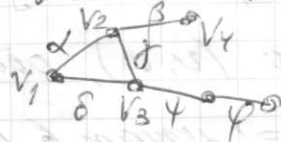
Док-во: по входу верш. покр. (G, k)

построим матрицу верш.-в и число —

вход для ПОКР. мн-в.

Для v вершины v графа G рассм.

мн-во E_v — ребра G , инцидентные v .



$E_{v_4} = \{\beta\}$

$E_{v_1} = \{\alpha, \delta\}$

Число k остаётся тем же

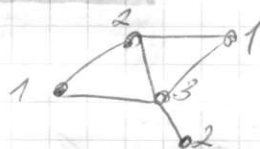
Задача сводится к попарно E_{v_i} ,

Задача

Задача РАСКРАСКА (вершин)

Вход: G, k

Вопрос: $\exists$ ли раскраска G в k цветов?



Утверждение РАСКРАСКА - NP-трудно.

Док-во: по входу k задана 3-ВЫИП строим граф G

k -3-КНД, содержа. n переменных и m скобок

Вершины G :

$v_1, \dots, v_n$
 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$
 $x_1, \dots, x_n$
 $c_1, \dots, c_m$

$3n+m$ вершин

Рёбра G : 1) $\forall i, j \ (v_i, v_j) \in E(G)$

2) $\forall i$ верш. x_i соединены с $v_j, i \neq j$.

$\forall i$ верш. $\bar{x}_i$ соединены с $v_j, i \neq j$

3) $\forall i$ верш. x_i и $\bar{x}_i$ соединены ребром

4) $\forall k$ ссод. c_k со всеми x_i , для которых

$(\bar{x}_i)$ x_i не входит в скобку c_k

Упр. Граф G можно раскрасить в $(n+1)$

цвет $\Leftrightarrow$ исходная КНП выполнима

Доказ. (считаем, что $\# \text{ перем. в } K \geq 2$)

1) $v_1 \dots v_n$ получают разные цвета (п.к. это клика) $1 \dots n$

2) x_i не можем дать раскраски в $1 \dots i-1, i+1, \dots, n$

$\bar{x}_i$ — " —

x_i и $\bar{x}_i$ не могут быть одновременно

$\Rightarrow$ какая-то из вершин $x_i, \bar{x}_i$ должна получить цвет 0

(цвет 0 будет соств. 0, + другой - 1)

1.10 ВЫП Вход: K -КНП
Св-во: выполнимость

Раскраска. Вход: $G = (V, E)$, k
Св-во: $\exists \varphi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$
 $(u, v) \in E \Rightarrow \varphi(u) \neq \varphi(v)$

Упр. ВЫП $\times$ Раскраска

$K = \left(\begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{smallmatrix} \right)$
 $C_1 \dots C_t \quad x_1 \dots x_n$

$V = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, C_1, \dots, C_t, v_1, \dots, v_n\}$

$$E: 1) (v_i, v_j) \in E \quad \forall i \neq j$$

$$2) (x_i^\alpha, v_j) \in E \quad \forall \alpha \in \{0, 1\}, i \neq j$$

$$3) (x_i, \bar{x}_i) \in E, \quad i = 1, \dots, n$$

$$4) (x_i^\alpha, c_j) \in E, \quad x_i^\alpha \notin c_j$$

$$k = n+1$$

$$n \geq 4$$

$$\forall j \exists y, y, \bar{y}:$$

c_j смежна с $2n$ вершинами x_i^α

c_j не смежна с 3

$$\geq 2n - 3$$

$\exists i: x_i, \bar{x}_i$ - смежные с c_j

$$1) \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$$

полный граф $\Rightarrow$ требуется n цветов

$1, \dots, n$

0 - специальный цвет



$x_i, \bar{x}_i$

x_i^α

$\chi(x_i^\alpha) \in \{i, 0\}$ - цвет x_i^α либо i , либо 0

$$\chi(x_i) \neq \chi(\bar{x}_i)$$

$$c_j < \begin{matrix} x_i \\ \bar{x}_i \end{matrix} \text{ ровно 1 из вершин } x_i, \bar{x}_i \text{ имеет цвет } 0$$

$$\Rightarrow \chi(c_j) \neq 0$$

$$c_j = (x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n})$$

$$\chi(c_j) \in \{2, 4, 7\}$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

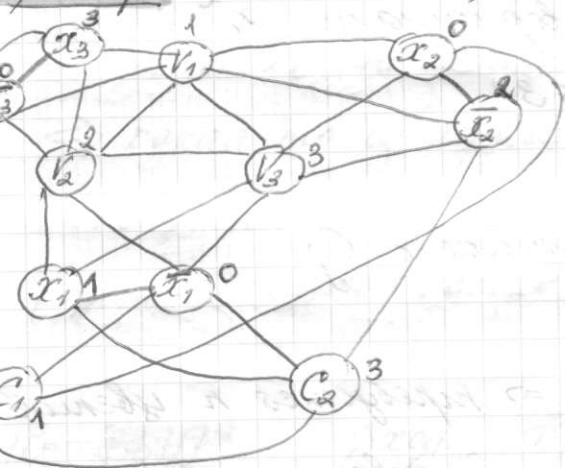
$$\chi(C_j) = \vec{\alpha}, \text{ если } x_j^{\alpha_j} = 1$$

если $x_j^{\alpha_j} \vee x_j^{\beta_j} \vee x_j^{\gamma_j} = 0$, то C_j нельзя
правильно раскрасить $\Rightarrow C_j$ можно
раскрас., если $\vec{\alpha}$ коррект., соот. $C_j \in I$

$\Rightarrow$ ВВП $\leftarrow$ раскраска,

4.11.9

Пример $H = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee x_3), n = 3$



$$\vec{\alpha} = (101) \text{ соот. КНФ}_{\vec{\alpha}} I$$

Лемма 1. Задача раскраски эквивалентна NP-трудной
NP-полной

Определим класс NT: ко n словам длина n
NT останавливается за время $T(n)$

Преп. 1 (Savage)

$a_1 \dots a_n \dots a_n \dots 1$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_c\}$$

$$Q = \{q_1, \dots, q_r\}$$

$$\{a q \rightarrow a' q' d\}$$

Таблица правил. Демон МТ

Схема моделирует МТ:



на вход могут подаваться символы из A

Пусть МТ μ останавливается за время $T(n)$ работая с произв. словом длины n . Тогда

схема Σ_μ , кон. моделирует работу МТ μ , при этом сложность схемы $L(\Sigma_\mu) = O(T^2(n))$

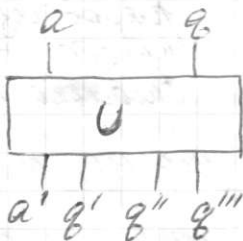
Док-во:

Препор. 21-н:

$$q^i \in Q \cup \{\tilde{q}\}$$

хвостовой

$$a, a' \in A$$

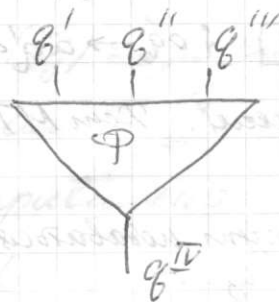


$$d \in \{L, S, R\}$$

2 входа состоят хвостовую сдем, а первый $\in Q$

$$\begin{array}{lll} \text{Если } d=L, & q^i \in Q & q'', q''' = \tilde{q} \\ d=S & q'' \in Q & q', q''' = q \\ d=R & q''' \in Q & q', q'' = q \end{array}$$

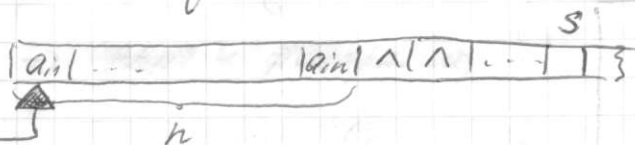
Фильтрующий элемент



На входе - то более 1 эл. та
из алгебры Q

Если все $q = \tilde{q}$, то выход $q^IV = \tilde{q}$

Если один из q не холостой,
то $q^IV = q \in Q$

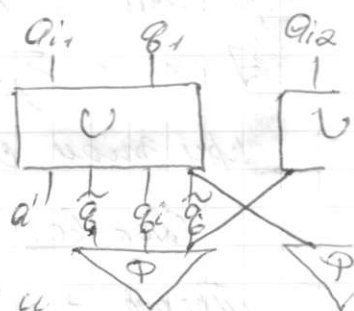
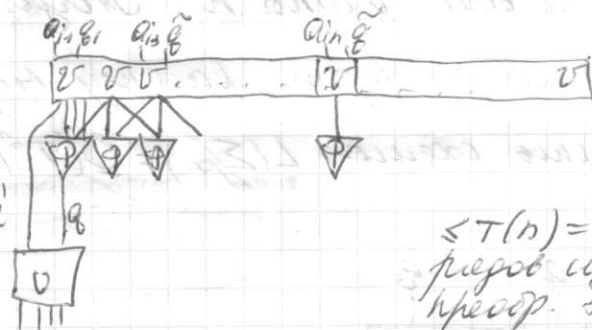


$$W = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

$$S = T(n)$$

$q_1, q_{i2}, \dots, q_{in}$ - нач. конфигурация

Образующие элементы:



$\leq T(n) = S$
рядов из
кросср. эл-тов и
статико же фильтрующих

Уменьшение избыточности, т.к. вся схема имеет
до появления упр. головки

Шмор доказал, что $\exists \Sigma_n$ т.ч.

$$L(\Sigma_n) \leq O(T(n)) \log_2 S_n(n) + |M|$$

$T(n)$ - # машин МТ

команд M

$S_n(n)$ - # ячеек, посещенных МТ
память

Эквивалентные преобразования

9.10

$$V = (\Sigma, f)$$

Будем считать, что $\Sigma' \sim \Sigma''$, если $f_{\Sigma'} = f_{\Sigma''}$

$$\textcircled{\Sigma} \quad \Sigma' \subseteq \Sigma \text{ и } \Sigma' \text{-схема} \Rightarrow \Sigma' \text{-подсхема } \Sigma$$

Подстановка $S_{\Sigma' \Sigma''}(\Sigma)$ - вместо Σ'' подст. Σ'
в Σ

Подст. $S_{\Sigma' \Sigma''}(\Sigma)$ наз. эквивал.-ной, если $\Sigma' \sim \Sigma''$

$\Sigma \sim S_{\Sigma' \Sigma''}(\Sigma)$, если $\Sigma' \sim \Sigma''$ - принцип экв.-ти

Потребство - необходимость эквив. схем $\Sigma' \sim \Sigma''$

Семейство подстанов $\{\Sigma'_i \sim \Sigma''_i\}_{i=1}^n$

$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3 \rightarrow \dots \rightarrow \Sigma_n$ - эквив. преобразование
(послед-ть эквив. подстановок)

Если $\forall \Sigma' \sim \Sigma'' \exists$ эквив. преобр. над T переводящее
 $\Sigma' \xrightarrow{T} \Sigma''$, то T полна в K -классе схем
(с-ма подств.)

Вопрос: $\exists$ ли в данном классе упр. с-м
конечная полная с-ма подств. (КНСТ)?

Стандартный базис $B_0 = \{ \vee, \&, \neg \}$

Φ -класс формул над B_0

Теор. 1 В классе $\Phi \exists$ КНСТ.

Док-во:

$$A' \sim A'$$

$$KBA' \Rightarrow KBA''$$

(канонич. вид A)

KBA :

1) Если $fA \equiv 0$, то $KBA = \chi, \&, \neg$

2) $fA \not\equiv 0$, то $KBA = \mathcal{D}_f^{св}$

$$A \in \mathcal{P}$$

1) Описания отрицаний:

$$\overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \quad (1)$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \quad (2)$$

$$\overline{\overline{x}} = x \quad (3)$$

$$(\overline{x_1 \vee x_2}) \& x_3 = \overline{x_1 \vee x_2} \vee \overline{x_3} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \vee \overline{x_3} = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3}$$

2) Преобразование к виду $\Sigma \Pi$ (сумма произв-т)

$$(x \vee y) \& z = (x \& z) \vee (y \& z) \quad (4)$$

$$x \& y = y \& x \quad (5)$$

(принцип об-ти)

$$x \& x_1 = x_1 \quad (6)$$

$$x_1 \& (x_2 \& x_3) = (x_1 \& x_2) \& x_3 \quad (7)$$

$$x \overline{x} \quad (x_1 \& \overline{x_1}) \& x_2 = x_1 \& \overline{x_1} \quad (8)$$

$$(x_1 \& \overline{x_1}) \vee x_2 = x_2 \quad (9)$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \quad (10)$$

$$x_1 \vee x_1 x_3 = x_1 (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_1 x_3$$

Введение однородности элементов (rank = n)

$$x_2 = (x_1 \vee \overline{x_1}) \& x_2 + \text{дистр. + конъюнк.} \quad (11)$$

$$\bigvee_{(B_1 \dots B_n)} x_1^{B_1} \dots x_n^{B_n}$$

3) ливидация кратных элементов

$$x_1 \vee x_1 = x_1 \quad (13)$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \quad (12)$$

Преобразование КВА:

$$1) f_A = 0 \quad x_1 \& \overline{x_1} = x_2 \& \overline{x_2} \quad (14)$$

2) $f_A \neq 0$ критическая сл. и лог.

$$A' \rightarrow \text{КВА}' \rightarrow \text{КВА}'' \rightarrow A''$$

Итак, теор. доказана,

эпиз

Теор.

Для $\forall$ замкн. класса $\mathcal{FAL}$ $\nexists$ конечный базис
Пусть K -замкн. класс, гра базиса:

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}$$

$$G = \{g_1, \dots, g_k\}$$

Рассм. классы формул над $F : \mathcal{P}_F$
и $G : \mathcal{P}_G$

Теор. 2 Пусть в классе $\mathcal{P}_F \nexists$ КНСТ, тогда
и в классе $\mathcal{P}_G \nexists$ КНСТ

Доказ-во: $\forall i = \overline{1, m} \nexists f_i = A_i [g_1, \dots, g_k]$

$$\forall j = \overline{1, k} \nexists g_j = B_j [f_1, \dots, f_m]$$

Надо показать, что если $D_1 \sim D_2$ в $\mathcal{P}_G$,

то $\nexists T$ в $\mathcal{P}_G$, переводящая $D_1 \xrightarrow{T} D_2$

Пусть $\hat{T} = \{C_i' \sim C_i''\}$ - конечная полная
с-ма толждеств в $\mathcal{P}_F$

$$\{g_j = B_j [A_1 [g_1, \dots, g_k], \dots, A_m [g_1, \dots, g_k]]\} = T_1 \text{ в } \mathcal{P}_G$$

$$C_i' [f_1, \dots, f_m] \sim C_i'' [f_1, \dots, f_m] \Rightarrow$$

$$C_i' [A_1 [g_1, \dots, g_k], \dots, A_m [g_1, \dots, g_k]] = T_2$$

Положим $T = T_1 \cup T_2$ и докажем, что

T -КНСТ в $\mathcal{P}_G$

$$D_1 [g_1, \dots, g_k] \sim D_2 [g_1, \dots, g_k] \text{ в } \mathcal{P}_G$$

$$D^{(1)} = D_1 [B_1 [f_1, \dots, f_m], \dots, B_k [f_1, \dots, f_m]] \sim D_2 [\dots] -$$

в $\mathcal{P}_F$

$$D^{(1)} \xrightarrow{T_1} D^{(2)} \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_{s-1}} D^{(s)} = D^{(w)}$$

$$D_1 [g_1 \dots g_k] \xrightarrow{T_2} D^{(2)} \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_2} D^{(s)} = D_2 [g_1 \dots g_k]$$

гип

Рассм. $\varphi \in P_7$ слуг. вид:

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	5	6	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	5	5	5	0	0
6	0	0	6	6	6	0	0

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 \circ x_2$$

Теор (Миндон)

В P_7 $\exists$ миним. класс с кон. базисом B ,
т.ч. в классе формул над B $\nexists$ КДСТ.

$B = \{\varphi\}$ φ -класс φ^{-1} над $\{\varphi\}$

$A_{1,2,3}$: $x_1 \circ 0 = 0 \circ x_1 = x(y, z) = 0$

а) $y \circ z = 0$

б) $y \circ z \neq 0 \Rightarrow y \circ z = \{1, 5, 6\}$

$x \circ 1 = x \circ 5 = x \circ 6 = 0$

$$B_m : \overbrace{(\dots ((x_1 \circ x_2) \circ x_3 \dots) x_m)}^D \circ x_1 = 0$$

$$C_m : \overbrace{(\dots ((x_1 \circ x_2) \circ x_3 \dots) x_m)}^D x_2 =$$

$$= (\dots ((x_1 \circ x_2) \circ x_3 \dots) x_m)$$

Если $D=0$, B_m выполнено

16.10

$$D \neq 0 \Rightarrow D \in \{1, 5, 6\}$$

$$D=1 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=x_3=\dots=2 \Rightarrow B_m=1 \cdot 1=0$$

$$D=5 \Rightarrow x_1 \in \{1, 5, 6\} \Rightarrow B_m=0$$

$$D=6 \Rightarrow B_m=0$$

$$\text{Докажем } C_m: D x_2 = D$$

$D=0$ - трив.

$$D \in \{1, 5, 6\} \quad D=1 \Rightarrow 1 \cdot x_2 = 1, x_2=2, 1 \cdot 2=1$$

$$D=5(6) \Rightarrow 5x_2=5: x_2 \in \{2, 3, 4\}$$

$\Rightarrow C_m$ доказано.

Пусть $A \in \mathcal{P}$. Канонический вид A :

$$1) f_A \equiv 0 \Rightarrow KBA = x_1 \cdot x_1$$

$$2) f_A \neq 0 \Rightarrow KBA = (\dots ((x_{i_1} \cdot x_{i_2}) x_{i_3} \dots) x_{i_m}),$$

где $x_{ij} \neq x_{ik}$ при $j \neq k$

Лемма 1 $\alpha[x_1, \dots, x_n] \sim \mathcal{B}[x_1, \dots, x_n]$

Обозн. с-му подтегов $T_n = \{A_{i,j,k} \cup B_m \cup C_m\}_{m=1}^n$

Тогда $\alpha \xrightarrow{T_n} \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ вводится из α)

Док-во: 1) докажем, что $\alpha \xrightarrow{T_n} KBA$

1. В α вводим 0, ил, $x(u, v)$

$$\Rightarrow f_\alpha \equiv 0$$

$$\alpha \Rightarrow \underbrace{x_i \cdot x_i}_{A_{1,2,3} \quad B_1} = 0$$

$$B_1 \quad 0 \cdot x_i \cdot x_i = (x_i \cdot x_i) / (x_i \cdot x_j) = x_j \cdot x_i$$

2. Кем вхожденный 0, ии, x(иv)

$$\alpha = (\dots ((x_{i_1} x_{i_2}) x_{i_3}) \dots) x_{i_m}$$

$$\text{Если } x_{i_1} = x_{i_m} \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow x_i \circ x_i$$

или $x_{i_1} \neq x_{i_m}$, $x_{i_1} = x_{i_k}$, $k < m \Rightarrow$ с помощью C_k
второе вхождение x_{i_1} ликвидируется

$$\Rightarrow KB \alpha$$

$$\alpha: I = ((x_{i_1} x_{i_2}) \dots) x_{i_k}$$

$$II = (\dots ((x_{j_1} x_{j_2}) \dots) x_{j_l}$$

Докажем, что состав перем-х одинаков

$$x_{j_k} \in II, \quad x_{j_1} \notin I$$

$$x_{j_1} = 0, \quad x_{i_1} = 1, \quad x_{i_2} = x_{i_3} = \dots = x_{i_k}$$

$$x_{j_2} = 2, \quad j \neq k$$

$$I = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 1$$

$\Rightarrow$ состав в перем. равны

$$II = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 0$$

Докажем, что I и II совпадают по составу.

$$x_{i_1} = x_{j_1}. \quad \text{Противоречие } x_{i_1} \neq x_{j_1}$$

$$x_{i_1} = 1, \quad x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 2 = x_{j_1} = \dots = x_{j_l}$$

$$I = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 1$$

$$II = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 0 \quad \nrightarrow (!)$$

3) x_{is} левее x_{it} в I

x_{is} правее x_{it} в II

$$I = x_{i1} \dots x_{is} \dots x_{it} \dots x_{ik}$$

$$II = x_{i1} \dots x_{it} \dots x_{is} \dots x_{ik}$$

$$x_{is} = 3, \quad x_{it} = 4$$

$$x_{i1} = 1, \quad i \neq s, t \text{ попомним } x_{i7} = 2$$

$$I = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \quad (?)$$

$$II = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

$$\Phi = \Phi_{i1} \dots \Phi_{im}$$

В случае, когда $f(\alpha) \neq 0$, $kB\alpha$ суп. однозначно

$$\alpha \xrightarrow{T_n} \mathcal{L}$$

$$T_n \downarrow$$

$$T_n$$

$$\uparrow T_n$$

$$kB\alpha = kB\mathcal{L}$$

Средние: Система $T_{\infty} = \{A_{123} B_m C_m\}, m=1$

полна в классе Φ

α - обл. евойслова C^n

$$1) \alpha = \alpha [x_1 \dots x_n]$$

$$2) \text{ в } \alpha \text{ нет лев.}$$

$$(x(u, v)), \text{ Авз теорема}$$

$$3) \alpha = x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot x_{in}$$

и второе вхождение

x_{i1} в $\alpha \Rightarrow$ перед 2-м вх. x_{i1} вст. все

перем. $x_1 \dots x_n$

лемма 2 α обл. св-вом C^n

$$\alpha \xrightarrow{T_k} \beta \quad k < n$$

$$\Rightarrow \beta \text{ обл. } C^n$$

$$\alpha = \underline{x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot \dots \cdot x_{is} \cdot x_{i1}} \cdot \dots \cdot x_{ik}$$

V_k не применимо

C_k - удаляет лишние вхождения переменных
через x_{ij}

л. 2. Трансформация V_{n+1} не вводит в T_k , $k \leq n$

л. 4. V_{n+1} обл. св-вом C^{n+1}

пр. 4. $V_{n+1} = 0$ не обл. C^{n+1}

из л. 2 $\Rightarrow$ гтв.

ср. (Линдон)

В классе $\mathcal{P}$ не существуют КНСТ

Доказ-во: Противное: пусть $\exists$ множество

$$T = \begin{cases} A_1' \sim A_1'' \\ \vdots \\ A_k' \sim A_k'' \end{cases}$$

k -комб. непер. пер. $x_1, \dots, x_n$ в T

$$A_i' A_i'' = \text{кон } x_1 \dots x_n$$

$$A_i' [x_1 \dots x_n] \sim A_i'' [x_1 \dots x_n] \Rightarrow A_i' \xrightarrow{T_n} A_i''$$

$\Rightarrow T_n = \{A_{i_1, i_2, i_3}, B_{i_1}, C_{i_1}\}_{i=1}^n$ — полная
 Пром. B_{n+1} не вхв. в T_n

9119

У76 (В. Л. Мурекки)

$\exists$ замкн. класс в P_3 с кон. баз. B
 в классе $P_B \not\equiv KPCST$
 (в P_2 верно)

$P_{1,3,7}$

Закончим с формулами, перейдём
 к схемам.

Теор. 2 В классе CPD в $B_0 = \{V, \&, \neg\}$ $\not\equiv KPCST$.

Док-во:

Положим $\Sigma' \in \Sigma$ — часть схемы Σ , авт. схемой

$$\Sigma' \sim \Sigma'' \Rightarrow f_{\Sigma'} = f_{\Sigma''}$$

$$S_{\Sigma' \Sigma''}(\Sigma) =$$

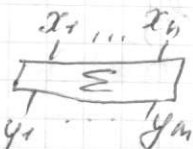


$\Rightarrow$



$S_{\Sigma' \Sigma''}(\Sigma)$

00
00



подет. эквив. если $\Sigma' \sim \Sigma''$

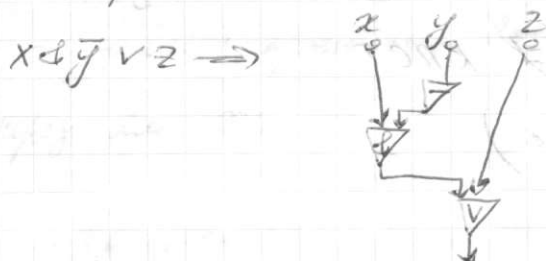
эквив. преобр. $\Sigma_1 \not\equiv \Sigma_2$ Тогда $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$

$$\Sigma_1 = \Sigma^{(1)} \xrightarrow{T} \Sigma^{(2)} \rightarrow \dots \xrightarrow{T} \Sigma_2$$

Дур С-мв монтеетв Т поина в (ФФ), мнч
 $\forall \Sigma' \sim \Sigma'' \quad \Sigma' \xrightarrow{T} \Sigma''$

3.10 Для класса φ -л в БФ ЭКНСТ (1-14)

По $\forall \varphi$ -л монча постр. схемв, эквив.

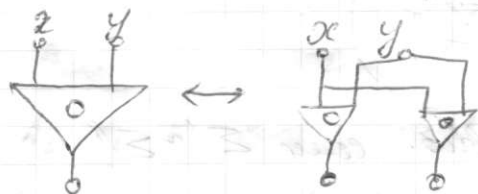
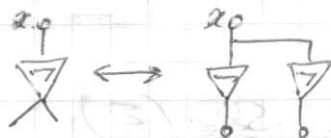


Для выскон мв схема $\exists \varphi$ -л?



Каждо-мв постр. монча
 выскон мв и те мв монча

Правила: монтеетв. I



$\alpha \in \{v, \&\}$

КВЭ - схема, постро. по ест. ЯНД

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow \text{КВЭ} \\ \Sigma' &\rightarrow \text{КВЭ}' \end{aligned} \Rightarrow \Sigma \rightarrow \Sigma'$$

4mg

Тер. 1 Для класса КС $\mathcal{A}$ КНСТ
КС-граф с петлями и ребрами
принимает x_i, y_i



$$\Sigma_{ij} = \Sigma'_{ij}$$

o - петля
• - вершина, т.е. ест. помехи

$$\Sigma \sim \Sigma'$$

$S_{\Sigma', \Sigma''}(\Sigma)$ - порождающие Σ'' в классе Σ'
 $\Sigma' \in \Sigma$ эквивалентны, если $\Sigma' \sim \Sigma''$.

#петель должно совпадать

Эквив. преобраз - перест. эквив. перестановок.

Тензорное - пара эквив. схем

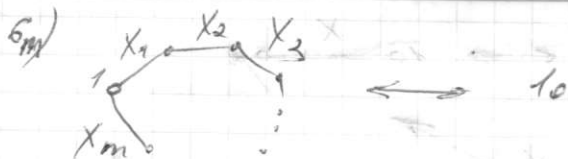
1) $\bullet \leftrightarrow \Lambda$ (избир. вершину и. отсутств.)

2) $x_1 x_2 \leftrightarrow x_2 x_1$

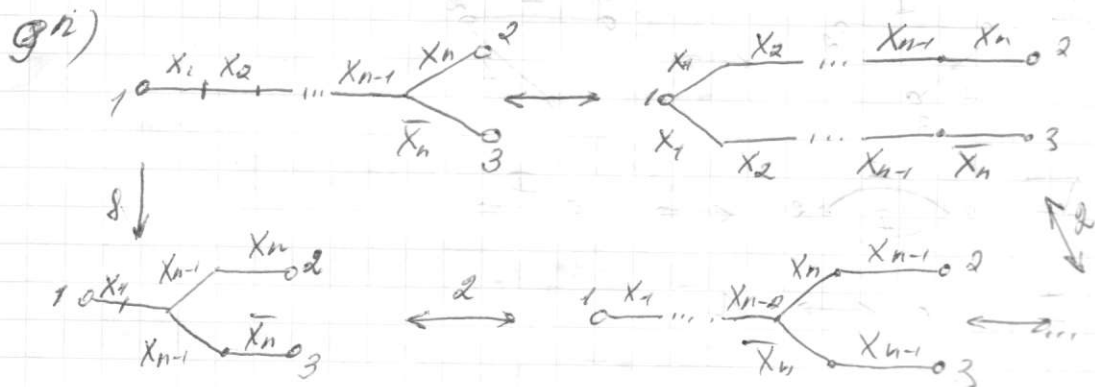
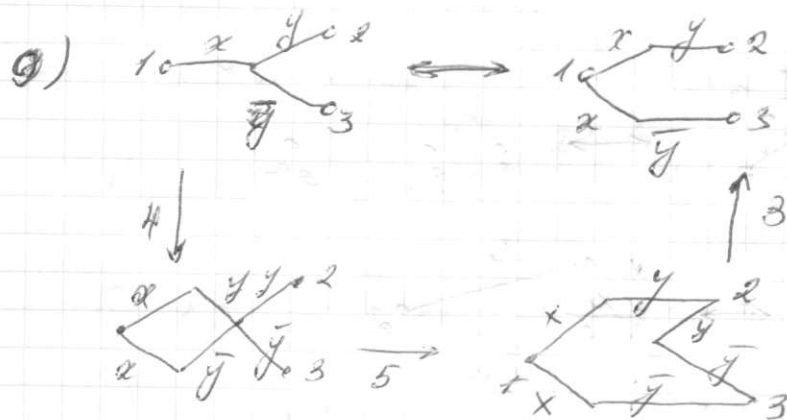
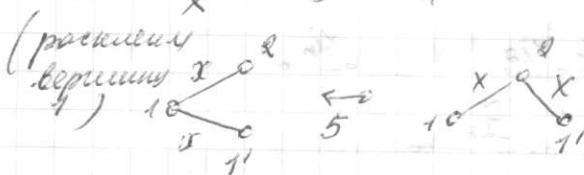
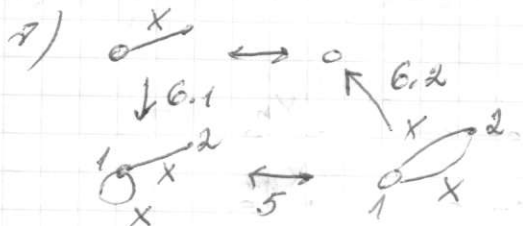
3) $x_1 \bar{x}_2 \leftrightarrow \bullet$

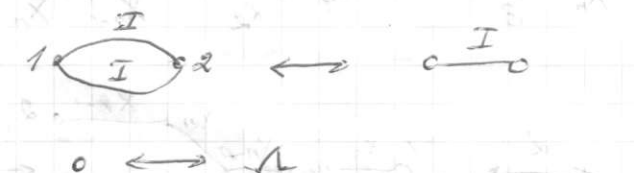
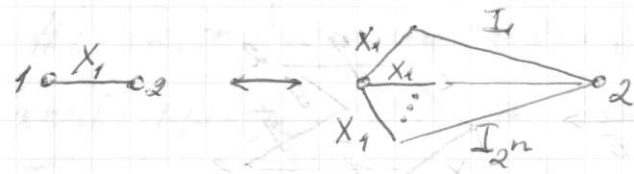
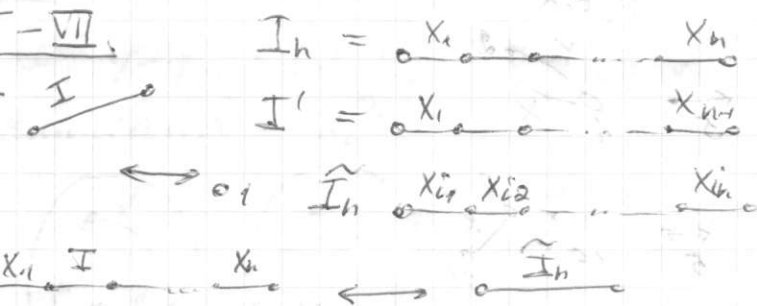
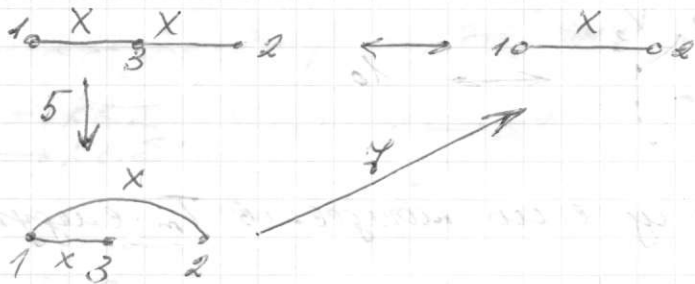
4) $x_1 \leftrightarrow$

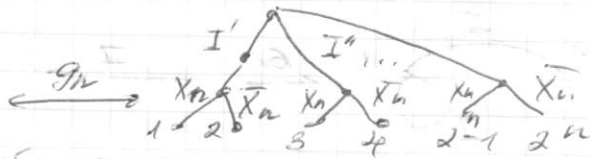
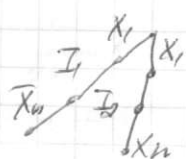
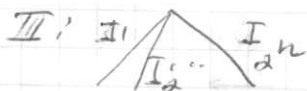
5) $\leftrightarrow$



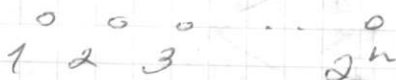
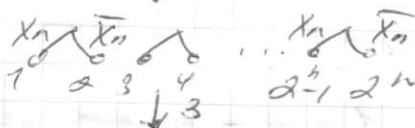
Выведет из 6-го множества T_m следующие:



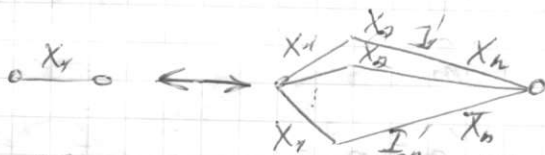




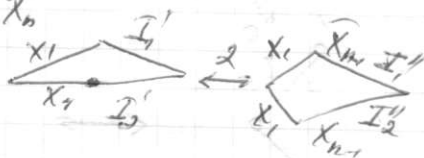
объединяем
корни



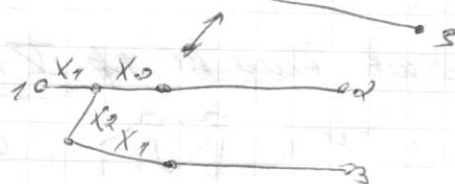
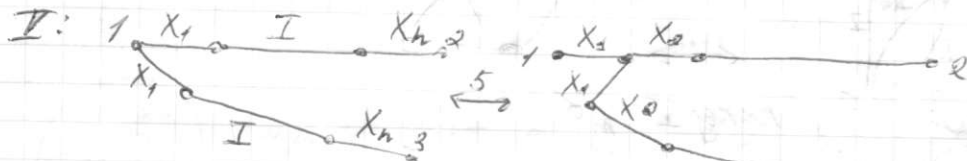
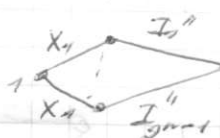
IV:



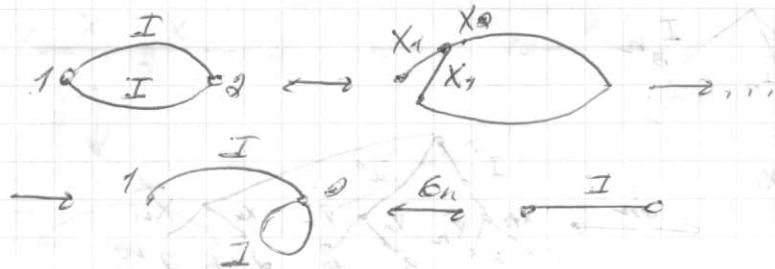
с двумя центрами



по индукции

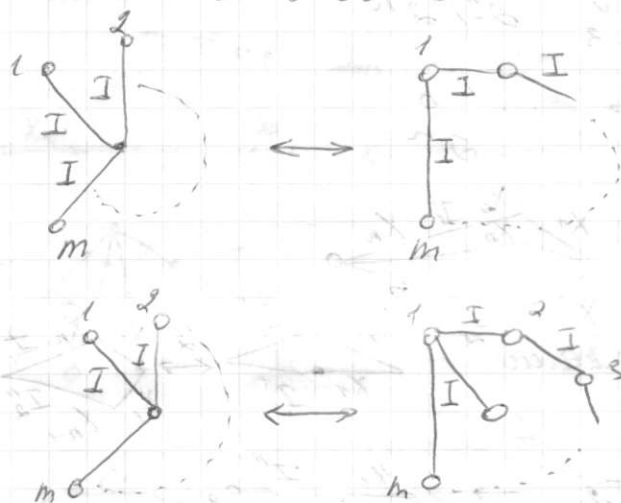


11

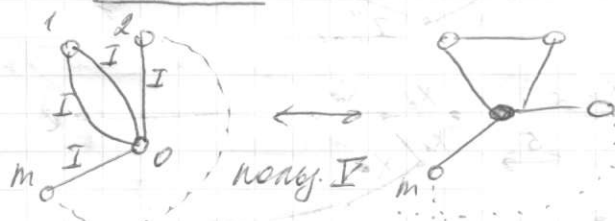


10

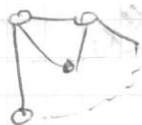
Лемма (о звёздах)



Док-во:



Действ. далее по пр. I получим цикл с отроscopic

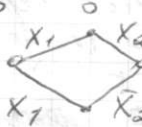
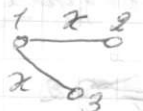
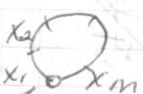


по правилу VII. Если в центре
был полюс, отросшок убрать не
урастет.

Знач

$$T_m = 1-5, 6_m$$

$$T_n = 1-5 \cup \bigcup_{m \neq n} T_m$$

- 1) $\bullet \leftrightarrow \Lambda$
- 2) $\bullet \xrightarrow{x_1, x_2} \bullet \leftrightarrow \bullet \xrightarrow{x_2, x_1} \bullet$
- 3) $\bullet \xrightarrow{x_1, \bar{x}_1} \bullet \leftrightarrow \bullet$
- 4) $\bullet \xrightarrow{x_1} \bullet \leftrightarrow$ 
- 5)  $\leftrightarrow$ 
- 6m)  $\leftrightarrow$ 

Теор. 1 (Муромский В. П.)

Пусть $S'[x_1, \dots, x_n] \sim S''[x_1, \dots, x_n]$ - две
схемы эквив-нт. Тогда $S'[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{T_n} S''[x_1, \dots, x_n]$.

Док-во. Определим канонич. вид схем.



KBS



f_{ij} - p-ция проводимости
между i и j в S

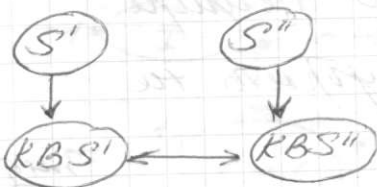
$$1) f_{ij} = 0 \Rightarrow i \text{ и } j$$

$$2) f_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \text{ и } j$$

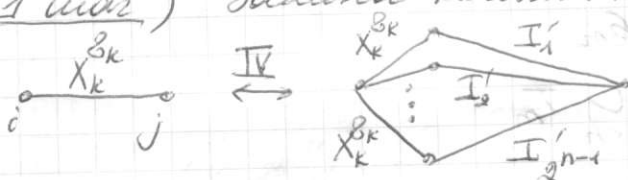
схема постро. по
сов. ДНД p-ция f_{ij}
 $R_f^{cov} = K_1 \vee \dots \vee K_e$



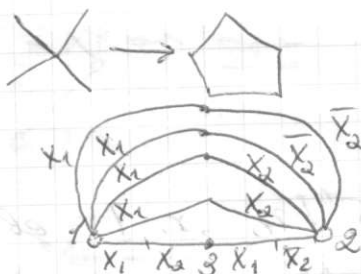
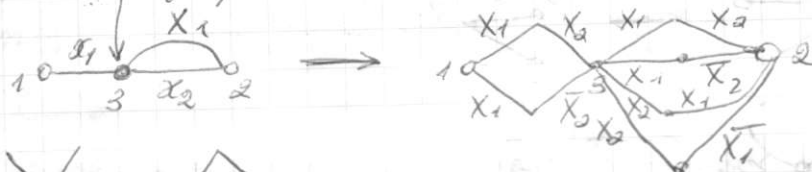
$$f_{ij} = K_j$$



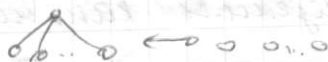
1 шаг) Замена ребер на цепочки



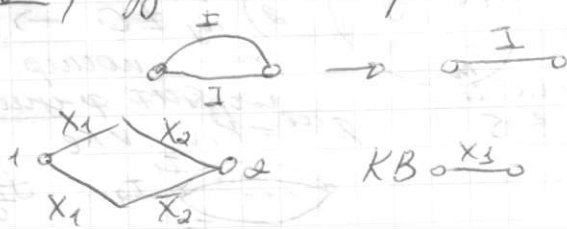
2 шаг) ликвидация вершин, отличных от полюсов и тех внутр. вершин, из которых цепочки (применение леммы о звездах)

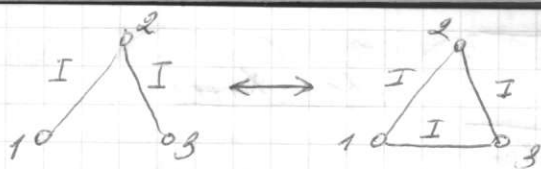


3 шаг) применение IV



4 шаг) удаление кратных цепочек





Следствие 1:

г.м.г.

Поэтому $T_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$

$\Rightarrow$ система T_∞ полна в классе КС

Опр Индекс системы КС

$$\varphi_S(d_1, \dots, d_n) = p - b + k$$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 ребра вершины количество
 связности



$$\varphi_S(01) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$\text{Ind}(S) = \sum_{(d_1, \dots, d_n)} \varphi_S(d_1, \dots, d_n) \pmod{2}$$

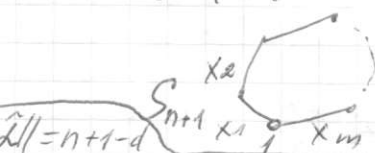
$$\text{Ind}(S) = \varphi_S(00) + \varphi_S(01) + \varphi_S(10) + \varphi_S(11)$$

$\varphi_S(1)$

$\varphi_S(10)$

$$\parallel$$

$$3 - 4 + 1 = 0$$



$$\varphi_S(\hat{L}) = n+1-d - (n+1) + d = 0$$

$$X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$$

$$m = n+1$$

$$\varphi_S(\underbrace{1 \dots 1}_{n+1}) = (n+1) - (n+1) + 1 = 1$$

$$\varphi_S(11 \dots 101 \dots 1) = n - (n+1) + 1 = 0 \quad \boxed{\text{Ind}(S_{n+1}) = 1}$$



$$\text{Ind}(S_m) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ind}(S_m) &= \sum_{(d_1, \dots, d_{n+1})} \varphi_{S_m}(d_1, \dots, d_{n+1}) = \\ &= \sum_{(d_1, \dots, d_m)} 2^{n+1-m} \varphi(d_1, \dots, d_m, 0, \dots, 0) \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

$$n+1-m \geq 1$$

Lemma 2 Система $S'[x_1, \dots, x_{n+1}] \xrightarrow{T_n} S''[x_1, \dots, x_{n+1}]$

$$\Rightarrow \text{Ind}(S') = \text{Ind}(S'')$$

$$(\Leftrightarrow S' = S_1 \xrightarrow{T_n} S_2 \xrightarrow{T_n} \dots \xrightarrow{T_n} S_k = S'')$$

Доказ-во: покажем, что применение операции монотонизации не меняет индекса

$$1) \textcircled{S} \leftrightarrow \textcircled{S}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(S \cup \{f\})}(d_1, \dots, d_{n+1}) &= \varphi(0_0) = \frac{p - b + k - 1 + 1}{s} = \\ &= p - b + k \end{aligned}$$

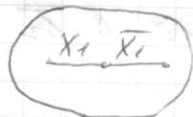
$$2) \textcircled{x_1 \circ x_2} \leftrightarrow \textcircled{x_2 \circ x_1}$$

На $\begin{pmatrix} 00 \\ 11 \end{pmatrix}$ схема изоморфна

$$\text{На } \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix} \textcircled{x_1 \circ x_2} \leftrightarrow \textcircled{x_2 \circ x_1}$$

$$\Delta \varphi = \underbrace{(p-p')}_{0} - \underbrace{(b-b')}_{0} + \underbrace{(k-k')}_{0}$$

3)


 $x_1 = 0$
 $x_1 = 0$
 $x_2 = 1$


$$\Delta\varphi = \Delta\rho + \Delta\sigma + \Delta\kappa = 1 - 1 - 0 = 0$$

4)


 $x_1 = 0$
 $x_2 = 0$

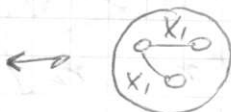
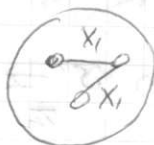
 $x_1 = 1$


$$\Delta\varphi = \Delta\rho - \Delta\sigma + \Delta\kappa =$$

$$= -1 - (2) - 1 = -4 \equiv 0 \pmod{2}$$

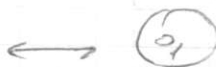
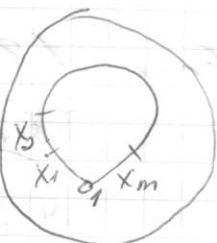
$$\Delta\varphi = -2 + 2 + 0 \equiv 0$$

5)



$$\Delta\varphi \equiv 0$$

6m)



Если $m = n+1$, то момент нечет. Тогда

$$\Rightarrow m \neq n+1, m \leq n$$

$$\Delta\varphi = \Delta\rho - \Delta\sigma + \Delta\kappa = \text{number}(m+1) + \dots = 0 \pmod{2}$$

$$\frac{(d_1, \dots, d_m, \dots, d_{n+1})}{1 \dots 1 \ 0 \dots 0 \ 1}$$

4.14.9.

предположение 2: σ_{n+1} не выводимо в T_n

л. ч.



$$\text{Ind}(S_{n+1}) = 1$$

$$\text{Ind}(\cdot) = 0^{0-1+1}$$

доп. (Мурский)

В классе КС $\mathcal{A}$ КНСТ

Док-во: (от противного)

Пусть T - КНСТ, n -матрица исчисления, входящая хотя бы в одно предложение T

$$\begin{cases} S'_i \sim S''_i & x_1, \dots, x_n \\ S'_m \sim S''_m \end{cases}$$

$$S'[x_1, \dots, x_n] \sim S''[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow S' \xrightarrow{T_n} S''$$

$\Rightarrow T_n$ не выводима в K

Но в T_n не выводимо σ_{n+1} (!?)

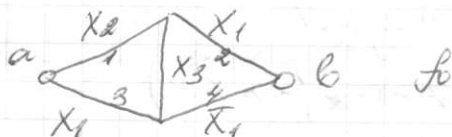
9. м. 9.



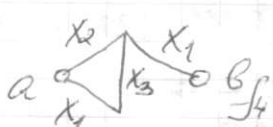
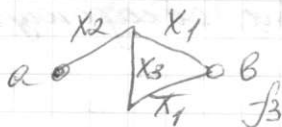
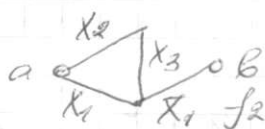
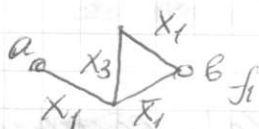
Тестирование - набор воздействий на входы, по результатам обработки которых можно определить, произошло ли нарушение, и каково

мн-во наборов Т, т.е. по значениям выходов схемы на тех наборах можно установить 1) нарушение ли произошло 2) каково именно нарушение произошло

- 1) - проверяющий тест
- 2) - диагностический тест



$X_1, \bar{X}_1, X_2$ - могут быть тестами



X_1	X_2	X_3	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
3) 0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
5) 1	0	1	1	1	0	1
6) 1	1	0	1	0	0	1
7) 1	1	1	1	1	0	1

	f_1	f_2	f_3	f_4	
3	1	0	1	1	0
5	1	1	0	0	1
6	1	0	0	1	1
7	1	1	0	1	1

$T_1 = \{3, 5\}$ - проверяющий тест

$T_2 = \{3, 6, 5\}$ - диагностический тест

T - тест для таблицы

$A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ - матрица с m строками и n столбцами

Предложение 2: b_{n+1} не вводится в T_n

л. ч. $x_1 \circ x_{n+1}$

$$\text{Ind}(S_{n+1}) = 1$$
$$\text{Ind}(0) = 0^{0-1+1}$$

Упр. (Мурекит)

В классе КС $\nexists$ КНСТ

Док-во: (от противного)

Пусть T - КНСТ, n -маж. индекс перем.
вхождения хотя бы в одно предложение T

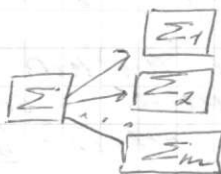
$$\begin{cases} S'_1 \sim S''_1 & x_1, \dots, x_n \\ \vdots \\ S'_m \sim S''_m \end{cases}$$

$$S'[x_1, \dots, x_n] \sim S''[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow S' \xrightarrow{T_n} S''$$

$\Rightarrow T_n$ нема в К

Но в T_n не вводится b_{n+1} (!)

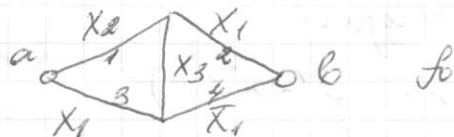
9. м. 9.



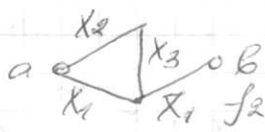
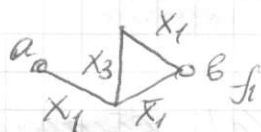
Тест - набор воздействий на входы, по результатам обработки которых можно определить, произошло ли нарушение, и какое.

Мн-во наборов T , т.е. по значениям выходов схемы на этих наборах можно установить 1) нарушение ли схемы, 2) какое именно нарушение произошло.

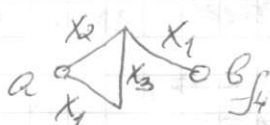
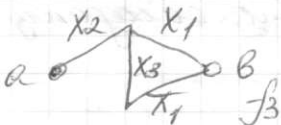
- 1) - проверяющий тест
- 2) - диагностический тест



$x_1, \bar{x}_1, x_2$ - могут быть нарушения



x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
3) 0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
5) 1	0	1	1	1	0	1
6) 1	1	0	1	0	0	1
7) 1	1	1	1	1	0	1



	y_1	y_2	y_3	y_4
3	1	0	1	0
5	1	1	0	0
6	1	0	0	1
7	1	1	0	1

$T_1 = \{3, 5\}$ - проверяющий тест

$T_2 = \{3, 6, 5\}$ - диагност. тест

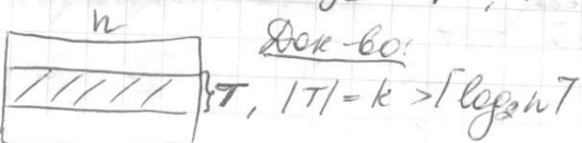
T - тест для таблицы $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ - мн-во строк A , кот. стр. нормализу с попарно различными столбцами

если все столбцы отсортированы от первого, то есть проверяющий

Сложность поиска $T = \# \text{строк}$

Поиск миним. - сортир. мин. в строке $\# \text{строк}$
 Поиск нулевой - унар. + строки приводят к $\# \text{тема}$

вл. 1 $\{A \in \{0, 1\}^{m \times n} \mid \text{все столбцы попарно различны}\}$. Тогда сложность (длина) мин. тема для A удовлетв. тер-ву $|T| \geq \lceil \log_2 n \rceil$, $n = \# \text{столбцов}$



$$k < \log_2 n \Rightarrow 2^k < n \text{ (!)}$$



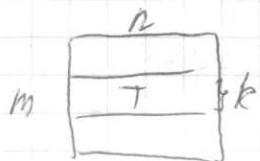
Получим все $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ $m = m(n)$ обладающие тем св-вом φ , или для $\varphi^{(m, n)}$ и-с, обладающих св-вом $\delta(m, n) \rightarrow 1$ $n \rightarrow \infty$

вл. 2 $K_{m, n}(\varphi)$ - мин-во всех и-с $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$, т.ч. длина мин. тема $\leq \ell$

$$\ell_0(n) = 2 \log_2 n + \varphi(n), \quad \varphi(n) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty$$

А обл. еб-вом $\mathcal{Q}$, если $A \in K_{m,n}(\mathcal{Q})$

Получим все n -го u $10, 10^{m \times n}$ обл. еб-вом $\mathcal{Q}$.



Доп-во. докажем, что $n \leq b$.

n -го некоего размера обл еб-вом $\mathcal{Q}$

$$m \geq \log(n) \quad k \leq \log(n)$$

Вспомогательная $M_{m,n}(e)$ - # всех n -го, у которых первая e строка образует тест

$$M_{m,n}(e) - \text{доля} = \frac{|M_{m,n}(e)|}{2^{mn}}$$

$$M_{m,n}(e) = \frac{2^e (2^e - 1) \dots (2^e - n + 1) \cdot 2^{m(e-n)}}{2^{mn}} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2^e}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{Cn^2}{2^e}\right) \geq 1 - \frac{n^2}{2^{2\log n + \psi(n)}} = 1 - \frac{1}{2^{\psi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

9.11.9

Алгоритм построения минимальных тестов

Сведем к алгоритму миним. покрытия множеств.



$$K_B = (v_1 v_2 \dots v_k) (\dots) \dots (1 \dots) \rightarrow \text{RUP} \rightarrow R_j = K_j \vee \dots \vee J_m$$

9.5.7

$$A^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 \oplus 2 & \oplus 3 & \dots & (n-1) \oplus n \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если T -пути есть в A , то в $A^{(2)}$ это путь, наоборот, и наоборот.

Докажем это. Это легко проверить, т.к. если в $A^{(2)}$ обратим, то в A столько парно различно.

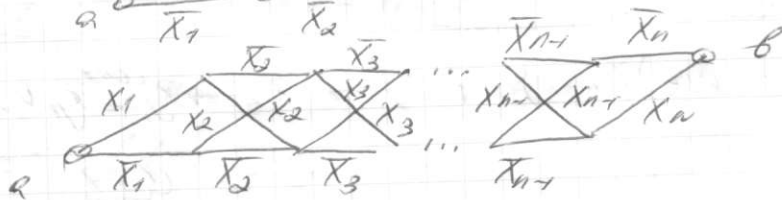
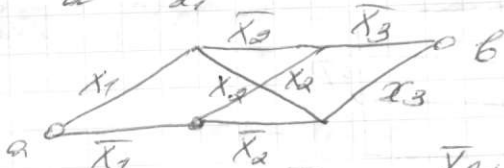
Рассм. цепи для конкр. классов схем.

$$l(\tilde{X}^n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$$

$n=2$



$n=3$



$$L(\Sigma_n) = 2 \cdot 2 + 4(n-2) = 4(n-1)$$

Карту док-л, что эта схема - миним.

среди КС, реализу. мин. ф-ции

Пусть $\tau(n)$ - длина мин. теста для Σ_n .

Лемма 1 $\lceil \log_2(4n-3) \rceil \leq \tau(n) \leq 5 + \lceil \log_2(n-2) \rceil$

Док-во: тест для обрыва $\forall 1$ контакта τ

ф-ций непереводимости = $4n-3$

Таблица размера $2^n \times (4n-3)$, все столбцы попарно различны: обрывая разные контакты получаем различно проводимости

1) 2^{n-1} ^{проводимости} ценей $\{a, b\}$ бу самопересечений τ
 $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$

2) $\exists$ бу-экт. соотв. между набором $(a_1 \dots a_n)$ и ценями τ (1 набор делает цену правой)

3) $x_i^{a_i} \dots x_j^{a_j}$ всегда $\exists$ цену, проход. через один контакт и не проход. через другой

$$\Rightarrow \tau(n) \geq \lceil \log_2(4n-3) \rceil.$$

Верхняя оценка

1. $\frac{x_1}{x_2} \frac{x_3}{x_4} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad z_1 \rightarrow \tilde{z}_1 = (0, 1)$

2. $x_1 \frac{x_2}{x_3} \frac{x_4}{x_5} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad z_2 \rightarrow \tilde{z}_2 = (1, 0, \dots, 0)$

3. $x_1 \frac{x_2}{x_3} \frac{x_4}{x_5} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad z_3 \rightarrow \tilde{z}_3 = (1, 1, \dots, 1, 0)$

4. $x_1 \frac{x_2}{x_3} \frac{x_4}{x_5} \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} \quad z_4 \rightarrow \tilde{z}_4 = (0, 1, \dots, 1, 0)$
 $b = 1$ при $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\tilde{x}_5 = (110...01)$$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \wedge x_n$$

$\tilde{x}_1$	
$\tilde{x}_2$	
$\tilde{x}_3$	
$\tilde{x}_4$	
$\tilde{x}_5$	

верх

0	M	δ_1
0		δ_2
1		δ_1
1	M	δ_2
4	$x_2 \dots x_{n-1}$	δ_2

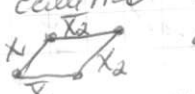
е

верх, часть позволяет

обнаружить, есть ли обрыв

- и - прохождение ли обрыв в кону, конд. или во внутр.
- и - какой из цепей 1-4 прил. обрыв. конд. (если к-т внутр.)
- и - какой именно к-т обрыван (если конд. конурдой)

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_{n-1}$	$\tilde{x}_n$	обрыв
$\tilde{x}_1$	1	0	0	1	0 1
$\tilde{x}_2$	0	1	1	0	1 0
$\tilde{x}_3$	1	0	1	0	0 1
$\tilde{x}_4$	0	1	0	1	1 0
$\tilde{x}_5$	1	0			1 0

Если $n=0$

 не отлив. $x_1, \tilde{x}_2$
 и $\tilde{x}_1, x_2 \Rightarrow$
 вводим $\tilde{x}_5$

- 1) $\forall k \in \Sigma$ содержит хотя бы в 1 из цепей 1...4
- 2) к-т внутр. $\Rightarrow$ равно 61
- 3) к-т кону. $\Rightarrow$ равно в 2 цепях

Если обрыв. внутр. контакт - то входе 1 толь
 конурдой к-т - то входе 2 толь

М: все столбцы попарно различны

Предположим, первый контакт $\tau_i \in \mathbb{Z}_3$

тогда если в i -ом столбце опло $1 \Rightarrow$ то входе 0
 конурдой $0 \Rightarrow$ невл. 1

$\Rightarrow$ то входе универсаль номера столбца, где
 прохождение обрыв

1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0

МТ

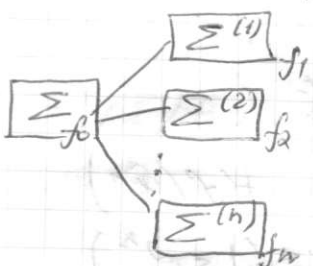
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ (4-4) & (12, 67) & (13, 5, 7) \end{matrix} \Rightarrow 4$$

$$\Rightarrow \tau(n) \leq 5 + 2 \lceil \log_2(n-2) \rceil$$

$$2 \ln \log_2(4n-3) \leq \tau(\Sigma_n) \leq 5 + 2 \lceil \log_2(n-2) \rceil \sim 2 \log_2 n$$

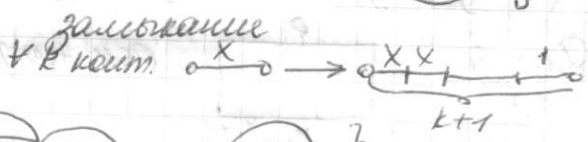
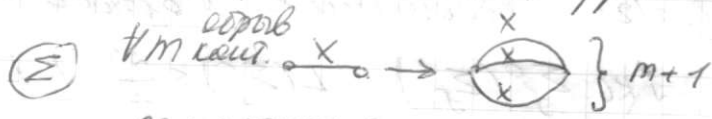
Полностью деидентомизация пока не получена

C / коррективование

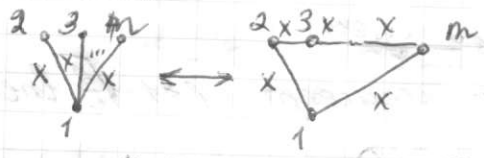


Σ - с/кorr, если $\forall i=1..n \ f_0 \in f_i$

Задача: для произв. заданн f построить min с/кorr. схему

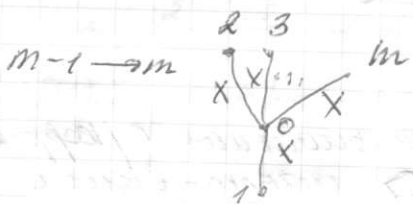


Идеальный вариант, можно было т.к. сложилось



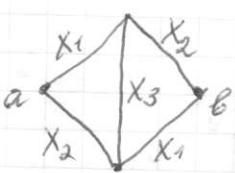
$m \rightarrow m+1$

1 соров



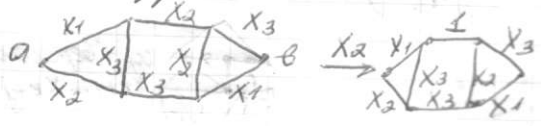
$m-1 \rightarrow m$

замыкание



$L(\Sigma) = 5$

Хотим сдвиг. + замыкание
прив. с/кorr - 10 коммутатов



$$m(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

$$f = x_1 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_1 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_1 = x_1 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3$$

Задано: дана функция f от n переменных, простейшая формула f состоит из 1 элемента

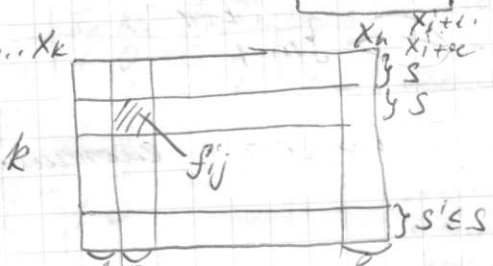
$$\forall f(\tilde{x}^n) \exists K \in \Sigma_f, L(f) \leq \frac{2^n}{n}$$

$$н.в. f(\tilde{x}^n) \forall K \in \Sigma_f, L(f) \geq \frac{2^n}{n}$$

ср. 1/2) Абелевский / Томазов / Матрица: $\forall f(\tilde{x}^n)$

$$\exists K \in \Sigma_f^0(\Sigma_f^3); L(\Sigma_f^0) \leq \frac{2^n}{n} (L(\Sigma_f^3) \leq \frac{2^n}{n})$$

Доказано:  все на разборе Лундберга

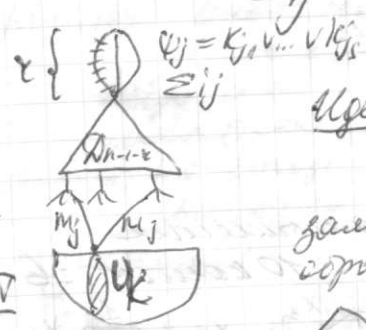


$$P_i \quad q = \left\lfloor \frac{2^k}{s} \right\rfloor f_{ij}(x) = \begin{cases} f(\tilde{x}), & \tilde{x}^n \in P_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$l \leq \frac{2^k \log(x)}{s}$$

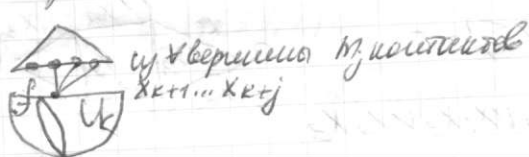
$B^k = P_1 \cup \dots \cup P_l$ - непересекающиеся подмножества, $l \leq 1 + \sqrt{\frac{2^k}{s} \ln(x)}$

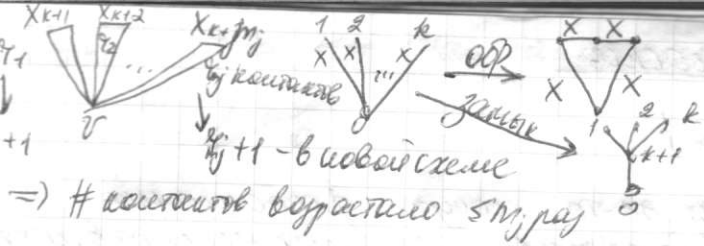
$$f = \bigvee_{i=1}^s \bigvee_{j=1}^s f_{ij} \quad \Sigma_{ij} \quad \text{Diagram showing a cylinder with circles labeled } \Sigma_{ij} \text{ and } \Sigma_{ij}$$



где: I, II, IV - приближенная с коррекцией
III $V \rightarrow \square$ метель-визит

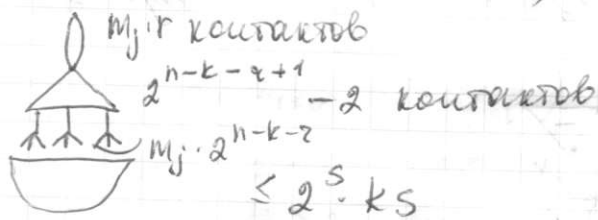
замая: $x_0 \rightarrow x_0 x_0$
сорт: $x_0 \rightarrow x_0 x_0$





$$2(L(I) + L(II) + L(IV)) + L(III) + \Delta L(III) = 20.11$$

$$= L(\Sigma) + \underbrace{L(I) + L(II) + L(IV) + \Delta L(III)}_{\substack{\text{год. 1-го в III} \\ \sim \frac{2^k}{n} \\ O(\frac{2^k}{n})}}$$



$m_j - \# \text{ контактов в } j\text{-м поддереве}$

$$k = \lfloor 2 \log_2 n \rfloor$$

$$r = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

$$s = \lfloor n - 2\sqrt{n} \rfloor$$

$$L(I) = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \cdot 2^r = \sum_{j=1}^{\ell} m_j \cdot 2^r = \left\lceil \frac{2^k}{s} \right\rceil 2^r \cdot \ell \sim$$

$$\sim \frac{2^{k+r}}{s} \ell \leq \frac{2^{2 \log_2 n + \sqrt{n}}}{n} = O\left(\frac{2^k}{n}\right)$$

$$L(II) \leq \ell \cdot 2^{n-k-r+1} = \left\lceil \frac{2^k}{s} \right\rceil \frac{2^r}{\ell} \ln \ell \cdot 2^{n-k-r+1} \leq$$

$$\leq \frac{2^{k+1} \log \ell}{k \cdot s} \sim \frac{2^{n+1} \log n}{n^{3/2}} = O\left(\frac{2^k}{n}\right)$$

$$L(IV) \leq \ell \cdot 2^5 k \cdot s = \left\lceil \frac{2^k}{s} \right\rceil \frac{2^4 \log \ell}{s} 2^5 k \cdot s \leq$$

$$\leq \frac{2^{k+4+s} \log n}{\sqrt{n}} = \frac{2^{2 \log_2 n + \sqrt{n} + n - 2\sqrt{n}} \log n}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{2^k}{n}\right)$$

$$L(III) \leq \sum_{j=1}^{\ell} 2^s m_j \leq \left\lceil \frac{2^k}{s} \right\rceil 2^{s+r} \leq \frac{2^{r+s+k}}{n} \leq$$

$$\leq \frac{2^{2 \log_2 n + n - 2\sqrt{n} + \sqrt{n}}}{n} = O\left(\frac{2^k}{n}\right)$$

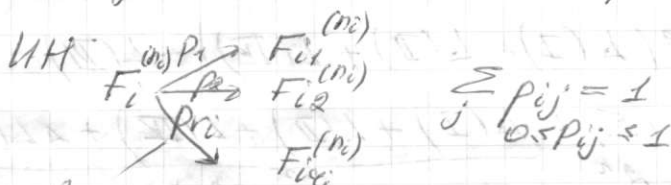
кой не асимптотический корректен и замоч (ссылка)

Надежность

ФД $B = \{F_1, \dots, F_m\}$

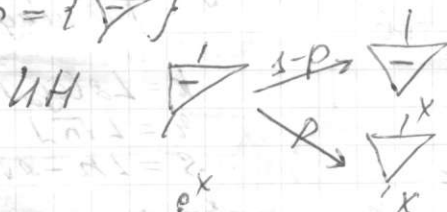


Буд. m -та могут работать независимо; исключим неисправности



вероятность перехода к схеме, реально отличающую от некой функции

$B = \{ \nabla \}$



Σ :



$$P(\Sigma) = 2p(1-p)$$

вер-ть неуправ. работы
(ровно 1 m -т выйдет из строя)

Какая задача - минимиз. вер-ть неуправ. работы

$\|f(x^n)\|$ и.о. факт. в Б с зад. ИИ схема

угодно надежно, если $\forall \epsilon > 0 \exists \Sigma_f^\epsilon$

$$P(\Sigma_f^\epsilon) \leq \epsilon$$

Диф ИИ - неуправляемость нелинейного типа

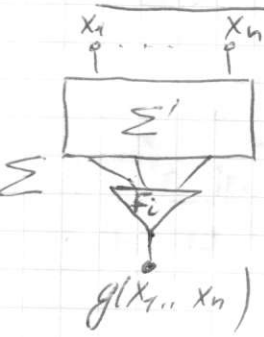
если $\forall i \quad c_i = 2^{x_i}$, при этом $p_{ij} > 0 \quad \forall ij$

$$Общн. \quad g = \min_i \min_j p_{ij}$$

Упр. 1 Если ИИ-нейманиовский $\Rightarrow \forall \Sigma$

$$P(\Sigma) \geq q$$

Докажем:



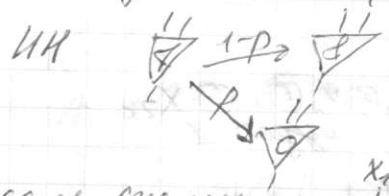
Рассм. схему Σ и фиксир. веса
 $P(\Sigma) \geq P(\text{неуп. граб. } \Sigma \text{ по } \mathcal{Z} = \{x_1, \dots, x_n\})$

$$g(x_1, \dots, x_n) = y$$

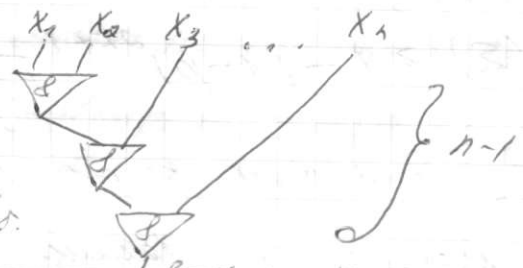
$$P(F_i \text{ перейдет в } F'_i = \bar{y}) \geq q$$

4.11.9.

Рассм. случай $B = \{1, 2, 3\}$



Рассм. схему



$$P(\Sigma) \geq P(\Sigma \text{ неуп. граб. по } \mathcal{Z} = \{1, 1, \dots, 1\}) =$$

$$= P(\text{неуп. граб. хотя бы на } 1 \text{ из } n) = 1 - (1-p)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Опр Формальная непереработанность — это непереработанность хотя бы на 1 из n -то схемы

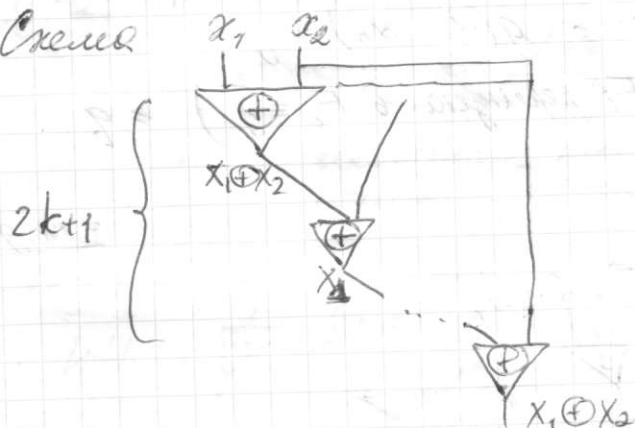
$$\text{Упр. 2 } P(\Sigma) \geq P^{\text{форм}}(\Sigma)$$

$$L(\Sigma) = L \Rightarrow P(\Sigma) \geq 1 - \prod_{i=1}^L (1-p_i)$$

Рассм. $B = \{ \text{AND} \}$ и ИИ $\text{AND} \xrightarrow{1-p} \text{AND}$

x_1, x_2	$\oplus$	1
00	0	1
01	1	1
10	1	1
11	0	0

Схема



$\tilde{L} = (0,0)$ - если ошибка, будет 1

$$P(\Sigma) \geq 1 - (1-p)^{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

Лем. 3 Для того, чтобы произв. ф-ция $f(x^n)$ можно было реализовать, сколь угодно надежно в B с ИИ, необход. и дост., чтобы в B можно было реализовать, сколь угодно надежно все ф-ции некой полной в P_2 системы φ_i .

Док-во: необх. очевидно

дост-но: $B_0 = \{V, \&, \vee\}$, пусть $f(x^n)$ реализуемо в надежной базе B_0 схемой Σ , $L(\Sigma) = L$

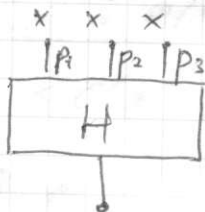


$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$D(\Sigma) \leq \sum_{i=1}^L p_i \leq L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

Повышение надёжности

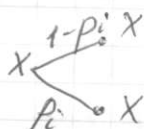
29.11



$$f_H = xy \vee yz \vee zx$$

$$P(H) = p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 p_3 (1 - p_2) + p_2 p_3 (1 - p_1) + p_1 p_2 p_3$$

и



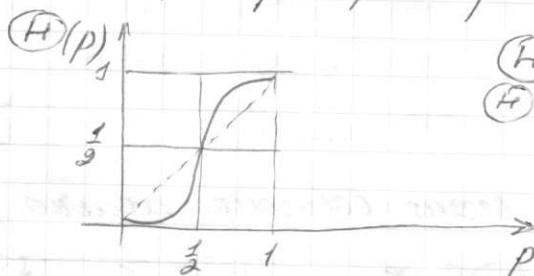
$$= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2 p_1 p_2 p_3 = \textcircled{H}(p_1, p_2, p_3)$$

Утв. 1 $\textcircled{H}(p_1, p_2, p_3)$ может не утв. по 4 переим.

$$\begin{aligned} \textcircled{H}(p_1 + \Delta, p_2, p_3) - \textcircled{H}(p_1, p_2, p_3) &= \Delta(p_2 + p_3) - \\ &- 2 \Delta p_2 p_3 \leq \Delta(p_3^2 + p_2^2 - 2 p_2 p_3) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{H}(p) := \textcircled{H}(p, p, p) = 3p^2 - 2p^3, \quad p = \min\{p_1, p_2, p_3\}$$

$$P(H) \leq 3p^2 - 2p^3 \leq 3p^2$$



$$\textcircled{H}'(p) = 6p - 6p^2$$

$$\textcircled{H}''(p) = 6 - 12p$$

$$0 < p < \frac{1}{2} \quad \textcircled{H}''(p) > 0$$

$$\frac{1}{2} < p < 1 \quad \textcircled{H}''(p) < 0$$

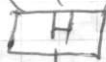
$$0 \leq p \leq \frac{1}{2}$$



3^l входов
3^{l-1} элементов

$$F \in B$$

$$p(F) = p < \frac{1}{2}$$



$$\Phi(\Sigma_0) = \Theta_0(p)$$



Σ_1

$$\Phi(\Sigma_1) = \Theta_1(p) = 3p^2 - 2p^3$$

$$\Theta_0: \Theta_2(p) = \Theta_1(\Theta_1(p)) = \Theta$$

$$\Theta_i(p) = \Theta_1(\Theta_{i-1}(p))$$

Упр. 2 $0 < p < \frac{1}{6}$, $\Theta_0(p) = \bar{O}(2^{-2^e})$

$$\Theta_1(p) < 3p^2$$

$$\begin{aligned} \Theta_2(p) &\leq 3(\Theta_1(p))^2 \leq \frac{1}{3}(3p^2)^2 = \frac{1}{3}(3p)^4 \\ &\leq \frac{1}{3}(3p)^{2^2} = \bar{O}(2^{-2^2}) \end{aligned}$$

$$\Phi(\Sigma_0) = \bar{O}(2^{-2^e})$$



$$F \rightarrow \Sigma_p^F$$

Пусть схема состоит только из элементов F

Что будет если заменить все F на Σ_p^F ?

$$L(\Sigma) = L$$

$$L(\Sigma_F^F) = \underbrace{3^L}_F + \underbrace{\sum_{i=1}^L 3^{i-1}}_H = 3 + \frac{3^L - 1}{2} = 3^L \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \approx c \cdot 3^L$$

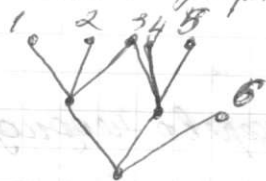
$$L(\Sigma'_{F \rightarrow \Sigma_F^F}) \leq c \cdot 3^L L$$

$$\begin{aligned} P(\Sigma') &\leq P(\text{Форм. кншур } \Sigma') \leq \sum_i P(F_i - \text{кншур}) \leq \\ &\leq O(2^{-2^L}) \cdot L \end{aligned}$$

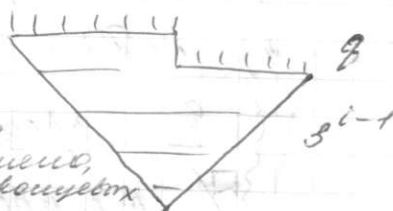
$$P < \frac{1}{6}$$

Рассмотрим rooted-деревья, такие что
 D-корневые, все сгруппировано к корню, степень
 захода ∇_D + в. вершины = 3 кроме, ч.б., 1 вершина

q - # концевых вершин
 m - # внутр. вершин



$$\begin{aligned} q &= 6 \\ m &= 3 \end{aligned}$$



Все
 внутренне,
 кроме концевых

корни сгруппированные деревья

Лемма 1 Пусть D-корни однокор. дерево с q
 концев. вершин и m внутр. вершин $\Rightarrow m = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$

$$\textcircled{*} \sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (\text{граф } G = (V, E))$$

средняя степень вершин
 графа

Если Γ вершина $v: \Phi(v) = 2$

$$2 \cdot 3 + (m-2) \cdot 4 + q = 2(q+m-1)$$

степень верш
 и число вершин

ребер на 1-м уровне
 # вершин

$$q = 2/m \quad m = \frac{q}{2}$$

Если все верн. стел. 4 кроше корня:

$$1 \cdot 3 + (m-1) \cdot 4 + q = 2(q + m - 1)$$

$$q = 2m + 1 \quad m = \frac{8-1}{2} = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor$$

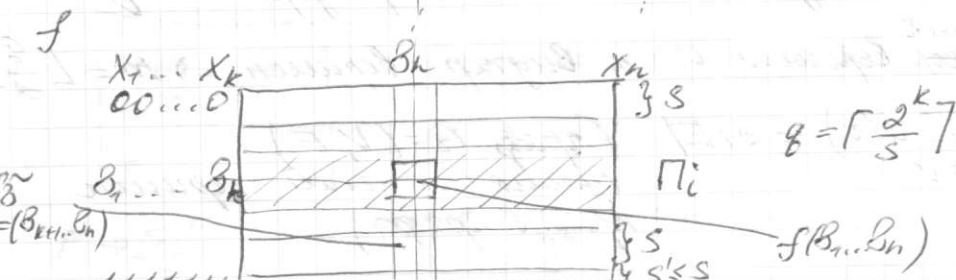
$1, 2, \dots, 8$ - номера височих вершин

лемма 2 $\forall i = \overline{1, q} \quad \exists \text{ дерево } T_i :$

- 1) ∇ кону. вершина D_i звл. конуей в $\mathcal{D}$
- 2) корень D_i звл. корнем $\mathcal{D}$
- 3) степенью входа ∇ верш. $D_i = 2$
- 4) $i \in D_i$



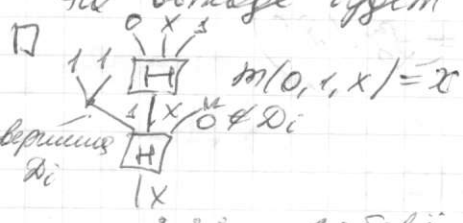
прочее кустар. подберёза, берёза,
т. е. преимущественно отнеродовые виды из
ряда веточков



A hand-drawn diagram on grid paper illustrating a neural network structure. At the bottom, there is a single input node labeled 'H' with a small circle below it. Three lines connect this input node to three hidden nodes, each also labeled 'H'. From these hidden nodes, lines connect to five output nodes at the top, each labeled 'H'. Some output nodes have additional lines extending upwards. Handwritten symbols include a summation symbol Σ and the number '2' near the top left, and another Σ and '2' near the bottom right.

$$\text{Звсн. верш.} = vx$$

то в центре будет x



заберёмся до корня и получим 2. 

$$\varphi_j(\tilde{x}^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, \dots, x_k) \in P_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$g_{\tilde{\alpha}}^i(\tilde{\alpha}^k) = \begin{cases} f(x_{i+1}, x_k, v_{k+i+1}, v_n) & \text{при } (x_{i+1}, x_k) \in \Pi_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$G^i_z = g^i_z \prod_{\substack{j \in \mathcal{D}^i \\ j \neq i}} \psi_j(\bar{x}^k)$$

$$H(z_1, \dots, z_g) \text{ Ф-я, реализуемая схемой } \Sigma_p^H$$

лемма 4

$$f(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = H(G_0^1(\tilde{x}^k) \dots G_0^s(\tilde{x}^k))$$

ак. ког

12

Теор. 1 $m = O(\frac{n}{\log_2 n})$, $B = \{H\} \cup B_0$,

$$B_0 = \{V, S, T\}, \quad \forall f(\tilde{x}^n) \exists \Sigma_f \in B$$

1. $L(\Sigma_f) \leq \frac{2^{n-1}}{n}$

2. $\frac{L^{B_0}(\Sigma_f)}{L(\Sigma_f)} = O(\frac{1}{n^m})$

Док-во.



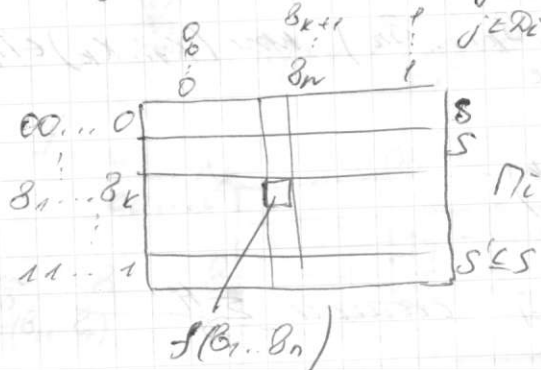
$$L_D \leq L \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$$

$$f(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = f_0^s(\tilde{x}^k)$$

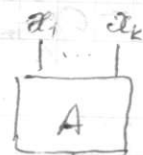
$$\psi_j(\tilde{x}^k) = \begin{cases} 1, & \tilde{x}^k \in \Pi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$g_0^i(\tilde{x}^k) = \begin{cases} f(\tilde{x}^k) & \text{при } \tilde{x}^k \in \Pi_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$G_0^i(\tilde{x}^k) = g_0^i(\tilde{x}^k) \vee \bigvee_{\substack{j \neq i \\ j \in \mathcal{R}_i}} \psi_j(\tilde{x}^k)$$

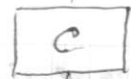


$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}=(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)} x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots x_n^{\sigma_n} f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^k) = \bigvee_{\tilde{\sigma}} K_{\tilde{\sigma}} f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^k)$$



$$K = x_1^{\sigma_1} \dots x_k^{\sigma_k}$$

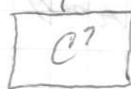
$$L_A \leq k + (k-1)2^k \leq k \cdot 2^k$$



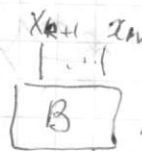
$$\psi_{\tilde{\sigma}}^i$$

$$g_{\tilde{\sigma}}^i = K_{i_1} \vee \dots \vee K_{i_s}$$

$$L(C) \leq g \cdot s \cdot 2^s$$



$$G_{\tilde{\sigma}}^i$$



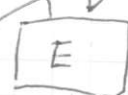
$$L = x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \dots x_n^{\sigma_n}$$

$$L(C') \leq g \cdot 2^s$$



$$L(E) \leq 2^{n-k}$$

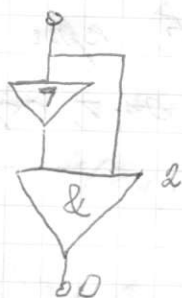
$$L(B) \leq (n-k)2^{n-k}$$



$$L(D) \leq 2^{n-k} \frac{g}{2} + 2$$



$$f = \bigvee_{\tilde{\sigma}} L_{\tilde{\sigma}} f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^k) \quad L(F) = 2^{n-k} - 1$$



$$k = \lfloor (m+3) \log_2 n \rfloor$$

$$s = \lfloor n - (3m+6) \log_2 n \rfloor$$

$$L(A) \leq k \cdot 2^k \leq ((m+3) \log_2 n) \cdot n^{m+3}$$

$$L(C) \leq g \cdot s \cdot 2^s \leq \frac{2^k}{s} \cdot s \cdot 2^{n - (3m+6) \log_2 n} \leq$$

$$L(C) \leq g \cdot 2^{n-k}$$

$$\leq 2^{n + (m+3) \log_2 n - (3m+6) \log_2 n} \leq \frac{2^k}{n^{2m+3}} = o\left(\frac{2^k}{n^{m+1}}\right)$$

менее $g_{\tilde{\sigma}}^i$ те больше 2^s , т.к. для вып. выражения $g_{\tilde{\sigma}}^i$

$$\Rightarrow \text{ф-ция } G_{\tilde{\sigma}}^i(\tilde{x}^1) \leq 2^s \cdot g \cdot 2^k$$

$$L(C') \leq g \cdot 2^s \leq \frac{2^k}{s} \cdot 2^s = 2^{n - (3m+6) \log_2 n + 2(m+3) \log_2 n - 2 \log_2 n}$$

$$\leq \frac{2^k}{n^{m+2}} = o\left(\frac{2^k}{n^{m+1}}\right)$$

$$L(D) \leq 2^{n-k-1} \cdot 2 \leq 2^{n-k-1} \cdot \frac{2^k}{5} \leq \frac{2^{n-1}}{5}$$

$$(B) \leq 1 \cdot 2^{n-k} \leq 1 \cdot 2^{n-(m+3) \log_2 n} \leq \frac{2^n}{n^{m+2}} = O\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L(E) = 2^{n-k} = O(L(B))$$

$$L(F) \leq L(E) = O\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^{n-1}}{n} + O\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right) = \frac{2^{n-1}}{n} \left(1 + O\left(\frac{2}{n^m}\right)\right)$$

$$\frac{L^{Bo}(\Sigma_f)}{L(\Sigma_f)} \leq O\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

Мен. Бю верре, кроме D
(в D нет р-ции исчисления)

Q m g.

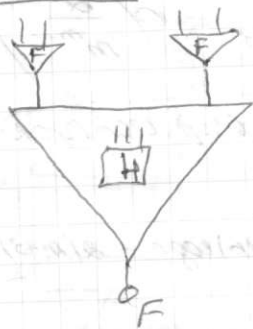
Прер. 2 $\forall \varepsilon > 0 \forall f(\bar{x}^n) \exists \Sigma_f^\varepsilon \in B$, при
условии, что H -асс. надёжной э-т, $0 < p \leq \frac{1}{2}$,

$$P(F) \leq p, F \in B_0$$

$$1) L(\Sigma_f^\varepsilon) \leq \frac{2^{n-1}}{n}$$

$$2) P(\Sigma_f^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Реш-во: $F \in B_0$



$$l = \lceil \log_2 n \rceil$$

$$A = \{a_1, \dots, a_s\}$$

$$p: A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\bar{p} = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} p(a)$$

$$\Delta p = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} |p(a) - \bar{p}|$$

Неравенство Маркова

$$\delta_\Theta - \text{для } a \in A: p(a) \geq \Theta \bar{p}$$

$$\Rightarrow \delta_\Theta \leq \frac{1}{\Theta} \quad (*)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} p(a) \geq \sum_{\substack{a \in A \\ p(a) \geq \Theta \bar{p}}} \Theta \bar{p} = \delta_\Theta |A| \cdot \Theta \bar{p} \Rightarrow (*)$$

Нер-во Чебышева

$$\delta_\Theta - \text{для } a \in A: |p(a) - \bar{p}| \geq \Theta$$

$$\delta_\Theta \leq \frac{\Delta p}{\Theta} \quad (**)$$

Доказ. $\Delta p = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} (p(a) - \bar{p})^2 \geq \frac{1}{s} \sum_{\substack{a \in A \\ |p(a) - \bar{p}| \geq \Theta}} \Theta^2 =$

$$= \delta_\Theta \Theta^2 \Rightarrow (**)$$

и т.д.

Мы будем то же-то при изучении свойств минимизации бинарных функций

Пусть все $f(x^n)$ принадлежат $\mathbb{Q}$, если

для $\delta_Q(n)$, δ отн. $\mathbb{Q}$

$$\delta_Q(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Сл. 1 Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{св}}$, ρ - целочисл. нестр. поря.

$$A_s, s=1,2,\dots \quad \rho(A_s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{н.в. } \rho(a) = 0$$

$$\rho(a) \geq 1, \quad \delta_0 \leq \frac{1}{\rho} \quad \mathcal{P}_{s \rightarrow \infty} \Rightarrow \text{возв.} \rightarrow 0$$

Пусть $i_k(f) = \# \{k\text{-верш. граней } I \text{ куба } B^n, I \in N_f\}$
 $\#$ — количество f разн. $n-k$

$$\overline{i_k(n)} = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} i_k(f)$$

Упр. 1 $\overline{i_k(n)} = C_n^k 2^{n-k-2^k}$

$$e(I, f) = \begin{cases} 1, & \text{если } I \in N_f \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Phi(I) = \# \{ f(\tilde{x}^n), I \in N_f \}$$

$$\text{Тогда } \overline{i_k(n)} = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} i_k(f) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_f \sum_{I \in \mathcal{G}_k^n} e(I, f) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_I \Phi(I) \quad (1)$$

Док-во: $\mathcal{G}_k^n$ — м-во всех k -верш. граней в B^n



$$\Phi(I) = 2^{n-2^k}$$

$$\left(\underbrace{\dots}_{k} \underbrace{\dots}_{n-k} \right)$$

$$|\mathcal{G}_k^n| = C_n^k 2^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} C_n^k 2^{n-k} 2^{2^n-2^k} \Rightarrow \text{упр.}$$

упр. 2

Упр. 2 $R_k(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} (i_k(f) - \overline{i_k(n)})^2$
 $\Rightarrow R_k(n) = 2^{n-2^k} C_n^k \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j (2^{2^j} - 1) \cdot 2^j$

Док-во: $e(I, I', f) = \begin{cases} 1, & \text{если } I \cup I' \in N_f \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

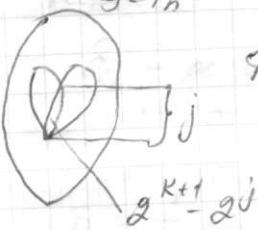
$$P(I, I') = \#\{f \in P_n : I \cup I' \subseteq N_f\}, \quad I, I' \in \mathcal{I}_k^n$$

$$P_j = \#\{f \in P_n : |I \cap I'| = 2^j\}, \quad j = 0 \dots k$$

$$P_\emptyset = \{f \in P_n : I \cup I' \subseteq N_f, \quad I \cap I' = \emptyset\}$$

$$D_k(n) = \left(\frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} i_k^2(f) \right) - \overline{i_k(n)}^2$$

$$S = \sum_{f \in P_n} i_k^2(f) = \sum_{f \in P_n} \sum_{I \in \mathcal{I}_k^n} \sum_{I' \in \mathcal{I}_k^n} e(I, I', f) = \sum_{I \neq I'} \sum_{I'} P(I, I') \quad (*)$$



$$P_j = 2^{2^n - 2^{k+1} + 2^j}$$



$$P_\emptyset = 2^{2^n - 2^{k+1}}$$

$$= \sum_j \binom{j}{n} 2^{n-j} \binom{k-j}{n-j} \binom{k-j}{n-k} P_j + \left(\binom{k}{n} 2^{n-k} \right)^2 - \frac{1}{2^{2^n}}$$

$$- \sum_{j=0}^k \binom{j}{n} 2^{n-j} \binom{k-j}{n-j} \binom{k-j}{n-k} \Big) P_\emptyset =$$

$$= \sum_j \binom{j}{n} 2^{n-j} \binom{k-j}{n-j} \binom{k-j}{n-k} (P_j - P_\emptyset) + 2^{2^n} \overline{i_k(n)}^2 \quad (A)$$

$$\boxed{\binom{j}{n} \binom{k-j}{n-k} = \binom{k}{n} \binom{j}{k}}$$

$$S' = 2^{2^n - 2^{k+1}} \sum_j \binom{k}{n} \binom{j}{k} 2^{n-j} (2^{2^j} - 1)$$

$$\Rightarrow D_k(n) = \frac{1}{2^{2^n}} (S' + 2^{2^n} \overline{i_k(n)}^2) - \overline{i_k(n)}^2 = \frac{1}{2^{2^n}} S' =$$

$$= \frac{1}{2^{2^n}} \left(2^{2^n + n - 2^{k+1}} \binom{k}{n} \sum_{j=0}^k \binom{j}{k} \binom{k-j}{n-k} 2^{-j} (2^{2^j} - 1) \right)$$

Лемма 1 У н.в. $f(\tilde{x}^n)$ $\psi(n) \overline{\psi(n)} \rightarrow \infty$

$$C_n^k (2^{n-k-2^k} - \psi(n) \sqrt{2^{n-k-2^k}}) \leq i_k(f) \leq C_n^k (2^{n-k-2^k} +$$

$$+ \psi(n) \sqrt{2^{n-k-2^k}}) \\ |i_k(f) - \overline{i_k(n)}| \leq \psi(n) C_n^k \sqrt{2^{n-k-2^k}} = \frac{\psi(n) \overline{i_k(n)}}{\sqrt{2^{n-k-2^k}}} \\ \frac{\psi(n) \overline{i_k(n)}}{(1)^2}$$

Док-во. Лемма Чебышева: $a_j = 2^{-j} / (2^{2^j} - 1)$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{1}{2} (2^{2^j} + 1) > 1$$

$$R_k(n) = C_n^k 2^{n-2^{k+1}} \sum_{j=0}^k C_n^j C_n^{k-j} a_j \leq C_n^k 2^{n-2^{k+1}} \sum_{j=0}^k C_n^j C_n^{k-j} \frac{1}{2^{2^j}} \\ \leq (C_n^k) 2^{n-k-2^k} = \frac{i_k(n) \overline{i_k(n)}}{2^{n-k-2^k}}$$

(1) = $\frac{\psi(n) \overline{i_k(n)}}{\sqrt{2^{n-k-2^k}}}$ если при таком (1) применить лемму Чебышева, получим такое же.

Лемма 2 У корни всех $f(\tilde{x}^n)$ отсутствуют граничные значения $> k_0 = \lceil \log_2 n \rceil$

Док-во. $i_{k_0+1}(n) = C_n^{k_0+1} 2^{n-(k_0+1)-2^{k_0+1}} \leq C_n^{k_0+1} 2^{n-\log_2 n - 2n} \leq n^{\log_2 n + 2} 2^{-n-\log_2 n} \leq 2^{-n-\log_2 n + \log^2 n + 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Лемма Маркова: $\rightarrow i_{k_0+1}(f) = 0$ для н.в. f

Лемма 3 У н.в. ф-ции f $|N_k| \cdot 2^{n-k} \leq n \sqrt{2^{n-k}}$

Док-во. $|N_k| = i_k(f)$, $k=0, \dots$

$$|N_k| \sim 2^{n-k}$$

$$(f) = \sum_{i=0}^n i_k(f)$$

$$\forall n.b. f(\tilde{x}^n) \quad i(f) \sim \overline{i_{k_2}(n)} + \overline{i_{k_2+1}(n)}$$

$$\text{Don-60} \quad \overline{i_k(n)} = C_n^k 2^{n-k-2^k}$$

$$\lambda_k = \frac{\overline{i_{k+1}(n)}}{\overline{i_k(n)}} = \frac{n-k}{(k+1) \cdot 2^{2^{k+1}}} \quad \text{yurb. no } k$$

$$\lambda_k < n^{-c} \quad \text{npv } k < k_2$$

$$k_2 = \lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor$$

$$\lambda_k < \frac{1}{\log_2 \log_2 n} \quad \text{npv } k > k_2$$

$$\lambda_k \sim \frac{n}{\ell \ln 2^{2^{\log_2 n - 1}}} = \frac{n}{\ell \ln 2^{\frac{1}{2} \log_2 n - 1}} = \frac{2n}{\ell \ln \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{k < k_2} \overline{i_k(n)} = o(\overline{i_{k_2}(n)}) \quad \Rightarrow \sum_k \overline{i_k(n)} \sim \overline{i_{k_2}(n)} + \overline{i_{k_2+1}(n)}$$

$$\Rightarrow i_k(f) \sim \overline{i_{k_2}(n)} + \overline{i_{k_2+1}(n)}$$

$$\overline{i_{k_2}(n)} = C_n^{k_2} 2^{n-k_2-2^{k_2}} \leq n^{k_2} 2^{n-k_2-2^{k_2}} + k_2 \log_2 n =$$

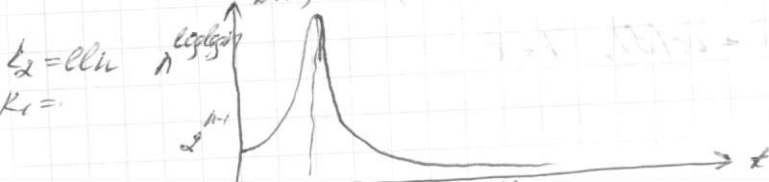
$$= 2^{n - \ell \ln n - \log_2 n + \log_2 n \ell \ln n} = n^{1 - \delta' \log_2 \log_2 n} \cdot 2^n \quad \delta' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{U.5} \quad g(f) = \# \{ \tilde{x} \in N_f : \exists I \subseteq N_f : \text{размер } I > k_1 \}$$

$$k_1 = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil + \ell \ln n$$

$$\forall n.b. f \quad g(f) \leq n^{-\frac{(1-\delta') \log_2 \log_2 n}{2}} 2^n, \quad \delta' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Don-60} \quad \overline{i_k(n)} \sim i_k(f)$$



Тер. 2 Пусть $\ell(f)$ - длина кратчайшей ДИР

$\ell^*(f)$ - ^{min} длина миним. ДИР

$L(f)$ - сложность мин. ДИР

$L^*(f)$ - min сложности кратчайшей ДИР

$$\underbrace{\Gamma_n - \log_2 n}_{\text{макс. разн. коэффициентов}} \leq \Gamma_n - \log_2 n \leq \ell^*(f) \leq L(f) \leq L^*(f)$$

Тер. 3 Для п.в. функции f

$$\frac{c \cdot 2^n}{\log_2 n} \leq \ell(f) \leq \frac{c' \cdot 2^n}{\log_2 n}$$

- с помощью градиентного алгоритма