1) Алексеев и др. "Задачи по курсу ОК" (2002 г)

Инвариантные классы. 1.09

СФЭ: $B = \{\&, \vee, \neg\}$

$\underset{x_1 \dots x_n}{f} \to \Sigma_f$

Теор: $\forall f \in P_2^n : \exists \Sigma_f ; L(\Sigma_f) \lesssim \frac{2^n}{n}$.

Рассм. P_2, $E_2 = \{0; 1\}$

$f^n : E_2^n \to E_2$

$f(x_1 \dots x_n)$

P_2^n — ф-ции от $x_1 \dots x_n$

$Q \subseteq P_2$, тогда Q — инвар. класс, если $\forall$ ф-ции замкнут. относ. опер.:

1) добав. и изъят. фиктив. перем.
2) переимен. перем. (без отождеств.)
3) подстановка конст ~~на~~ 0 и 1 на места переменных.

Примеры: $\varnothing$, P_2

№1. $L = ?$

$f(x_1 \dots x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$ $c_i \in \{0, 1\}$, $i = 0 \dots n$

— инвариант.

$$\lambda_n = \sqrt[2^n]{2^{n+1}} = 2^{\frac{n+1}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n+1}{2^n}} = 1$$

$$\sigma_1 = \log_2 1 = 0.$$

№2. M

$$|M^n| \le 3^{C_n^{[n/2]}}$$

число моног. ф-ций

$$C_2^{[n/2]} \le C\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

$$\to |M^n| \le 3^{C\frac{2^n}{\sqrt{n}}}$$

$$1 \le \sqrt[2^n]{3^{C\frac{2^n}{\sqrt{n}}}} \le 3^{C\frac{2^n}{2^n\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \to \sigma = \log_2 1 = 0.$$

$$\sigma_M = 0.$$

① Q – шивар. класс

$$f(x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)\cdot l(x_1 \dots x_n)$$

1) $g \in P_2^n$

2) $l \in L^n$

3) $\forall$ сущест. перем. l – сущест. и в g.

$$2^{2^{n-1}} \le |Q^n| \le (2^{n+1}-2)\cdot 2^{2^{n-1}} + 2 \le 2^{n+1}\cdot 2^{n-1}$$

прим.: 1) $l = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$

Теор: Если Q – инвар. класс, $\sigma = 0$, то $\forall f \in Q^n$, $\exists \Sigma_f$: $L(\Sigma_f) = \overline{o}\left(\frac{2^n}{n}\right)$

Д/з: № 1.1
1.2
1.3
1.4 (3-10)
(для инвар. классов посчитать характ.).

Опр. Замкнутый класс: 15.09

$A \subseteq P_2$

$[A] = A$ A – замкнут.

т.е. суперпоз. нельзя получить ф-ции не из A.

№1.2(2) Инв. кл. Q

$f^n, g_1 \dots g_n \in Q$

$h(y_1 \dots y_m) = f(g_1(y_1 \dots y_m), \dots, g_n(y_1 \dots y_m)) \in Q$

пример: $\{x_1, \overline{x}\}$
ф-ей можем получить
$x = \overline{\overline{x}} \notin Q$
$\Rightarrow$ не замкнут. класс

№1.4(6) Q, $\Rightarrow$ инвар.?
мн-во симметр. ф-ций
(перестановка перемен.)

$\Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = f(x_{i_1} \dots x_{i_n})$

прим: x, xy, $x \oplus y \oplus z$

Нельзя добавить фиктив. перемен.:

x	y	f=x	f=y	далее
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	1	0	
1	1	1	1	

$f=x$ и фиктив. перем. y

и тогда их нельзя поменять местами (x и y)

нет. что будет тогда

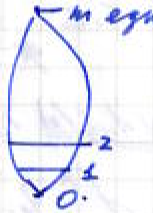
$f_3 = y$, а x — фиктив. перем.

7) $Q_2 = Q_1 \cup \{ \ldots \}$ — инвариант. класс.

Мощность: $|Q_2^n| \le \sum_{m=0}^{n} 2^{m+1} \overset{\text{геом. прогр.}}{=} \frac{2(2^{n+1}-1)}{2-1} \le$

$\le 2^{n+2}$

$0, 1 \ldots n$



B^n — m единиц a^n

m 2 1 0

a_2 a_1 a_0

2^{m+1} значения ф-ции

$\lambda_n = \sqrt[2^n]{|Q_2^n|} \le \sqrt[2^n]{2^{n+2}} = 2^{n+2/2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

$1 \le \lambda_{Q_2} \le 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$\sigma_{Q_2} = 0$

9) Q_3 $\deg(f) \le k$

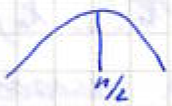
$\sum x_{i_1} \ldots x_{i_n}$

Полином: $x_1 \ldots x_k \oplus \ldots$ 1

$C_n^k + C_n^{k-1} + \ldots + 1 \le$ ($k < \frac{n}{2}$)

Число ф-ций: $|Q_3^n| \le 2^{(k+1)n^k}$

C_n^i



$n/2$

$\Rightarrow$ тогда C_n^k — max элемент

$\le (k+1) C_n^k = (k+1) \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \le$

$\le \underbrace{(k+1)}_{\text{столько элемент. конъюнк.}} n^k$

$= \sqrt[2^n]{|Q_3^n|} \le \sqrt[2^n]{2^{(k+1)n^k}}$

$\lambda_n \le 2^{\frac{(k+1)n^k}{2^n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

$1 \le \lambda \le 1$ $\lambda = 1$

$\sigma_{Q_3} = 0$.

10) Q_4 : $f(\tilde{x}^n)$

не инвар. класс

$l(f) \le 2^{n+1}$

$zx \oplus zy \oplus zxy \in Q_4$

$z = 1$: $x \oplus y \oplus xy \notin Q_4$

N/4 $f \in Q$ $\quad \exists \Sigma_f : \ L(\Sigma_f) \lesssim \sigma_2 \frac{2^n}{n}$

$S \subseteq Q$: $f(x_1 \dots x_n) = \overline{f(\overline{x_1} \dots \overline{x_n})}$

Найти минимал. содержащ. замкн. класс все самодвойств. ф-ции.

$x_1 \dots x_n$	f

самодвойст. (т.е. по половине значений → → всю ф-цию можно определить).

P_2 : $\forall g(x_1 \dots x_n)$, тогда $\exists f(x_0 x_1 \dots x_n) \in S$: такая что $f(0, x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$

x_0	$x_1 \dots x_n$	f
0		
0		g
0		
1		
:		
1		

Минимал. самодв. $= P_2$.

Сложность алгоритмов.

{ДМТ — детерминир. машин. Тьюринга
{НМТ — не — " —

распознаватели. м.Т.

A-алфавит ; $\Lambda \in A$ пустой символ.

головка считыв.: 1) менять состояние Q-мн-во сост.
2) стирать символ
3) записывать симв.

q_0' - принимающее сост

q_0'' - отвергающ. сост.

q_1 - начал. сост.

Программа: $\Pi = \{(aq \to bq'\{R, L, S\})\}$

$a, b \in A$

$q, q' \in Q$

Опр: Детерминир.: $\forall aq$ в $\Pi \leq 1$ команды $(aq \to \dots)$

Недетерм. — иначе.

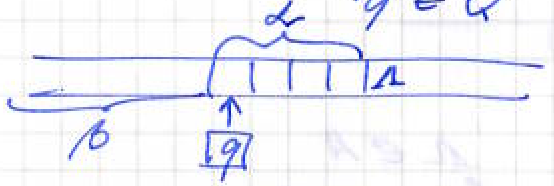
ДМТ : $M_* = (A, Q, \Pi, q_0', q_0'')$

$\exists\ \alpha \in A^*$: $\alpha = a_{i_1} \dots a_{i_2}$ слово

Конфигурация: мгновенное описание состояния ленты:

$K = \beta q \alpha$

$\beta, \alpha \in A^*$
$q \in Q$



начальная конф.: $K_1 = q_1 \alpha$

~~конц~~ заключ. конф.: K_0: $q = q_0'$ или $q = q_0''$

Вычисление: M на α_i

$K_1 \xrightarrow{\Pi} K_2 \to \dots K_i \xrightarrow{\Pi} K_{i+1} \to$

$K_1 = q_1 \alpha$

1) бесконечно: M – зацикл. (неостан) на α

2) конечно (допустимо): K_0

Говорят, что M принимает α:

$K_1 = q_1 \alpha$ $K_0 = \beta q_0' \gamma$ в приним. сост.

или отвергает α:

$K_1 = q_1 \alpha$, нач. сост. $K_0 = \beta q_0'' \gamma$ в отверг. сост.

Задача. — "да", "нет"

Дано: пр: f $\alpha \in A^*$
Вопрос: пр: $f \in M$?

(0101011) слова длины 2^n из 0 и 1.

если не монот, то должны остановиться в отверг. сост.

монотон

Язык: $L \subseteq A^*$ - мн-во слов, которые кодируют конкрет. данные задачи, ответ на которые "да".

Распознавание языка L: построить МТ: M, такую, что если $\alpha \in L$, то останавливалась бы в q_0'; а $\alpha \notin L \to q_0''$

Пусть L - язык (задача)

МТ. M распознает L (или решает задачу), если 1) $\forall \alpha \in A^*$ M останавл. на α.

2) $\alpha \in L$ M ост. в приним. сост.

3) $\alpha \notin L$ M ост. в отвергающ. сост.

Пусть есть слово $\alpha \in A^*$ и M останавл. на α.

Время работы M на α ($t_M(\alpha)$):

$k_1 \to k_2 \to \ldots \to k_0$ — это число тактов работы МТ до остановки.

M распознаёт язык L со сложностью
$t_L(n) = \max\limits_{|\alpha|=n} t_M(\alpha)$

$\{O(n), O(n^2)$ — порядок роста$\}$

P-класс задач (языков):

$L \in P$, если $\exists$ МТ M, котор. решает задачу L со сложн. $t(n) = pol(n)$. (полиномиальн. сложность)

№2.1 $A = \{0, 1, \Lambda\}$

$\alpha \in \{0,1\}^*$

1) L_1, не содержащ. 111

$t(n) = O(n)$

	q_1	q_2	q_3
0	$0Rq_1$	$0Rq_1$	$0Rq_1$
1	$1Rq_2$	$1Rq_3$	$1Rq_3''$
Λ	q_0'	q_0'	q_0'

Док-ть, что линейная сложность ? (да)

~~В~~ Пробегаем по каждой ячейки один раз (например даже если до конца)

2) L_2 — симметричные слова
прим: 1001
11011

и сложность $t_L(n) = O(n^2)$

Действие

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$\Lambda q_2 R$	$q_2 R$	$\Lambda q_4 L$	$q_4 L$	$q_5 R$
1	$\Lambda q_5 R$	$q_2 R$	q_0''	$q_4 L$	$q_5 R$
Λ	q_0'	$q_3 L$	q_0'	$q_1 R$	$q_6 L$

1001
001
00
0
...

	q_6
0	q_0''
1	$\Lambda q_4 L$
Λ	q_0' ← приним. символ.

$t(\ ) \le n + (n-1) + \ldots + 1 = \{$арифм. прогр.$\} = n\left(\frac{n+1}{2}\right) = O(n^2)$.

№22 $A = \{0, 1, \Lambda\}$; $\alpha \in \{0,1\}^*$

1) L_3 : α: число единиц делится на 3.

прим $111 \in L_3$
$01000101 \in L_3$
$1100 \notin L_3$

$t(n) = ?$

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$\Lambda q_1 R$	$R q_2$	$R q_3$	
1	$q_2 R$	$q_3 R$	$R q_1$	
Λ	q_0'	q_0''	q_0''	

отсчитываем по 3 единицы

2) L_4: число 0 = ~~на~~ числу 1.

прим: $01 \in L_4$
$00111 \notin L_4$

Алгоритм: 1010010
~~сделать так, чтобы вначале 0, в конце~~

1) 10 → стираем
01 → стираем
00 → стираем, заменяя 1-ую встреченную единицу на 0.
11 → стираем, —"— 0 на 1

Д/З 2,2 (3-5)

~~01~~
~~10~~
~~11~~ ~~ааа~~ → $0 \to 0$

~~00~~ → $1 \to 0$

~~00~~0011

	q_1	q_2	q_4	q_5	q_3	q_6
0	$q_2 R$	$q_4 R$	$0 q_4 L$	$0 q_5 L$	$q_1 R$	$1 q_5 L$
1	$q_3 R$	$q_1 R$	$0 q_5 L$	$1 q_5 L$	$q_6 R$	$1 q_6 R$
Λ	q_0'	q_0''	q_0''	$q_1 R$	q_0''	q_0''

$t(n) = n + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n}{2} \approx n^2$

22 13

L_1 : $110 \in L_1$
$11000 \notin L_1$
$0 \notin L_1$

$\boxed{\text{Пр: } 1010.1110.}$

Алгоритм: 1) ~~10~~ → стираем
0 → q_0''
(т.е. нулей больше)
~~11~~ → 0 → 1

~~1~~1000
$\downarrow$
~~1~~00 → $\notin L_1$

	q_1	q_2	q_4	~~q_{st}~~	q_3
0	q_0''	$O_{\text{стереть}}\, q_1 R$	$0 q_1 L$		$1 q_4 L$
1	$q_2 R$	$q_3 R$	$1 q_1 L$		$1 q_3 R$
Λ	q_0'	q_0'	$q_1 R$		q_0'

Сложность $= n^2$ (такая же)

92

№4 L_2 : $\alpha = \underbrace{11 1 \ldots 1}_{n \geq 2 \text{ раз}}$

$\alpha = 1111 \in L_2$
$\alpha = 101010 \in L_2$

Алгоритм : $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$
$\alpha \Lambda \alpha_1 \alpha_2$

берем α_1 и смотрим
все остал $= \alpha_1$; да – ок
если нет, то $\alpha_1 \alpha_2$
и смотрим все ост. $= \alpha_1 \alpha_2$
но слово не длинее $\left[\frac{n}{2}\right]$
, т.е. одинаковые половинки

$O(n^3)$ – сложн.

22.2 Д/З:

Класс NP.

28.03.06

Недетерминированная маш. Т (НМТ):
т.е. $\exists$ по меньшей мере 2 команды:

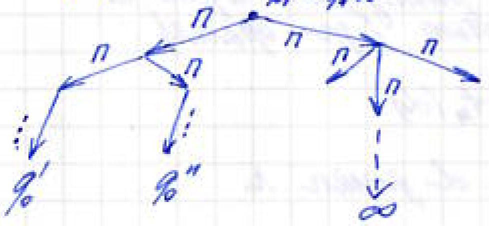
$$\begin{cases} aq \to bq' \begin{Bmatrix} R \\ L \\ S \end{Bmatrix} \\ aq \to cq'' \begin{Bmatrix} R \\ L \\ S \end{Bmatrix} \end{cases}$$

и есть выбор куда перейти (альтернатива)

Вычисление:

ДМТ : $K_1 \xrightarrow{n} K_2 \xrightarrow{n} \ldots$

НМТ: М на α
$\Downarrow$
дерево вычислений на α :



Опр: НМТ принимает слово α, если $\exists$ ветвь в D, заканчивающаяся в $\underline{q_0'}$, K_0

(в принимающ. сост.)

Опр: НМТ отвергает слово α, если $\not\exists$ ветвь в D с q_0'
(на всех ветвях – останавлив. в q_0'')

Опр: НМТ М
α – М принимает со сложностью $t_M(\alpha)$
(или за время)
{ рассматрив. на одной ветке)

Задачи: "да", "нет" — о распознавании св-в.

т.е. прим.: дано: число n в десятичн. сист. счисления

вопрос: явл. ли n чётным?

Язык: $L \subseteq A^*$
(это такие входы, ответ на которые будет "да")

в примере: это все чётные числа.

Опр.: НМТ M распознаёт язык L (решает задачу L), если для $\forall \alpha \in A^*$:
(слова) (алфавит)

1) M на всех ветвях останавливается
2) M принимает $\alpha \iff \alpha \in L$

Опр.: НМТ M распознаёт язык L со сложностью (по времени):

$t_M(n) = \max\limits_{|\alpha|=n} t_M(\alpha)$

слова α длины n

Опр.: $L \in NP$, если $\exists$ НМТ, которая распознаёт L со сложностью $t(n) \le pol(n)$.

$P \subseteq NP$

Верно ли, что $P \overset{?}{=} NP$?
(нерешённая задача)

Наша задача: язык $L \in NP$?

(надо построить НМТ, решающую задачу с $pol(n)$)

Пусть есть: Дано.
Вопрос:
на вход: $|\alpha| = n$.

Если мы можем придумать сертификат:

1) $|\beta| \le pol(|\alpha|)$

$B = \{\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k\}$ — мн-во сертификатов

2) если знаем B, то можем дать однозначный ответ.

3) β проверка сертификата $\le pol(|\alpha|)$ со сложност. на ДМТ.

$\Rightarrow$ тогда $L \in NP$.

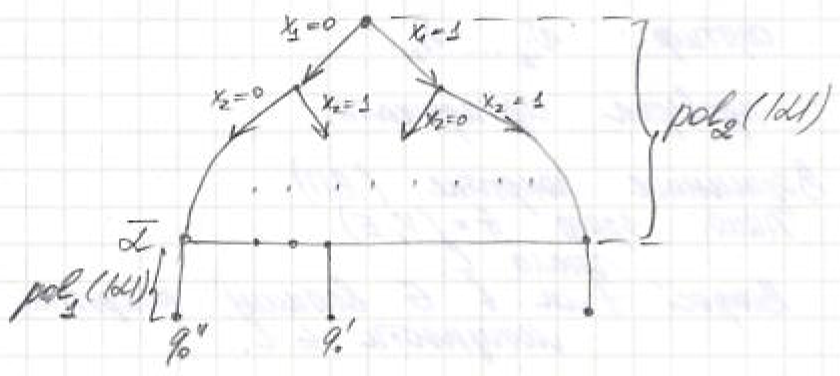
Кук (1971г ?)

① Задача ВЫП (о выполнимости КНФ)
Дано: КНФ K
Вопрос: $\exists \alpha : K(\alpha) = 1$?

$K = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee z)$ $\longrightarrow$ если хотя бы на 1 наборе есть 1, то КНФ выполнима

$\rightarrow B = \{\tilde{\alpha}^n : \tilde{\alpha}^n \in E_2^n\}$

длина сертификата = кол-во перемен.



② Задача 0-1: целочисленное линейное програм. — ЦЛП.

Дано: м-ца A, вектор $b \in$ целочислен.

Вопрос: $\exists x \in E_2^k$: $Ax \geq b$?

Решение:

0-1 ЦЛП $\in NP$?

Сертификат: x (всевозможные решения)

Проверка: $A \cdot x$ = алгоn (n^2) и сравнение Ax с b = = линейная сл-ть.

③ Задача Клика:

Дано: граф $G=(V,E)$, число k

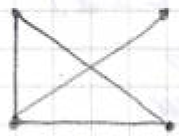
Вопрос: $\exists$ ли в G k-клика?

(полный граф на k вершинах)

$\Downarrow$

т.е. все вершины соединены.

Решение: клика $\in NP$

G:  $k=3$.

сертиф: $v_{i_1} \dots v_{i_k}$

проверка сертификата.

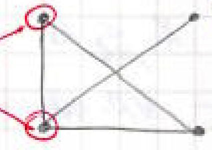
④ Вершинное покрытие (ВП)

Дано: граф $G=(V,E)$, число l.

Вопрос: $\exists$ ли в G вершинн. покрытие мощности $\leq l$.

т.е. $V' \subseteq V$ — вершин. покр.

$\forall l = (v, w) \in E$: либо $v \in V'$, либо $w \in V'$

вершин. покрытие. 

Решение: ВП $\in NP$

сертиф: $v_{i_1} \dots v_{i_l}$

Опр: Пусть есть 2 языка: L_1, L_2. будем говорить, что $L_1 \leq_{pol} L_2$ — L_1 полиномиально сводится к L_2.

$L_1 \subseteq A^*$
$L_2 \subseteq B^*$

Если $\exists$ ДМТ M-преобразователь:

1) $\underset{\in A^*}{M(\alpha)} = \underset{\in B^*}{\beta}$

2) осущест. с полином. сложн. $\leq pol(|\alpha|)$

3) $\alpha \in L_1 \iff \beta \in L_2$

Прим:

Опр.: L – NP-полный язык:
1) $L \in NP$
2) $\forall K \in NP: \; K \le_{pol} L$

Теор (Кука): ВЫП – NP-полный язык.

Д) L_1 – NP-полный

$L_1 \le_{pol} L \Rightarrow L$ – NP-полный

(т.е. сначала сводим K к L_1, а потом L_1 к L)

Док, что NP-полный язык:

① 01-ЦЛП $\Rightarrow$ NP-полный язык?
1) $\in NP$ (доказано)
2) ВЫП $\le_{pol}$ 01 ЦЛП ?

ВЫП:
$K = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \dots \,\&\, D_m$
$D_i = (x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_{r_i}}^{\sigma_{r_i}})$
где $i = 1 \dots m$
$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0 \\ x, & \sigma = 1 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{свести}}$ 01-ЦЛП: $A;\ b$

$A = (a_{ij})_{n \times m}$

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in D_i; \\ -1, & \bar{x}_j \in D_i; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$b_i = 1 - \{$число отрицан. в $D_i\}$
$i = 1..m$

$\Rightarrow A\tilde{\alpha} \ge b$?
($\exists$ набор $\tilde{\alpha}$)

Прим.: $K_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

Построить м-цу и вектор осуществляющ. сведение.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ← если входит в скобку, то 1, если с отрицанием, то -1.

$b = (1; -1; -2)$

Пример набора: $\alpha = (0, 0, 1)$

Проверка:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ge b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

? проверить (покоординатно сравниваем)

Прим.: $K_2 = \bar{x}_1 (x_1 \vee \bar{x}_2) x_2$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad b = (0; 0; 0)$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ нет таких α

---

② Клика – NP-полный язык?
1) $\in NP$
2) ВЫП $\le_{pol}$ клика

Вып.: ... $\xrightarrow{\text{свести}}$ клика: $G=(V,E)$ число k

#

V:

D_1: $x_{11}^{\sigma_1}$ ... $x_{12}^{\sigma_2}$

D_2: . . .

⋮

D_m: . . .

(все литеры из скобок — это все вершины)

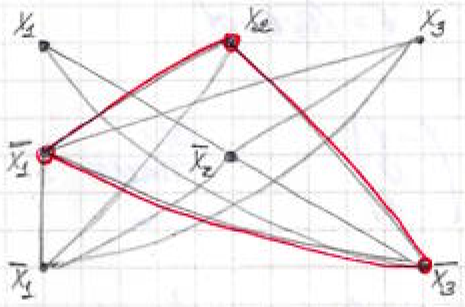
$E = \{(v,w)\} \setminus$ минус

1) $v, w \in D_i$: не проводим ребро

2) $v = x_j$, $w = \overline{x_j}$ — не проводим ребро

$k = m$.

Прим.: $D = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$



$k=3$

$\overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}$

$0\ 1\ 0$ ← набор на котором $=1$.

клик

Д/З: $K_1 = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_4)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

$K_2 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_3} \vee x_4)\overline{x_4}$

Постр.: A, b; G, k

1) $K_1 = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_4)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$b = (0; 0; 0; -2)$

Набор: $\alpha = (0; 0; 0; 1)$

Проверка: $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \geq \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{= b}$$

2) $K_2 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_3} \vee x_4)\overline{x_4}$

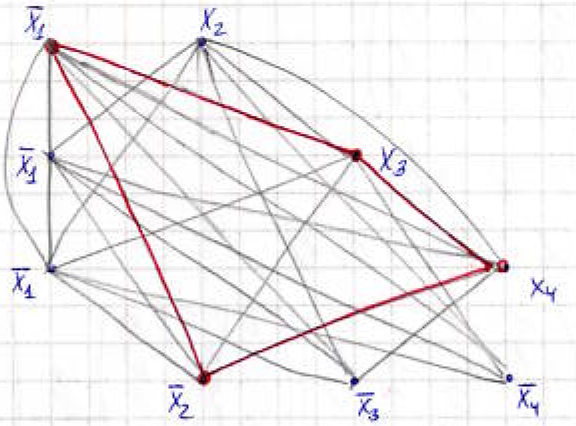
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$b = (1; 0; 0; 0)$

Набор: $\alpha = (1; 0; 0; 0)$

Проверка: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

③ $K_1 = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_4)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

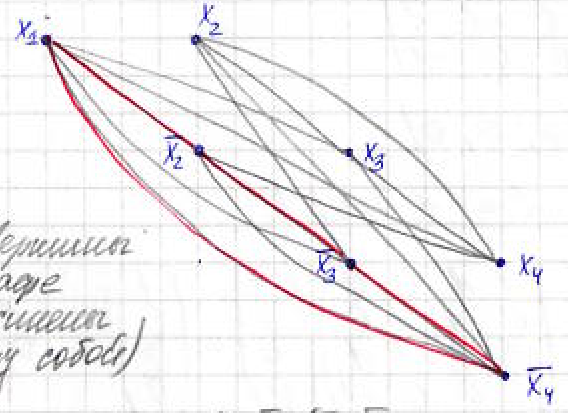


$k = 4$

клик

	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_3	x_4
набор:	0	0	1	1

④ $K_2 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_3} \vee x_4)\overline{x_4}$



$\underline{\underline{k = 4}}$

(все вершины в графе соединены между собой)

	x_1	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	$\overline{x_4}$
набор:	1	0	0	0

клик

13.10

① ВП

Дано: $G = (V, E)$
число ℓ

Вопрос: $\exists\, V' \subseteq V$
$|V'| = \ell$
V' – вершин. покрытие ?

V' – в.п., $\forall\, e = (v, w) \in E$
$\begin{cases} v \in E' \\ w \in V' \end{cases}$

Задача:
ВП – NP-полная:
1) ВП $\in$ NP
2) клика $\leq_{pol}$ ВП

Клика:

$G_1 = (V_1, E_1)$
число k

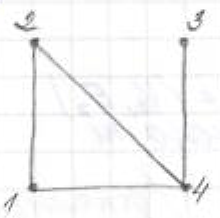
ВП:

$G_2 = (V_2, E_2)$
число ℓ
$V_2 = V_1$ верш
$E_2 = (V_2 \times V_2) \setminus E_1$ ребра

$G_2 = \overline{G_1}$
$\ell = |V_2| - k$

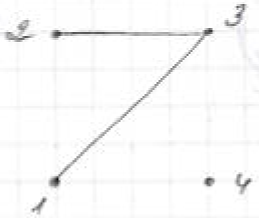
Прим:

G_1:



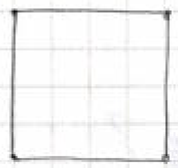
$k = 3$

G_2, $\ell = ?$

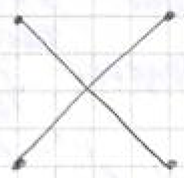


$\ell = 1$

Прим:

G_1: 

$k=3$

G_2: 

$l=1$

② НМ (независимое мн-во)

Дано: $G=(V,E)$
число m

Вопрос: $\exists V' \subseteq V$
$|V'| = m$
V' — независим. мн-во?

Опр: V' — независим. мн-во
$\forall v,w \in V'$: $(v,w) \notin E$

Задача: НМ — NP-полная
1) НМ $\in NP$
$v_{i_1} \ldots v_{i_m}$ (полином. ал-м)
2) клика $\le_{pol}$ НМ

клика:
$G_1 = (V_1, E_1)$
число k

НМ: $G_2 = (V_2, E_2)$
число m

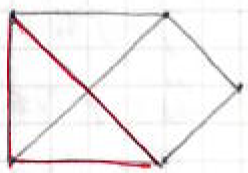
$G_2 = \overline{G_1}$ (дополнение до G_1-клик)
$m = k$

G_1: 

G_2: 

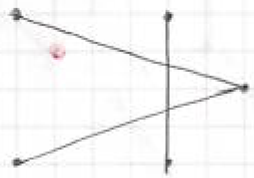
$G_2 = \overline{G_1}$

Прим:

G_1: 

$k=3$

G_2, $m = ?$

G_2: 

$m=3$

③ ПМ — покрытие мн-в
Дано: $\{S_1 \ldots S_n\}$
$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$, число t

Вопрос: $\exists S_{i_1} \ldots S_{i_t}$
$\bigcup_{j=1}^{t} S_{i_j} = S$ = ?

Задача: ПМ — NP-полная
1) ПМ $\in NP$:
сертификат: $S_{i_1} \ldots S_{i_t}$
2) ВП $\le_{pol}$ ПМ

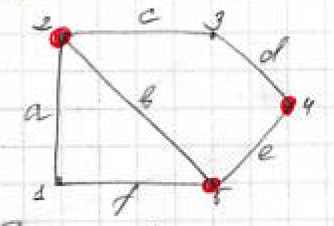
ВП:
$G = (V,E)$
число l

ПМ:
$\{S_1 \ldots S_n\}$
число t

$|V| = n$; $E = \{e_1 \ldots e_m\}$

$S_i = \{e_j : e_j = (v_i, v_k)\}$
$i = 1..n$; $t = l$.

Прим.:



$\ell = 3$

$\{2, 4, 5\}$ – ВП

т.е. все ребра, содержат одну вершину из ВП а вторая не из ВП.

те ребра котор. выходят из ...ой вершины

$S_1' = \{a, f\}$

$S_2' = \{a, b, c\}$

$S_3' = \{c, d\}$

$S_4' = \{d, e\}$

$S_5' = \{b, e, f\}$

$t = 3$

① Линейное программирование.
1988 г. P (полином. ал-тм)

② Распознавание простоты:
Дано: $N = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_0$
Вопрос: явл. ли число N простым?

$\log_{10} N$ $\Rightarrow$ полиномиал. ал-тм
P 2002 г.

③ Изоморфизм графов:
Дано: G_1, G_2

Вопрос: $G_1 \cong G_2$?

(изоморфизм: так отразить вершины что все ребра сохранятся)

④ Факторизация числа
$N =$
(не решена)

ВЫП

Опр.: k-КНФ $\Rightarrow$ КНФ(...) $\leq k$ букв

Задача: k-ВЫП
Дано: k-КНФ K
Вопрос: $\exists \alpha$: $K(\alpha) = 1$?

① 3-ВЫП – NP полная
1) 3-ВЫП $\in NP$
2) ВЫП $\leq_{pol}$ 3-ВЫП

ВЫП:

K

3-ВЫП:

3-КНФ K'

$(y_1 \vee \ldots \vee y_m) \to (y_1 \vee y_2 \vee z)(y_3 \vee \ldots \vee y_m \vee \bar{z})$

$m \geq 4$

$y_1 \ldots y_m$ z
$a_1 \ldots a_m$ 0
1

{z – новая буква}

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$
$a_i = 1$; $i \geq 3$

(3-КНФ – в $\forall$ скобке по 3 буквы)

Прим.: $K = (x \vee y \vee z \vee u)(\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{u} \vee \bar{v} \vee \bar{w})$

1) $(x \vee y \vee p)(z \vee u \vee \bar{p})(\bar{y} \vee \bar{z} \vee q)\underbrace{(\bar{u} \vee \bar{v} \vee \bar{w} \vee \bar{q})}_{(\bar{u} \vee \bar{v} \vee m)(\bar{w} \vee \bar{q} \vee \bar{m})}$

② 2-ВЫП $\in P$ (полиномиал. алгоритм)

$(\bar{x} \vee y)(x \vee z) \to (y \vee z)$ (добавляем скобку)

$x \cdot \bar{x} = 0$ (нельзя таких)

$\{ K = \ldots$ n штук

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2) \}$

Прим: $K_1 = (x \vee \bar{y})\bar{x}y$

$x \vee \bar{y}$

$\bar{x} \vee 0$ $\Rightarrow$ $K = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee 0)\underbrace{(y \vee 0)(\bar{y} \vee 0)}_{y\bar{y} = 0}$

$\bar{y} \vee 0 \to$ добавить скобку

не выполнима

$K_2 = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee z)(\bar{z} \vee x)$

$(\bar{x} \vee z)(y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y})(x \vee \bar{x})(z \vee \bar{z})(y \vee \bar{y})$

$K_3 = (x \vee y)(y \vee z)(z \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z})$

$(\bar{x} \vee x)(\bar{y} \vee y)(x \vee \bar{z})x(\bar{x} \vee z)\bar{x} = 0$

№2.11 (3,4):

3) Дано: $P = K_1 \oplus \ldots \oplus K_l$

Вопрос: $\exists \alpha: P(\alpha) = 0$?

Прим: $xy \oplus xz \oplus yz \Rightarrow$ набор $(0 \ldots 0)$

$x \oplus y \oplus z \oplus 1 \Rightarrow (1 0 \ldots 0)$

Полиномиал. ал-мы.

(+ ф-ции однозначно записыв. пол. Жегалкина

$\Rightarrow$ есть 0. значение.

4) Дано: $P_1 \ldots P_m$

Вопрос: $\exists \alpha: P_i(\alpha) = 0$?

1) $L \in NP$
α

2) 3-ВЫП $\leq_{pol} L$

$K = D_1 \& \ldots \& D_m$

$P_i = P(D_i) \oplus 1$

№2.12 (1):

Дано f:

Вопрос: $f \notin L$?

1) Полином Жегалкина $\in P$. $\Leftarrow L_2$

$f(x_1 \ldots x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n$
$c_i \in \{0,1\}$
$i = 0,1..n$

2) ДНФ: $D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_l$

Задача: L_3:

Дано: $D = K_1 \vee \ldots \vee K_l$

Вопрос: $\exists \alpha: D(\alpha) = 0$?

Прим: $D_1 = xy \vee xz \vee \bar{y}\bar{z} = 0$ на (011)

$D_2 = xy \vee xz \vee yz \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \equiv 1$

1) $L_3 \in NP$

2) ВЫП $\leq_{pol} L_3$

$\frac{\text{ВЫП:}}{K}$ $\frac{L_3:}{D = \bar{K}}$

Правила: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
(де Моргана) $\overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

$\overline{(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(z \vee \bar{x})} = \bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}x$

1) $L_2 \in NP$
2) $L_3 \leq_{pol} L_2$

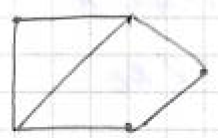
D_1 $\quad D_2$

$\exists \alpha$: $D_1(\alpha) = 0$ $\quad D_2 \notin L$

$\nexists \alpha$: $D_1(\alpha) = 0$, $D_1(\alpha) = 1$ $\quad D_2 \in L$ $\quad D_2 = 1 \vee xy = 1$

Д/з: 1) КЛИК < ВП

G:

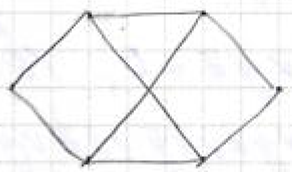


$k = 3$

Построить для ВП и для НМ

2) ВП < ПМ

G:



$k = 3$

Построить для ПМ.

3) ВЫП < 3-ВЫП

$K = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee u \vee v)(y \vee z \vee \bar{u} \vee \bar{v} \vee p \vee q)$

Эквивалентные преобразования управляющих систем. (УС). 27.10

$\Sigma_1 = \Sigma_2$, $f_1 = f_2$ — эквивалентны

① Формулы над $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$

Опр: F_1 и F_2 — эквивалентные формулы, если $f_1 = f_2 \Rightarrow F_1 = F_2$.

Прим.: $F_1 = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z)$
$F_2 = xy \vee xz \vee yz$

$m(x, y, z) = (00010111)$ — медиана

$\Rightarrow F_1 = F_2$

Опр.: Тождество t: $F_1 = F_2$, где F_1 и F_2 — эквивал. ф-лы.

Применить тожд. t к $F \to F_1$
$\Rightarrow F = F_1$.
(находим подформулу $= F_1$ и заменяем на F_2)

Система тождеств $T = \{t_1, t_2 \ldots\}$ полна, если $\forall F_1, F_2$: $F_1 \xrightarrow{T} F_2$.

Прим.: t: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ — это значит, что вместо x и y можно подставлять ф-лы, т.е. t: $\overline{A \vee B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$F = \overline{\underbrace{xy}_{A} \vee \underbrace{zu}_{B}} \overset{t}{=} \overline{xy} \cdot \overline{zu}$

<u>Теор</u>: Для эквивал. преобраз (ЭП) формул в $B=\{xy, x\vee y, \bar x\}$ существ. конечная полная система тожд. T:

1) $\overline{x\vee y}=\bar x\cdot\bar y$ $\qquad 0=x\cdot\bar x$

2) $\overline{xy}=\bar x\vee\bar y$

3) $\bar{\bar x}=x$

4) $(x\vee y)z=xz\vee yz$
5) $xy=yx$
6) $(xy)z=x(yz)$
7) $x\cdot x=x$

8) $x\cdot\bar x\cdot y=x\cdot\bar x$
9) $x\vee y=y\vee x$
10) $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$
11) $x\vee x=x$
12) $x\vee y\bar y=x$

13) $x=x\bar y\vee xy$
14) $x\cdot\bar x=y\cdot\bar y$

Пусть есть: $F_1\rightarrow F_1'$
$F_2\rightarrow$ "F_2'

F_1 и F_2 — приводим к совершенной ДНФ v КНФ ?

<u>№3.7</u> (1): $F_1=\overline{\bar xy\vee\bar yz\vee\bar zx}$

$F_2=xyz\vee\overline{\bar x\vee y\vee z}$

$F_1\overset{(1)}{=}(\overline{\bar xy\vee\bar yz})\,\overline{\bar zx}\xrightarrow[2,3]{(1)}\overline{\bar xy}\cdot\overline{\bar yz}\cdot(z\vee\bar x)\xrightarrow{2,3}$

$\rightarrow(x\vee\bar y)(y\vee\bar z)(z\vee\bar x)\xrightarrow{4}$

$\rightarrow xyz\vee xy\bar x\vee x\bar zz\vee x\bar z\bar x\vee\bar yyz\vee\bar yy\bar x\vee\bar y\bar zz\vee\bar y\bar z\bar x\xrightarrow{11,12}$

$\rightarrow xyz\vee x\bar x\vee z\bar z\vee\bar yy\vee\bar x\bar y\bar z=F_1'$

$F_2\xrightarrow{1}xyz\vee\overline{\bar x\vee y}\cdot\bar z\xrightarrow{1}xyz\vee\bar x$

$\Rightarrow\quad F_1'=F_2'$ — эквивал.

№3.7(2) неэкв. <u>№3.7(3)</u> $F_1=\overline{x\vee y}\vee\overline{y\vee z}\vee\overline{z\vee x}$

$F_2=\bar x\cdot\overline{yz}\vee x\cdot\overline{y\vee z}$

$F_1\xrightarrow{1}\bar x\bar y\vee\bar y\bar z\vee\bar z\cdot\bar x\xrightarrow{13}$

$\rightarrow\bar x\bar yz\vee\bar x\bar y\bar z\vee\bar y\bar zx\vee\bar x\bar y\bar z\vee\bar xy\bar z\vee\bar x\bar y\bar z\xrightarrow{5,11}$

$\rightarrow\bar x\bar y\bar z\vee\bar x\bar yz\vee x\bar y\bar z\vee\bar xy\bar z$

$F_2\xrightarrow{1,2}\bar x(\bar y\vee\bar z)\vee x\cdot\bar y\cdot\bar z\xrightarrow{4}\bar x\bar y\vee\bar x\bar z\vee x\bar y\bar z\rightarrow$

L: Дано: F_1,F_2 — ф-лы в $B=\{xy, x\vee y, \bar x\}$

Вопрос: верно ли, что $F_1\neq F_2$?
1) $L\in NP$?
α: $F_1(\alpha)\neq F_2(\alpha)$

2) ВЫП $\leq_{pol}$ L

ВЫП:
K

L:
F_1, F_2
$F_1=K$
$F_2=0=x\cdot\bar x$

Если $\exists\alpha$: $K(\alpha)=1$

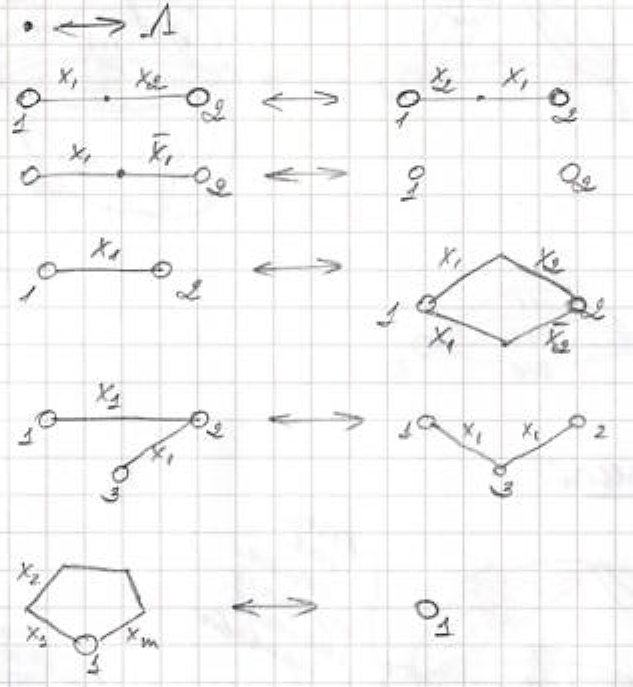
№3.9(1) $B = \{xy, x \oplus y, 1\}$

Построить конечную полную сист. тожд.

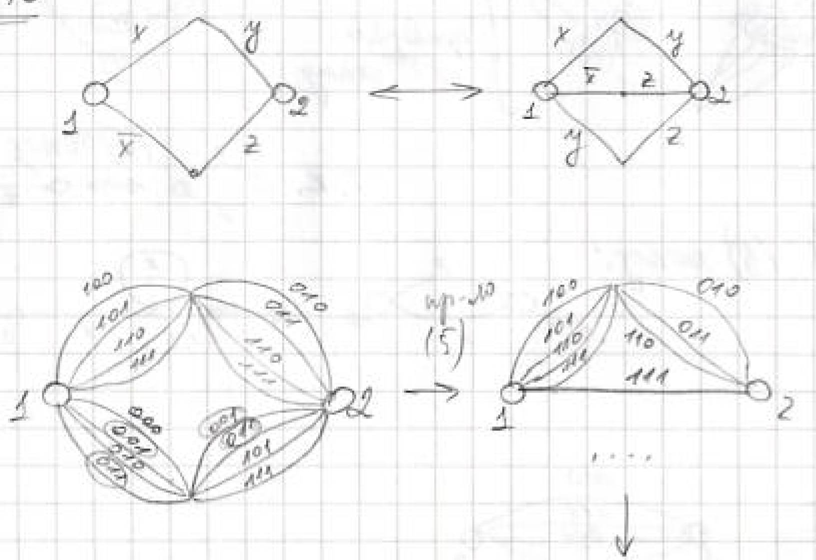
1) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$
2) $xy = yx$
3) $(xy)z = x(yz)$
4) $xx = x$
5) $1 \cdot x = x$
6) $x \oplus y = y \oplus x$
7) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
8) $x \oplus x \oplus y = y$
9) $x \oplus x = y \oplus y$ ← запись "0" (как (14))

Д/з: §3: № 3.7 (4-6), (7)
№ 3.9 (2)

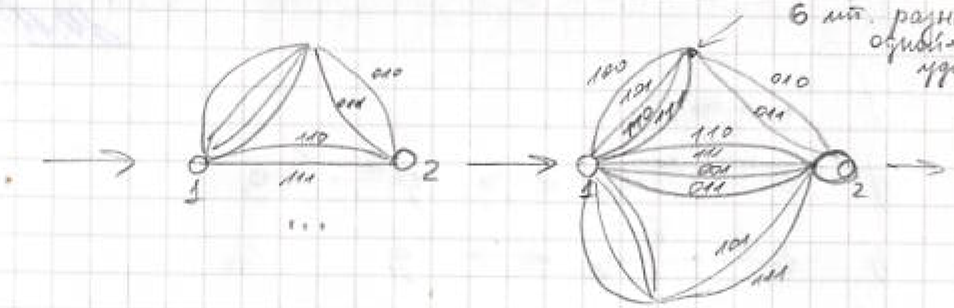
1)
2)
3)
4)
5)
6)

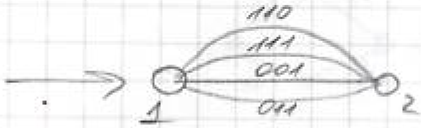


№13

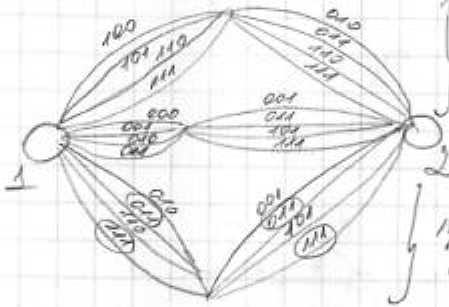


Если x $\bar{x}$
1 0
и все наборы y и z



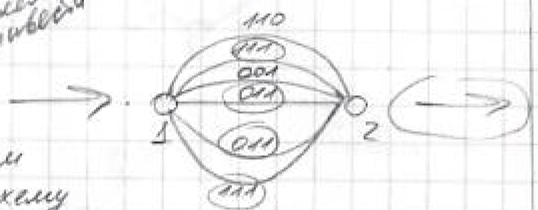


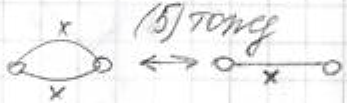
2ая схема:



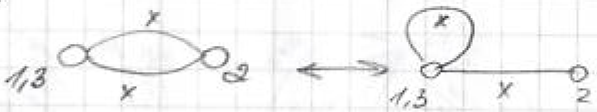
как 1ая схема → сразу можем привести

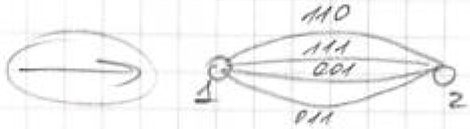
приведём 2ую схему



Т. к.  (Б) тожд

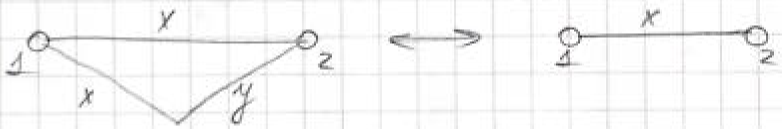
Из (Б) тожд:

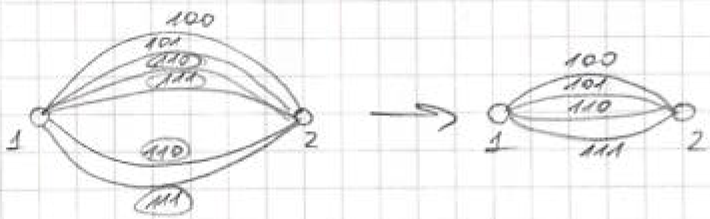


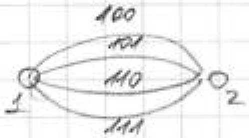


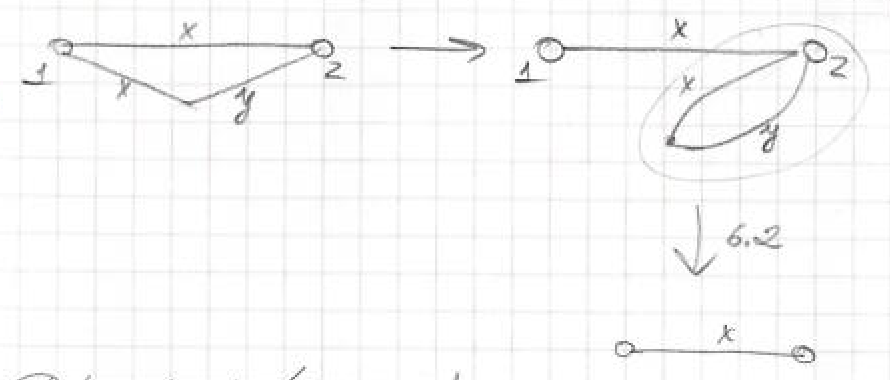
№ 11

№ 4.1 (Б):

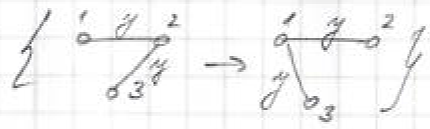


1) 

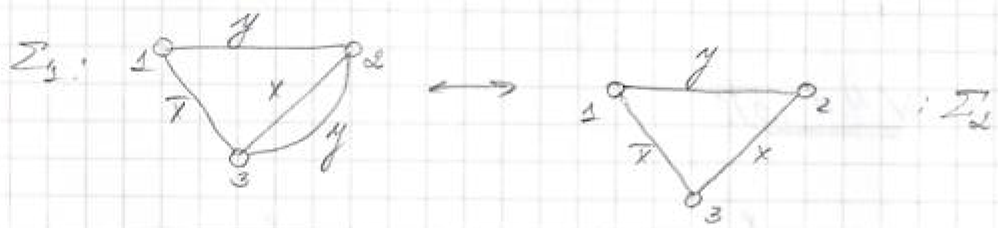
2) 



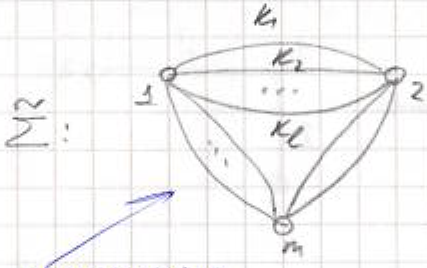
Д/з 4.1 (3б, 9, 12)

правила: 

№4.1 (12)



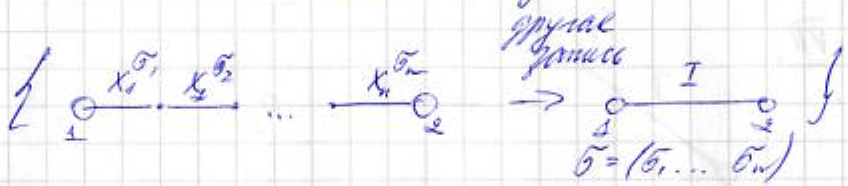
24.11



$f_{ij} = k_1 \vee \ldots \vee k_l$, если $f_{ij} \neq 0$

каноническ. схема

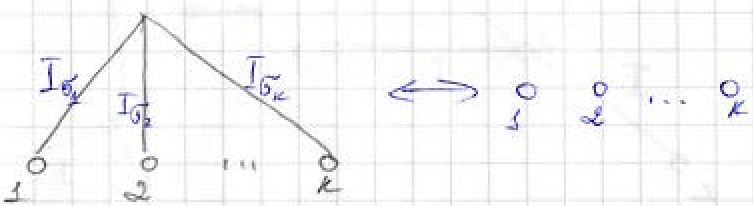
Система обобщенных тождеств:



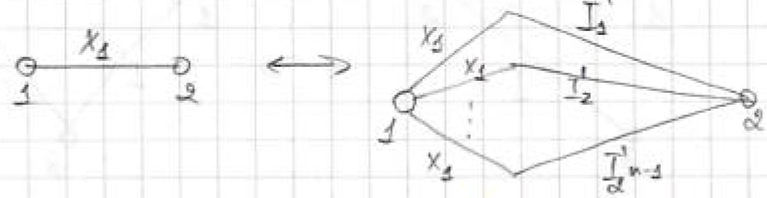
I. $\cdot \longleftrightarrow \varnothing$

II. 

где $\tilde{I}$ – перестанов. контактов в I.

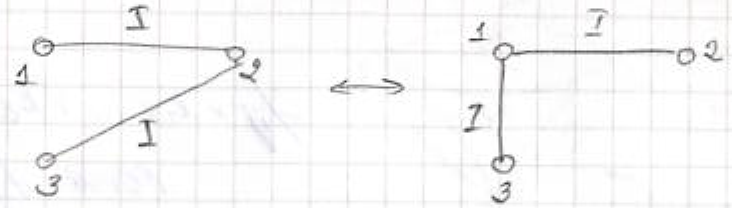
III. 

$\sigma_i \neq \sigma_j$ при $i \neq j$

IV. 

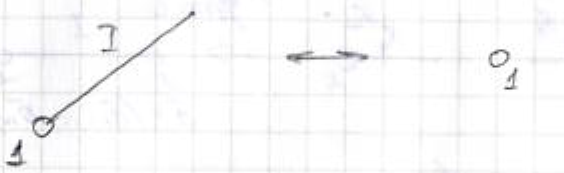
где I_i' – цепочки $x_2 \ldots x_n$

V.

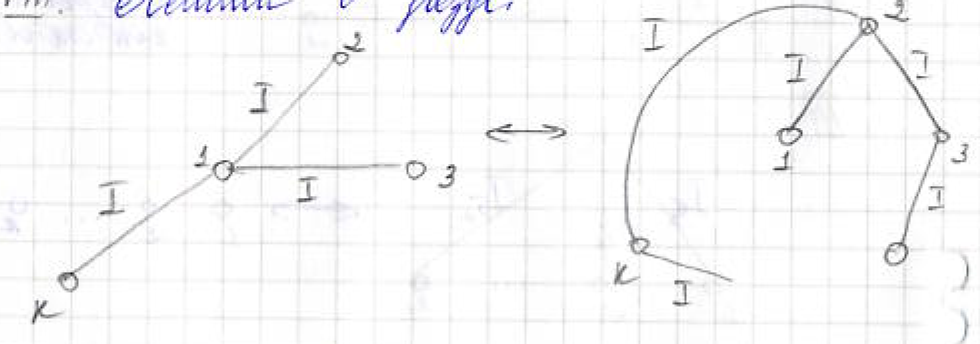


VI.

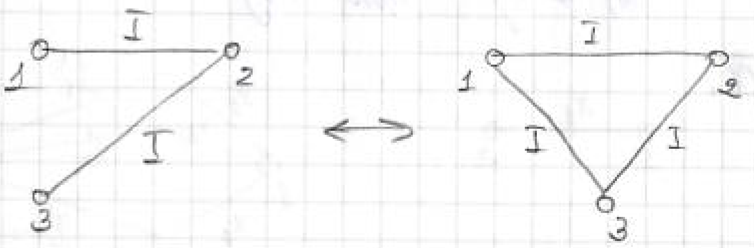
VII.



VIII. Лемма о звезде:



IX.

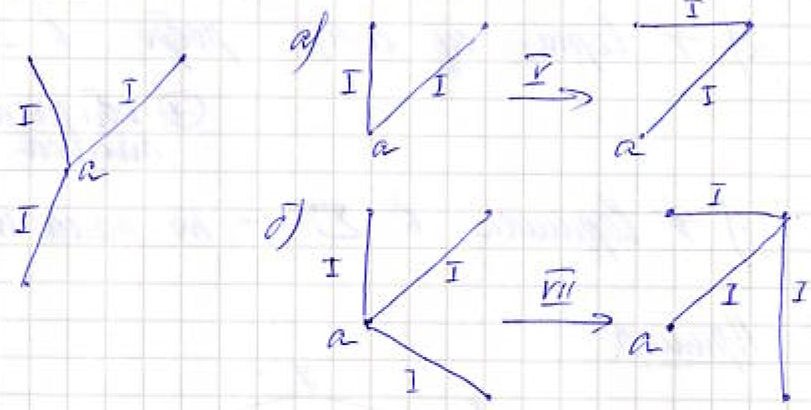


Приведение к канонич. системе: $\Sigma \to \tilde{\Sigma}$

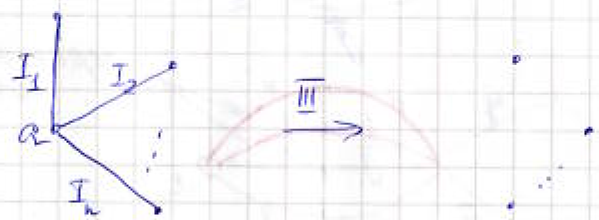
1)

2) a – вершина исходной сх. Σ; (не полюс)

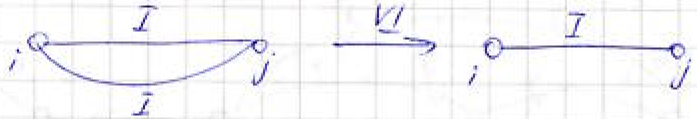
1.



2.



3)



4)

— подсхема Σ'

Полюса в подсхеме:

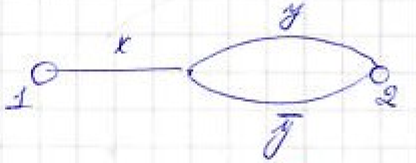
1) полюса Σ
2) $\forall$ верш., из котор. ребро в $\Sigma \setminus \Sigma'$ } (*)

(*) обязательно полюса в Σ'

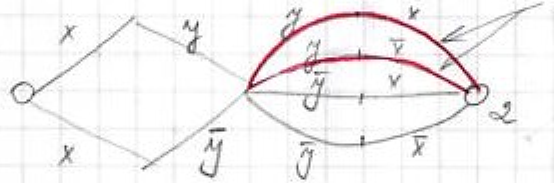
3) $\forall$ вершина в Σ' — по желанию.

Пример:

Σ:

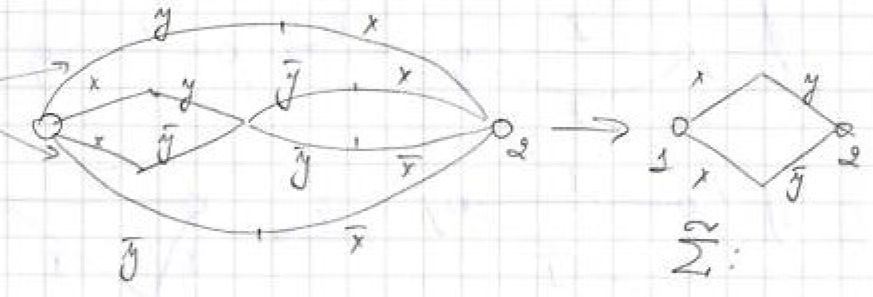


1)



переносим наверх

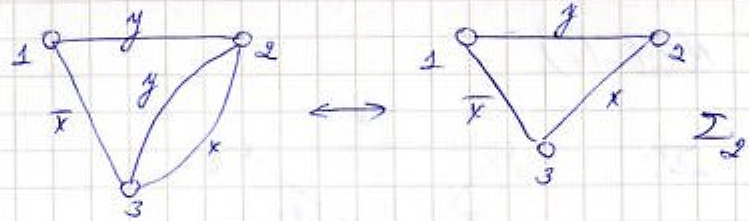
только эти оставляем



Σ':

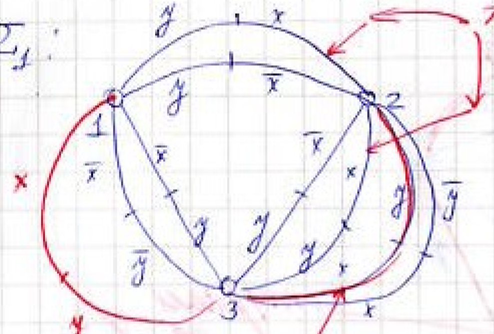
N1

Σ_1:



Σ_2

Σ_1:

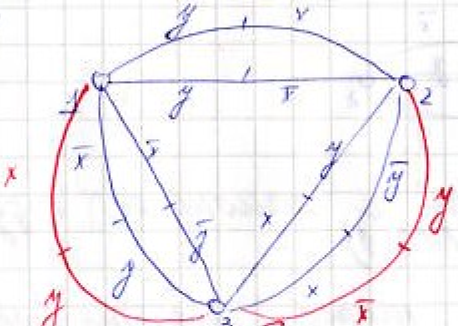


топол. IX

по IX рисуем

стираем (их 2)

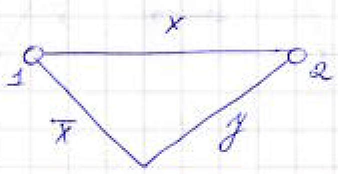
Σ_2:



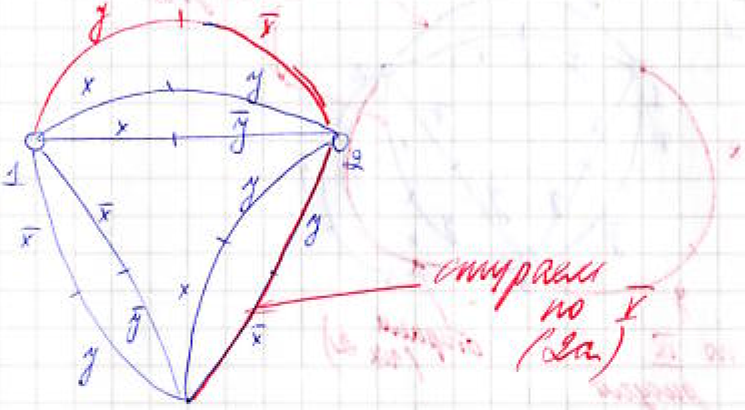
рисуем по IX топол.

№41 (8)

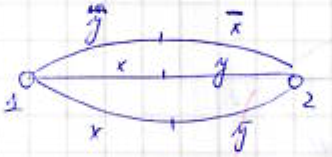
Σ:



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



Д/з: Привести к канонич. виду: 4.1 (10, 9)

С помощью тожд. док-ть экв.: 4.1 (3, 8, 9, 12)

КС (контакт. схемы) (Σ, f)

Рассмат. поломки:

1) обрыв контакта:

x^{σ} ——— $\quad$ $\cdot\ x\ \cdot = 0$

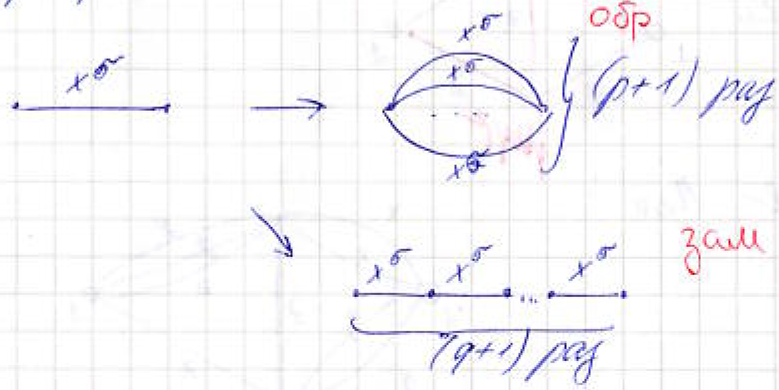
$x = \sigma$ – проводит
$x = \bar{\sigma}$ – не проводит

2) замыкание контакта: ——— $= 1$

Задача $N_{p,q}$: $\le p$ конт. обрыв, $\le q$ конт. замыкуд.

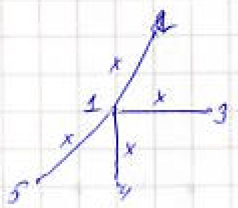
Самокорректирующаяся схема Σ: если в ней и произойдут поломки в рамках $N_{p,q}$, то ф-ция проводимости не изменится.

1) Дублирование:



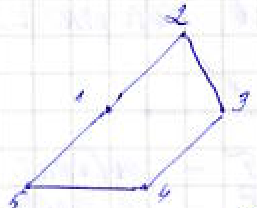
2) **Звезда:**

Σ:



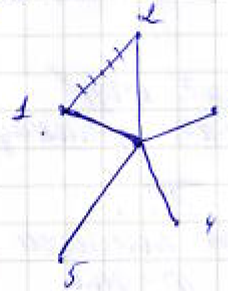
(l)

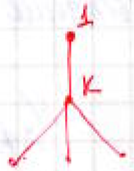
Обрыв 1 контакта:



(l+1)

Замыкание 1 контакта:

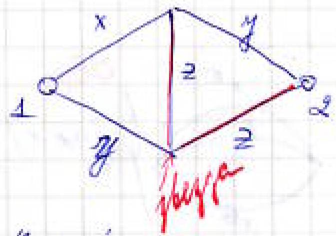




(l+1) контакт

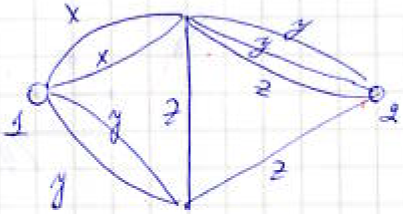
Пример:

Σ:

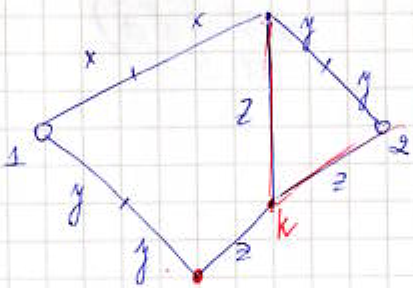


$n_{1,0}$; $N_{0,1}$ ≤ 9

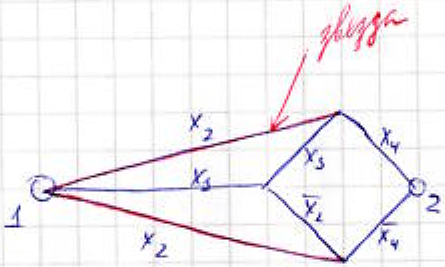
Для $n_{1,0}$:



Для $n_{0,1}$:

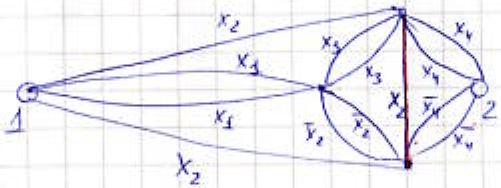


№7.8



$n_{1,0}$
$n_{0,1}$
≤ 13 контактов

=> Для $n_{1,0}$:



=> Для $n_{0,1}$: