Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной
математики и кибернетики

В. Б. Алексеев, А. А. Вороненко, С. А. Ложкин,
Д. С. Романов, А. А. Сапоженко, С. Н. Селезнева

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ "ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ"

Москва
2002

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

В. Б. Алексеев, А. А. Вороненко, С. А. Ложкин,
Д. С. Романов, А. А. Сапоженко, С. Н. Селезнева

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ
"ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ"

учебное пособие по курсу
"Основы кибернетики"

Москва
2002

УДК 510.5, 519.71
ББК 22.12:22.18
А47

Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.
Задачи по курсу "Основы кибернетики" (учебное пособие для студентов) — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001), 2002 г. — 66 с.

Рецензенты: проф. Марченков С. С., д. ф.-м. н.
н. с. Кузнецов Ю. В., к. ф.-м. н.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова

Задачник содержит материал для семинарских занятий по курсу "Основы кибернетики". В него включены задачи по инвариантным классам, понятию сводимости и NP-полноте, эквивалентным преобразованиям, тестам, надежности и самокоррекции.

ISBN 5-89407-147-X

Введение

В настоящем пособии собраны упражнения по курсу “Основы кибернетики”. Задачи сгруппированы по темам, среди которых следующие: инвариантные классы, сложность алгоритмов, эквивалентные преобразования управляющих систем, тесты, надежность и самокоррекция. Каждой теме отведен параграф, в начале которого даются необходимые определения и теоретические сведения. Пособие предназначено для студентов третьего-четвертого курсов. Предполагается, что читателю знакомы основные понятия дискретной математики.

Параграф 1 посвящен инвариантным классам.

В параграфе 2 собраны задачи, касающиеся понятий сводимости и NP-полноты. Часть задач посвящена оценкам сложности конкретных алгоритмов.

В параграфах 3 и 4 предлагаются задачи по эквивалентным преобразованиям формул и схем.

Параграфы 5 и 6 посвящены алгоритмам построения тестов и оценкам длины тестов для таблиц и схем.

Параграф 7 посвящен проблеме надежности. В нем также собраны задачи по построению и оценкам сложности самокорректирующихся схем.

Часть 1. Инвариантные классы и сложность алгоритмов

§ 1. Инвариантные классы

Понятие инвариантного класса было введено С.В.Яблонским [8].

Множество функций $Q \subseteq P_2$ называется *инвариантным классом*, если наряду с каждой функцией $f \in Q$ оно содержит все функции, получающиеся из f применением следующих трех операций:

1) добавление и изъятие фиктивных переменных;

2) переименование переменных (без отождествления);

3) подстановка констант на места некоторых переменных.

Обозначим через $Q(n)$ множество всех функций f из Q, зависящих (не обязательно существенно) от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Число $\sigma = \log_2 \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|}$ называется *характеристикой* инвариантного класса Q. Иногда характеристика будет указываться в качестве индекса при Q или $Q(n)$. Справедлива следующая

Теорема 1.1 (С. В. Яблонский [9]). *Для любого $\sigma \in [0, 1)$ существует континуум попарно различных инвариантных классов Q с характеристикой σ.*

Обозначим через $L(f)$ сложность минимальной схемы из функциональных элементов, реализующей функцию f, и пусть $L(n) = \max\limits_{f\in P_2(n)} L(f)$, $L_Q(n) = \max\limits_{f\in Q(n)} L(f)$. В дальнейшем используются следующие утверждения.

Теорема 1.2 (О. Б. Лупанов [5]).

$$L(n) = \frac{2^n}{n}(1 + \delta_n), \tag{1}$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.3. *Если Q — инвариантный класс с характеристикой σ, $\sigma > 0$, то*

$$L_Q(n) \le \sigma\frac{2^n}{n}(1 + \Delta_n), \tag{2}$$

где $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Функция $f_n(x_1, \dots, x_n)$ называется *сложной*, если $L(f_n) = L(n)$. Бесконечная последовательность булевых функций $(f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), \dots)$ называется *сложной*, если для любого N существует $n \ge N$ такое, что функция $f_n(x_1, \dots, x_n)$ является сложной.

Алгоритм, строящий бесконечную последовательность булевых функций $(f_i(x_1,\ldots,x_i))_{i=1}^{\infty}$ из P_2 называется *правильным*, если он строит все функции минимального по включению инвариантного класса, содержащего эту последовательность.

Теорема 1.4 (С. В. Яблонский [8]). *Любой правильный алгоритм, строящий сложную последовательность функций* $(f_i(x_1,\ldots,x_i))_{i=1}^{\infty}$ *из* P_2, *строит все множество* P_2.

1.1. Пусть A и B — инвариантные классы. Верно ли, что всегда инвариантным классом является:

1) $A \cap B$;

2) $A \cup B$;

3) $A \setminus B$;

4) $P_2 \setminus A$.

1.2. 1) Всякий ли замкнутый класс является инвариантным?

2) Всякий ли инвариантный класс является замкнутым?

1.3. Пусть A — замкнутый класс, содержащий константы 0 и 1. Верно ли, что A — всегда инвариантный класс?

1.4. Выяснить, какие из следующих классов являются инвариантными классами:

1) класс L линейных функций;

2) класс M монотонных функций;

3) класс T_0 функций, сохраняющих константу 0;

4) класс $T_0 \cap T_1$, где T_σ, $\sigma \in \{0,1\}$, — класс функций, сохраняющих константу σ;

5) класс S самодвойственных функций;

6) класс симметрических функций, то есть функций, не изменяющихся при любой перестановке их переменных;

7) класс симметрических функций и функций, получаемых из симметрических добавлением фиктивных переменных;

8) класс функций, принимающих единичные значения только на наборах с четным числом единиц;

9) класс функций, степень полинома Жегалкина которых не больше некоторого заданного числа;

10) класс функций, число слагаемых полинома Жегалкина которых не больше половины всех возможных.

1.5. Доказать, что для каждого непустого инвариантного класса Q последовательность $\sqrt[2^n]{|Q(n)|}$ не возрастает и $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq 2$.

1.6. Доказать, что если инвариантный класс Q_σ не совпадает с P_2, то $\sigma < 1$.

1.7. Вычислить характеристики следующих инвариантных классов:

1) класс L линейных функций;

2*) класс M монотонных функций;

3) класс функций, представимых в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = l(x_1, \ldots, x_n) \& g(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где l — линейная функция, а g — произвольная функция из P_2, у которой каждая существенная переменная является существенной переменной функции l.

1.8. 1) Пусть $P_2^*(n)$ — множество функций из $P_2(n)$, существенно зависящих от n переменных. Показать, что $|P_2^*(n)| \geq 2^{2^n} - n2^{2^{n-1}}$;

2) Пусть Q, $Q \subseteq P_2$, — инвариантный класс. Доказать неравенство $|Q(n)| \leq |Q(m)|^{2^{n-m}}$ при $n \geq m$.

1.9. Пусть $s(f)$ — число попарно различных подфункций функции f, а $s(n) = \max_{f \in P_2(n)} s(f)$. Доказать, что

1) $s(n) \leq 3^n$;

2*) для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $s(n) \leq 3^n(1-\varepsilon)$ для всех $n > N$.

1.10. Доказать теорему 1.4 из введения к параграфу.

§ 2. Сложность алгоритмов

Термин "машина Тьюринга" (сокращенно МТ) употребляется здесь для одноленточных *детерминированных* машин (см., например, [10]). Некоторое (непринципиальное) отличие состоит в том, что, как правило, рассматриваются МТ с односторонней лентой, бесконечной вправо. Алфавит символов ленты МТ обозначим через A, а множество состояний — через Q. Алфавиты A и Q конечны. Символом q_1 обозначается начальное состояние, символом a_1 — пустой символ, присутствующий по определению в алфавите A. Считается, что в начальный момент слово $w = b_1 b_2 \dots b_n$, обрабатываемое МТ, записано в первых n ячейках ленты, а все остальные ячейки ленты содержат символ a_1. *Детерминированность* МТ означает, что для каждой пары вида (a, q), где a — символ входного алфавита, а q — символ состояния, в программе МТ присутствует не более одной команды вида: $aq \to a'q'd$, начинающейся с aq.

Пусть в процессе работы МТ на некотором такте t оказалось, что на ленте записано слово $w = b_1 b_2 \dots b_m$. Это означает, что в первых m ячейках ленты содержатся символы $b_1, \dots, b_m$, а ячейки, начиная с $(m+1)$-й, содержат символ a_1. Пусть далее на такте t МТ находится в состоянии q_j, а головка обозревает ячейку с номером k. *Конфигурацией (мгновенным описанием)*, соответствующей этому такту t, называется слово C_t вида $b_1 b_2 \dots b_{k-1}\ q_j b_k \dots b_m$ при $k < m$ или слово C_t вида $b_1 b_2 \dots b_{k-1}\ b_k \dots b_m, a_1 ... a_1 q_j$ ($k - m$ пустых символов перед q_j) при $k \geq m$. Конфигурация, соответствующая первому такту, называется *начальной*, а последнему (если МТ останавливается), — *заключительной*. *Вычислением МТ M на входе w* называется последовательность конфигураций $C_1, C_2, ..., C_t, ...$, возникающая при работе над словом w. Подразумевается, что конфигурация C_{t+1} однозначно определяется конфигурацией C_t и командой МТ M, начинающейся с пары (b_k, q_j), где b_k — символ, обозреваемый МТ в момент t, а q_j — состояние МТ в момент t. *Время работы* или *число шагов $t_M(w)$ МТ M на входе w* определяется как число конфигураций в вычислении МТ M на входе w. Если вычисление бесконечно, полагаем $t_M(w) = \infty$. Пусть среди состояний МТ имеются выделенные заключительные состояния — *принимающее* и *отвергающее*. Тогда вычисление называется *принимающим* (*отвергающим*), если оно заканчивается в принимающем (отвергающем) состоянии.

Недетерминированные машины Тьюринга. Отличие недетерминированной МТ (сокращенно, НМТ) от детерминированной состоит в том, что в программе НМТ для пары (a, q), где a — символ из алфавита МТ, а q — символ состояния, в ее программе может присутствовать несколько команд, начинающихся с aq. Без потери общности можно ограничиться случаем, когда паре aq может соответствовать не более двух команд с началом aq. Пусть в программе НМТ имеется пара команд $aq \to a'q'L$ и $aq \to a''q''R$. Тогда, находясь в состоянии q и обозревая символ a на ленте, НМТ может выбрать любую из двух возможностей: записать в обозреваемую ячейку символ a', перейти в состояние q' и сдвинуть головку влево, либо записать в обозреваемую ячейку символ a'', перейти в состояние q'' и сдвинуть головку вправо. При этом считается, что НМТ как бы создает две копии самой себя и прослеживает последовательность вычислений обоих способов действия. Понятие конфигурации для НМТ не отличается от того, что определено выше для обычной МТ. *Вычислением НМТ на входе* w называется последовательность конфигураций $C_1, C_2, ..., C_t, ...$, в которой $C_1 = q_1w$, а C_{t+1} получается из C_t с помощью одной из команд, соответствующих паре $a(t)q(t)$, где $q(t)$ — символ состояния, входящий в C_t, а $a(t)$ — буква из C_t, стоящая справа от $q(t)$. Всякое вычисление можно изобразить ориентированной цепью, вершинами которой являются конфигурации, а каждая дуга соединяет две последовательные вершины. В случае детерминированных МТ вычисление однозначно определяется входом. В случае НМТ объединение цепей, соответствующих вычислениям на входе w, представляет собой ориентированное (от корня) дерево с корнем $C_1 = q_1w$.

Распознавание языков. Пусть A — конечный алфавит. Через A^ω обозначим множество всех *слов* (конечных последовательностей) в алфавите A. Через $||w||$ обозначим *длину* слова w, определяемую как число букв в w. Произвольное подмножество $L \subseteq A^\omega$ называется *языком* в алфавите A. Говорят, что МТ (НМТ) M с двумя заключительными состояниями (*принимающим и отвергающим*) *распознает* язык L, если для всякого слова $w \in A^\omega$ принимающее вычисление M на входе w существует тогда и только тогда, когда $w \in L$. В случае, когда $w \notin L$, каждое вычисление либо бесконечно, либо является отвергающим. Говорят, что МТ (НМТ) M *распознает язык* L *за полиномиальное время*, если она распознает L и существует полином p такой, что для каждого слова $w \in L$ существует принимающее вычисление длины, не превышающей $p(||w||)$.

Через $\mathbf{P}$ обозначим класс языков, распознаваемых МТ за полиномиальное время. Через $\mathbf{\Pi}$ обозначим множество отображений вида $f : A^\omega \to A^\omega$, вычисляемых МТ за полиномиальное время. Пусть L_1 и L_2 — языки. Говорят, что L_1 (*полиномиально*) *сводится к* L_2 (обозначение $L_1 \prec L_2$), если существует функция $f \in \mathbf{\Pi}$ такая, что $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.

Языки L_1 и L_2 (*полиномиально*) *эквивалентны*, если $L_1 \prec L_2$ и $L_2 \prec L_1$.

Определение 2.1. Класс **NP** есть множество языков, распознаваемых НМТ за полиномиальное время.

Пусть $\mathbf{P}^2$ — множество пар (L, M) языков из $\mathbf{P}$. Говорят, что язык K *выводим из пары* (L, M), *путем навешивания* p*-ограниченного квантора существования,* если существует такой полином p, что

$$K = \{x : \exists y (x, y) \in (L, M) \ \& \ ||y|| \le p(||x||)\},$$

где $||z||$ — длина слова z.

Определение 2.2. Класс **NP** есть множество языков, выводимых из элементов $\mathbf{P}^2$ путем навешивания p-ограниченного квантора существования.

Язык L называется NP*-полным*, если

1) $L \in \mathbf{NP}$.

2) для любого языка L' из **NP** верно $L' \prec L$.

Справедливы следующие простые утверждения.

Утверждение 2.1. *Если $L_1 \prec L_2$ и $L_2 \prec L_3$, то $L_1 \prec L_3$.*

Утверждение 2.2. *Если $L_1 \in \mathbf{P}$ и $L_2 \prec L_1$, то $L_2 \in \mathbf{P}$.*

Утверждение 2.3. $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$.

Утверждение 2.4. *Либо все NP-полные языки принадлежат* **P**, *либо ни один из них не принадлежит* **P**. *Первое имеет место тогда и только тогда, когда* **P**=**NP**.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) называется выполнимой, если найдется набор значений ее переменных, на котором эта КНФ обращается в единицу. Пусть $\mathcal{K}$ — множество всех выполнимых КНФ, A — некоторый конечный алфавит, а ψ — взаимно однозначное отображение $\mathcal{K}$ во множество слов в алфавите A. Для определенности рассмотрим алфавит $A = \{(,), \&, \vee, \neg, x, 0, 1\}$, а отображение ψ определим следующим образом: буква вида x_i^σ преобразуется в слово $x\sigma\tau_1 \dots \tau_l$, где $\tau_1 \dots \tau_l$ двоичное представление числа i; остальные символы не изменяются. Например, если $K = x_1 \& (\bar{x}_2 \vee x_5)$, то $\psi(K) = x11\&(x010 \vee x1101)$. Язык ВЫПОЛНИМОСТЬ (сокращенно ВЫП) представляет собой образ $\psi(\mathcal{K})$ множества $\mathcal{K}$ при отображении ψ. Язык К-ВЫП есть образ множества тех выполнимых КНФ, у которых каждая скобка содержит не более k букв.

Теорема 2.5. (S. A. Cook (см. [4, 1, 3, 7])) *Если $L \in \mathbf{NP}$, то $L \prec$ ВЫП.*

Существует достаточно большой класс задач, заключающийся в распознавании тех или иных свойств графов, целых чисел, массивов целых чисел, конечных множеств, булевых формул и т. д. Подходящей кодировкой такие задачи могут быть сведены к распознаванию языков. Поэтому в дальнейшем мы будем взаимозаменять термины “язык” и “задача”. Задачи из класса $\mathbf{P}$ будем называть *полиномиально решаемыми.*

Ниже приведены некоторые NP-полные задачи.

1. Задача 0-1 Целочисленное программирование (0-1 ЦЛП).

Вход: Матрица $A = (a_{ij})$ размера $p \times n$ и целочисленный вектор $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p)$.

Свойство: Существует вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из нулей и единиц такой, что

$$A\mathbf{x}^T \geq \mathbf{b}^T.$$

2. Задача КЛИКА.

Вход: Граф (G, E), число k.

Свойство: В графе G существует полный подграф на k вершинах.

3. Задача ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.

Вход: Граф $G = (V, E)$, число l.

Свойство: Существует такое подмножество вершин R, что $|R| \leq l$ и каждое ребро графа G инцидентно некоторой вершине из R.

4. Задача ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВ.

Вход: Семейство $F = \{S_1, \dots, S_m\}$ подмножеств множества S, причем $\bigcup_{S_j \in F} = S$, число h.

Свойство: Существует такое подсемейство $T \subseteq F$, что $|T| \leq h$ и $\bigcup_{S_j \in T} = S$.

5. Задача РАСКРАСКА.

Вход: Граф $G = (V, E)$, число k.

Свойство: Существует такая функция $\chi : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, что $\chi(u) \neq \chi(v)$ для всех $(u, v) \in E$.

2.1. Пусть A — алфавит символов ленты МТ, $A = \{0, 1, \Lambda\}$, входное слово записано в алфавите $\{0, 1\}$, Λ — пустой символ.

Положим $t(n, L) = \min \max_{w \in L, ||w||=n} t(w)$, где минимум берется по всем МТ, распознающим язык L. Показать, что $t(n, L) = O(f(n))$, если

1) L — множество всех слов, не содержащих подслов вида 111, $f(n) = n$;

2) L — множество всех симметричных слов, $f(n) = n^2$.

2.2. Пусть A — алфавит символов ленты МТ, $A = \{0, 1, \Lambda\}$, входное слово записано в алфавите $\{0, 1\}$, Λ — пустой символ.

Оценить сверху время работы МТ, выясняющей

1) делится ли число единиц в слове на 3;

2) равно ли число единиц в слове числу нулей;

3) в любом начальном отрезке слова число единиц не меньше числа нулей;

4) слово периодично, т. е. найдется такое слово u в алфавите $\{0, 1\}$, что входное слово имеет вид $\underbrace{uu\ldots u}_{n \text{ раз}}$;

5) по двум словам u и v, разделенным символом Λ, является ли слово u подсловом слова v.

2.3. Пусть A — алфавит символов ленты МТ, $A = \{0, 1, \Lambda\}$, Λ — пустой символ. Оценив сверху время работы МТ, осуществляющей следующее преобразование, доказать что оно лежит в $\mathbf{\Pi}$:

1) сложение двух целых чисел в двоичной записи;

2) умножение двух целых чисел в двоичной записи;

3) нахождение остатка от деления одного целого числа в двоичной записи на другое;

4) нахождение определителя квадратной матрицы из нулей и единиц в поле E_2 из двух элементов с операциями $\oplus$ и $\&$;

5) умножение двух квадратных матриц из нулей и единиц в поле E_2 из двух элементов с операциями $\oplus$ и $\cdot$;

6) решение системы линейных уравнений в поле E_2 из двух элементов с операциями $\oplus$ и $\cdot$;

7) нахождение значения булевой функции по формуле над базисом $\{\&, \vee, \neg\}$ на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных;

8) нахождение корня полинома Жегалкина, т. е. набора, на котором полином обращается в ноль;

9) нахождение кратчайшего расстояния между данной парой вершин в графе;

10) построение остовного дерева графа.

2.4. Раскрасить граф G в k цветов:

1) G - граф на рис. 1, $k = 3$;
2) G - граф на рис. 2, $k = 2$;
3) G - граф на рис. 3, $k = 3$;
4) G - граф на рис. 5, $k = 2$;
5) G - граф на рис. 7, $k = 3$.

2.5. Найти размер максимальной клики графа:

1) G - граф на рис. 1;
2) G - граф на рис. 2;
3) G - граф на рис. 3;
4) G - граф на рис. 8;
5) G - граф на рис. 9.

2.6. Найти минимальное вершинное покрытие графа:

1) G - граф на рис. 1;
2) G - граф на рис. 2;
3) G - граф на рис. 3;
4) G - граф на рис. 4;
5) G - граф на рис. 6.

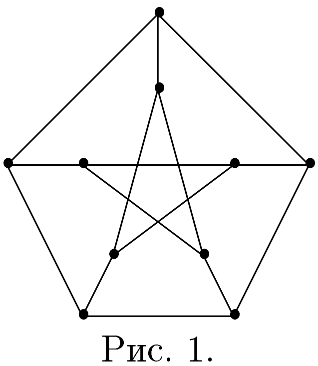


Рис. 1.

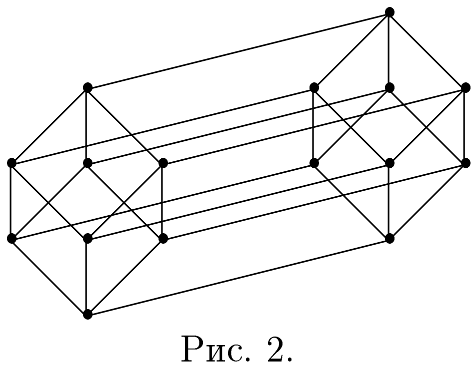


Рис. 2.

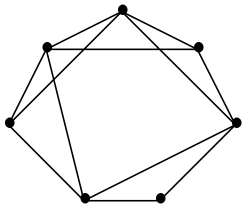


Рис. 3.

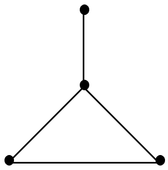


Рис. 4.

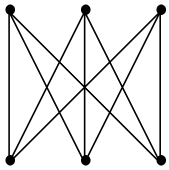


Рис. 5.

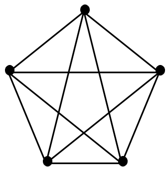


Рис. 6.

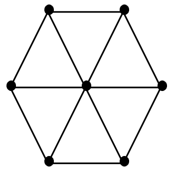


Рис. 7.

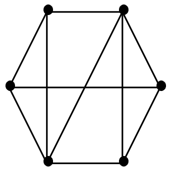


Рис. 8.

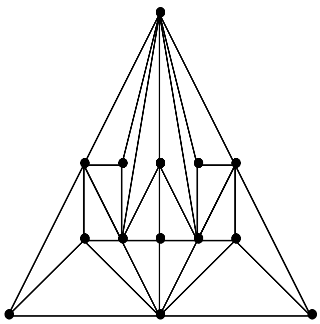


Рис. 9.

2.7. Доказать полиномиальную решаемость задачи 2-ВЫПОЛНИМОСТЬ.

2.8. Построить преобразование входа задачи L_1 во вход задачи L_2, доказывающее полиномиальную сводимость языка L_1 к языку L_2:

1) L_1 есть ВЫПОЛНИМОСТЬ, L_2 есть 01-ЦЛП;

2) L_1 есть ВЫПОЛНИМОСТЬ, L_2 есть 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ;

3) L_1 есть КЛИКА, L_2 есть ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ;

4) L_1 есть ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ, L_2 есть ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВ.

2.9. Доказать **NP**-полноту задач **1** – **5** из введения к параграфу.

2.10. Доказать, что следующие задачи являются **NP**-полными:

1) существование набора, обращающего ДНФ в ноль;

2) существование набора, обращающего ДНФ в ноль при условии, что каждое слагаемое этой ДНФ содержит не более 4 букв.

2.11. Выделить среди перечисленных задач полиномиально решаемые и **NP**-полные:

1) существование двух противоположных наборов, на которых ДНФ обращается в единицу;

2) существование двух противоположных наборов, на которых ДНФ обращается в ноль;

3) существование набора, на котором полином Жегалкина обращается в ноль;

4) существование набора, на котором заданные полиномы Жегалкина (количество которых заранее неизвестно) одновременно обращаются в ноль;

5) существование эйлерова цикла в графе (эйлеровым циклом называется цикл, проходящий по всем ребрам графа, причем по каждому в точности один раз);

6) существование гамильтонова цикла в графе (гамильтоновым циклом называется простой цикл, проходящий через все вершины графа);

7) раскраска вершин графа в два цвета (граф можно раскрасить в два цвета, если каждой его вершине можно приписать цвет таким образом, что смежным вершинам приписаны разные цвета);

8) раскраска вершин гиперграфа в два цвета (гиперграфом называется пара $< V, E >$, где V — конечное множество вершин, E, $E \subseteq 2^V$, — множество ребер; гиперграф можно раскрасить в два цвета, если каждой его вершине можно приписать цвет таким образом, что любое ребро будет содержать по меньшей мере две вершины, окрашенные в разные цвета).

2.12. Выяснить, какие из перечисленных задач являются полиномиально решаемыми, какие — **NP**-полными:

1) распознавание нелинейности булевой функции, если
   а) функция задана таблицей своих значений,
   б) функция задана формулой,
   в) функция задана в виде ДНФ,
   г) функция задана в виде совершенной ДНФ,
   д) функция задана в виде полинома Жегалкина;

2) распознавание немонотонности булевой функции, если
   а) функция задана таблицей своих значений,
   б) функция задана в виде ДНФ,
   в) функция задана в виде совершенной ДНФ,
   г) функция задана в виде сокращенной ДНФ,
   д) функция задана в виде полинома Жегалкина;

3) распознавание несамодвойственности функции, если

а) функция задана таблицей своих значений,

б) функция задана формулой,

в) функция задана в виде ДНФ,

г) функция задана в виде совершенной ДНФ,

д) функция задана в виде полинома Жегалкина;

4) существовование в графе k-клики (k-кликой называется подграф, являющийся полным графом с k вершинами), если

а) число k заранее известно,

б) число k подается на вход МТ вместе с графом;

2.13. Доказать полиномиальную эквивалентность задач L_1 и L_2, если

1) L_1 = ВЫП, L_2 = 4-ВЫП;

2) L_1 = РАСКРАСКА ГРАФА В 2 ЦВЕТА; L_2 = УМНОЖЕНИЕ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ.

Часть 3. Эквивалентные преобразования

§ 3. Эквивалентные преобразовния формул

Две формулы алгебры логики называются *эквивалентными*, если они реализуют равные функции алгебры логики.

Тождеством в алгебре логики называется равенство, в левой и правой частях которого стоят эквивалентные функции.

Справедливы, в частности, следующие тождества:

(1) $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$

(2) $\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

(3) $\bar{\bar{x}} = x$

(4) $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$

(5) $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$

(6) $(x_1 \& x_2) \& x_3 = x_1 \& (x_2 \& x_3)$

(7) $x \& x = x$

(8) $(x_1 \& \bar{x}_1) \& x_2 = x_1 \& \bar{x}_1$

(9) $(x_1 \& \bar{x}_1) \vee x_2 = x_2$

(10) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$

(11) $(x_1 \vee \bar{x}_1) \& x_2 = x_2$

(12) $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$

(13) $x \vee x = x$

(14) $x_1 \& \bar{x}_1 = x_2 \& \bar{x}_2$.

Если в тождество $A = B$ вместо одинаковых переменных всюду подставить произвольные одинаковые формулы, то снова получится тождество $A' = B'$. Применить тождество $A = B$ к формуле C — это значит выделить в формуле C подформулу, полностью совпадающую с A' (или B') и заменить в C эту подформулу на B' (соответственно, на A').

Вместо & мы обычно будем использовать $\cdot$ или вообще этот знак будем опускать.

3.1. Используя только тождество (6), вывести тождества

1)$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$;

2) $x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$;

3) $x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$;

4) $(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot (x_4 \cdot x_5) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4) \cdot x_5$;

5) $x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot x_5)) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4) \cdot x_5$.

3.2. Пусть формулы F_1 и F_2 получены из выражения $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ любыми правильными расстановками скобок. Доказать, что, используя тождество (6), можно вывести тождество $F_1 = F_2$.

Замечание. Результат задачи 3.2 для конъюнкции и аналогичный результат для дизъюнкции (см. тождество (12)) позволяет записывать длинные конъюнкции и дизъюнкции без скобок. В следующих задачах порядок действий определяется либо скобками, либо соглашением о том, что конъюнкция выполняется раньше дизъюнкции, а отрицание применяется к той формуле, над которой оно стоит.

3.3. С помощью тождеств (1)-(14) преобразовать в совершенную дизъюнктивную нормальную форму от переменных x, y, z или в формулу $x\&\bar{x}$ следующие формулы:

1) $x\bar{y}$;
2) $\overline{x \vee y} \cdot (x\bar{z} \vee y)$;
3) $\bar{x}$;
4) $\overline{xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x} \vee \bar{z}}$;
5) $xy \vee yz$;
6) $xyz \vee \overline{x \vee y \vee z}$;
7) $\overline{\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}x}$;
8) $x\bar{y} \vee y\bar{z}x$;
9) $(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(z \vee x)$;
10) $\overline{x \vee y} \vee \overline{y \vee z} \vee \overline{z \vee x}$;
11) $\bar{x} \cdot \overline{yz} \vee x \cdot \overline{y \vee z}$.

3.4. Доказать, что с помощью тождеств (1)-(14) любую формулу алгебры логики в базисе $\{\vee, \&, -\}$, содержащую любое подмножество из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно преобразовать в совершенную дизъюнктивную нормальную форму от всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или в формулу $x_1\&\bar{x}_1$.

Система тождеств в заданном базисе называется *полной*, если для любых двух эквивалентных формул C и D в этом базисе C можно преобразовать в D, применяя только тождества данной системы.

3.5. Доказать, что система тождеств (1)-(14) является полной для формул в базисе $\{\vee, \&, -\}$.

3.6. Доказать, что система тождеств алгебры логики (2)-(9) является полной для формул в базисе $\{\vee, \&, -\}$.

3.7. При помощи эквивалентных преобразований (1)-(14) выяснить, являются ли формулы F_1 и F_2 эквивалентными, если

1) $F_1 = \overline{\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}x}$, $F_2 = xyz \vee \overline{x \vee y \vee z}$;

2) $F_1 = x\bar{y} \vee y\bar{z}$, $F_2 = (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})$;

3) $F_1 = \overline{x \vee y} \vee \overline{y \vee z} \vee \overline{z \vee x}$, $F_2 = \bar{x} \cdot \overline{yz} \vee x \cdot \overline{y \vee z}$;

4) $F_1 = x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee zx$, $F_2 = (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(z \vee x)$;

5) $F_1 = \overline{xy \vee \bar{x}z}$, $F_2 = (\overline{(x \vee \bar{z})(x \vee \bar{y})} \vee \overline{y \vee z}) \cdot \overline{yz}$;

6) $F_1 = \overline{x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}}$, $F_2 = \overline{(x \vee y)\overline{xy}} \vee \overline{(y \vee z)\overline{yz}} \vee \overline{(x \vee \bar{z})(\bar{x} \vee z)}$;

7) $F_1 = \overline{(x \vee y)z \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}}$, $F_2 = \overline{x \vee y} \cdot z \vee xy \cdot \bar{z}$;

8) $F_1 = x\bar{y} \vee z\bar{u}$, $F_2 = \overline{(\bar{x} \vee y)(\bar{z} \vee u)}$;

9) $F_1 = \overline{x\bar{y} \vee z\bar{u}} \cdot \overline{\bar{x}y \vee \bar{z}u}$, $F_2 = \bar{x}\bar{y}\overline{(z \vee u)} \vee \overline{(x \vee y)} \cdot zu \vee xy\overline{(z \vee u)(\bar{z} \vee \bar{u})}$;

10) $F_1 = \overline{xyz} \cdot \overline{yzu}$, $F_2 = \overline{yz} \vee \overline{x \vee u}$;

11) $F_1 = \overline{\overline{x \vee y} \vee z \vee u} \vee \overline{xy\overline{zu}}$, $F_2 = \overline{xy}zu \vee (x \vee y)\overline{z \vee u}$;

12) $F_1 = \overline{xy} \cdot \overline{zu} \vee \overline{(x \vee y)(z \vee u)}$, $F_2 = \bar{x} \cdot \overline{yzu} \vee \bar{y} \cdot \overline{zu} \vee \bar{z}\bar{u}$.

3.8. Построить эквивалентные преобразования при помощи тождеств (1)-(14) для формул F_1 и F_2, где:

1) $F_1 = x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$, $F_2 = \overline{(x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})}$;

2) $F_1 = \overline{(xy \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot (y \vee z \vee ((x \vee \bar{z})y))$,
$F_2 = (\bar{x} \vee \bar{y})(z \vee x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z}} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) $F_1 = \overline{(x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})}$, $F_2 = \overline{\bar{y} \vee x \vee z} \vee \bar{x}y$;

4) $F_1 = \overline{x \vee \overline{y\bar{z} \vee z\bar{y}}}$, $F_2 = (x \vee y) \cdot \overline{x \vee z} \vee \overline{x \vee y} \cdot (x \vee z)$;

5) $F_1 = \overline{((x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y))} \cdot xy \vee (\overline{xy} \cdot xy) \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$, $F_2 = \overline{x \vee y}$;

6) $F_1 = \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z}$, $F_2 = \overline{(\bar{y}z)} \cdot (x \vee \bar{z})$;

7) $F_1 = (\overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}y)} \vee (x \vee y)) \cdot (\overline{(x \vee y)} \vee (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}))$, $F_2 = \overline{xy}$;

8) $F_1 = \overline{x\bar{y} \cdot (x\bar{y}z \vee \overline{\bar{x}y\bar{z}})}$, $F_2 = \overline{\bar{y}xz} \cdot (\bar{x} \vee y)$;

9) $F_1 = (x \vee \overline{(\bar{y} \vee \bar{z})}) \cdot (y \vee z)$, $F_2 = (x \vee y)(z \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y}})(x \vee y \vee z)$;

10) $F_1 = x \cdot \overline{((y \vee \bar{z}) \cdot (z \vee \bar{y}))}$, $F_2 = \overline{(xy \vee \overline{xz}) \cdot (\overline{xy} \vee xz)}$;

11) $F_1 = \overline{x(y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})}$, $F_2 = xyz \vee \overline{xy} \cdot \overline{xz}$;

12) $F_1 = (\bar{x} \vee \bar{z}) \cdot (x \vee y) \cdot (x \vee \bar{z})$, $F_2 = \overline{\bar{y} \vee z} \vee x\bar{z}$;

13) $F_1 = x \cdot \overline{(\bar{y} \cdot \bar{z})} \vee yz$, $F_2 = xy \vee z \cdot \overline{(\bar{x} \cdot \bar{y})} \vee xyz$;

14) $F_1 = (\overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}y)} \vee x \vee y)(\overline{(x \vee y)} \vee (x \vee y)) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$, $F_2 = \overline{xy}$;

15) $F_1 = (\overline{(x \vee y)\bar{z} \vee \bar{x}y}) \cdot (\bar{x} \vee yz \cdot (x\bar{z} \vee y)) \vee x\bar{y}z$, $F_2 = (\bar{x}\bar{y} \vee xz) \cdot (\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee xyz$.

Аналогично тому, как это указано выше, определяются понятия тождества и полной системы тождеств для формул над любым базисом в алгебре логики или в k-значной логике.

3.9. Построить конечную полную систему тождеств для класса формул над базисом B, если

1) $B = \{xy, x \oplus y, 1\}$;

2) $B = \{xy, x \vee y, 0, 1\}$.

3.10. Функцией Линдона (см. [14]) назовем функцию $\varphi(x_1, x_2)$ из 7-значной логики, задаваемую таблицей 1.

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	5	6	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	5	5	5	0	0
6	0	0	6	6	6	0	0

Табл. 1.

Будем обозначать функцию Линдона $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$.

1) Доказать, что для функции Линдона справедливы тождества
A_1) $(y \cdot y) \cdot x = y \cdot y$, A_2) $x \cdot (y \cdot y) = y \cdot y$, A_3) $x_1(x_2 x_3) = y \cdot y$;
B_m) $((\ldots((x_1 x_2)x_3)\ldots)x_m)x_1 = y \cdot y$ при $m = 1, 2, \ldots$;
C_m) $((\ldots((x_1 x_2)x_3)\ldots)x_m)x_2 = ((\ldots(x_1 x_2)x_3)\ldots)x_m$ при $m = 2, 3, \ldots$.

2) Вывести с помощью тождеств A_1 и A_2 тождество $x \cdot x = y \cdot y$.

3) Доказать, что с помощью тождеств $A_1 - A_3$, B_m $(m = 1, 2, \ldots)$, C_m $(m = 2, 3, \ldots)$ любую формулу в базисе из одной функции Линдона можно преобразовать либо в формулу $x \cdot x$, либо в формулу вида $(\ldots((x_{i_1} x_{i_2})x_{i_3})\ldots)x_{i_m}$, где все переменные различны.

4) Пусть для функции Линдона справедливо тождество

$$(\ldots((x_{i_1} x_{i_2})x_{i_3})\ldots)x_{i_m} = (\ldots((x_{j_1} x_{j_2})x_{j_3})\ldots)x_{j_n},$$

где все переменные в левой части различны и все переменные в правой части различны. Доказать, что $m = n$ и $x_{i_k} = x_{j_k}$ для всех k.

5) Доказать, что система всех тождеств $A_1 - A_3$, B_m $(m = 1, 2, \ldots)$, C_m $(m = 2, 3, \ldots)$ является полной системой тождеств для формул в базисе, состоящем только из одной функции Линдона.

Будем говорить, что формула $\Phi = x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}$ с правильной расстановкой скобок обладает свойством C^n, если а) она содержит только переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

б) не имеет подформул вида $u \cdot u$ и $u(vw)$,

в) между первым вхождением переменной x_{i_1} и вторым ее вхождением (если оно есть) встречаются все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отличные от x_{i_1}.

6) Какие из левых и правых частей тождеств $A_1 - A_3$, B_m $(m = 1, 2, \ldots)$, C_m $(m = 2, 3, \ldots)$ обладают свойством C^n?

7) Пусть формула Φ_2 получена из формулы Φ_1 при помощи тождеств $A_1 - A_3$, B_m и C_m, где $m < n$. Доказать, что если формула Φ_1 обладает свойством C^n, то и формула Φ_2 обладает свойством C^n.

8) Доказать, что при $n \geq 2$ эквивалентность B_n нельзя получить с помощью тождеств $A_1 - A_3, B_m$ $(m < n), C_m$ $(m < n)$.

9) Доказать, что для формул в базисе из одной функции Линдона не существует конечной полной системы тождеств.

§ 4. Эквивалентные преобразования контактных схем

Две контактные схемы с одинаковым числом m полюсов называются *эквивалентными*, если их полюса так занумерованы, что для любых номеров i, j функции проводимости f_{ij} между полюсами с номерами i и j в первой схеме и g_{ij} между полюсами с номерами i и j во второй схеме совпадают.

Тождеством для контактных схем называется пара эквивалентных контактных схем, соединенных знаком $\longleftrightarrow$.

Если задано некоторое тождество, то считается, что заданы также все тождества, которые получаются из данных с помощью следующих операций:

1) одинаковая перенумерация полюсов в обеих частях тождества;

2) переименование одинаковых переменных в произвольные одинаковые переменные (в частности, разные переменные можно переименовывать в одинаковые);

3) для некоторых переменных замена всюду $x \to \bar{x}, \bar{x} \to x$.

Подмножество Σ_1, состоящее из некоторых вершин и контактов схемы Σ, называется *подсхемой* схемы Σ, если в Σ_1 некоторое (может быть пустое) подмножество вершин считается полюсами и при этом:

1) если вершина из Σ_1 является полюсом в Σ, то она является полюсом и в Σ_1;

2) если вершина из Σ_1 инцидентна контакту из $\Sigma \setminus \Sigma_1$, то она является полюсом в Σ_1.

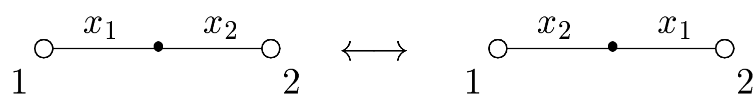
Применение тождества к контактной схеме Σ состоит в выделении в Σ подсхемы, совпадающей с одной частью тождества, и замене этой подсхемы на схему из другой части того же тождества с сохранением нумерации полюсов.

Система тождеств для контактных схем называется полной, если для любых двух эквивалентных контактных схем одну в другую можно преобразовать, применяя тождества из данной системы.

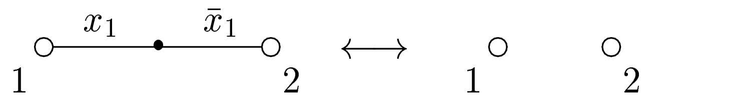
Основной назовем следующую систему тождеств (в тождествах t_3 и t_5 допускается совпадение полюсов):

$t_1 :\quad \bullet \quad \longleftrightarrow \quad \varnothing$

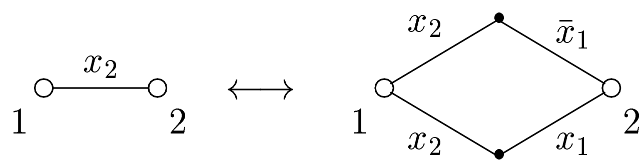
$t_2 :$



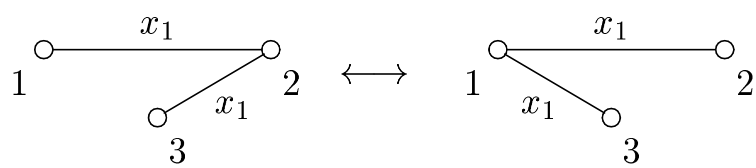
$t_3 :$



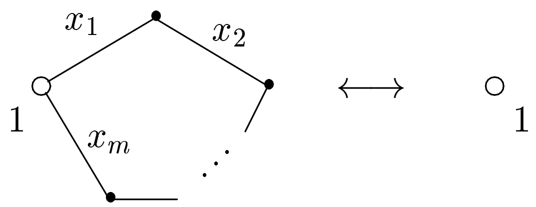
$t_4 :$



$t_5 :$



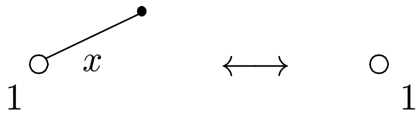
$t_6^{(m)} :$

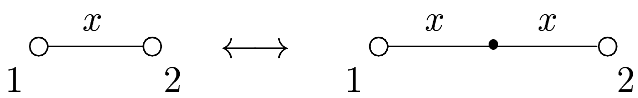


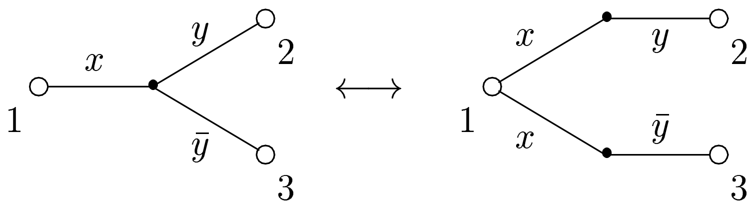
Теорема 4.1 (В. Л. Мурский [16]). Система тождеств t_1 – t_5, t_6^m,

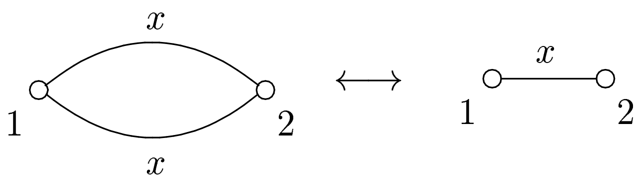
$m = 1, 2, \ldots$, является полной.

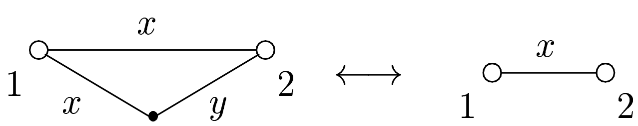
4.1. При помощи эквивалентных преобразований $t_1 - t_5, t_6^{(m)} (m = 1, 2, \ldots)$ доказать эквивалентность схем:

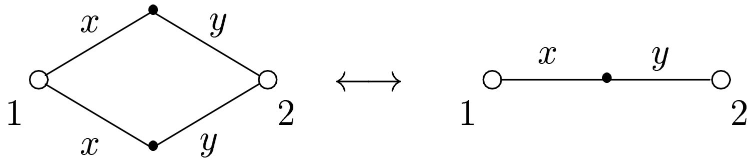
1) 

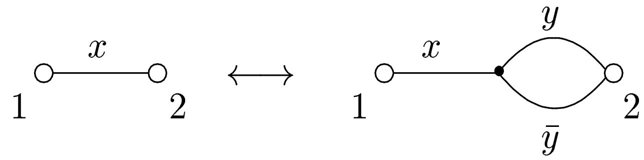
2) 

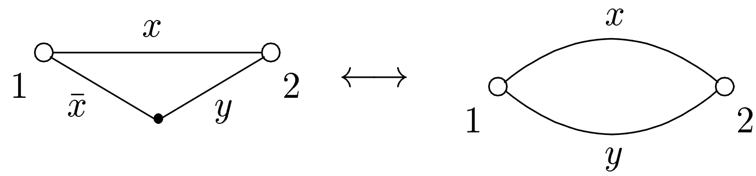
3) 

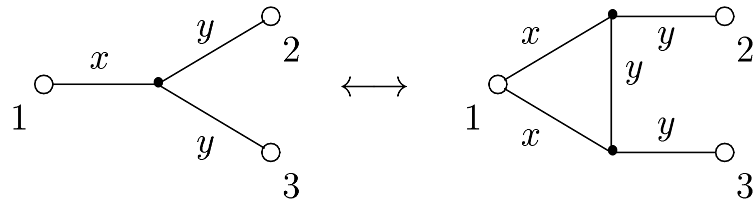
4) 

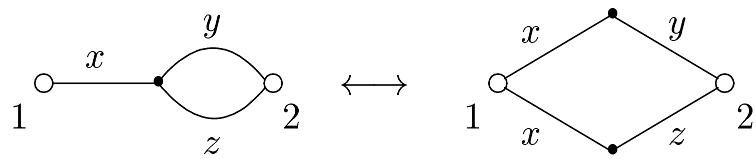
5) 

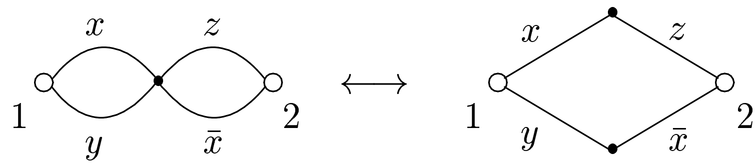
6) 

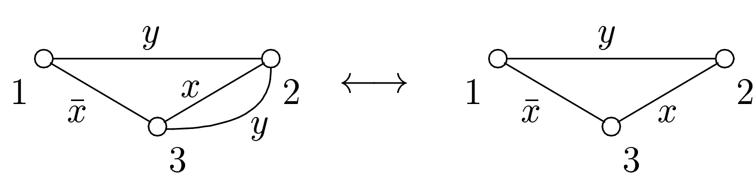
7) 

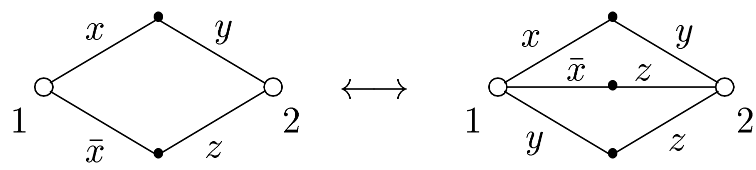
8) 

9) 

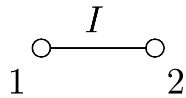
10) 

11) 

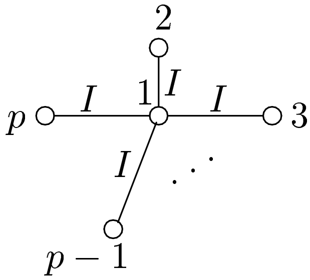
12) 

13) 

Цепочку I контактов $x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, соединяющих полюса k и j, будем изображать как



Звездой с центром в полюсе 1 назовем контактную схему вида

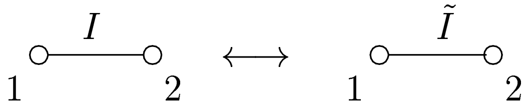


Пусть переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ фиксированы, а число j в двоичной системе записывается как $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. Тогда контактом с пометкой I_j будем обозначать цепочку из n последовательно соединенных контактов $x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$.

Рассмотрим систему *обобщенных* тождеств:

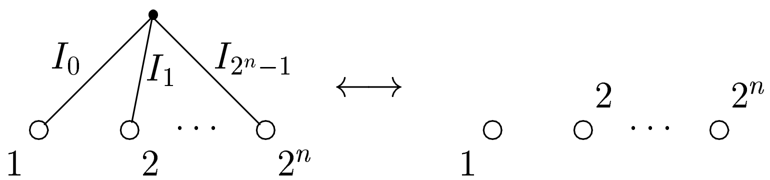
$T_I: \quad \bullet \quad \longleftrightarrow \quad \varnothing$

$T_{II}:$



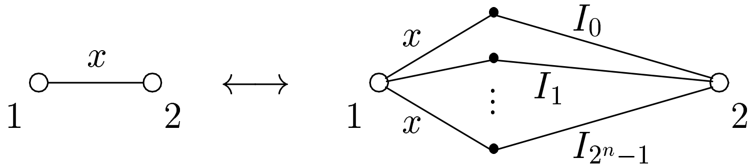
(здесь $\tilde{I}$ — цепочка, полученная из цепочки I произвольной перестановкой контактов)

$T_{III}:$

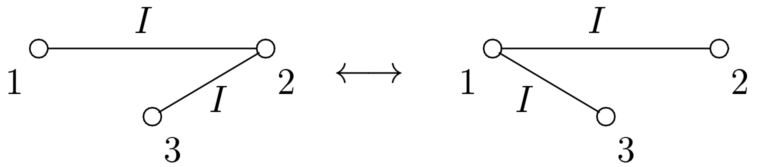


(здесь допускается совпадение полюсов и отсутствие некоторых из них)

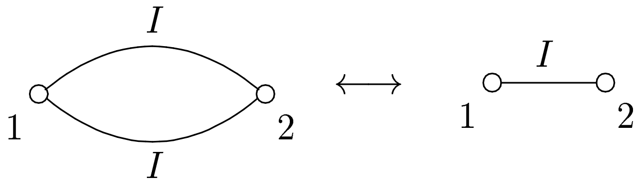
$T_{IV}:$



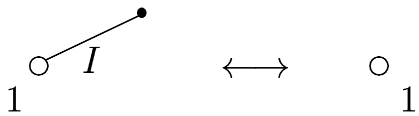
T_V :



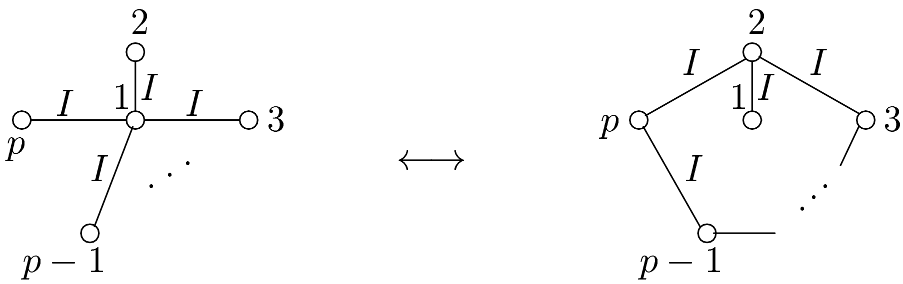
T_{VI} :



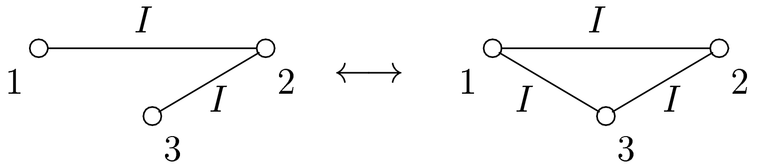
T_{VII} :



T_{VIII} :



T_{IX} :



4.2. Вывести из основной системы тождеств обобщенные тождества T_I – T_{IX}.

Канонической контактной схемой для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличной от константы 0, назовем двухполюсную контактную схему, состоящую из цепочек, соединяющих полюса и не имеющих общих вершин, кроме полюсов, и соответствующих всем конъюнкциям совершенной дизъюнктивной нормальной формы функции f. Для константы 0 канонической контактной схемой назовем контактную схему, состоящую из двух изолированных полюсов. *Канонической многополюсной контактной схемой* назовем объединение непересекающихся по внутренним вершинам двухполюсных канонических контактных схем, построенных для каждой пары полюсов.

Привести контактную схему, в которой имеются только переменные $x_1, \ldots, x_n$, к каноническому виду можно при помощи следующего алгоритма ([16]).

1. Каждый контакт с пометкой x_i^σ исходной контактной схемы заменяем на двухполюсную подсхему в соответствии с тождеством T_{IV}, в котором I_j — цепочки контактов вида $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_{i-1}^{\sigma_{i-1}}, x_{i+1}^{\sigma_{i+1}}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$.

2. Пусть a — произвольная вершина исходной контактной схемы, не являющаяся полюсом и изолированной вершиной.

1) Применяя тождество T_{VIII} для каждой звезды с центром в вершине a добиваемся того, чтобы из вершины a исходили только различные цепочки контактов.

2) По тождеству T_{III} вершину a вместе со всеми цепочками контактов, исходящими из нее, удаляем.

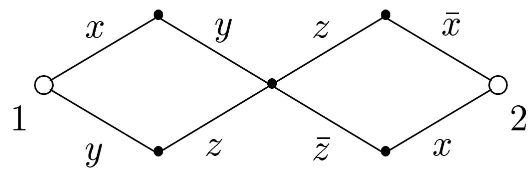
Повторяя пп. 1) и 2) для каждой вершины, не являющейся полюсом, получим контактную схему, в которой цепочки контактов соединяют только полюса.

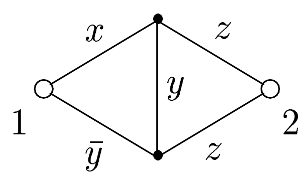
3. В случае, если контактная схема имеет более двух полюсов, выполняем транзитивное замыкание по тождеству T_{IX}.

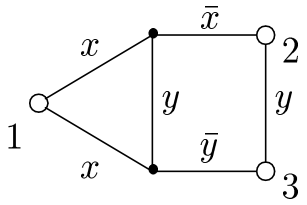
4. Повторяющиеся цепочки контактов, соединяющие одну и ту же пару полюсов, убираем по тождеству T_{VI}.

5. По тождеству T_I убираем изолированные вершины.

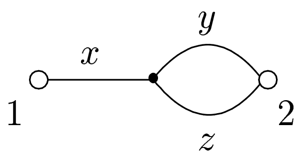
4.3. Привести к каноническому виду следующие контактные схемы:

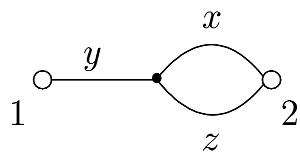
1) 

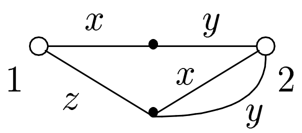
2) 

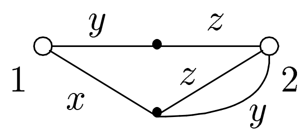
3) 

4.4. Выяснить, эквивалентны ли данные контактные схемы, приводя каждую из них к каноническому виду:

1) 



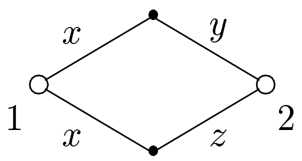
2) 

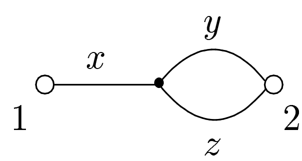


4.5. 1) Пусть Σ — контактная схема от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор из 0 и 1. Пусть Σ_α — граф, получаемый из схемы Σ, если оставить только все контакты вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$. Пусть $R(\Sigma_\alpha = n_{\text{В}} + n_{\text{Р}} + n_{\text{К}} (\text{mod } 2)$, где $n_{\text{В}}, n_{\text{Р}}, n_{\text{К}}$ — число вершин, ребер и связных компонент в графе Σ_α, и пусть $R(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} R(\Sigma_\alpha) (\text{mod } 2)$.

Доказать, что если контактная схема Σ' от переменных $x_1, \ldots, x_n$, x_{n+1} получена из контактной схемы Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ в результате применения любого из тождеств $t_1 - t_5$, $t_6^{(m)}$, $m \leq n$, то $R(\Sigma) = R(\Sigma')$.

2) Основываясь на утверждении п. 1) доказать, что контактные схемы





,

нельзя преобразовать друг в друга при помощи тождеств $t_1 - t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}$.

3) Основываясь на утверждении п. 1) доказать, что тождество $t_6^{(m+1)}$ не выводится из тождеств $t_1 - t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(m)}$.

4) Доказать, что из множества тождеств $t_1 - t_5, t_6^{(m)} (m = 1, 2, \ldots)$ нельзя выделить конечную полную систему тождеств для контактных схем.

5) Доказать, что в классе всех контактных схем не существует конечной полной системы тождеств.

Часть 4. Надежность и контроль управляющих систем

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель (см. [12, 6]), в рамках которой обычно рассматриваются вопросы ее надежности. Предполагается, что имеется некоторый "внешний" источник неисправностей (источник помех) И, под действием которого любая рассматриваемая схема Σ может переходить в одно из своих "неисправных состояний" (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma^{(1)}$, реализующей (вектор-) функцию $F = F^{(1)} = (f_1^{(1)}, \ldots, f_m^{(1)})$ от входных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и источнику неисправностей И соответствуют "неисправные" состояния (схемы) $\Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$, где схема $\Sigma^{(i)}$, $i = 2, \ldots, t$, реализует функцию $F^{(i)} = (f_1^{(i)}, \ldots, f_m^{(i)})$ от переменных x. При этом все состояния (как исправное $\Sigma = \Sigma^{(1)}$, так и неисправные $\Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$) разбиваются на классы (функционально) *неотличимых* состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости. В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме Σ, будем иметь в виду указанную выше модель $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют.

§ 5. Задача контроля управляющих систем. Тесты для таблиц

Рассмотрим математическую модель задачи контроля управляющих систем, связанную с понятием теста для таблицы.

Для целых чисел a и b, где $a \leq b$, через $\lfloor a, b \rceil$ будем обозначать множество целых чисел отрезка $[a, b]$, то есть множество целых i таких, что $a \leq i \leq b$. Для множества A и натуральных n, m через $A^{n,m}$ будем обозначать множество матриц с n строками, m столбцами и элементами из A. При этом будем считать, что A^m, то есть m-я декартова степень множества A, совпадает с $A^{1,m}$. Для матрицы M из множества $A^{n,m}$ ее подматрицу, расположенную в строках с номерами из множества I и в столбцах с номерами из множества J, где $I \subseteq \lfloor 1, n \rceil$ и $J \subseteq \lfloor 1, m \rceil$, будем обозначать через $M < I, J >$. При этом подматрицу вида $M < I, \lfloor 1, m \rceil >$ ($M < \lfloor 1, n \rceil, J >$) будем обозначать через $M < I >$ (соответственно $M(J)$). Матрица M называется *приведенной*, если все ее столбцы различны.

Пусть $\mathcal{M} = (\Sigma,\ \text{И})$ — указанная выше модель ненадежной схемы Σ с состояниями $\Sigma = \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$ и функциями $F = F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ от переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть, далее, функции $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ определены на множестве наборов $\mathcal{N} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ и принимают значения из множества (наборов) $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_a\}$.

Сопоставим рассматриваемой задаче контроля матрицу M, $M \in A^{p,t}$, где $M < s, j >= F^{(j)}(\alpha_s)$ для всех s, $s \in \lfloor 1, p \rceil$, и j, $j \in \lfloor 1, t \rceil$. Заметим, что если $M(i) = M(j)$, то состояния с номерами i и j невозможно отличить друг от друга на основе данных наборов. В таких случаях все состояния, как правило, разбиваются на классы эквивалентности по отношению неотличимости, а задача контроля ставится и решается для этих классов. Заметим также, что каждому классу неотличимости состояний соответствует группа одинаковых столбцов матрицы M, а задаче контроля для этих классов — приведенная матрица M', множество столбцов которой совпадает с множеством различных столбцов матрицы M.

Пусть, далее, задана цель контроля, то есть указано множество N, состоящее из тех неупорядоченных пар различных чисел отрезка $\lfloor 1, t \rceil$, для которых пары состояний (столбцов матрицы M) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности, если N состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является *диагностика схемы*, а если $N = \{(1, 2), \ldots, (1, t)\}$, то — *проверка исправности схемы*. Множество T, $T \subseteq \lfloor 1, p \rceil$, называется *тестом для матрицы* M *относительно множества* N, или, иначе, *тестом для* (M, N), если для любой пары (i, j) из N существует s, $s \in T$, такое, что $M < s, i > \neq M < s, j >$. Мощность теста называется также его *длиной*.

Заметим, что множество $\lfloor 1, p \rceil$ всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любого своего элемента, называется *тупиковым*, а тест, который имеет минимальную мощность, — *минимальным*. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется *диагнос-*

тическим (соответственно *проверяющим*).

Для приведенной матрицы M, $M \in A^{p,t}$, и цели контроля N определим булеву *функцию теста* $f(y_1, \ldots, y_p)$ следующим образом: $f(\beta_1, \ldots, \beta_p) = 1$ тогда и только тогда, когда множество T, состоящее из тех чисел s, $s \in \lfloor 1, p \rceil$, для которых $\beta_s = 1$, образует тест для матрицы M относительно N.

Теорема. *Функция теста $f(y_1, \ldots, y_p)$ для матрицы M, $M \in A^{p,t}$, и цели контроля N может быть задана КНФ*

$$f(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{(i,j) \in N} \Big(\bigvee_{\substack{1 \le s \le p \\ M < s, i > \ne \\ M < s, j >}} y_s \Big), \tag{4.1}$$

причем каждое слагаемое вида $y_{s_1} \cdot \ldots \cdot y_{s_r}$ сокращенной ДНФ функции $f(y_1, \ldots, y_p)$ соответствует тупиковому тесту $T = \{s_1, \ldots, s_r\}$ и обратно.

На данной теореме основан следующий универсальный алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы M относительно цели контроля N:

1) выписываем для функции теста КНФ вида (4.1);

2) раскрывая в ней скобки, приводя "подобные" слагаемые (см. § 3) и применяя правило поглощения $x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$, получаем сокращенную ДНФ функции теста;

3) сопоставляем каждой элементарной конъюнкции сокращенной ДНФ тупиковый тест.

Пример.

Пусть $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для построения всех тупиковых диагностических тестов матрицы M построим КНФ вида (4.1):

$$(y_1 \vee y_2 \vee y_3) \cdot (y_2 \vee y_4) \cdot (y_1 \vee y_3 \vee y_4).$$

Раскрывая в этой КНФ скобки, приводя подобные слагаемые и применяя правило поглощения, получим сокращенную ДНФ для функции теста:

$$y_1 y_2 \vee y_1 y_4 \vee y_2 y_3 \vee y_2 y_4 \vee y_3 y_4.$$

Тупиковыми диагностическими тестами матрицы M являются множества

$$\{1,2\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\}.$$

В дальнейшем по умолчанию будем считать, что матрица — это матрица из нулей и единиц, а тест — диагностический тест. Множество номеров строк матрицы M, которое соответствует подматрице без нулевых столбцов, называется ее *покрытием*. Покрытие считается *тупиковым* (*кратчайшим*), если удаление из него любого номера строки приводит к множеству номеров строк, не являющемуся покрытием (содержит минимальное число номеров строк). Мощность минимального покрытия называется *глубиной* матрицы.

5.1. Найти глубину матрицы M:

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2. Найти длину минимального теста для матрицы M, множество столбцов которой есть[1]

1) B^n;

2) B^n_k, $k > 0$;

3) $\bigcup\limits_{0 \le k \le n/2} B^n_{2k}$;

4) $B^n_k \bigcup B^n_{k+1}$, $k \ge 0$.

5.3. Через $M^{(2)}$ будем обозначать матрицу, составленную из сумм по модулю 2 всевозможных пар столбцов матрицы M, выписанных в порядке возрастания номеров этих пар в соответствии с их лексикографической упорядоченностью. Например, если $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $M^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказать, что множество номеров строк матрицы M является тестом (минимальным, тупиковым тестом) тогда и только тогда, когда оно является покрытием (кратчайшим, тупиковым покрытием) матрицы $M^{(2)}$.

5.4. Обобщить результат задачи 5.3 на случай произвольной цели контроля N.

5.5. Две матрицы M и L с одинаковым числом строк называются T-*эквивалентными*, если множество номеров строк матрицы M является

[1]Через B^n_k, где $0 \le k \le n$, обозначается множество всех наборов куба B^n, содержащих ровно k единиц.

тестом тогда и только тогда, когда оно является тестом матрицы L.

Выяснить, являются ли T-эквивалентными матрицы M и L, если

1) M получена из L перестановкой столбцов;

2) M получена из L перестановкой строк;

3) M получена из L удалением всех столбцов, сплошь состоящих из 0 (1);

4) M получена из L вычеркиванием $k-1$ столбцов из k одинаковых;

5) M получена сложением по модулю 2 каждого столбца матрицы L с заданным столбцом $\tilde{\alpha}$;

6) M получена из L сложением по модулю 2 каждой строки матрицы L с заданной строкой $\tilde{\alpha}$;

7) M получена из L заменой всех 0 на 1 и всех 1 на 0;

8) M состоит из всех линейных комбинаций столбцов матрицы L;

9) $M = L^{(2)}$ (определение см. в задаче 5.3).

5.6. Доказать, что число тупиковых тестов матрицы M с m строками не превосходит[2] $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$.

5.7. Доказать, что число приведенных матриц из $B^{m,n}$, у которых фиксированное множество номеров строк мощности k является тестом, равно $2^k(2^k-1)\dots(2^k-n+1)2^{n(m-k)}$.

5.8. Пользуясь универсальным алгоритмом, построить все тупиковые тесты для матриц 1), 2), 5), 6) задачи 5.1.

5.9. Доказать, что длина тупикового теста для приведенной матрицы с n столбцами лежит в пределах от $\lceil \log_2 n \rceil$ до $(n-1)$ и что обе указанные границы достигаются.

5.10. Могут ли строки некоторого тупикового теста для матрицы M быть линейно зависимы?

5.11. Пусть матрица M из $B^{m,n}$ имеет в каждой своей строке не более p, $p > 0$, единиц. Доказать, что длина минимального теста для матрицы M не менее $\lceil \frac{n}{2p} \rceil$.

5.12. Пусть первый столбец приведенной матрицы M, $M \in B^{m,n+1}$, состоит из одних нулей (в соответствии с задачей 5.5.5 любая матрица T-эквивалентна матрице с таким же числом столбцов, у которой первый столбец состоит только из нулей), а ее остальные столбцы можно разбить на s групп так, что подматрица матрицы M, порождаемая

[2]Через $\lceil a \rceil$ (соответственно $\lfloor a \rfloor$) обозначается ближайшее к a сверху (соответственно, снизу) целое число.

любой из этих групп, имеет в каждой своей строке не более одной единицы. Показать, что длина теста матрицы M не меньше, чем $2n/(s+1)$.

§ 6. Тесты для контактных схем и схем из функциональных элементов

Рассмотрим общую модель ненадежных схем применительно к контактным схемам (КС) и схемам из функциональных элементов (СФЭ).

Будем считать, что любое неисправное состояние КС связано с *размыканием (обрывом)* одной части и *замыканием* другой части контактов КС. При этом предполагается, что функция проводимости замкнутого (разомкнутого) контакта тождественно равна единице (соответственно нулю). В частности, через $И_{r,s}$, где r и s — целые неотрицательные числа, будем обозначать источник неисправностей, допускающий не более, чем r, обрывов и не более, чем s, замыканий контактов КС одновременно. Тест для источника неисправностей $И_{0,1}$ ($И_{1,0}$) называют *единичным тестом замыкания* (соответственно, *размыкания*).

При изучении ненадежности СФЭ, в свою очередь, будем считать, что каждое их неисправное состояние связано с возможным изменением функционирования функциональных элементов (ФЭ) или входов схемы при сохранениии местности реализуемых ими булевых функций. Предполагается также, что все соединения между входами, ФЭ и выходами СФЭ не нарушаются и передают информацию без искажений. Пусть, в частности, СФЭ Σ' является неисправным состоянием СФЭ Σ, x_i — вход схемы Σ, а $\mathcal{E}$ — ее ФЭ, реализующий булеву функцию $\varphi(u_1,\ldots,u_k)$. Будем говорить, что в состоянии Σ' *на входе x_i имеет место константная неисправность типа σ, $\sigma \in \{0,1\}$*, если в соответствующей x_i входной вершине Σ' реализуется булева функция σ. Будем говорить также, что в состоянии Σ' *на j-м входе, $1 \leq j \leq k$, (выходе) ФЭ $\mathcal{E}$ схемы Σ имеет место константная неисправность типа σ, $\sigma \in \{0,1\}$*, если ФЭ $\mathcal{E}$ реализует в Σ' булеву функцию $\varphi(u_1,\ldots,u_{j-1},\sigma,u_{j+1},\ldots,u_k)$ (соответственно σ). Можно рассматривать константные неисправности различных типов, а также константные неисправности как на входах, так и на выходах ФЭ.

При описании источника неисправностей в КС или СФЭ Σ часто выделяется множество $\breve{\Sigma}$ тех элементов или “узлов” Σ, которые могут выходить из строя, и указываются возможные неисправные состояния каждого из них. При этом источник, допускающий любую комбинацию любых неисправных состояний для любого подмножества (подмножества мощности 1) элементов множества $\breve{\Sigma}$, называется *полным* (соответственно, *единичным*) источником для множества $\breve{\Sigma}$ и заданных неисправных состояний его элементов, а связанный с ним тест — *полным* (соответственно, *единичным*) тестом. По умолчанию считается, что $\breve{\Sigma} = \Sigma$.

При построениии тестов для КС и СФЭ можно применять общие методы и алгоритмы построения тестов для таблиц (см. § 5). Во многих случаях при построении тестов для двухполюсной КС Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, реализующей булеву функцию f, полезно применять соответствие между набором α, $\alpha \in B^n$, из N_f $(N_{\bar{f}})$ и простыми цепями (соответственно тупиковыми сечениями), которые состоят из замкнутых (соответственно разомкнутых) на наборе α контактов и соединяют (соответственно отделяют) полюса схемы Σ (см. задачу 6.9).

6.1. Тесты для контактных схем

6.1. Построить все тупиковые тесты для КС на рис. 10 и источника неисправностей, допускающего обрыв одного из контактов вида x.

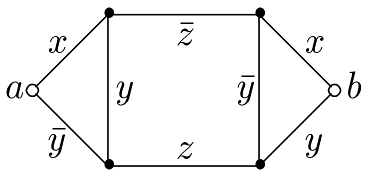


Рис. 10.

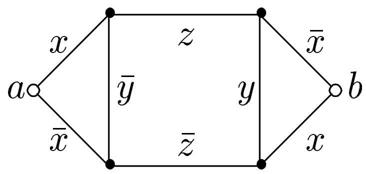


Рис. 11.

6.2. Построить все тупиковые
а) проверяющие
б) диагностические
тесты для КС на рис. 11 и источника неисправностей, допускающего размыкание контактов вида $\bar{z}$, z, а также замыкание контакта вида y, причем общее число неисправных контактов не может быть больше 1.

6.3. Построить все тупиковые
а) проверяющие
б) диагностические
тесты для КС на рис. 12 и источника неисправностей, допускающего обрыв одного контакта переменных x, z.

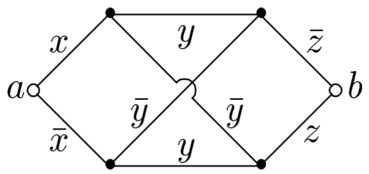


Рис. 12.

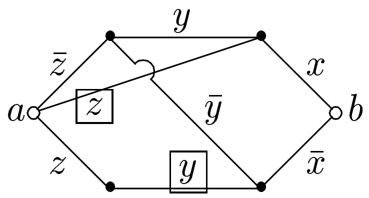


Рис. 13.

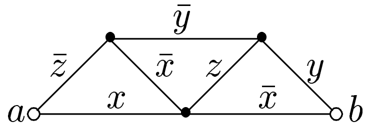


Рис. 14.

6.4. Построить все тупиковые
а) проверяющие
б) диагностические
тесты для КС на рис. 13 и источника неисправностей, допускающего одну из следующих неисправностей: обрыв контакта $\bar{z}$, обрыв выделенного контакта z и замыкание выделенного контакта y.

6.5. Построить все тупиковые
а) проверяющие
б) диагностические
тесты для КС на рис. 14 с единичным источником неисправностей, допускающим обрыв контактов вида z, $\bar{z}$ или замыкание контакта вида y.

6.6. Построить все тупиковые тесты для КС на рис. 15 и источника неисправностей, допускающего замыкание одного из контактов вида $\bar{x}$, y, $\bar{y}$.

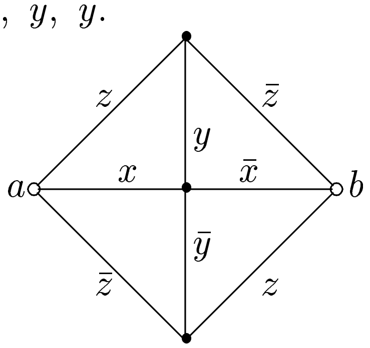


Рис. 15.

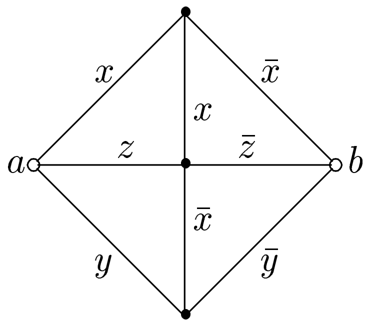


Рис. 16.

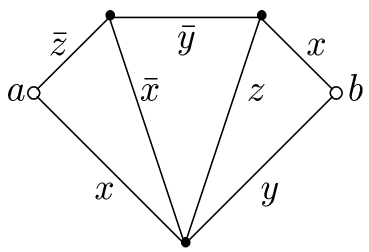


Рис. 17.

6.7. Построить все тупиковые
а) проверяющие
б) диагностические
тесты для КС на рис. 16 и источника неисправностей, допускающего замыкание одного контакта переменных y, z.

6.8. Построить все тупиковые
а) проверяющие

б) диагностические

тесты для КС на рис. 17 и источника неисправностей, допускающего размыкание одного контакта вида x, y или $\bar{z}$.

6.9. Пусть в двухполюсной КС Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ для любого набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из N_f найдется единственная не содержащая контактов вида $x_1^{\bar{\alpha_1}}, \ldots, x_n^{\bar{\alpha_n}}$ цепь C_α, соединяющая полюса. Пусть источник неисправностей И допускает обрыв не более, чем одного из контактов $k_1, \ldots, k_{s-1}$ КС Σ и порождает при этом s отличимых состояний.

1) Доказать, что множество наборов T, $T \subseteq B^n$, образует проверяющий тест для (Σ, И) тогда и только тогда, когда для каждого контакта k_i, $i = 1, \ldots, (s-1)$, найдется цепь C_α, $\alpha \in T$, проходящая через него.

2) Доказать, что множество наборов T, $T \subseteq B^n$, образует диагностический тест для (Σ, И) тогда и только тогда, когда оно образует проверяющий тест и для любых двух контактов k_i и k_j, где $1 \leq i < j \leq (s-1)$, найдется такой набор α, $\alpha \in T$, что цепь C_α проходит через один из этих контактов и не проходит через другой.

6.10. Рассматривается построенная по методу каскадов КС S_n^r (см. рис. 18), реализующая элементарную симметрическую функцию от n переменных с рабочим числом r (т. е. функцию, принимающую значение 1 на всех наборах из B_r^n и только на них).

1) Используя результат задачи 5.12, получить нижнюю оценку вида $\frac{2r(n-r)}{r+1}$ для длины единичного теста размыкания данной схемы.

2) Показать, что для S_n^r существует единичный диагностический тест размыкания длины, не превосходящей $2n - 2$.

6.11. Найти длину минимального единичного проверяющего теста для размыкания контактов в КС на рис. 19.

6.12. Рассмативается КС на рис. 20.

1) Найти длину минимального единичного проверяющего теста для размыкания.

2) Построить такой единичный тест размыкания для контактов вида $x_1, \ldots, x_n$, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, длина которого не превосходит величины $\lceil \log_2 n \rceil + 2$.

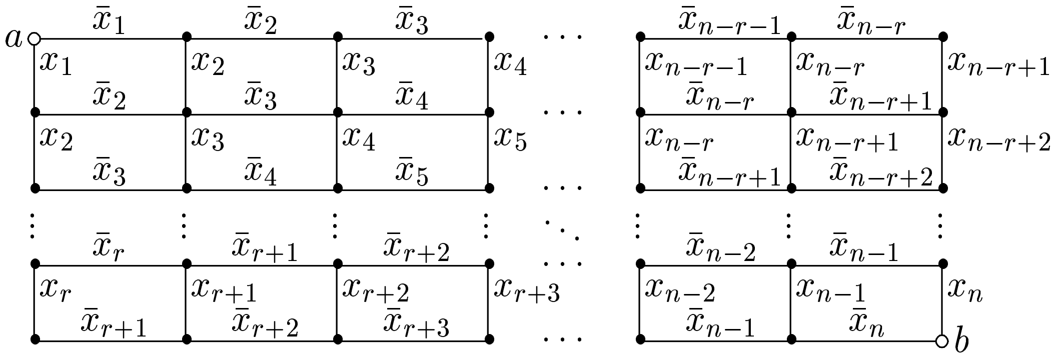


Рис. 18.

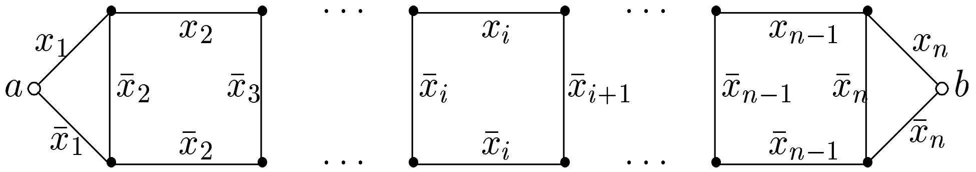


Рис. 19.

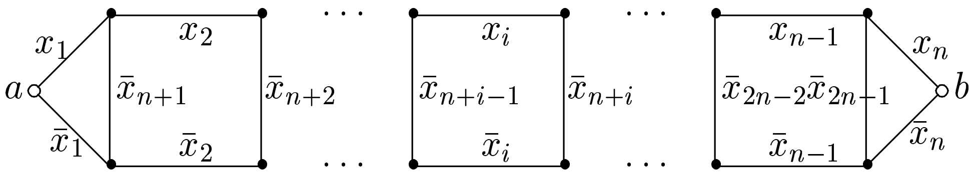


Рис. 20.

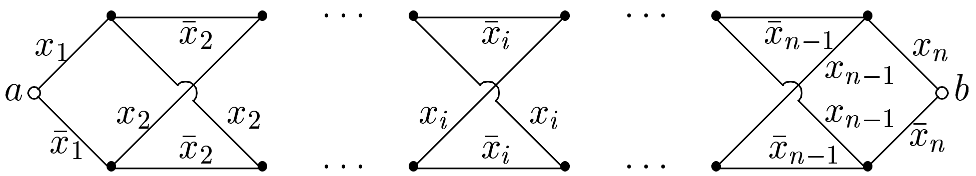


Рис. 21.

6.13. На основе контактного дерева построена КС для функции $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$. Для этой схемы найти длину минимального единичного теста

а) размыкания,

б) замыкания,

в) как размыкания, так и замыкания.

6.14. *Единичной сферой* с центром в точке α, $\alpha \in B^n$, называется множество всех наборов куба B^n, отличающихся от набора α только в одной координате.

Доказать, что длина минимального единичного теста размыкания для произвольной КС, реализующей характеристическую функцию единичной сферы куба B^n, не меньше n. Покажите, что указанная оценка достижима.

6.15. Доказать, что для функции $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ не существует КС от n переменных, имеющей полный тест длины меньше, чем 2^n.

6.16. Рассматривается построенная по методу каскадов КС Σ_n, реализующая линейную функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus 1$ при $n \geq 3$ (см. рис. 21).

1) Доказать эквивалентность единичных замыканий одноименных контактов.

2) Найти длину минимального единичного проверяющего теста
а) замыкания,
б) размыкания,
в) как размыкания, так и замыкания.

3) Построить асимптотически минимальный единичный тест замыкания.

4) Построить единичный тест размыкания, длина которого не превосходит

а) $2\log_2 n + 7$,

б) $\frac{3}{2}\log_2 n + 10$.

6.17. Доказать, что любую булеву функцию можно реализовать КС, допускающей единственный полный проверяющий тест, состоящий из всех наборов.

6.2. Тесты для схем из функциональных элементов

6.18. 1) Построить минимальный единичный диагностический тест относительно константных неисправностей на выходах ФЭ схемы на рис. 22 а), б)[3] и указать число таких тестов.

2) Построить минимальный единичный проверяющий тест относительно константных неисправностей на выходах ФЭ схемы на рис. 23 а).

3) Построить минимальный единичный проверяющий тест относительно константных неисправностей на выходах ФЭ схемы на рис. 24 а).

[3]При изображении схем из функциональных элементов в настоящем пособии действуют правила:
1) общими точками проводников могут являться лишь точки выходов функциональных элементов,
2) входы каждого функционального элемента упорядочены слева направо.

4) Построить минимальный проверяющий тест относительно константных неисправностей на выходах тех ФЭ схемы на рис. 25, которые содержат входы схемы.

6.19. 1) Показать, что тест, проверяющий константные неисправности на выходах ФЭ, среди входов которых есть либо входы схемы, либо ветвящиеся выходы функциональных элементов, является проверяющим тестом для константных неисправностей на выходах всех ФЭ схемы (при этом предполагается, что базис не содержит ФЭ, реализующих константы).

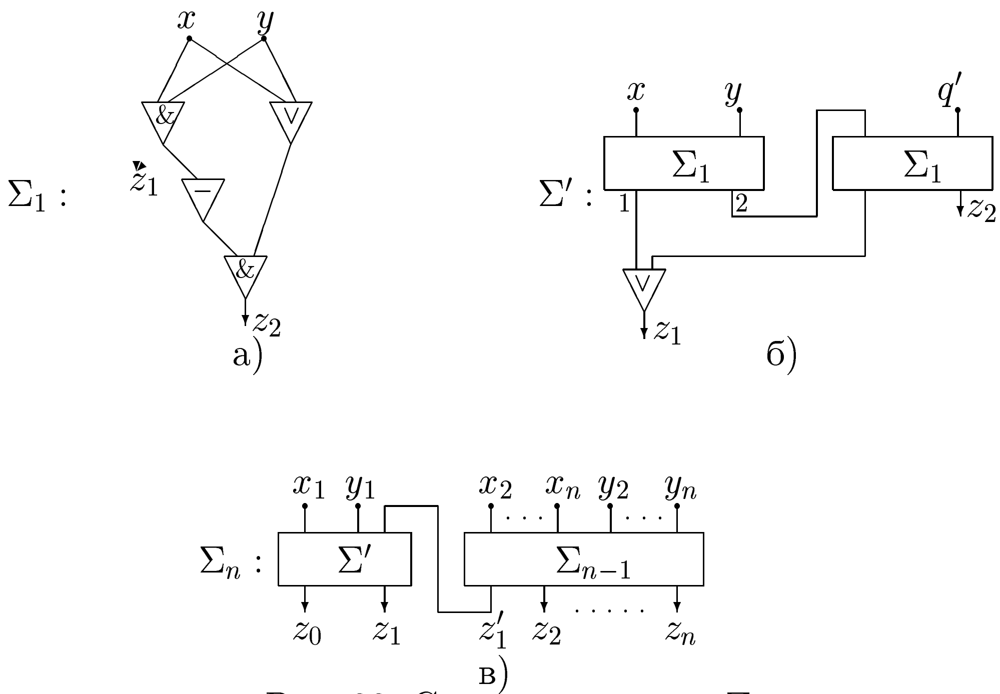


Рис. 22. Схема сумматора Σ_n

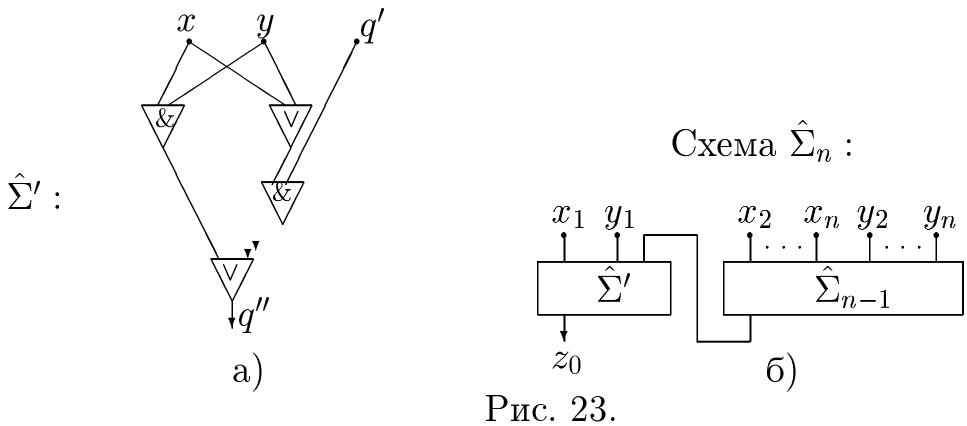


Рис. 23.

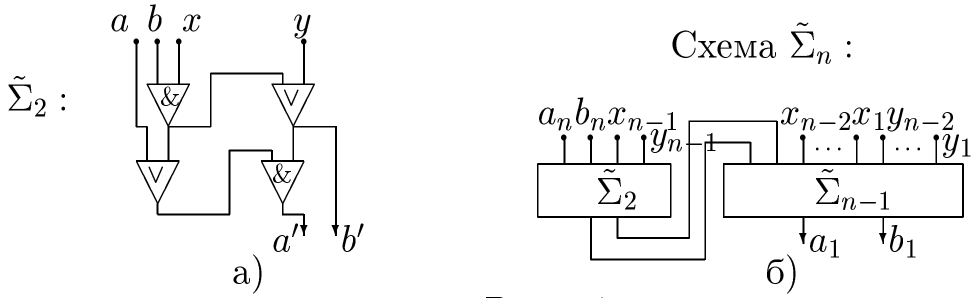


Рис. 24.

2) Показать, что СФЭ на рис. 25 является примером схемы, для которой единичный тест, проверяющий константные неисправности на выходах лишь тех ФЭ, среди входов которых есть входы схемы, не является единичным проверяющим тестом для константных неисправностей на выходах всех ФЭ схемы.

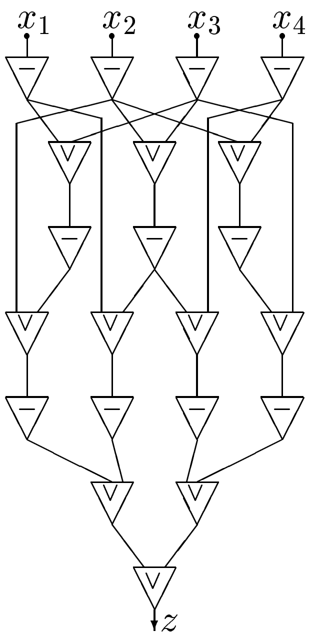


Рис. 25.

6.20. Реализовать линейную функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ СФЭ в стандартном базисе, допускающей единичный тест из четырех наборов, проверяющий константные неисправности на выходах ФЭ схемы.

6.21. 1) Доказать, что длина минимального единичного теста, диагностирующего константные неисправности на выходах ФЭ схемы сумматора Σ_n при $n \geq 3$ (рис. 22 в)), равна 5.

2) Схема $\hat{\Sigma}_n$ на рис. 23 б) имеет сложность $4n-3$ и вычисляет старший разряд z_0 суммы $\overline{z_0 z_1 \ldots z_n}$ двоичных чисел $\overline{x_1 \ldots x_n}$ и $\overline{y_1 \ldots y_n}$ (схема $\hat{\Sigma}_1$ представляет собой конъюнктор). Доказать, что длина минимального единичного теста, проверяющего константные неисправности на выходах ФЭ схемы $\hat{\Sigma}_n$, равна $2n$.

3) Построить единичный тест, проверяющий константные неисправности на выходах ФЭ схемы $\tilde{\Sigma}_n$ на рис. 24 б), имеющий длину не более 4.

6.22. Показать существование такого базиса из ФЭ, в котором для любой булевой функции n переменных существует схема, допускающая единичный проверяющий константные неисправности на выходах ФЭ тест длины, не превосходящей $n+3$.

6.23. Доказать, что длина полного проверяющего теста для входов n-входовой схемы не превосходит $2n$. Показать неулучшаемость предыдущей оценки для некоторой функции.

6.24. Показать, что, начиная с некоторого n, любая булева функция n переменных обладает схемой, допускающей нетривиальный единичный тест, диагностирующий константные неисправности на выходах ФЭ.

6.25. Покажите, что минимальный проверяющий единичные константные неисправности на выходах ФЭ тест для произвольного дешифратора (для произвольного универсального многополюсника) состоит из всех наборов.

§ 7. Оценка надежности схем. Самокорректирующиеся схемы.

Для определения уровня надежности схемы часто применяется вероятностный подход (см., например, [12, 6]). Пусть $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ — модель ненадежной схемы Σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, имеющей состояния $\Sigma = \Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(t)}$, в которых реализуются функции $F = F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(t)}$ соответственно, определенные на множестве наборов $\mathcal{N} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$. Пусть, далее, известна и равна π_i, $i = 1, \ldots, t$, вероятность того, что схема Σ находится в состоянии $\Sigma^{(i)}$, где $0 \le \pi_i \le 1$ и $\sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1$. Введем следующие величины, характеризующие ненадежность схемы Σ в модели $\mathcal{M}$:

$$\xi(\mathcal{M}) = \sum_{\substack{F^{(j)} \neq F \\ 2 \le j \le t}} \pi_j, \tag{6.1}$$

$$\xi(\mathcal{M}, \beta) = \sum_{\substack{F^{(j)}(\beta) \neq F(\beta) \\ 2 \le j \le t}} \pi_j, \tag{6.2}$$

где $\beta \in \mathcal{N}$, а затем положим

$$\eta(\mathcal{M}) = \max_{\beta \in \mathcal{N}} \xi(\mathcal{M}, \beta), \tag{6.3}$$

$$q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n) = \xi(\mathcal{M}, (x_1, \ldots, x_n)). \tag{6.4}$$

Заметим, что величина $\xi(\mathcal{M})$ $(\xi(\mathcal{M}, \beta))$ задает вероятность того, что схема Σ реализует функцию, не равную F (соответственно не равную F на наборе β), и поэтому

$$\eta(\mathcal{M}) \le \xi(\mathcal{M}) \le p\eta(\mathcal{M}), \tag{6.5}$$

откуда следует, в частности, что $\eta(\mathcal{M}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi(\mathcal{M}) = 0$. Схема Σ считается *абсолютно надежной* в модели $\mathcal{M}$, если $\eta(\mathcal{M}) = 0$ (или $\xi(\mathcal{M}) = 0$). Это означает, что все состояния схемы Σ, имеющие положительную вероятность, эквивалентны Σ. Функция $q_{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией вероятности неправильного срабатывания схемы* Σ. В дальнейшем, при записи введенных величин вместо пары $\mathcal{M} = (\Sigma, \text{И})$ будем писать просто Σ, если из контекста ясно, какой источник неисправностей имеется в виду.

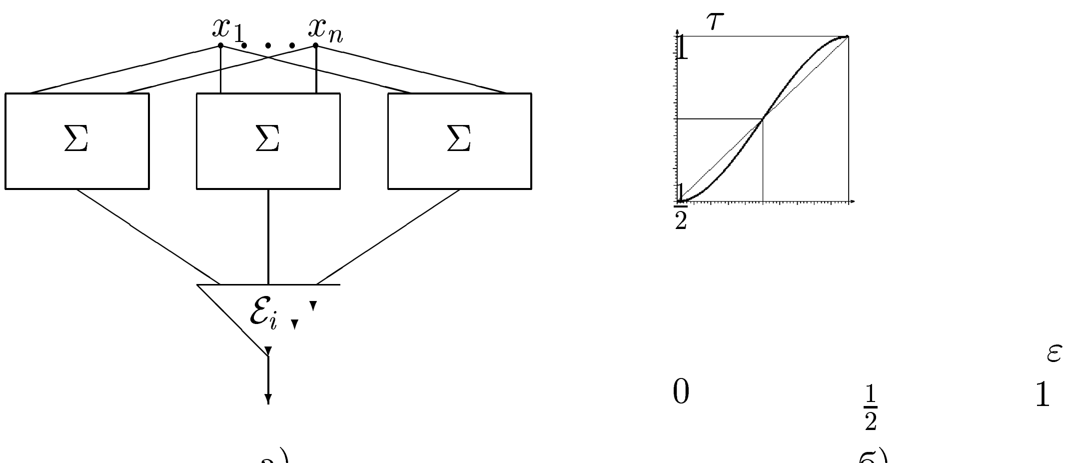
Рассмотрим вероятностный подход на примере ненадежных СФЭ над базисом $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует булеву функцию

$\varphi_i(u_1, \ldots, u_{k_i})$. Пусть для каждого i, $i = 1, \ldots, b$, известно *распределение режимов работы ФЭ* $\mathcal{E}_i$, то есть для каждого j, $j = 1, \ldots, 2^{2^{k_i}}$, известна и равна $\pi_{i,j}$ вероятность того, что ФЭ $\mathcal{E}_i$ реализует j-ю булеву функцию от булевых переменных $u_1, \ldots, u_{k_i}$ (если считать, что все булевы функции от переменных $u_1, \ldots, u_{k_i}$ упорядочены в соответствии с номерами их столбцов значений). При нахождении ненадежности схемы Σ над базисом Б будем считать, что все ее ФЭ переходят в свои состояния независимо друг от друга и что любое состояние СФЭ Σ определяется состояниями ФЭ Σ (см. § 6). В соответствии с этим на основе введенных выше соотношений (6.1)-(6.4) можно найти значения ненадежности $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ для СФЭ Σ, а также распределение режимов ее работы и функцию $q_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$.

Считается, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ допускает *сколь угодно надежную реализацию* в базисе Б, если для любого ε, $\varepsilon > 0$, существует СФЭ Σ над Б, которая реализует f и для которой $\xi(\Sigma) < \varepsilon$. Повышение надежности при реализации ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ возможно, если в базисе Б имеется абсолютно надежный ФЭ $\mathcal{E}_i$, реализующий функцию голосования $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ (см. [12]). Действительно, если СФЭ Σ реализует f и $\eta(\Sigma) = \varepsilon$, то для ненадежности СФЭ $\Sigma^{(1)}$, показанной на рис. 26 а), которая тоже реализует f, имеет место равенство

$$\eta(\Sigma^{(1)}) = H(\varepsilon) = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$$

(график функции $\tau = H(\varepsilon)$ показан на рис. 26 б)).



а) б)

Рис. 26.

Заметим, что $H(0) = 0$, $H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, что первые две производные функции $H(\varepsilon)$ на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ неотрицательны, причем $H'(0) = H''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ и $H'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $H''(0) > 0$, и что $\eta(\Sigma^{(1)}) < \varepsilon$, если $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Поэтому, рекурсивно применяя указанную процедуру повышения надежности к СФЭ $\Sigma^{(k)}$, результатом которой является СФЭ $\Sigma^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, построим последовательность СФЭ $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots, \Sigma^{(k)}, \ldots$, реализующих f, для которой

$$\eta(\Sigma^{(k)}) = H(\eta(\Sigma^{(k-1)})) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Заметим также, что СФЭ $\Sigma^{(k)}$ содержит 3^k подсхем вида Σ и $1 + 3 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{3^k-1}{2}$ ФЭ $\mathcal{E}_i$.

Аналогичные построения и оценки применимы и для повышения ξ-ненадежности СФЭ.

7.1. 1) Доказать, что $\xi(\mathcal{M}) = \eta(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда для $\mathcal{M}$ существует проверяющий тест длины 1.

2) Доказать, что функция f допускает сколь угодно надежную реализацию в базисе Б тогда и только тогда, когда для любого ε, $\varepsilon > 0$, существует СФЭ Σ над Б, которая реализует f и для которой $\eta(\Sigma) < \varepsilon$.

3) Доказать, что для вычисления ненадежности $\eta(\Sigma)$ в соответствии с (6.3) для СФЭ Σ над базисом Б достаточно знать ненадежности вида $\xi(\mathcal{E}_i, \beta)$ для всех ФЭ $\mathcal{E}_i$ базиса Б и всех наборов β из B^{k_i}, $i = 1, \ldots, b$.

7.2. Ниже указана СФЭ Σ и распределения режимов работы ее ненадежных ФЭ. Найти распределение режимов работы СФЭ Σ, а затем вычислить $\xi(\Sigma)$, $\eta(\Sigma)$ и функцию q_Σ.

1) Σ — СФЭ на рис. 22 а), где конъюнктор работает абсолютно надежно, а распределения режимов работы дизъюнктора $u_1 \vee u_2$ и инвертора $\bar{u}_1$ имеют, соответственно, вид $\begin{pmatrix} u_1 \vee u_2 & u_1 \oplus u_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \bar{u}_1 & u_1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2) Σ — СФЭ на рис. 23 а), где дизъюнктор работает абсолютно надежно, а распределение режимов работы конъюнктора $u_1 \& u_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} u_1 \& u_2 & \bar{u}_1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

3) Σ — СФЭ на рис. 24 а), где конъюнктор работает абсолютно надежно, а распределение режимов работы дизъюнктора $u_1 \vee u_2$ имеет вид $\begin{pmatrix} u_1 \vee u_2 & u_1 \& u_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

7.3. 1) Пусть в СФЭ Σ на рис. 22 а) дизъюнктор работает абсолютно надежно, а распределения режимов работы конъюнктора $u_1 \& u_2$ и инвертора $\bar{u}_1$ имеют, соответственно, вид $\begin{pmatrix} u_1\&u_2 & 0 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \bar{u}_1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Известно, что вероятность такого функционирования схемы, при котором на обоих выходах схемы реализуются тождественные нули, равна $\frac{1}{6}$. Найти p.

2) Пусть распределения режимов работы конъюнктора $u_1\&u_2$ и дизъюнктора $u_1 \vee u_2$ в СФЭ Σ на рис. 23 а) имеют вид $\begin{pmatrix} u_1\&u_2 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} u_1 \vee u_2 & x \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, соответственно. Известно, что вероятность такого функционирования схемы, при котором на выходе Σ реализуется тождественная единица, равна $\frac{3}{8}$. Найти p.

7.4. Пусть базис Б состоит из ФЭ, реализующего функцию голосования, который работает абсолютно надежно, и конъюнктора $u_1\&u_2$, распределение режимов работы которого имеет вид $\begin{pmatrix} u_1\&u_2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1) Достаточно ли 40 функциональных элементов, чтобы реализовать функцию $u_1\&u_2$ с ненадежностью не более 0.1?

2) Достаточно ли 400 функциональных элементов, чтобы реализовать функцию $u_1\&u_2$ с ненадежностью не более 0.002?

7.5. Ниже приведены распределения режимов работы ФЭ $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, b$, ненадежного базиса Б. Покажите, что в данном базисе возможна сколь угодно надежная реализация произвольной функции.

1) $b = 1$, $\mathcal{E}_1 : \begin{pmatrix} u_1 \oplus u_2 & \overline{u_1} \vee \overline{u_2} \\ 1-p & p \end{pmatrix}$;

2) $b = 3$, $\mathcal{E}_1 : \begin{pmatrix} u_1 \vee u_2 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_2 : \begin{pmatrix} u_1 \oplus u_2 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_3 : \begin{pmatrix} u_1\&u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Другой (так называемый логико-комбинаторный [12]) подход к определению уровня надежности схемы связан с понятием самокорректируемости. Схема Σ называется *самокорректирующейся относительно источника неисправностей* И, если в модели (Σ, И) все состояния эквивалентны. Естественно считать, что чем больше неисправностей корректирует схема Σ, тем выше уровень ее надежности. Задача синтеза самокорректирующихся схем является важным частным случаем общей задачи синтеза.

Рассмотрим задачу синтеза контактных схем, которые являются самокорректирующимися относительно источника неисправностей $И_{r,s}$ (см. § 6). Простейший способ решения этой задачи связан с последовательным и (или) параллельным дублированием двухполюсной КС. Легко видеть, что если при этом взять l экземпляров самокорректирующейся относительно $И_{r,s}$ КС Σ и соединить их последовательно (параллельно), то получим эквивалентную Σ КС Σ', которая является самокорректирующейся относительно $И_{R,S}$, где $R = r$, $S = (s+1) \cdot l - 1$ (соответственно $R = (r + 1) \cdot l - 1$, $S = s$). Аналогичный результат дает указанное выше дублирование, если его применять к каждому контакту схемы (этот способом можно строить многополюсные самокорректирующиеся КС).

Другой способ перехода от (многополюсной) КС Σ к эквивалентной ей КС Σ', которая является самокорректирующейся относительно $И_{\sigma,1-\sigma}$, где $\sigma \in \{0, 1\}$, заключается в следующем. Разобьем КС Σ на непересекающиеся связные (многополюсные) подсхемы $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$, каждая из которых состоит из контактов одного типа, а затем заменим КС Σ_i, $i = 1, \ldots, l$, на КС Σ'_i, состоящую из контактов того же типа, которая представляет собой цикл, проходящий через все вершины $v_1^{(i)}, \ldots, v_{a_i}^{(i)}$ КС Σ_i, если $\sigma = 1$ (см. рис. 27 а)) и звезду с центром в новой вершине, соединенной со всеми вершинами $v_1^{(i)}, \ldots, v_{a_i}^{(i)}$ КС Σ_i, если $\sigma = 0$ (см. рис. 27 б)).

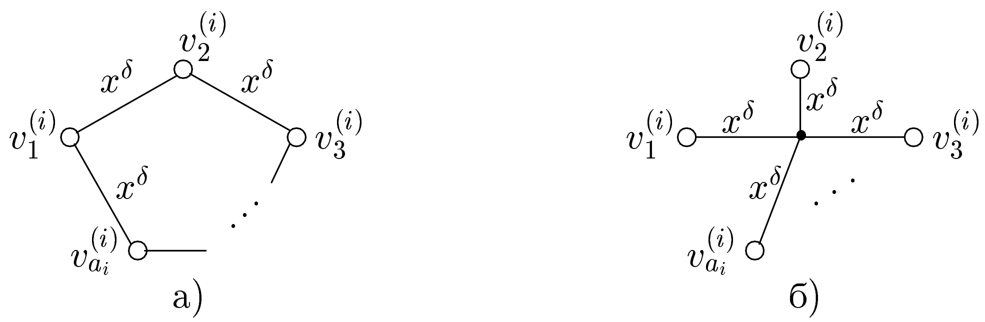


Рис. 27

7.6. 1) Доказать, что если функция x_i^σ, где $1 \leq i \leq n$ и $\sigma \in \{0, 1\}$ может быть получена из функции $f(x_1, ..., x_n)$ в результате некоторой подстановки констант вместо БП $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, то в любой КС, реализующий f и корректирующей r обрывов (r замыканий), содержится не менее $(r + 1)$ контактов x_i^σ.

2) Построить для функции $x_1 \oplus x_2$ минимальную КС, корректирующую

а) одно размыкание,

б) одно замыкание.

7.7. Построить по КС Σ эквивалентную ей КС Σ', корректирующую

1) одно размыкание

2) одно замыкание

и такую, что

а) $L(\Sigma') \le 30$, если Σ — КС на рис. 28,

б) $L(\Sigma') \le 25$, если Σ — КС на рис. 29,

в) $L(\Sigma') \le 28$, если Σ — КС на рис. 30.

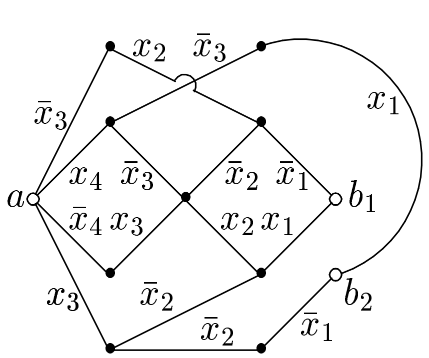


Рис. 28.

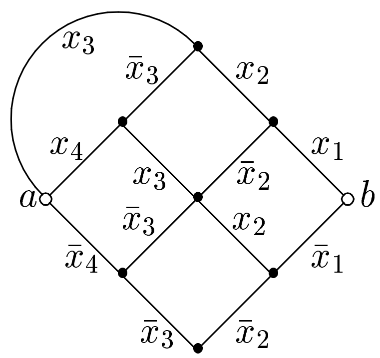


Рис. 29.

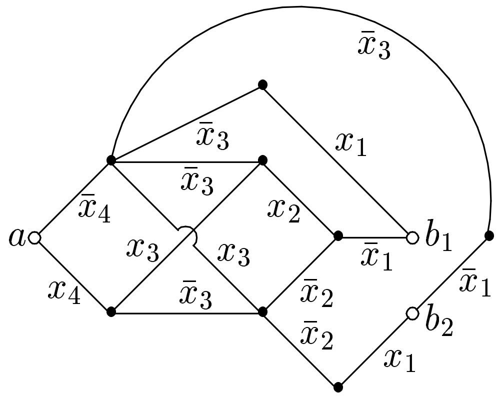


Рис. 30.

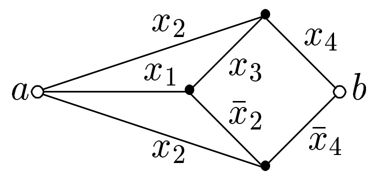


Рис. 31.

7.8. Рассматривается КС на рис. 31.

1) Построить по этой схеме КС не более чем из 13 контактов, корректирующую

а) одно размыкание,

б) одно замыкание.

2) Построить для функции, реализуемой этой схемой, минимальную КС, корректирующую

а) одно размыкание,

б) одно замыкание.

7.9. Для функции $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ построить КС сложности 8, корректирующую

а) одно размыкание,

б) одно замыкание.

Указание. Каркасы этих схем представлены на рис. 32 и 33 (соответственно).

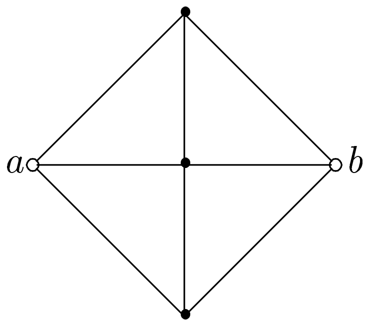


Рис. 32.

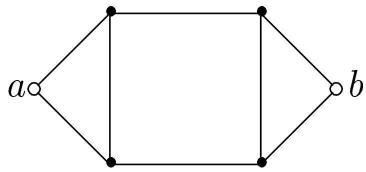


Рис. 33.

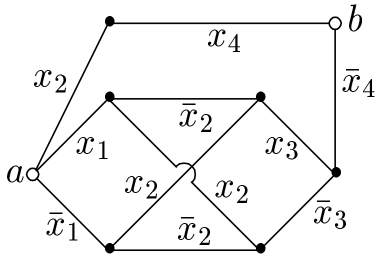


Рис. 34.

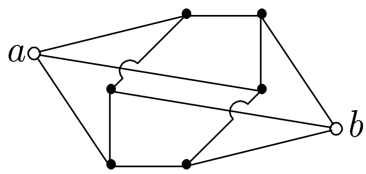


Рис. 35.

7.10. Доказать, что минимальная корректирующая одно размыкание КС для линейной булевой функции, существенно зависящей от всех своих n переменных, имеет сложность $4n$ (КС, реализующая эту функцию, представлена на рис. 21).

7.11. Рассматривается КС на рис. 34. Построить по этой схеме КС, корректирующую одно размыкание и имеющую сложность

а) не более 18,

б) не более 17.

7.12. Для элементарной симметрической функции трех переменных с рабочим числом два $S_3^2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$ построить минимальную корректирующую одно размыкание КС. Указание. Каркас этой схемы представлен на рис. 35.

7.13. Обозначим через $L^p(f)$, $p \geq 0$, сложность минимальной КС, реализующей функцию f и корректирующей p обрывов (p замыканий) контактов. Докажите, что если для натурального s и целых неотрицательных $k, k_1, \ldots, k_s$ имеет место равенство $k_1 + \cdots + k_s + s = k + 1$, то $L^k(f) \leq L^{k_1}(f) + \cdots + L^{k_s}(f)$.

7.14. Покажите, что в случае размыкания для величин, введенных в задаче 7.13, справедливы неравенства:

а) $6(p+1) \leq L^p(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \leq 6(p+1) + 2((p+1) \bmod 2)$,

б) $6(p+1) \leq L^p(S_3^2(x_1, x_2, x_3)) \leq 6(p+1) + ((p+1) \bmod 2)$, где $S_3^2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$.

7.15. Пусть Σ — корректирующая один обрыв КС, в которой можно выделить s пар вершин (все вершины различны) таких, что по анализу проводимостей между этими парами вершин можно обнаружить любой единичный обрыв контакта. Показать, что схему Σ можно преобразовать в корректирующую один обрыв КС Σ' такую, что любой единичный обрыв контакта в ней может быть обнаружен по анализу проводимостей между двумя вершинами схемы.

Ответы, указания и решения

К параграфу 1

1.1. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет.

1.2. 1) Нет. Пример: $\{x\}$. 2) Нет. Пример: $\{0, 1, \bar{x}\}$.

1.3. Да.

1.4. 6) Нет, так как, например, функция $f(x, y) = x \vee y$ является симметрической, но при добавлении в нее фиктивной переменной z получается несимметрическая функция $g(x, y, z) = x \vee y$.

7) Да.

1.5. Пусть $n \geq 0$ и $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ — произвольная функция из $Q(n+1)$. Из разложения

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n, 1) \vee \bar{x}_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n, 0)$$

следует, что функция f полностью определяется парой своих подфункций $f(x_1, \ldots, x_n, 1)$ и $f(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Поскольку последние также принадлежат классу Q, имеем

$$|Q(n+1)| \leq |Q(n)|^2.$$

Отсюда

$$\sqrt[2^{n+1}]{|Q(n+1)|} \leq \sqrt[2^n]{|Q(n)|}. \qquad (4)$$

Из (4) вытекает невозрастание последовательности $\sqrt[2^n]{|Q(n)|}$. Покажем, что она ограничена. Если Q не пусто, то

$$1 = \sqrt[2^n]{1} \leq \sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[2^n]{|P_2(n)|} = \sqrt[2^n]{2^{2^n}} = 2. \qquad (5)$$

Следовательно, предел последовательности $\sqrt[2^n]{|Q(n)|}$ существует и заключен в сегменте $[1, 2]$.

1.6. В самом деле, при некотором фиксированном m существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \notin Q$. Так как последовательность $\sqrt[2^n]{|Q(n)|}$ не возрастает, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|} \leq \sqrt[2^m]{|Q(m)|} \leq (2^{2^m} - 1)^{2^{-m}} < 2.$$

1.7. 2) Воспользоваться тем, что число монотонных функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не превосходит $n^{\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}}$.

3) 1/2. **Нижняя оценка** $|Q(n)|$. Выберем линейную функцию l в (3) равной $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$. Пусть $B^{n,1}$ — множество двоичных наборов длины n

с нечетным числом координат, равных 1. Через N_f обозначим множество наборов, обращающих функцию f в единицу. Ясно, что $N_l = B^{n,1}$ и $|B^{n,1}| = 2^{n-1}$. Среди функций $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ найдется множество G из $2^{2^{n-1}}$ функций, попарно отличающихся друг от друга на множестве $B^{n,1}$. Ясно, что число функций вида (3) с $l = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $g \in G$ равно $2^{2^{n-1}}$. Отсюда $2^{2^{n-1}} \leq |Q(n)|$.

Верхняя оценка $|Q(n)|$. При фиксированной функции $l = x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_r}$ имеется не более $2^{2^{r-1}} \leq 2^{2^{n-1}}$ различных функций $f \in Q(n)$. Число линейных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, равно 2^{n+1}. Поэтому $|Q(n)| \leq 2^{n+1} 2^{2^{n-1}}$. Таким образом

$$2^{2^{n-1}} \leq |Q(n)| \leq 2^{n+1} 2^{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|Q(n)|} = 2^{1/2}.$$

Тем самым построен инвариантный класс Q с характеристикой $\sigma = 1/2$.

К параграфу 2

2.7. Указание. Воспользоваться тождествами: $(x \vee y)(x \vee z) = (x \vee y \cdot z)$; если формулы Y и Z не зависят от x, то $(\bar{x} \vee Y)(x \vee Z)$ равно $Y \vee Z$; $y_1 y_2 \ldots y_k \vee z_1 z_2 \ldots z_l = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \bigwedge_{1 \leq j \leq l} (y_i \vee z_j)$.

2.8. См. [7]

2.9. Воспользуйтесь сводимостями задачи 2.8.

2.10. 1) Докажите, что задача ВЫП полиномиально сводится к рассматриваемой задаче;

2) докажите, что задача 3-ВЫП полиномиально сводится к рассматриваемой задаче.

2.11. 1), 3) Задачи принадлежат классу **P**;

2) **NP**-полная задача. Указание. Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая ДНФ от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Преобразуем ее в ДНФ $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'$, реализующую функцию $t \cdot \mathcal{D}_1 \vee x_1 \cdot y_1 \vee \ldots \vee x_n \cdot y_n$, где переменная t не встречается в ДНФ $\mathcal{D}$, а ДНФ $\mathcal{D}_1$ получена из ДНФ $\mathcal{D}$ заменой каждой буквы вида $\bar{x}_i$ на переменную y_i. Тогда ДНФ $\mathcal{D}$ обращается в ноль на некотором наборе тогда и тогда, когда существуют два противоположных набора, на которых ДНФ $\mathcal{D}'$ обращается в ноль. Кроме того, построить ДНФ $\mathcal{D}'$ по ДНФ $\mathcal{D}$ на детерминированной МТ можно за полиномиальное время.

Таким образом, **NP**-полная задача о существовании набора, обращающего ДНФ в ноль (см. задачу 2.10 п. 1)) полиномиально сводится к рассматриваемой задаче.

4) **NP**-полная задача. Указание. Сведите к ней задачу 3-ВЫП.

5) Задача принадлежит классу **P**. Указание. Воспользуйтесь критерием существования эйлерова цикла в графе. (Теорема Эйлера. В связном графе существует цикл, проходящий по всем ребрам, причем по каждому в точности один раз, тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна.)

6) **NP**-полная задача.

7) Задача принадлежит классу **P**. Указание. Воспользуйтесь критерием 2-раскрашиваемого графа. (Теорема. Граф можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.)

8) **NP**-полная задача. Указание. Пусть $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = K_1 \vee \ldots K_l$, — некоторя ДНФ без отрицаний переменных. Сопоставим ей гиперграф $G =< V, E >$, где множество вершин V есть множество переменных, встречающихся в ДНФ $\mathcal{D}$, множество ребер E есть $\{\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_l\}$, причем ребро $\mathcal{E}_i$ состоит из переменных, содержащихся в элементарной конъюнкции K_i, $i = 1, \ldots, l$. Тогда ДНФ $\mathcal{D}$ обращается в ноль на некоторых двух противоположных наборах тогда и только тогда, когда гиперграф G можно раскрасить в два цвета. Построить гиперграф G по исходной ДНФ $\mathcal{D}$ на детерминированной МТ можно за полиномиальное время. Таким образом, **NP**-полная задача об обращении в ноль на двух противоположных наборах ДНФ без отрицаний (см. п. 2)) сводится к рассматриваемой задаче.

2.12. 1) а), г) Задачи принадлежат классу **P**. Указание. Воспользуйтесь тем фактом, что линейная функция равна единице на наборах либо только с нечетным, либо только с четным числом единиц.

1) б), в) **NP**-полные задачи. Указание. Сведите к рассматриваемым задачам **NP**-полную задачу об обращении ДНФ в ноль (см. задачу 2.10 п. 1)). Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая не равная тождественно нулю ДНФ, а ДНФ $\mathcal{D}'$ реализует функцию $\mathcal{D} \cdot t$, где t — переменная, не встречающаяся в ДНФ $\mathcal{D}$. Тогда ДНФ $\mathcal{D}$ на некотором наборе обращается в ноль тогда и только тогда, когда ДНФ $\mathcal{D}'$ реализует нелинейную функцию.

2) а) Задача принадлежит классу **P**. Указание. Можно воспользоваться определением монотонной функции.

2) б) **NP**-полная задача. Указание. Сведите к рассматриваемым задачам **NP**-полную задачу об обращении ДНФ в ноль (см. задачу 2.10 п. 1)). Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая не равная тождественно нулю ДНФ, а ДНФ $\mathcal{D}'$ реализует функцию $\mathcal{D} \vee t$, где t — переменная, не встречающаяся в ДНФ $\mathcal{D}$. Тогда ДНФ $\mathcal{D}$ на некотором наборе обращается в ноль тогда и только тогда, когда ДНФ $\mathcal{D}'$ реализует немонотонную функцию.

2) в) Задача принадлежит классу **P**. Указание. Воспользуйтесь свойством: если монотонная функция равна единице на некотором наборе, то она равна единице на всех следующих за ним наборах.

2) г) Задача принадлежит классу **P**. Указание. Воспользуйтесь свойством: сокращенная ДНФ монотонной функции не содержит отрицаний переменных.

2) д) Задача принадлежит классу **P**. Указание. Воспользуйтесь свойством: функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ монотонна тогда и только тогда, когда для каждого i, $i = 1, \ldots, n$, верно тождество $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \cdot (f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \oplus 1) = 0$.

3) а, г) Задачи принадлежат классу **P**.

3) б), в) **NP**-полные задачи. Указание. Сведите к рассматриваемым задачам **NP**-полную задачу об обращении ДНФ в ноль (см. задачу 2.10 п. 1)). Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая не равная тождественно нулю ДНФ, а ДНФ $\mathcal{D}'$ реализует функцию $\mathcal{D} \cdot t$, где t — переменная, не встречающаяся в ДНФ $\mathcal{D}$. Тогда ДНФ $\mathcal{D}$ на некотором наборе обращается в ноль тогда и только тогда, когда ДНФ $\mathcal{D}'$ реализует несамодвойственную функцию.

3) д) Задачи принадлежат классу **P**. Указание. Воспользуйтесь определением самодвойственной функции и свойством: если l — число слагаемых полинома самодвойственной функции, а r — ранг произвольного его слагаемого, то верно неравенство $\sqrt{l^2} - 1 \geq 2^r$.

4) а) Задача принадлежит классу **P**.

4 б) **NP**-полная задача (см. задачу **2** из введения к параграфу).

К параграфу 3

3.1. $4)(x_1{\cdot}(x_2{\cdot}x_3)){\cdot}(x_4{\cdot}x_5) = ((x_1{\cdot}x_2){\cdot}x_3){\cdot}(x_4{\cdot}x_5) = (((x_1{\cdot}x_2){\cdot}x_3){\cdot}x_4){\cdot}x_5$.

3.2. Указание. Докажите индукцией по n, что выражение $x_1{\cdot}x_2{\cdot}\ldots x_n$ с любой правильной расстановкой скобок можно с помощью тождества (6) преобразовать в выражение $(\ldots((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n$ (см. задачу 3.1).

3.3. Указание. 2) и 4) приведите к виду $x\bar{x}$, остальные к совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

2) $\overline{x \vee y} \cdot (x\bar{z} \vee y) \overset{(1)}{=} \bar{x}\bar{y} \cdot (x\bar{z} \vee y) \overset{(5,4)}{=} \bar{x}\bar{y}x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}y \overset{(5,8)}{=} x\bar{x} \vee y\bar{y} \overset{(14,13)}{=} x\bar{x}$.

5) $xy \vee yz \overset{(11)}{=} (z \vee \bar{z})xy \vee (x \vee \bar{x})yz \overset{(4)}{=} zxy \vee \bar{z}xy \vee xyz \vee \bar{x}yz \overset{(5)}{=} xyz \vee xy\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \overset{(10,12)}{=} (xyz \vee xyz) \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \overset{(13)}{=} xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz$.

3.5. См. задачу 3.4.

3.6. Выведем (1), используя (2)-(9): $\overline{x_1 \vee x_2} \overset{(3)}{=} \overline{\bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{\bar{x}}_2} \overset{(2)}{=} \overline{\overline{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2}} \overset{(3)}{=} \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$.

Выведем (10), используя (2)-(9): $x_1 \vee x_2 \overset{(3)}{=} \bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{\bar{x}}_2 \overset{(2)}{=} \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} \overset{(5)}{=} \overline{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1} \overset{(2)}{=} \bar{\bar{x}}_2 \vee \bar{\bar{x}}_1 \overset{(3)}{=} x_2 \vee x_1$.

Указание. Для вывода (11), (12) и (13) сводите, используя (2)-(3), дизъюнкцию к конъюнкции и обратно и используйте (9), (6) или (7), соответственно. Для вывода (14) используйте (8) и (5).

3.7. Указание: при помощи тождеств (1)-(14) приведите обе формулы к совершенной д.н.ф. Ответ: 1), 3), 5)-11) — да; 2), 4) — нет.

3.8. Указание: при помощи тождеств (1)-(14) обе формулы можно привести к совершенной д.н.ф.

3.9. 1) Указание: постройте систему тождеств, позволяющую любую формулу над базисом $B = \{xy, x \oplus y, 1\}$ переводить в полином Жегалкина.

2) Например: тождества (4)-(7), (10), (12), (13) вместе с тождествами $0\&0 = 0$, $1\&1 = 1$, $x\&0 = 0$, $x\&1 = x$, $0 \vee 0 = 0$, $1 \vee 1 = 1$, $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$.

К параграфу 4

4.2. Указание. T_{II}: используйте тождество t_2; T_{III}: многократно применяйте тождество задачи 4.2 п. 3) и тождество t_3; T_{IV}: многократно примените тождество t_4 и тождество задачи 4.2 п. 3); T_V: многократно примените тождества t_5 и t_2; T_{VI}: примените тождество T_V , а затем тождество $t_6^{(n)}$; T_{VII}: многократно примените тождество задачи 4.2 п. 1); T_{VIII}: сначала примените тождество T_{VI}, а затем многократно тожество T_V; T_{IX}: примените тожества T_{VI} и T_V.

4.4. 1) Нет; 2) да.

4.5. Указание. 2) Для одной из рассматриваемых схем величина $R(\Sigma)$ равна 1, для другой — 0; 3) доказывается аналогично п. 2); 4) следует из п. 3); 5) вытекает из п. 4) с учетом того, что если в классе всех контактных схем имеется полная система тождеств, то в силу теоремы 4.1 она имеется и среди основных тождеств.

К параграфу 5

5.1. 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) 3; 5) 2; 6) 3.

5.2. 1) n; 2) $n-1$; 3) $n-1$; 4) n.

5.3. Указание. Два столбца матрицы M различаются в j-й строке тогда и только тогда, когда j-я строка матрицы $M^{(2)}$ покрывает сумму по модулю 2 этих столбцов.

5.5. 1), 4), 5), 7) — Да. 2), 3), 6), 8), 9) — Вообще говоря, нет.

5.6. Пусть A и B — тупиковые тесты матрицы M с m строками. Тогда ни одно из включений $A \subset B$, $B \subset A$ не имеет места. Отсюда вытекает, что число тупиковых тестов не превосходит максимального числа попарно несравнимых наборов в B^m, а значит, не превосходит величины $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$.

5.7. Число матриц размерности $k \times n$ с попарно различными столбцами равно $2^k(2^k-1)\cdot \ldots \cdot (2^k-n+1)$. Число матриц размерности $m \times n$, у которых k строк с фиксированными номерами заданы, равно $2^{n(m-k)}$.

5.8. 1) $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$; 2) $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$; 5) $\{1,2,3\}$, $\{1,2,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,4,5\}$, $\{3,4,5\}$; 6) $\{1,2,3\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,5\}$.

5.9. Указание. Нижняя оценка доказывается от противного из предположения о существовании теста длины меньшей, чем $\lceil \log_2 n \rceil$. Для доказательства верхней оценки изучите число классов эквивалентности, на которые все n столбцов матрицы тупикового теста разбиваются ее первыми l строками ($l \in \{1, \ldots, n-1\}$). Достижимость нижней (верхней) границы доказывает матрица из задачи 5.2.1 (соответственно 5.2.2 при $k=0$).

5.10. Нет. Указание. Рассмотрите матрицу $M^{(2)}$, доказывайте от противного.

5.11. Указание. Рассмотрите матрицу $M^{(2)}$ и оцените сверху число единиц в тех ее строках, которые связаны с тестом.

5.12. Пусть T, $T \subseteq \lfloor 1, m \rceil$ — тест матрицы M, а J_i, $J_i \subseteq \lfloor 2, n+1 \rceil$ — множество номеров тех столбцов матрицы M, которые образуют группу с номером i, $i = 1, \ldots, s$, из условия задачи. Пусть, далее, J_i', $i = 1, \ldots, s$, — множество тех чисел j, $j \in J_i$, для которых столбец $M\langle T, j\rangle$ содержит ровно одну единицу. Так как в каждой строке подматрицы

$M\langle T, J_i\rangle$ имеется не более одной единицы, то $|J_i'| + 2(|J_i| - |J_i'|) \leq |T|$, и, следовательно, $|J_i'| \geq 2|J_i| - |T|$. Суммируя последние неравенства по всем i, $i = 1, ..., s$, и учитывая, что в подматрице $M\langle T\rangle$ число столбцов, содержащих одну единицу, не больше, чем $|T|$, получим: $|T| \geq 2n - s \cdot |T|$.

К параграфу 6

6.1. $\{(100), (101)\}$, $\{(100), (111)\}$, $\{(101), (110)\}$, $\{(101), (111)\}$, $\{(110), (111)\}$.

6.2. Ответы пунктов а) и б) совпадают: $\{(000), (001), (010)\}$, $\{(000), (001), (100)\}$, $\{(000), (010), (111)\}$, $\{(000), (100), (111)\}$, $\{(001), (010), (101)\}$, $\{(001), (100), (101)\}$, $\{(010), (101), (111)\}$, $\{(100), (101), (111)\}$.

6.3. а) $\{(000), (101)\}$, $\{(011), (110)\}$; б) $\{(000), (011), (101)\}$, $\{(000), (101), (110)\}$, $\{(000), (011), (110)\}$, $\{(011), (101), (110)\}$.

6.4. Ответы пунктов а) и б) совпадают: $\{(000), (001), (101)\}$, $\{(001), (101), (110)\}$, $\{(000), (001), (111)\}$, $\{(001), (110), (111)\}$.

6.5. Ответы пунктов а) и б) совпадают: $\{(000), (100), (111)\}$, $\{(000), (101), (111)\}$, $\{(010), (100), (111)\}$, $\{(010), (101), (111)\}$.

6.6. $\{(100), (111)\}$, $\{(001), (010), (111)\}$, $\{(001), (010), (100)\}$.

6.7. а) $\{(000), (011)\}$, $\{(000), (111)\}$; б) $\{(000), (011), (101)\}$, $\{(000), (101), (111)\}$.

6.8. а) $\{(010), (101)\}$, $\{(100), (110)\}$, $\{(010), (100), (111)\}$; б) $\{(010), (100), (101)\}$, $\{(010), (100), (110)\}$, $\{(010), (100), (111)\}$, $\{(010), (101), (110)\}$, $\{(100), (101), (110)\}$.

6.9. Указание. Доказательства проводятся от противного.

6.10. 1) Указание. Найдите r групп по $(n - r)$ контактов в каждой, единичные обрывы которых дают матрицу, удовлетворяющую (после инвертирования) условиям задачи 5.12; 2) (Р. Н. Тоноян [21]). Рассмотрите при $n \geq 2r$ множество наборов, порождаемых следующими словами длины n в алфавите $\{0, 1\}$: $0^{s_1}1^r0^{n-s_1-r}$, $1^{s_2}0^n1^{r-s_2}$, $1^{s_3}[01]^{r-s_3}0^{n-2r+s_3}$, $0^{s_4}[01]^{s_4}0^{n-2r-s_4}$, $0^{n-2r+s_5}[01]^{r-s_5}1^{s_5}$ ($s_1 = \overline{0; n-r}$, $s_2 = \overline{1; r-1}$, $s_3 = \overline{0; r-1}$, $s_4 = \overline{1; n-2r}$, $s_5 = \overline{1; r-2}$).

6.11. $n + 1$.

6.12. 1) 2. 2) Указание. Используйте метод дихотомии, т. е. деления схемы на две части.

6.13. а) 2^{n-1}, б) 2^{n-1}, в) 2^n.

6.14. Указание. Рассмотрите наборы единичной сферы и ее центр. Достижимость оценки проиллюстрируйте на схеме, построенной по методу каскадов.

6.15. (Х. А. Мадатян [15]). Указание. Докажите, что среди неисправных схем найдутся схемы, реализующие обе константы, а также схемы, реализующие или $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n}$, или $x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}\vee\cdots\vee x_n^{\bar\sigma_n}$ для любого набора $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$.

6.16. 1) Указание. Рассмотрите изолированный блок этой схемы. 2) а) 2 при четных n, 3 при нечетных n; б) 4; в) 6 при четных n, 7 при нечетных n. 3) (Р. Н. Тоноян [20]). Указание. Используйте метод дихотомии. Длина теста не более, чем на константу, отличается от $\log_2 n$. 4) а) (Р. Н. Тоноян [20]). Указание. Используйте метод дихотомии. б) Указание. Используйте метод деления схемы на 4 части.

6.17. (Н. П. Редькин [6]). Указание. Рассмотрите КС, реализующую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ и построенную по формуле $(K_f(x_1\vee\bar x_1))\cdot(D_f(x_1\vee\bar x_1))$, где K_f и D_f — конъюнктивная и дизъюнктивная совершенные нормальные формы функции f.

6.18. 1) а) $\{(00),(01),(11)\}$, число тестов — 2; б) $\{(001),(010),(011),(110),(111)\}$ (порядок переменных — $x,\ y,\ q'$), число тестов — 12. 2) $\{(001),(011),(110)\}$ (порядок переменных — $x,\ y,\ q'$). 3) $\{(1000),(0001),(0110)\}$ (порядок переменных — $a,\ b,\ x,\ y$). 4) $\{(0000),(0111),(1111)\}$.

6.19. 2) Указание. Рассмотрите схему на рис. 25 и заметьте, что неисправность типа 0 на выходе третьего слева инвертора в нижнем ряду инверторов обнаруживается лишь на наборе (0001), не входящем в тест из задачи 6.18.4.

6.20. (Н. П. Редькин [6]). Указание. Искомая схема строится по индукции из блоков, каждый блок подобен схеме на рис. 22 а) без выхода z_1. Тест из четырех наборов: $(0,0,0,\ldots,0)$, $(1,0,0,\ldots,0)$, $(0,1,1,\ldots,1)$, $(1,1,1,\ldots,1)$.

6.21. 1) Введем обозначение:

$$M=\begin{pmatrix} 01 & 11 & 11 & 01 & 00\\ 11 & 11 & 01 & 00 & 01\\ 11 & 01 & 00 & 01 & 11\\ 01 & 00 & 01 & 11 & 11\\ 00 & 01 & 11 & 11 & 01\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}11\\11\\11\\01\\00\end{pmatrix}.$$

Матрица теста T размером $5\times 2n$ при этом будет иметь вид $T=$

$(M'MM\dots MN)$, где матрица M' получается из матрицы M выбрасыванием нужного количества первых столбцов (порядок переменных — $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$). Указание. Для построения теста используются таблицы неисправностей из задачи 6.18.1. При этом существенны следующие факты. Любая неисправность блока с номером n вида Σ_1 схемы Σ_n обнаруживается по анализу функции неисправности на его втором выходе (т. е. на выходе схемы z_n). Если неисправность в блоке с номером i, $1 < i < n$, не обнаруживается на его втором выходе (т. е. на выходе схемы z_i), то на наборах теста функция неисправности, реализуемая на выходе схемы z_{i-1}, отличима от всех функций неисправности, возникающих на этом выходе при всевозможных неисправностях в блоке с номером $i-1$. Все неисправности в i-м блоке ($1 \le i \le n$), не отличимые по анализу функции неисправности на его втором выходе (т. е. на выходе схемы z_i), отличаются на наборах теста по анализу функции неисправности на выходе схемы z_{i-1}. Нижняя оценка длины теста следует из задачи 6.18.1 для блока, вычисляющего два старших разряда суммы.

2) Наборы теста порождаются словами длины $2n$ следующего вида: $[00]^{i-1}11[01]^{n-i}$, $[11]^{i-1}00[01]^{n-i}$ ($i = \overline{1;n}$), порядок переменных — $x_n, y_n, \dots, x_2, y_2, x_1, y_1$. Указание. Для построения теста используется таблица неисправностей из задачи 6.18.2. Нижняя оценка следует из конструктивных соображений.

3) Наборы теста порождаются словами длины $2n$ следующего вида: $[01]^n$, $10[01]^{n-1}$, $00[10]^{n-1}$, $01[10]^{n-1}$, порядок переменных — $a_n, b_n, x_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-2}, \dots, x_2, y_2, x_1, y_1$. Указание. Для построения теста используется таблица неисправностей из задачи 6.18.3.

6.22. (S. M. Reddy [23]). Указание. Рассмотрите разложение булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в полином Жегалкина, реализуя цепочками функциональных элементов как монотонные конъюнкции, так и сумму по модулю два. При этом на один из входов элемента суммы по модулю два, наиболее удаленного от выхода схемы, подается выход цепочки, реализующей отличную от константы монотонную конъюнкцию наименьшей длины (пусть эта конъюнкция имеет вид $x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$). Тогда множество наборов $\{(0, \dots, 0)$, $(1, \dots, 1)$, $(0, 1, \dots, 1)$, $\{(1, 0, 1, \dots, 1), \dots,$ $(1, \dots, 1, 0)$, $(0, 1, \dots, 1)$, $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (в последнем наборе ровно s единиц, стоящих на местах переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$) мощности $(n+3)$ образует единичный проверяющий тест для этой схемы.

6.23. (В. Н. Носков [17]). Указание. Верхняя оценка очевидна. Для доказательства нижней рассмотрите функцию $x_1 x_2 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$.

6.24. (И. А. Чегис, С. В. Яблонский [22]). Указание. Используйте асимптотически наилучший метод синтеза схем.

6.25. Указание. Доказательства проводятся от противного.

7.1. 1) Следует из (6.1)–(6.3). 2) Достаточно использовать (6.5). 3) Достаточно выразить $\xi(\Sigma)$ через вероятности $\xi(\mathcal{E}_i, \beta)$.

7.2. 1) $\xi(\mathcal{M}) = \eta(\mathcal{M}) = \frac{1}{4}$. 2) $\xi(\mathcal{M}) = \eta(\mathcal{M}) = \frac{7}{16}$. 3) $\xi(\mathcal{M}) = \eta(\mathcal{M}) = \frac{5}{9}$.

7.3. 1) $p = \frac{1}{3}$. 2) $p = \frac{1}{4}$.

7.4. 1) Да. 2) Да.

7.5. Указания. 1) Реализуйте сколь угодно надежно функцию $x|y$. 2) Реализуйте сколь угодно надежно функции $x \oplus y$ и 1.

К параграфу 7

7.6. 1) Доказательство проводится от противного. 2) Используйте КС, построенную по совершенной ДНФ функции $x_1 \oplus x_2$, а также результат задачи 7.6.1.

7.7. Указание. Используйте описанное в предисловии эквивалентное преобразование связных многополюсных подсхем, состоящих из контактов одного вида.

7.8. 1) Указание. Аналогично 7.7. 2) Воспользуйтесь тем, что схема реализует функцию $x_1(\bar{x}_4 \vee x_3) \vee x_2$, а также результатом задачи 7.6.1.

7.9. Схемы представлены на рис. 36 и 37 соответственно.

7.10. (В. М. Рабинович [18]). Указание. К схеме на рис. 21 надо добавить 4 контакта x_1, $\bar{x}_1$, x_n, $\bar{x}_n$ так, чтобы первые два были бы инцидентны полюсу b (но не полюсу a), вторые два — полюсу a (но не полюсу b) схемы, и при этом каждый из новых контактов должен быть смежен с имеющимся в схеме противоположным контактом той же переменной.

7.11. а) Указание. Используйте результат задачи 7.10. б) В подсхеме линейной функции поменяйте местами переменные x_1 и x_2, а далее усовершенствуйте решение из пункта а) техникой, упомянутой в указании к задаче 7.7.

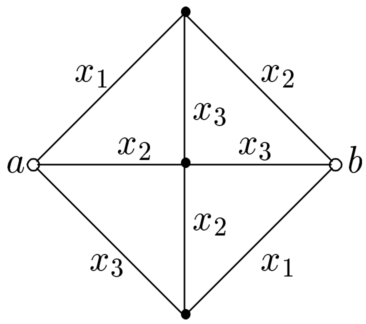


Рис. 36.

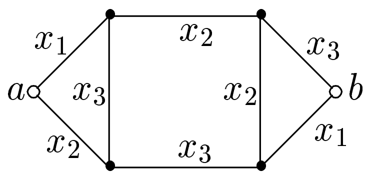


Рис. 37.

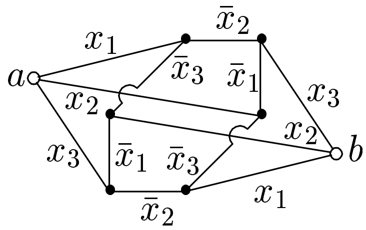


Рис. 38.

7.12. Схема представлена на рис. 38. Указание. Нижняя оценка сложности следует из задачи 7.6.1.

7.13. Указание. Используйте параллельное (последовательное) соединение схем, на которых достигаются $L^{k_1}(f), \ldots, L^{k_s}(f)$.

7.14. (Е. В. Валентинов [13]). Указание. а) Верхняя оценка. Используйте при $n = 3$ схемы на рис. 21 и из решения задачи 7.10, далее воспользуйтесь результатом задачи 7.13. б) Верхняя оценка. Используйте схему на рис. 17 (при $n = 3$ и $r = 2$) и схему на рис. 36, далее воспользуйтесь результатом задачи 7.13. Нижние оценки следуют из задачи 7.6.1.

7.15. (А. И. Рыбко [19]). Указание. Пусть (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots$, (a_s, b_s) — указанные в условии задачи s пар вершин. Достройте к схеме Σ два изоморфных контактных дерева так, что листьями первого дерева являются вершины $a_1, a_2, \ldots, a_s$, листьями второго — вершины $b_1, b_2, \ldots, b_s$, все внутренние вершины деревьев являются новыми, и для любого i, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, проводимость между корнем первого дерева и a_i равна проводимости между корнем второго дерева и b_i.

Список литературы

[1] Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д., Построение и анализ вычислительных алгоритмов, М.: Мир, 1979, 536 с.

[2] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А., Задачи и упражнения по курсу дискретной математики, М.: Наука, 1992, 408 с.

[3] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, М.: Мир, 1982, 416 с.

[4] Кибернетический сборник (Новая серия), N 12, М.: Мир, 1975, с. 5-10.

[5] Лупанов О. Б., Асимптотические оценки сложности управляющих систем, М.: Изд-во МГУ, 1984, 137 с.

[6] Редькин Н. П., Надежность и диагностика схем, М.: Изд-во МГУ, 1992, 192 с.

[7] Сапоженко А. А., Некоторые вопросы сложности алгоритмов, М.: МАКС Пресс, 2001, 46 с.

[8] Яблонский С. В., О невозможности элиминации перебора всех функций из P_2 при решении некоторых задач теории схем // ДАН СССР, 124, 1, 1959, с. 44-47.

[9] Яблонский С. В., Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики, М.: Наука, Вып. 2, 1959, с. 75-121.

[10] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М.: Наука, 1986, 384 с.

[11] Яблонский С. В., Эквивалентные преобразования управляющих систем. Методическая разработка по курсу “Элементы кибернетики”, М.: Изд-во МГУ, 1986, 40 с.

[12] Яблонский С. В., Надежность управляющих систем. Методическая разработка по курсу “Основы кибернетики”, М.: Изд-во МГУ, 1991, 40 с.

Дополнительная литература

[13] Валентинов Е. В., О сложности булевых функций, от трех переменных в классе контактных схем, корректирующих обрывы // Труды II Международной конференции “Дискретные модели в теории управляющих систем” (Красновидово, 13-18 июня 1997 г.), М.: Диалог МГУ, 1997, с. 10.

[14] Линдон Р. К., Тождества в конечных алгебрах // Кибернетический сборник, вып. 1, 1960, с. 246-248.

[15] Мадатян Х. А., Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики, вып. 23, М.: Наука, 1970, с. 103-118.

[16] Мурский В. Л., Об эквивалентных преобразованиях контактных схем // Сб. “Проблемы кибернетики”, вып. 5, М.: Физматгиз, 1961, с. 61-76.

[17] Носков В. Н., О длинах минимальных единичных диагностических тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискретный анализ, вып. 32, Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1978, с. 40-52.

[18] Рабинович В. М., О самокорректирующихся контактных схемах для счетчика четности // Проблемы кибернетики, вып. 17, М.: Наука, 1966, с. 227-231.

[19] Рыбко А. И., О сложности самокорректирующихся контактных схем, допускающих тестирование // Проблемы кибернетики, Вып. 37, М.: Наука, 1980, с. 139-153.

[20] Тоноян Р. Н., О единичных тестах для контактных схем, реализующих линейные функции // Изв. АН Арм. ССР, т. VI, N 1, 1971, с. 61-66.

[21] Тоноян Р. Н., Некоторые тесты для контактных схем, реализующих элементарные симметрические функции // Прикладная математика, межвузовский сборник, вып. 2, Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983, с. 129-140.

[22] И. А. Чегис, С. В. Яблонский, Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР, т. 51, М., 1958, с. 270-360.

[23] S. M. Reddy, Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput., 1972, N 1, p. 124-141.

Содержание