Контрольная пройдёт в 12:50 в пятницу, 8 октября.

Список задач на контрольной:

1. Для заданного множества определить, является ли оно инвариантным классом.
2. Выяснить, всегда ли заданное утверждение относительно инвариантных классов справедливо.
3. Для данной задачи определить, является ли она NP–трудной или полиномиально разрешимой.
4. По заданному входу задачи `ВЫПОЛНИМОСТЬ` или `3-ВЫПОЛНИМОСТЬ` построить вход какой-нибудь NP–полной задачи (`3-ВЫПОЛНИМОСТЬ`, `(0,1)-ЦЛП`, `РАСКРАСКА`, `ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ`, `ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВ`, `КЛИКА`).
5. Найти характеристику инвариантного класса.

Что нужно знать, чтобы суметь решить контрольную:

1. Понять, что такое инвариантный класс. Вспомнить определения классов Поста T_0, T_1, L, M, S (иначе не поймёте условие задачи). Прорешать из §1 части 1 задачника задачи 1.1-1.4.
2. Понять, что такое инвариантный класс. Порешать из §1 части 1 задачника задачи 1.1-1.4.
3. Понять, что такое NP–полная задача, что значит свести одну задачу к другой. Знать, какие есть NP–полные задачи. Прорешать задачи 2.1-2.3, 2.12, 2.13. Изучить лекционный материал (те, кто не был на лекциях, могут (должны) почитать [1]).
4. Изучить лекционный материал.
5. Решить задачу 1.7. Изучить лекционный материал.

Пример варианта с решением

1. Является ли инвариантным классом множество $L \cap M$?
2. Всякий ли замкнутый класс A, содержащий константы 0 и 1, будет инвариантным.
3. Полиномиальна или NP–полна задача `(1,2)-ЦЛП`? Задача `(1,2)-ЦЛП` формулируется следующим образом. Вход: система из k линейных неравенств от m переменных с целочисленными коэффициентами. Нужно определить, существует ли вектор, компоненты которого равны 1 и 2, удовлетворяющий заданной системе неравенств.
4. Построить вход для задачи `3-ВЫПОЛНИМОСТЬ` по заданному входу задачи `ВЫПОЛНИМОСТЬ`: $(x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_6 \vee x_7)x_5$.
5. Найти характеристику инвариантного класса, состоящего из всех функций f вида $f(x_1, \ldots, x_n) = l(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$, где $l \in L$, а множество существенных переменных функции g является подмножеством множества существенных переменных функции l.

Решение

1. Класс $L \cap M$ инвариантен, поскольку классы L и M инвариантны, а пересечение инвариантных классов является инвариантным классом.

2. Всякий замкнутый класс A, содержащий константы 0 и 1, будет инвариантным, поскольку для A выполнены все три пункта из определения инвариантного класса (на контрольной нужно подробно обосновать, почему они выполнены).

3. Задача `(1,2)-ЦЛП` является NP–полной, поскольку к ней легко свести задачу `ВЫПОЛНИМОСТЬ`. Пусть задана КНФ $\mathcal{K} = D_1 D_2 \ldots D_k$ от m переменных. Построим следующую систему линейных неравенств. Для каждой скобки D_j вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_s}^{\sigma_s}$ рассмотрим неравенство $x_{i_1}^{\star\sigma_1} + x_{i_2}^{\star\sigma_2} + \ldots + x_{i_s}^{\star\sigma_s} > 0$, где $x_{i_j}^{\star\sigma_j} = x_{i_j} - 1$ при $\sigma_j = 1$ и $x_{i_j}^{\star\sigma_j} = 2 - x_{i_j}$ при $\sigma_j = 0$. Проверьте (проведя очевидную аналогию с задачей `(0,1)-ЦЛП`, что система неравенств, построенная указанным образом, имеет решение на множестве $(1,2)$–векторов в том и только том случае, когда КНФ $\mathcal{K}$ выполнима).

4. Ответ: $(x_1 \vee x_2)(y_1 \vee \overline{x}_1 \vee \overline{y}_2)(y_2 \vee x_3 \vee \overline{y}_3)(y_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{y}_4)(y_4 \vee x_6 \vee \overline{y}_5)(y_5 \vee x_7 \vee \overline{y}_1)x_5$.

5. См. [1, теорема 2.2].

Список литературы

[1] А. А. Сапоженко. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Изд-во ВМиК, 2001. (скачать PDF)