Эквивалентные преобразования управляющих систем.
– Методическая разработка. –М., 1985, 40с.

Рецензенты: чл.-корр. АН СССР профессор Лупанов О.Б.
канд.физ.-мат.наук,асс. Ложкин С.А.

Эквивалентные преобразования управляющих систем – раздел курса "Элементы кибернетики", который читался автором в МГУ с 1964 года, сначала как спецкурс, затем как обязательный курс по специальности 0647.

Данная тематика зародилась в алгебре и логике в связи с построением полных систем тождеств, построением полной системы аксиом. Новым импульсом для развития этого направления явились результаты Ю.И.Янова [1] для преобразования алгоритмов (сюда они не вошли). Затем появилась серия работ, посвященных эквивалентным преобразованиям других классов управляющих систем. В данную методическую разработку включены вопросы эквивалентных преобразований для ряда классов управляющих систем (формул, схем из функциональных элементов, контактных схем и автоматов). Материал расположен в порядке нарастания трудностей, доказательства несколько усовершенствованы по сравнению с их первоначальным видом.

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании схем дискретных преобразователей часто используют следующий подход: на основе предыдущего опыта и различных теоретических соображений разрабатывается первоначальный вариант схемы, который дает схему с требуемым функционированием, но может быть далеким от оптимального варианта. Затем осуществляется этап усовершенствования схемы, элементарный шаг которого состоит в замене фрагментов схемы (подсхемы) на более простой фрагмент с таким же функционированием. В результате получают схему с тем же функционированием, но более простого вида. Эти усовершенствования продолжают до тех пор, пока это практически возможно. На этом процесс заканчивается и получают окончательный вариант схемы. Разумеется, что данный эвристический подход не гарантирует оптимального результата, но может дать определенный эффект. Приведенное рассуждение является исходным пунктом в проблеме эквивалентных преобразований управляющих систем [2].

Рассматривается класс управляющих систем $\mathfrak{U} = \{U\}$, каждая из которых характеризуется парой (Σ, Φ).

Предполагается, что этот класс удовлетворяет требованию регулярности, т.е.

$$\Phi = F(\Sigma)$$

что всегда имеет место для т.н. алгоритмизованных У.С.

Пусть $f = \varphi(\Phi)$ – функциональная характеристика U, выражающая определенную сторону функционирования У.С. Например, если $\mathfrak{U}$ – класс автоматов, то Φ – его канонические уравнения, а f – о-д функция, определяемая этими уравнениями.

В нашем случае f однозначно определяется схемой Σ.

1. У.С. U' и U'' называются эквивалентными, если при определенном соответствии полюсов $f' = f''$.
Поскольку сами У.С. однозначно определены своими схемами, то можно говорить также об эквивалентности схем.

2. Пусть Σ_1–часть Σ', включающая в себя некоторое подмножество элементов и связей между ними. Эта часть Σ_1 задает подсхему, если в ней

а) определена совокупность полюсов (иногда обладает спецификой – например разбивается на входные и выходные полюса) так, что к ней относятся

– все вершины из Σ_1, являющиеся полюсами Σ';

– все вершины, по которым Σ_1 соприкасается с остальной частью Σ';

– может быть еще какие-то вершины Σ_1;

б) полюса определенным образом занумерованы (с учетом нумерации в Σ') и при этих уточнениях эта часть является схемой.

Предположим, что класс $\mathfrak{U}$ является правильным, т.е. для каждой схемы Σ найдется управляющая система U, обладающая этой схемой, т.е. $U=(\Sigma,\Phi)$.

В этом предположении подсхема Σ_1 схемы Σ' определяет, и, в силу регулярности, однозначным образом, подуправляющую систему $U_1=(\Sigma_1,\Phi_1)$ у.с. U'.

3. Пусть у.с. U_2 имеет такое же количество и ту же специфику полюсов как у.с. U_1. Тогда можно определить подстановку у.с. U_2 вместо у.с. U_1, входящей в U'. Для этого удаляют из U' у.с. U_1, сохраняя только полюса из U_1. Затем к ним "присоединяют" с учетом специфики полюса у.с. U_2. В результате мы получим из у.с. U' у.с. U''. Очевидно процесс присоединения можно осуществить многими способами. В случае, если U_2 имеет нумерацию полюсов подобную U_1, существует естественный способ присоединения U_2: присоединение соответствует нумерациям полюсов U_1 и U_2.

Например, у.с. U_1 – электронная лампа, U_2 – другая электронная лампа (не обязательно того же типа, что и U_1). Подстановка вместо U_1 состоит в удалении U_1 и замене ее на U_2. Правильность подключения лампы U_2 обеспечивается за счет направляющей ножки, обеспечивающей соответствие полюсов.

4. Если U_2 эквивалентна U_1, то операция подстановки называется эквивалентной подстановкой в случае, когда подстановка согласована с соответствием полюсов U_1 и U_2, обеспечивающих их эквивалентность.

В примере с электронными лампами, если U_2 одного типа с U_1, то замена будет эквивалентной.

Говорят, также, если при любой эквивалентной подстановке в произвольную У.С. из $\mathfrak{U}$ она переходит в эквивалентную у.с.,

то для класса $\mathfrak{U}$ выполнен принцип эквивалентной замены. В этом случае из $U_1\sim U_2$ следует $U'\sim U''$.

5. Подмножество пар $\{(U_1\sim U_2)\}$ эквивалентных у.с. называется системой тождеств. В дальнейшем тождества

$$U_1\sim U_2$$

трактуются в разных смыслах.

а) считается, что тождество $U_1\sim U_2$ задает одну эквивалентность, именно $U_1\sim U_2$.

б) считается, что тождество $U_1\sim U_2$ задает все эквивалентности, получающиеся из данной путем согласованных, изоморфных, преобразований левой и правой части.

в) считается, что тождество $U_1\sim U_2$ задает все эквивалентности, получающиеся из данной специальными преобразованиями, включающими изоморфные преобразования и согласованные подстановки в левую и правую части.

В дальнейшем в каждом случае фиксируется трактовка смысла тождества.

6. Пусть задана система тождеств $\{(U_1\sim U_2)\}$ в определенном смысле. Тогда последовательность

$$U^{(1)}\to U^{(2)}\to\ldots\to U^{(p)},$$

где $U^{(i+1)}$ получается из $U^{(i)}$, $i=1,2,\ldots,(p-1)$ путем эквивалентной подстановки с использованием тождества из данной системы, называется эквивалентным преобразованием при помощи системы тождеств $\{(U_1\sim U_2)\}$.

Будем обозначать через

$$U^{(1)}\rightrightarrows U^{(p)}$$

эквивалентное преобразование $U^{(1)}$ в $U^{(p)}$. Очевидно, что эквивалентное преобразование обладает свойством взаимности, т.е. если $U^{(1)}\rightrightarrows U^{(p)}$, то $U^{(p)}\rightrightarrows U^{(1)}$.

В случае, когда выполнен принцип эквивалентной замены, мы имеем

$$U^{(p)}\sim U^{(1)}$$

7. Система тождеств $\{(U_1\sim U_2)\}$ из $\mathfrak{U}$ называется полной, если каковы бы ни были у.с. U' и U'' из $\mathfrak{U}$ такие, что $U'\sim U''$, существует эквивалентное преобразова-

ние при помощи данной системы тождеств U' в U''.

8. Основная проблематика теории эквивалентных преобразований группируется вокруг следующих задач

а) Задача о построении полных систем тождеств.

Поскольку всегда существует тривиальное решение задачи, которое в качестве системы тождеств имеет систему всех пар (U_1, U_2) из $\mathfrak{U}$ эквивалентных У.С., то данная задача требует уточнения. Под построением полной системы тождеств подразумевают построение нетривиальной полной системы, например, минимальной мощности.

Возвращаясь к рассуждению о проектировании схем, мы видим, что этап усовершенствования схем зависит от того, владеет ли инженер полной системой правил эквивалентных преобразований. Наличие полной системы правил преобразований принципиально позволяет получить оптимальную схему. Математически более точную иллюстрацию дает задача об упрощении д.н.ф. [3]. Как мы видели, там имеются два правила преобразований:

1. Удаление множителя;
2. Удаление слагаемого.

Оказывается, что при помощи этих правил (а они являются эквивалентными заменами при тех условиях, когда они применимы) можно построить любую тупиковую д.н.ф., исходя из некоторой записи совершенной д.н.ф. Если к этим правилам добавить ассоциативные и коммутативные законы для $\&$ и $\vee$, то окажется возможным переходить от одной записи совершенной д.н.ф. к любой другой. Отсюда следует, что при помощи этих правил можно преобразовать эквивалентным образом произвольную д.н.ф. $\mathfrak{N}_1$ в любую ей эквивалентную д.н.ф. $\mathfrak{N}_2$:

д.н.ф. $\mathfrak{N}_1 \Rightarrow$ тупиковая д.н.ф. $\mathfrak{N}_1' \Rightarrow$ запись совершенной д.н.ф. $\mathfrak{N}_1'' \Rightarrow$ запись совершенной д.н.ф. $\mathfrak{N}_2'' \Rightarrow$ тупиковая д.н.ф. $\mathfrak{N}_2' \Rightarrow$ д.н.ф. $\mathfrak{N}_2$

б) Задача о построении алгоритмов для осуществления эквивалентных преобразований при помощи заданной системы тождеств.

Основной вопрос здесь состоит в том, чтобы иметь возможность производить эквивалентные преобразования экономным образом, например, с употреблением наименьшего числа эквивалентных подстановок. Эта задача лучше всего разработана для

родственной проблемы - проблемы логического вывода.

Следует далее заметить, что можно обобщить задачу об эквивалентных преобразованиях, отказавшись от требования эквивалентности при подстановках, т.е. не предполагать, что

$$U_1 \sim U_2,$$

и рассматривать направление преобразования (подстановки), т.е. рассматривать подстановки вида

$$U_1 \to U_2$$

При таких обобщениях данная тематика охватит ряд задач теории эволюции, теории построения сложных систем (из области химии, биологии, техники) и т.п.

2. Эквивалентные преобразования формул в P_2.

Изучение эквивалентных преобразований У.С. мы начинаем с простейшего класса У.С. - формул алгебры логики в классическом базисе - $\neg$, $\&$ и $\vee$ [3]. Это делается потому, что в нем эквивалентные преобразования имеют привычный алгебраический характер. Кроме того на этом примере выявляются основные идеи и методы, связанные с построением полных систем тождеств.

Сначала проследим как выглядит система понятий, для формул в P_2.

1. Формулы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ называются равными (эквивалентными), если соответствующие им функции $f_{\mathfrak{A}'}$ и $f_{\mathfrak{A}'}$ равны.
Например $\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ или $x_1 \& \bar{x}_1 = x_2 \& \bar{x}_2$
2. Если $\mathfrak{A}_1$ часть формулы $\mathfrak{A}'$ является формулой, то она называется подформулой формулы $\mathfrak{A}'$.
3. Пусть $\mathfrak{A}_1$ подформула формулы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}_2$ - произвольная формула. Замена подформулы $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$ в формуле $\mathfrak{A}'$ называется подстановкой $\mathfrak{A}_2$ вместо $\mathfrak{A}_1$.
4. В случае, если $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1$, то подстановка $\mathfrak{A}_2$ вместо $\mathfrak{A}_1$ называется эквивалентной подстановкой. Очевидно для формул справедлив принцип эквивалентной замены: если обозначить через $\mathfrak{A}''$ формулу, получающуюся из $\mathfrak{A}'$ путем эквивалентной подстановки $\mathfrak{A}_2$ вместо $\mathfrak{A}_1$, то очевидно $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'$ или иначе,

если $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1$, то $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'$

5. Тождество $\mathfrak{A}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathfrak{A}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в случае формул трактуется весьма широко: считается, что оно задает все тождества вида

$$\mathfrak{A}_1(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) = \mathfrak{A}_2(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n),$$

где $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ - произвольные формулы в данном базисе.

6. Затем определяется понятие эквивалентного преобразования одной формулы в другую при помощи заданной системы тождеств $\{\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2\}$ как последовательность

$$\mathfrak{A}^{(1)} \to \mathfrak{A}^{(2)} \to \dots \to \mathfrak{A}^{(p)}$$

формул, в которой каждая последующая формула получается из предыдущей путем эквивалентной подстановки с использованием тождеств системы $\{\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2\}$

7. Наконец, формулируется понятие полной системы тождеств. Система тождеств $\{\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2\}$ называется полной, если для любых двух эквивалентных формул $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ существует эквивалентное преобразование при помощи тождеств системы $\{\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2\}$, преводящее формулу $\mathfrak{A}'$ в формулу $\mathfrak{A}''$. Очевидно, что для данного объекта тривиальная полная система тождеств имеет счетную мощность. Возникает вопрос о том, можно ли построить существенно более простую полную систему тождеств. Оказывается, что имеет место следующий факт:

<u>Теорема.</u> Для системы формул алгебры логики в базисе $\neg, \&$ и $\vee$ существует конечная полная система тождеств.

Доказательство. Построение системы тождеств и доказательство ее полноты делается одновременно. Для этого в каждом классе эквивалентных формул выбирают некоторое подмножество формул, имеющих простое строение (формулы канонического вида). Далее подбирают систему тождеств, которая позволяет 1) "приводить" произвольную формулу к каноническому виду и 2) две любые эквивалентные формулы, имеющие канонический вид - переводить друг в друга. Этот подход,как мы увидим ниже,оказывается весьма плодотворным и фактически эффективно работает и в случае других классов У.С.

Пусть f - функция, соответствующая формуле $\mathfrak{A}$. Определим канонический вид формулы $\mathfrak{A}$ следующим образом

а) если $f \equiv 0$, то каноническим видом формулы $\mathfrak{A}$ является формула вида $x_i \& \bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \dots)$

б) если $f \not\equiv 0$ и алфавит $x_1, \dots, x_n$ содержит все существенные

переменные функции f, то каноническим видом формулы $\mathfrak{A}$ является совершенная д.н.ф.

$$\bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$$

(Разумеется с какой-то расстановкой скобок).

Заметим, что канонический вид формулы $\mathfrak{A}$ - неоднозначен и зависит от фиксации несущественных переменных, порядка следования слагаемых и порядков следований множителей в слагаемых, а также от расстановки скобок.

I. Приведение формулы $\mathfrak{A}$ к каноническому виду.

Этот этап распадается на ряд шагов

а) Спуск отрицаний вглубь формулы.

Достигается с использованием следующих тождеств

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \qquad (1)$$

$$\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \qquad (\mathrm{I}) \quad (2)$$

$$\bar{\bar{x}}_1 = x_1 \qquad (\mathrm{II}) \quad (3)$$

В результате формула преобразуется к виду, где отрицания могут быть только над символами переменных, а операции $\vee$ и $\&$ чередуются хаотически

б) Приведение к виду $\vee \&$

При помощи тождеств

$$(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3) \qquad (\mathrm{III}) (4)$$

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1 \qquad (\mathrm{IV}) (5)$$

формула далее приводится к виду, в котором сначала выполняются операции $\&$, а затем $\vee$.

в) Группировка множителей, зависящих от одного и того же переменного.

Используя ассоциативный закон (тождество (6)) для умножения,

$$(x_1 \& x_2) \& x_3 = x_1 \& (x_2 \& x_3) \qquad (\mathrm{V}) \quad (6)$$

а также коммутативный закон (5) в произведении, можно добиться, чтобы два множителя вида $x_i^{\sigma_1}$ и $x_i^{\sigma_2}$, были рядом, внутри скобок, т.е. осуществить преобразование

$$\dots \& x_i^{\sigma_1} \& \dots \& x_i^{\sigma_2} \dots \Rightarrow \dots\dots (x_i^{\sigma_1} \& x_i^{\sigma_2}) \dots\dots$$

г) Уничтожение повторений одинаковых множителей. Осуществляется при помощи тождества

$$x_1 \& x_1 = x_1 \qquad (\mathrm{VI}) (7)$$

д) Преобразование членов, содержащих $x \& \bar{x}$.
Тождества

$$(x_1 \& \bar{x}_1) \& x_2 = x_1 \& \bar{x}_1 \qquad (\overline{\underline{VII}})\ (8)$$

$$(x_1 \& \bar{x}_1) \vee x_2 = x_2 \qquad (\overline{\underline{VIII}})\ (9)$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \qquad (10)$$

позволяют преобразовать выражение к виду $x_1 \& \bar{x}_1$ или уничтожить вхождение $x_1 \& \bar{x}_1$.
Теперь исходная формула преобразована к виду $\vee \&$, и в каждом слагаемом каждое переменное встречается не более одного раза, и может оказаться, что в отдельных слагаемых встречаются не все символы переменных из алфавита $x_1, x_2, \dots, x_n$ (отсутствие однородности)
е) Введение однородности.
Если конъюнкция не содержит переменного x_1 , то при помощи тождества

$$x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_1) \& x_2 \qquad (11)$$

и последующего раскрытия скобок данная конъюнкция заменится на две, но уже содержащие переменное x_1 . Полученное на этом этапе выражение может содержать повторяющиеся слагаемые. Для их устранения используются
ж) Группировка одинаковых слагаемых.
Закон ассоциативности

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \qquad (12)$$

и закон коммутативности (тождество(10)) позволяют осуществить преобразование

$$\dots \vee x_1 \vee \dots \vee x_1 \vee \dots \Rightarrow \dots\dots (x_1 \vee x_1) \dots\dots$$

з) Приведение подобных. Осуществляется при помощи тождества

$$x_1 \vee x_1 = x_1 \qquad (13)$$

После всех этих преобразований мы преобразуем, очевидно, исходную формулу к каноническому виду
П. Переход от одного канонического вида к любому ему эквивалентному каноническому виду над тем же алфавитом $x_1, x_2, \dots, x_n$
а) если $f \equiv 0$, то добавляем тождество

$$x_1 \& \bar{x}_1 = x_2 \& \bar{x}_2 \qquad (14)$$

(равенство нулей). Оно позволяет переходить от одного канонического вида к другому, ему эквивалентному

б) если $f \not\equiv 0$, то каноническим видом является совершенная д.н.ф., определяемая с точностью до порядка слагаемых, порядка множителей внутри слагаемых и расстановки скобок. Ассоциативные и коммутативные законы позволяют осуществить переход от одной совершенной д.н.ф. к другой.
Ш. Завершение доказательства. Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ - произвольные эквивалентные формулы. Возьмем в качестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - алфавит, содержащий все переменные из $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$. Обозначим через $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ канонические формулы, к которым они приводятся

$$\mathfrak{A}' \rightrightarrows \mathcal{F}' \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}'' \rightrightarrows \mathcal{F}''$$

С другой стороны из $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$ следует, что $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ и в силу $\overline{\underline{II}}$ существует эквивалентное преобразование $\mathcal{F}' \rightrightarrows \mathcal{F}''$. Тогда

$$\mathfrak{A}' \rightrightarrows \mathcal{F}' \rightrightarrows \mathcal{F}'' \rightrightarrows \mathfrak{A}''$$

и дает эквивалентное преобразование $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{A}''$ при помощи построенной системы тождеств (1)-(14) . Теорема доказана.

Построенная система тождеств избыточна и сокращается до системы из тождеств (2)-(9) (в другой нумерации -($\overline{\underline{I}}$)-($\overline{\underline{VIII}}$)).

Известно [4], что каждый замкнутый класс $\mathcal{P}$ из P_2 имеет конечный базис и функции из $\mathcal{P}$ можно задавать формулами в этом конечном базисе. Возникает вопрос о мощности полной системы тождеств для указанных классов формул. Ответ на это дает теорема Линдона (приводится без доказательства).
<u>Теорема.</u> (Линдон [5]). Для каждого замкнутого класса $\mathcal{P}$ из P_2 система формул в его специальном базисе имеет конечную полную систему тождеств.

3. <u>Эквивалентные преобразования формул в P_k .</u>

Сначала рассмотрим множество формул P_k в базисе B из $0, 1, \dots, (k-1), \mathfrak{I}_0(x), \mathfrak{I}_1(x), \dots, \mathfrak{I}_{k-1}(x), x \vee y = \max(x,y), x \& y = \min(x,y)$
Основные понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями, для P_k выглядят почти так же, как и для P_2 .
<u>Теорема.</u> Для множества всех формул, в базисе B , существует конечная полная система тождеств.
Доказательство. Основано на той же идее, что и для случая формул в P_2 . В качестве канонического вида для формулы $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ берем аналог совершенной д.н.ф.

$$\bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \mathfrak{I}_{\sigma_1}(x_1) \& \mathfrak{I}_{\sigma_2}(x_2) \& \dots \& \mathfrak{I}_{\sigma_n}(x_n) \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

I. Преобразование формулы $\mathfrak{A}$ к каноническому виду
а) Спуск функций $\mathfrak{I}_\sigma$ вглубь формулы.

Пусть $J_\sigma(\mathfrak{B})$ - подформула формулы $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{B}$ - некоторая подформула. Возможны следующие случаи

$\mathfrak{B} = C$ (константа)

$\mathfrak{B} = J_\tau(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ некоторая подформула $(\tau = 0, 1, \ldots, k-1)$

$\mathfrak{B} = \min(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$

$\mathfrak{B} = \max(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, где $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ - некоторые подформулы.

Для осуществления спуска необходимы следующие тождества

$$J_\sigma(c) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \neq c \\ k-1 & \text{при } \sigma = c \end{cases} \qquad (1)$$

$$J_\sigma(J_\tau(x)) = \begin{cases} J_0(x) \vee \ldots \vee J_{\tau-1}(x) \vee J_{\tau+1}(x) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x) & \text{при } \sigma = 0 \\ 0 & \text{при } 0 < \sigma < k-1 \\ J_\tau(x) & \text{при } \sigma = k-1 \end{cases} \qquad (2)$$

$$J_\sigma(\min(x_1, x_2)) = J_\sigma(x_1)(J_\sigma(x_2) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x_2)) \vee J_\sigma(x_2)(J_\sigma(x_1) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x_1)) \qquad (3)$$

$$J_\sigma(\max(x_1, x_2)) = J_\sigma(x_1)(J_0(x_2) \vee \ldots \vee J_\sigma(x_2)) \vee J_\sigma(x_2)(J_0(x_1) \vee \ldots \vee J_\sigma(x_1)) \qquad (4)$$

Заметим, что в процессе спуска функций J_σ вглубь, структура исходной формулы может значительно усложниться. В двухзначном случае при спуске отрицаний суммарное число операций $\&$ и $\vee$ сохраняется.

б) Приведение к виду $\vee\&$

Здесь используются тождества, выражающие закон дистрибутивности, коммутативности

$$(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3) \qquad (5)$$

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1 \qquad (6)$$

в) Группировка множителей, зависящих от одного и того же переменного, а также констант. В каждом произведении любые члены можно сгруппировать вместе, используя закон ассоциативности для умножения

$$(x_1 \& x_2) \& x_3 = x_1 \& (x_2 \& x_3) \qquad (7)$$

и закон коммутативности (6)

г) Уничтожение вхождений переменных в произведениях. Осуществляется при помощи тождеств

$$x_1 \& x_1 = x_1 \qquad (8)$$

$$x_1 = 1 \& J_1(x_1) \vee 2 \& J_2(x_1) \vee \ldots (k-1) \& J_{k-1}(x_1) \qquad (9)$$

После этого используют тождества пункта б).

д) Уничтожение повторений в произведениях констант и символов J_σ для одного и того же переменного x . Здесь используются тождества

$$C_1 \& C_2 = \min(C_1, C_2) \qquad (10)$$

$$J_\sigma(x) \& J_\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \neq \tau \\ J_\sigma(x) & \text{при } \sigma = \tau \end{cases} \qquad (11)$$

е) Достижение однородности произведений.

Производится путем применения тождеств

$$x_1 = (k-1) \& x_1 \qquad (12)$$

$$(k-1) = J_0(x_2) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x_2) \qquad (13)$$

а также последующего раскрытия скобок

ж) Группировка слагаемых.

Для этого берем тождества

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) \qquad (14)$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \qquad (15)$$

з) Уничтожение повторений слагаемых.

$$x_1 \vee x_1 = x_1 \qquad (16)$$

Легко видеть, что эти тождества позволяют любую формулу привести к каноническому виду, и два эквивалентных канонических вида могут быть этими же тождествами преобразованы друг в друга.

Таким образом и в P_2 и в P_k в конкретных базисах существуют конечные полные системы тождеств. Здесь естественно возникает вопрос: что можно сказать об эквивалентных преобразованиях формул, если взять другие базисы? Например, для P_2 - базис $\{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2\}$ или для P_k - $\{x_1 + 1 (\mathrm{mod}\, k), \min(x_1, x_2)\}$ К этому вопросу примыкает непосредственно и другой вопрос: можно ли построить полную систему тождеств для данного базиса, если известна полная система тождеств для некоторого базиса того же замкнутого класса функций. Ответы на эти вопросы дает теорема, которая справедлива для произвольных функциональных систем с операцией суперпозиции и имеющих конечный базис и тем самым может быть применена к классам из P_2 и классам с конечным базисом из P_k .

Пусть $\mathfrak{P}$ класс функций порожденный множеством F функций $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Будем рассматривать формулы в этом базисе и обозначать их так: $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}[f_1,\dots,f_r]$ или кратко $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}[F]$. Рассмотрим другой базис $G=\{g_1,\dots,g_s\}$ этого класса $\mathcal{P}$. Формулы в этом базисе будем обозначать через $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}[g_1,\dots,g_s]=\mathfrak{B}[G]$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ – множество формул в базисах F и G соответственно.

<u>Теорема.</u> Если система $\mathfrak{F}$ имеет конечную полную систему тождеств, то и система $\mathfrak{G}$ также имеет конечную полную систему тождеств.

Доказательство. Пусть система $\mathfrak{F}$ имеет конечную полную систему тождеств $\mathfrak{A}_1'[F]=\mathfrak{A}_1''[F],\dots,\mathfrak{A}_m'[F]=\mathfrak{A}_m''[F]$ или кратко $\tilde{\mathfrak{A}}'[F]=\tilde{\mathfrak{A}}''[F]$. Так как F и G базисы $\mathcal{P}$, то для $i=1,\dots,m$ и $j=1,\dots,s$ найдутся формулы $\mathfrak{L}_i\in\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{T}_j\in\mathfrak{F}$ такие, что $f_i=\mathfrak{L}_i[G]$ и $g_j=\mathfrak{T}_j[F]$ или кратко $F=\tilde{\mathfrak{L}}[G]$ и $G=\tilde{\mathfrak{T}}[F]$. Покажем, что система тождеств $\tilde{\mathfrak{A}}'[\mathfrak{L}[G]]=\tilde{\mathfrak{A}}''[\mathfrak{L}[G]]$, $G=\tilde{\mathfrak{T}}[\mathfrak{L}[G]]$ является полной для $\mathfrak{G}$. Рассмотрим в $\mathfrak{G}$ пару эквивалентных формул $\mathfrak{B}^{(1)}[G]=\mathfrak{B}^{(0)}[G]$. Если в формулах $\mathfrak{B}^{(1)}$ и $\mathfrak{B}^{(0)}$ выразить базисные, функции G через F, то мы получим эквивалентные формулы $\mathfrak{A}^{(1)}[F]=\mathfrak{B}^{(1)}[\tilde{\mathfrak{T}}[F]]$ и $\mathfrak{A}^{(0)}[F]=\mathfrak{B}^{(0)}[\tilde{\mathfrak{T}}[F]]$ из $\mathfrak{F}$. Цепочка преобразований: $\mathfrak{A}^{(1)}[F]\to\mathfrak{A}^{(2)}[F]\dots\to\mathfrak{A}^{(n)}[F]$, осуществляемых в $\mathfrak{F}$, позволяет построить цепочку преобразований $\mathfrak{B}^{(1)}[G]\rightrightarrows$
$\mathfrak{B}^{(1)}[\tilde{\mathfrak{T}}[\tilde{\mathfrak{L}}[G]]]\equiv\mathfrak{A}^{(1)}[\tilde{\mathfrak{L}}[G]]\to\mathfrak{A}^{(2)}[\tilde{\mathfrak{L}}[G]]\to\dots\to\mathfrak{A}^{(n)}[\tilde{\mathfrak{L}}[G]]\equiv\mathfrak{B}^{(0)}[\tilde{\mathfrak{T}}[\tilde{\mathfrak{L}}[G]]]\rightrightarrows\mathfrak{B}^{(0)}[G]$
в $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Заметим далее

I. Теорема дает способ построения конечной полной системы в произвольном базисе

2. Свойство иметь конечную полную систему тождеств зависит только от класса $\mathcal{P}$ и не зависит от базиса.

Как мы видели в P_2 для любого замкнутого класса можно выбрать конечный базис (Теорема Поста [4]) и для него указать конечную полную систему тождеств (Теорема Линдона [5]). Только что доказанная теорема означает, что для любого замкнутого класса из P_2 в любом конечном базисе существует конечная полная система тождеств и тем самым с классами можно обращаться как с традиционными алгебро-логическими объектами.

При переходе к P_k оказывается, что ситуация становится более сложной, если $k\geq 3$. Именно: не каждый замкнутый класс имеет конечный базис и как мы покажем – не для каждого замкнутого класса с конечным базисом возможно построить конечную полную систему тождеств.

Первый такой пример в P_7 был построен Линдоном [6], в

последствии удалось снизить значность сначала до $k=4$ (Вишин [7]) и затем довести до минимума $k=3$ (Мурский [8]). Здесь мы изложим результат Линдона, который с методической точки зрения является пока самым простым.

Возьмем функцию $\varphi(x_1,x_2)$ (см. табл. I)

$x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	5	6	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	5	5	5	0	0
6	0	0	6	6	6	0	0

табл. I

Очевидно $\varphi\in P_7$. В дальнейшем введем для нее более простое обозначение $\varphi(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$.

Обозначим $x\cdot x$ через 0, т.к. функция $x\cdot x\equiv 0$

Рассмотрим совокупность формул $\mathfrak{F}$, построенных над $x_1\cdot x_2$ и соответствующий ей замкнутый класс функций $\mathcal{P}$.

Покажем, что равенства

$A_{1,2,3}: 0\cdot x_1=0,\ x_1\cdot 0=0,\ x_1(x_2x_3)=0$

$B_m: (\dots((x_1x_2)x_3\dots)x_m)x_1=0 \quad (m=1,2,\dots)$

$C_m: (\dots((x_1x_2)x_3\dots)x_m)x_2=(\dots(x_1x_2)x_3\dots)x_m \quad (m=2,3,\dots)$

являются в P_7 тождествами

Для $A_{1,2,3}$ утверждение следует из таблицы

Для B_m утверждение очевидно при $m=1$. При $m>1$ очевидно x_1x_2 либо равно 0 и тогда левая часть тоже равна 0 либо $\neq 0$ в этом случае принимает одно из значений $1,5,6$, что возможно, если $x_1=1,5,6$ – тогда левая часть также равна 0.

Для C_m рассмотрим следующие варианты для правой части

а) $(\dots(x_1x_2)\dots)x_m=0$, тогда и левая часть равна 0

б) $(\dots(x_1x_2)\dots)x_m=1$, тогда $x_1=1$, а $x_2=2$ и значит левая часть есть $1\cdot2\cdot\dots\cdot2=1$

в) $(\dots(x_1x_2)\dots)x_m=5,6$, тогда $x_2=2,3,4$ и левая часть есть $5\cdot x_2=5$ или $6\cdot x_2=6$

<u>Теорема.</u> Пусть $\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_n)$ и $\mathfrak{B}(x_1,\dots,x_n)$ две произвольные эквивалентные формулы из $\mathfrak{F}$, тогда существует эквивалентное преобразование $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ при помощи тождеств $A_{1,2,3}, B_m, C_m$ где $m\leq n$

Доказательство. Покажем, что при указанных ограничениях возможно любую формулу над $x_1,\dots,x_n$ привести к каноническому виду, в качестве которого мы берем либо выражение $x_1 x_1$, если $f_{\mathfrak{A}}=0$ либо выражение $(\dots(x_{i_1}x_{i_2})\dots)x_{i_m}$, где каждый символ из алфавита $x_1,\dots,x_n$ встречается не более одного раза. Последнее имеет место, если $f_{\mathfrak{A}}\neq 0$

Далее показывается, что при помощи тех же правил (с $m\leq n$) можно от одного канонического вида перейти к любому ему эквивалентному.

Пусть $\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_n)$ - произвольная формула.

Возможны следующие случаи

а) $\mathfrak{A}$ содержит 0, т.е. подформулу вида $u\cdot u$, тогда, используя $A_{1,2}$, $\mathfrak{A}$ преобразуется в 0

б) $\mathfrak{A}$ содержит умножение слева некоторой нетривиальной подформулы (отличной от символа переменного), т.е. имеет фрагмент вида $u(vw)$, тогда, используя A_3, этот фрагмент перейдет в 0, и мы приходим к пункту а).

Теперь можно предполагать, что формула не содержит нулей и умножений слева, т.е. имеет вид

$$(\dots(x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3}\dots)x_{i_m}$$

Далее рассматриваются формулы, в которых умножение совершается только справа. В этом случае, если опустить скобки, то запись принимает следующий вид

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$$

Допустим, что в формуле имеются повторные вхождения переменных и x_{i_s}, x_{i_t} - пара повторяющихся переменных, т.е. $x_{i_s}=x_{i_t}$ такая, что между x_{i_s} и x_{i_t} встречаются переменные из множества $\{x_1,\dots,x_n\}\setminus\{x_{i_s}\}$ не более одного раза.

в) $x_{i_s}=x_{i_1}$. Тогда применимо правило B_m с $m\leq n$ и мы приходим к случаю а)

г) $x_{i_s}\neq x_{i_1}$. Тогда, обозначив начальный кусок произведения $x_{i_1}\dots x_{i_{s-1}}$ через u, получим

$$u x_{i_s}x_{i_{s+1}}\dots x_{i_t}\dots \quad , \text{ где } x_{i_s}=x_{i_t}$$

и мы можем к этой подформуле применить правило C_m, $m\leq n$

В результате исчезнет вхождение x_{i_t}.

Совершая указанные преобразования мы либо получим $x_i\cdot x_i$ либо $x_{i_1}\dots x_{i_m}$, где множители не повторяются. Теперь остается

показать, что при помощи тех же тождеств возможно осуществить эквивалентное преобразование одной канонической формулы в любую другую каноническую формулу ей эквивалентную. Здесь мы имеем два случая

I. $f_{\mathfrak{A}}\equiv 0$. Пусть формула $\mathfrak{A}$ имеет два канонических вида: $x_i x_i$ и $x_j x_j$. Очевидно используя A_1 и A_2 получим

$$x_i\cdot x_i=(x_i x_i)(x_j x_j)=x_j x_j$$

2. $f_{\mathfrak{A}}\neq 0$. Докажем, что каноническая форма имеет единственный вид. Пусть формула $\mathfrak{A}$ допускает два канонических представления

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m} \qquad (\mathrm{I})$$

и

$$x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_\nu} \qquad (\mathrm{II})$$

а) Оба произведения состоят из одних и тех же множителей. Допустим, что это не так и $x_{j_s}\notin \mathrm{I}$. Тогда полагаем $x_{i_1}=1$, $x_{i_2}=x_{i_3}=\dots x_{i_m}=2$, а остальные переменные - 0. В этом случае первое произведение равно $1\cdot 2\cdot 2\dots 2=1$, второе - 0, т.к. содержит $x_{j_s}=0$. Это противоречит эквивалентности I и II. Таким образом $\nu=m$ и состав множителей в I и II одинаков

б) $x_{j_1}=x_{i_1}$. Если это не так, то полагаем опять

$$x_{i_1}=1,\ x_{i_2}=x_{i_3}=\dots=x_{i_m}=2$$

Тогда $\mathrm{I}=1\cdot 2\cdot 2\dots 2=1$, $\mathrm{II}=2\dots 1\dots 2=0$. Получаем противоречие

в) Порядок множителей в I и II одинаковый. Допустим, что это не так, тогда найдутся такие множители x_{i_s} и x_{i_t}, что $s<t$, а во втором произведении множитель x_{i_t} предшествует множителю x_{i_s}. В этом случае полагаем $x_{i_1}=1, x_{i_s}=3, x_{i_t}=4$, а остальные переменные - 2. Тогда

$$\mathrm{I}=1\dots 232\dots 242\dots 2=5$$

и

$$\mathrm{II}=1\dots 242\dots 232\dots 2=6$$

что противоречит эквивалентности I и II. Теорема доказана.

Следствие. Система тождеств $A_{1,2,3}, B_m, C_m$ $(m=1,2,\dots)$ является полной системой тождеств для $\mathfrak{F}$.

Теперь перейдем к изучению полных систем тождеств для $\mathfrak{F}$.

Определение. Формула $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{F}$ обладает свойством C^n если

1. $\mathfrak{A}$ содержит символы $x_1,x_2,\dots,x_n$
2. не имеет подформул вида $u\cdot u$ и $u(vw)$
3. Пусть $\mathfrak{A}=x_{i_1}\dots x_{i_m}$ и имеется второе (считая слева) вхождение символа x_{i_1}, тогда левее этого второго вхождения встречаются все символы переменных из $x_1,x_2,\dots,x_n$

В остальных случаях $\mathfrak{A}$ не удовлетворяет свойству C^n

<u>Пример.</u> Левая часть тождества B_n удовлетворяет свойству C^n

<u>Лемма.</u> Если формула $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству C^n и $\mathfrak{B}$ получена из $\mathfrak{A}$ при помощи тождеств $A_{1,2,3}$, B_m и C_m где $m<n$, то формула $\mathfrak{B}$ также удовлетворяет свойству C^n

Доказательство. Очевидно для установления леммы достаточно рассмотреть случай когда $\mathfrak{B}$ получается из $\mathfrak{A}$ одной эквивалентной подстановкой. Легко видеть, что тождества $A_{1,2,3}$ применить к $\mathfrak{A}$ нельзя, т.к. $\mathfrak{A}$ удовлетворяет п. 2 определения свойства C^n и

$$\mathfrak{A} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

С другой стороны к $\mathfrak{A}$ нельзя применить правило B_m $(m<n)$ из-за того, что левее второго вхождения символа x_{i_1} встречаются все символы переменных $x_1, \dots, x_n$. Таким образом к $\mathfrak{A}$ можно применить только тождества C_m $(m<n)$, которые уничтожают только повторные вхождения переменных. Поэтому формула $\mathfrak{B}$ будет удовлетворять свойству C^n.

Следствие. Эквивалентность B'_n

$$(\dots(x_1 x_2) x_3 \dots) x_n) x_1 = 0$$

не может быть получена при помощи тождеств $A_{1,2,3}$, B_m, C_m $(m<n)$

В самом деле, левая часть B_n удовлетворяет свойству C^n, а правая нет, а если бы левая часть получалась из правой при помощи указанных тождеств, то по предыдущей лемме она удовлетворяла бы также свойству C^n.

<u>Теорема.</u> Для системы формул Ψ не существует конечной полной системы тождеств.

Доказательство. Допустим, что система Ψ имеет конечную полную систему тождеств

$$\begin{cases} \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}''_1 \\ \dots \\ \mathfrak{A}'_l = \mathfrak{A}''_l \end{cases}$$

Обозначим через n наибольший номер переменного x, встречающегося в этих тождествах. На основании теоремы данная система тождеств может быть получена из системы $\{A_{1,2,3}, B_m, C_m, m \le n\}$

В то же время она полная, значит из нее можно вывести тождество B_{n+1}. Следовательно тогда и из системы $\{A_{1,2,3}, B_m, C_m, m \le n\}$ можно было бы вывести тождество B_{n+1}, что противоречит следствию предыдущей леммы. Теорема доказана.

Таким образом в P_k при $k>2$ появляются классы $\mathcal{P}$ для которых нет конечной полной системы тождеств.

4. <u>Эквивалентные преобразования схем из Ф.Э.</u>

Этот параграф начнем с некоторых замечаний, касающихся понятия схемы из Ф.Э. [9]

I. Так как при эквивалентных преобразованиях схем из Ф.Э. промежуточные объекты могут оказаться не схемами из Ф.Э., то несколько расширим понятие схемы из Ф.Э. А именно мы допускаем

а) добавление изолированных входных полюсов

б) наличие выходов, которым не приписаны символы выходного алфавита (выходы не являющиеся полюсами)

в) допускаются схемы без выходных полюсов

При этом естественным образом доопределяется и функционирование схемы: от переменного, приписанному изолированному входу, каждый выход зависит несущественным образом; функционирование на выходах не являющихся полюсами не определяется.

2. Определение схемы из Ф.Э. нами дано в геометрической форме. Благодаря этому обеспечивается наглядность объекта, но зато возникает элемент неопределенности (который может быть полностью устранен, если исходить из абстрактного определения схемы). Поэтому мы вынуждены сделать некоторые оговорки, касающиеся стандартизации изображения схем (см. таблицу 2)

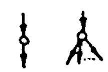
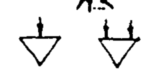
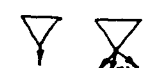
	—	изолированный вход схемы
	—	вход схемы, совмещенный со входом элемента
	—	выход схемы, совпадающий со входом схемы
	—	ветвление выхода элемента
	—	выход элемента, не являющийся выходом схемы
	—	выход схемы, совмещенный с выходом элемента

табл. 2

Далее уточним основные понятия, связанные с эквивалентными преобразованиями

I. Схемы $\Sigma' = \Sigma'(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p)$ и $\Sigma'' = \Sigma''(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_p)$ называются эквивалентными, если уравнения

$$\begin{cases} z_1 = f_1'(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_p = f_p'(x_1,\dots,x_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = f_1''(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_p = f_p''(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

описывающие их функционирование, имеют равные правые части, т.е.

$$f_1'(x_1,\dots,x_n) = f_1''(x_1,\dots,x_n),\dots, f_p'(x_1,\dots,x_n) = f_p''(x_1,\dots,x_n)$$

Схемы с одинаковыми входами и без выходных полюсов считаются эквивалентными

2. Пусть Σ_1 есть часть схемы Σ, которая является схемой из Ф.Э., тогда она называется подсхемой схемы Σ'. При этом полюсами (входными и выходными) подсхемы Σ_1 являются полюса исходной схемы Σ', попавшие в Σ_1, а так же вершины (связи), соединяющие Σ_1 с остальной частью схемы, и некоторые выходы элементов из Σ_1

3. Операция подстановки состоит в замене подсхемы Σ_1 на схему Σ_2, у которой такое же число входов и выходов как и у Σ_1

4. В случае, если Σ_2 эквивалентна Σ_1 и подстановка согласована с соответствием полюсов при их эквивалентности, то мы имеем эквивалентную подстановку. Для схем из Ф.Э. справедлив принцип эквивалентной замены

5. Тождество $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ понимается с точностью до переименования символов из алфавитов X и Z.

Пункты 6-7 определяются как и в общем случае.

<u>Теорема.</u> (Горбовицкая [10]) Для схем из Ф.Э. в базисе из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов существует конечная полная система тождеств.

Доказательство. Построение системы тождеств и доказательство ее полноты производится одновременно. Основная идея стандартная- приведение схемы к каноническому виду и установление возможности преобразования эквивалентных канонических видов друг в друга. Пусть $\Sigma = \Sigma(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_p)$ схема из Ф.Э. и ее функционирование описывается системой уравнений

$$\begin{cases} z_1 = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_p = f_p(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

Схему канонического вида эквивалентную Σ определим как объединение по $i=1,2,\dots,p$ схем $\Sigma_i^0(x_1,\dots,x_n,z_i)$, каждая из которых при $f_i \equiv 0$ совпадает со схемой, изображенной на черт. I, а при

$f_i \not\equiv 0$ ...ветствует совершенной д.н.ф. функции f_i. Построение схем $\Sigma_i^0, i=1,\dots,p$, осуществляется следующим образом.

<u>I этап.</u> Устранение ветвления на выходах элементов. Для этого используются правила, показанные на черт. 2 (здесь и далее в правилах опускаются символы из алфавитов X и Z).

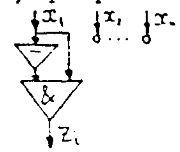
Очевидно, что в конце I-го этапа получается схема эквивалентная исходной и содержащая разветвления только на входах. Эту схему можно рассматривать как p схем склеенных на входах, каждая из которых изоморфна формуле в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

<u>II этап.</u> Преобразование схемы не имеющей ветвлений на выходах элементов к каноническому виду. Для этого используются графические аналоги правил (I) - (VIII) для преобразования формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ (на черт. 3 для примера показаны графические аналоги правил (III), (VI), (VII)).

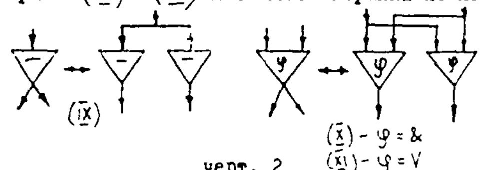
Данные тождества формально уже чем соответствующие тождества в алгебре логики, т.к. здесь нет правила подстановки. Однако косвенно подстановка в схемах присутствует в виде подсхем подключенных на входы преобразуемой подсхемы. Чтобы "смоделировать" приведение к каноническому виду формул на схемах из функциональных элементов надо иметь ввиду два обстоятельства

1) в результате применения правила (III) могут возникнуть ветвления на выходах элементов и

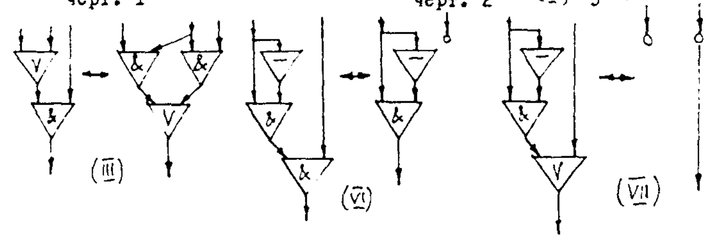
2) при применении правил (VI) и (VII) появляются вершины не явля-



черт. I



черт. 2

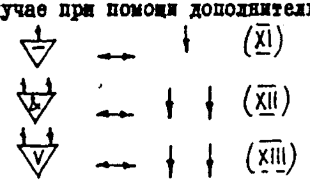


черт. 3

ющиеся выходами.

В обоих случаях мы при помощи указанных правил выходим из класса "формул". Чтобы снова вернуться в класс формул в первом случае используют правила, уничтожающие ветвления на выходах элементов (см. I этап)

во втором случае при помощи дополнительных правил ($\overline{\underline{XI}}$ – $\overline{\underline{XIII}}$)



постепенно удаляют "лишние" элементы

II. Перевод эквивалентных канонических видов друг в друга осуществляется теми же правилами в точности так же как у формул.

Теорема доказана.

5. Эквивалентные преобразования контактных схем

Кратко коснемся основных моментов, связанных с преобразованиями контактных схем [II]

I. Контактные схемы Σ' и Σ'' называются эквивалентными, если существует взаимнооднозначное соответствие T между их полюсами, такое, что матрицы $\| f'_{ij} \|$ и $T \| f''_{ij} \| T^{-1}$ равны т.е. состоят из соответственно равных функций

2. Подмножество Σ_1 состоящее из некоторых вершин схемы Σ' и части контактов их соединяющих называется подсхемой схемы Σ' если в нем выделены полюса и так, что

а) Если вершина из Σ_1 является полюсом в Σ', то она является также полюсом и Σ_1

б) Если вершина из Σ_1 инцидентна (т.е. является концом) контакту из $\Sigma' \setminus \Sigma_1$, то она является полюсом в Σ_1,

в) некоторое подмножество вершин из Σ_1 (может быть и пустым) считается полюсами Σ_1.

Для полюсов из Σ_1 выбирается некоторая нумерация.

3. Операция подстановки определяется как и в общем случае

4. Если контактные схемы Σ_1 и Σ_2 эквивалентны и T взаимно однозначное соответствие их полюсов, обеспечивающее эквивалентность, и Σ_1 есть подсхема Σ', то подстановка вместо Σ_1 схемы Σ_2, согласованная с T, будет эквивалентной подстановкой. Из содержательных соображений ясно, что для контактных схем верен принцип эквивалентной замены: пусть Σ'' – результат эквивалентной подстановки, тогда схемы Σ' и Σ'' эквивалентны. Впрочем, принцип эквивалентной замены для контактных схем может быть и строго доказан.

5. Тождество $\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_2$ понимается с точностью до

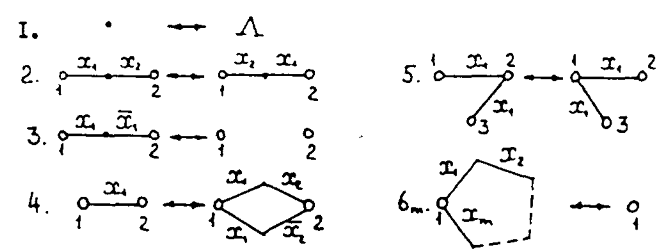
а) согласованных перенумераций полюсов

б) согласованных переименований и отождествлений переменных

в) согласованных замен для некоторых i $x_i \to \bar{x}_i$ и $\bar{x}_i \to x_i$

Остальные пункты формулируются также как и в общем случае.

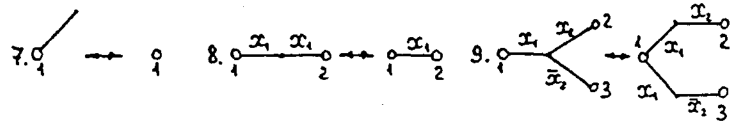
На черт. 4 приведены очевидные тождества I-5 и 6_m $(m=1,2,\ldots)$



черт. 4

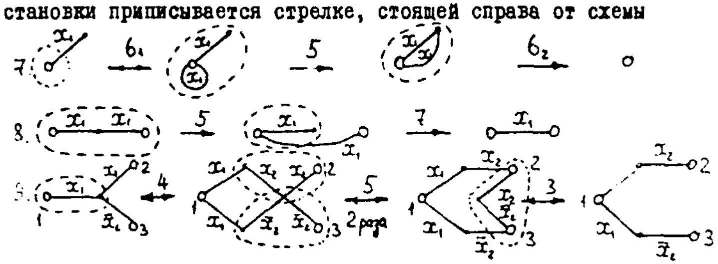
Здесь через • обозначена изолированная вершина, не являющаяся полюсом, через ∘ – полюс. Кроме того в правилах 3 и 5 допускается совпадение вершин.

Для дальнейшего полезно развить некоторые навыки к эквивалентным преобразованиям контактных схем. Здесь характер преобразований существенно непохож на способы преобразований формул. Например, в случае контактных схем имеется правило (5), в котором фигурируют трехполюсные схемы, а также есть правила (1, 6_m) топологического характера: отбрасывание изолированной вершины и удаление цикла, проходящего через полюсную вершину и не имеющего других полюсов. Именно поэтому мы покажем, что тождества 7 (удаление отростка, состоящего из одного ребра), 8 (уничтожение дублирования контактов при последовательном соединении) и 9 (расклейка, склейка двух "соседних" цепей) (см. черт. 5)



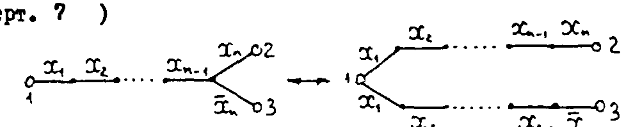
черт. 5

могут быть получены при помощи эквивалентных преобразований из $1-5, 6_1, 6_2$. В самом деле, мы имеем цепочки эквивалентных преобразований (см. черт. 6). На нем пунктиром помечены подсхемы на места которых производится подстановка. Номер подстановки приписывается стрелке, стоящей справа от схемы



черт. 6

Тождество 9 может быть обобщено на случай расклейки (склейки) двух соседних цепочек длины n, тождество 9_n (см. черт. 7)

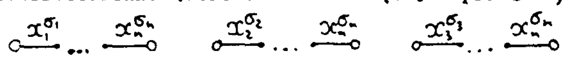


черт. 7

Рассмотрим далее вспомогательные тождества I – $\overline{\mathrm{VII}}$ (черт. 9). В них и в последующих тождествах обозначены через I_i , где $i = i(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – номер набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$,

I_i' , где $i = i(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ – номер набора $(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ и

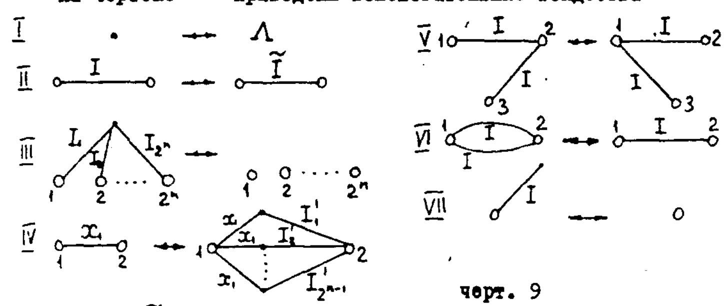
I_i'' , где $i = i(\sigma_3, \dots, \sigma_n)$ – номер набора $(\sigma_3, \dots, \sigma_n)$ – соответственно цепочки контактов (см. черт. 8)



черт. 8

а символ I обозначает цепочку соответствующую конъюнкции $x_1 \dots x_n$

На чертеже 9 приведены вспомогательные тождества



черт. 9

Здесь через $\tilde{\mathrm{I}}$ обозначена произвольная перестановка контактов в I (Фактически правило II – семейство правил для всевозможных перестановок). Кроме того в правиле III допускаются любые отождествления полюсов.

Ясно, что тождества I – $\overline{\mathrm{VII}}$ выполняются. Однако эту проверку можно не производить, поскольку справедлива следующая лемма.

Лемма. Тождества I – $\overline{\mathrm{VII}}$ могут быть получены из тождеств $1-5$, 6_m $(m \leq n)$ при помощи эквивалентных преобразований

Доказательство Тождество I совпадает с 1

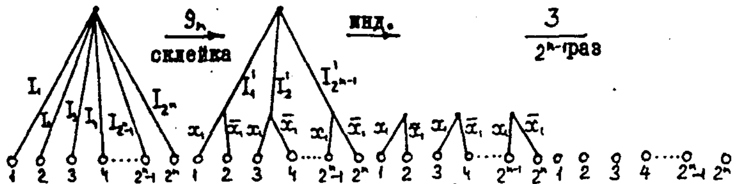
Тождество II получается многократным применением 2

Тождества III и IV доказываются по индукции, базис которой составляют тождества 3 и 4 при n равном 1 и 2 соответственно. При этом индуктивный переход от случая $l = (n-1)$ к случаю $l = n$ осуществляется на основе индуктивного предположения следующим образом: для правила III – 2^{n-1} кратным применением правил 9_n (склейка) и 3 (см. черт. 10 , где различные цепи $\mathrm{I}_1', \mathrm{I}_2', \dots, \mathrm{I}_{2^{n-1}}'$ длины $(n-1)$ занумерованы в естественном порядке), а для правила 4 – 2^{n-2} кратным применением правил 9_{n-1} (расклейка) и 4 (см. черт. 11).

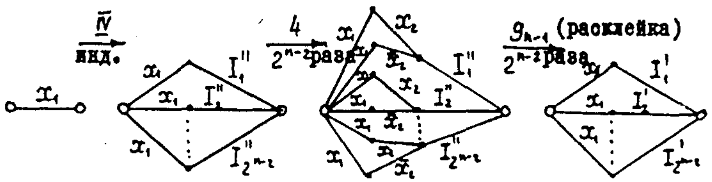
Тождества V и VI выводятся путем многократного применения тождеств 5, II, 6_n (см. черт. 12, 13).

Тождество $\overline{\mathrm{VII}}$ может быть получено многократным применением 7 . Лемма доказана.

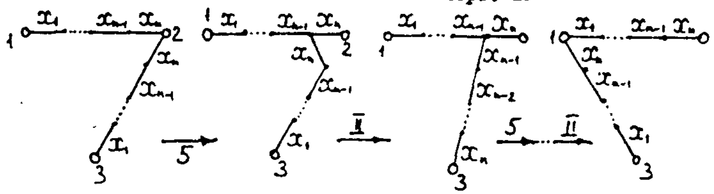
Замечание. Тождество III может быть обобщено на случай произвольной склейки полюсов и на случай, в котором присутствуют не все цепочки длины n (см. черт. 14)



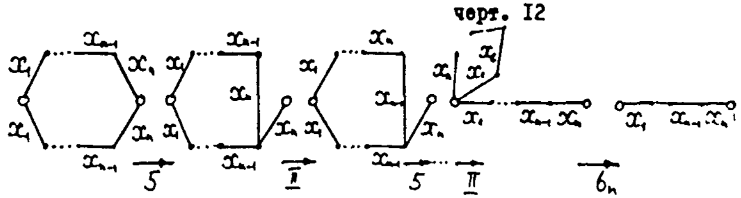
черт. I0



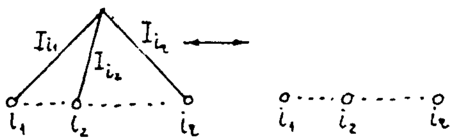
черт. II



черт. I2



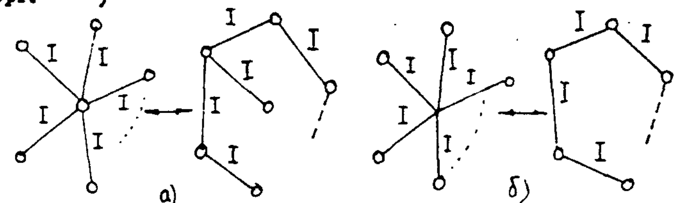
черт. I3



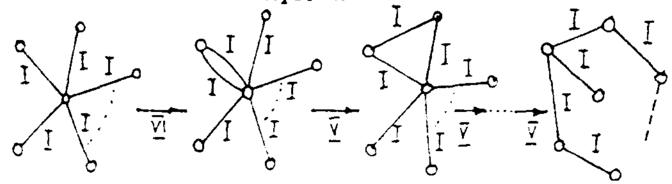
черт. I4

__Лемма (о звезде).__ Тождества (см. черт. I5) выводим из $\underline{I}-\underline{VII}$.
Доказательство. Рассмотрим первое из них (имеющее центр звезды в качестве полюса). Далее установим его справедливость путем

применения правила $\underline{VI}$ и многократного применения $\underline{V}$ (см. черт. I6)



черт. I5



черт. I6

Второе тождество доказывается с использованием первого и $\underline{VII}$. Тождество б) о преобразовании звезды в контур является аналогом в дискретном варианте хорошо известного преобразования в электротехнике.

__Теорема.__ (Мурский [I2]) Если Σ' и Σ'' две эквивалентных s - полюсных контактных схемы над $x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ то существует эквивалентное преобразование Σ' в Σ'' при помощи тождеств $1-5, 6_m, m \le n$.

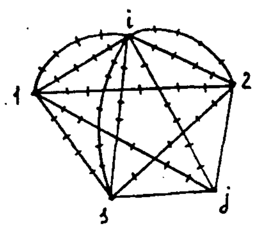
Доказательство. Сначала для схемы Σ над $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ определим каноническую форму. Пусть $\|f_{ij}(x_1, \dots, x_n)\|$ - ее матрица проводимости. Возьмем s вершин занумерованных числами $1, 2, \dots, s$ в качестве полюсов определяемой схемы. Пусть i и j произвольные полюса и рассмотрим $f_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, если

а) $f_{ij} \equiv 0$, то никаких построений не делаем, если

б) $f_{ij} \not\equiv 0$, то по совершенной д.н.ф.

$$f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$$

между этими полюсами подключим контактную схему, соответствующую данной д.н.ф. Данную операцию проделаем для всех пар i и j (см. черт. I7)

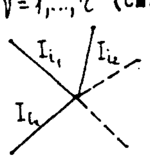


черт. 17

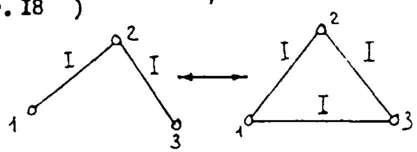
Полученная схема Σ_0, являющаяся каноническим видом схемы Σ, состоит из цепочек длины n, соединяющих полюса и имеет ту же матрицу проводимости. Докажем, что при помощи тождеств 1-5, $6_m, m\le n$ схему Σ можно "привести" (т.е. преобразовать) к каноническому виду Σ_0. Для этого достаточно установить, что приведение можно осуществить при помощи вспомогательных правил $I-\overline{VII}$. Этот процесс разбивается на несколько этапов

I) В схеме Σ каждый контакт $x_i^{\sigma_i}$ заменим, пользуясь правилом $\overline{IV}$, на (см. черт. 9) двухполюсную подсхему, состоящую из цепочек длины n. Мы получим схему Σ_1, которая состоит из цепочек, соединяющих некоторые вершины

2) Пусть a – вершина в Σ_1, являющаяся концом некоторой цепочки, и a не есть полюс Σ_1. Покажем, что при помощи правил $\overline{I}-\overline{VII}$ ее можно исключить. Рассмотрим звезду из цепочек имеющих своим центром вершину a. Пусть $I_{i_1},\dots,I_{i_r}$ – различные сорта цепочек из этой звезды. В этой звезде выделим подзвезду из цепочек ν-го сорта и к этой подсхеме применим лемму о звезде. В результате этого в исходной звезде останется одна цепочка вида I_{i_ν}, остальные дубликаты I_{i_ν} отойдут на периферию, $\nu=1,\dots,r$ (см. черт. 18)



черт. 18



черт. 19

После этого применяем к преобразованной звезде – а она уже имеет ровно по одному представителю из вышеуказанных сортов цепочек, обобщенное правило $\overline{III}$. Этот процесс ведем до тех пор пока не уничтожим все внутренние вершины, являющиеся кон-

цами цепочек. Получим схему Σ_2

3) В схеме Σ_2 производим замыкание по транзитивности. Для этого применяем правило (см. черт. 19) до тех пор пока возможно (это правило выводится путем применения $\overline{VI}$ и $\overline{V}$). Обозначим через Σ_3 результат этого замыкания.

4) В схеме Σ_3 ликвидируем цепочки дублирующие друг друга параллельным образом. Для этого используем правило $\overline{VI}$. После этого получим искомую схему Σ_0, являющуюся каноническим видом схемы Σ. Заметим, наконец, что две эквивалентных канонических схемы над $x_1,\dots,x_n,\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ могут различаться лишь порядком контактов в цепочках. Их можно перевести друг в друга при помощи $\overline{II}$.

Для завершения доказательства нужно Σ' привести к каноническому виду Σ_0', Σ'' привести к каноническому виду Σ_0''. $\Sigma_0'\leftrightarrow\Sigma_0''$, значит их можно перевести друг в друга, отсюда извлекается и искомое эквивалентное преобразование. Теорема доказана.

Следствие. Система правил (тождеств) $1-5$, $6_m, m=1,2,\dots$ является полной в классе контактных схем.

Далее займемся анализом системы тождеств $1-5, 6_m, m=1,2,\dots$ Пусть Σ – контактная схема над $x_1,\dots,x_n,\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$. Введем функцию $\varphi_\Sigma(x_1,\dots,x_n)$ следующим образом:

$$\varphi_\Sigma(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=p-b+k,$$ где

p – число ребер в графе получающимся из Σ при подстановке $x_1=\alpha_1,\dots,x_n=\alpha_n$ (контакт x^σ переходит в ребро, если $x^\sigma=1$, и выбрасывается, если $x^\sigma=0$)

b – число вершин данного графа и

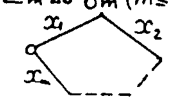
k – число связанных компонент этого графа (две вершины принадлежат одной компоненте связности графа, если есть путь в графе, соединяющий эти вершины)

Наконец

$$Ind\,\Sigma=\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}\varphi_\Sigma(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\pmod 2$$

Пример. Возьмем алфавит $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1},\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}$

Рассмотрим схему Σ_m из 6_m $(m\le n+1)$ (см. черт. 20)



черт. 20

Если $m=n+1$ и $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n+1}=1$, то $\varphi_{\Sigma_{n+1}}(1,\ldots,1)=(n+1)-(n+1)+1=1$;
если $\alpha_i=0, \alpha_1=\ldots=\alpha_{i-1}=\alpha_{i+1}=\ldots=\alpha_{n+1}=1$, то
$\varphi_{\Sigma_{n+1}}(1,1,\ldots,1,0,1,\ldots,1)=n-(n+1)+1=0$, а когда набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ содержит $d>1$ нулей, тогда

$$\varphi_{\Sigma_{n+1}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})=(n+1-d)-(n+1)+d=0$$

Отсюда $\mathrm{Ind}\,\Sigma_{n+1}=1$

Если $m<n+1$, то $\mathrm{Ind}\,\Sigma_m=0$, т.к.

$$\varphi_{\Sigma_m}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,0,\ldots,0)=\varphi_{\Sigma_m}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,0,\ldots,0,1)=\ldots=\varphi_{\Sigma_m}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,1,\ldots,1)$$

Значит

$$\mathrm{Ind}\,\Sigma_m=\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})}\varphi_{\Sigma_m}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})=\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}2^{n+1-m}\varphi_{\Sigma_m}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,0,\ldots,0)=0(\mathrm{mod}\,2)$$

Для схемы Σ_0 - правой части 6_m по тем же причинам $\mathrm{Ind}\,\Sigma_0=0$.

__Лемма.__ Если схемы Σ' и Σ'' над алфавитом $x_1,\ldots,x_{n+1},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n+1}$ и Σ'' получена из Σ' эквивалентными преобразованиями при помощи тождеств $1-5, 6_m, m\le n$, то $\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$

Доказательство. Заметим, что если существует эквивалентное преобразование Σ' в Σ'', и некоторые промежуточные схемы зависят от переменных не входящих в $x_1,\ldots,x_{n+1}$, то можно построить другое эквивалентное преобразование, где все промежуточные схемы зависят только от $x_1,\ldots,x_{n+1}$ с употреблением тождеств из $1-5, 6_m, m\le n$. Для этого все прочие переменные, участвующие в выводе, следует отождествить, например, с x_1.
При этом каждая эквивалентная подстановка этого вывода

а) либо останется неизменной

б) либо произойдет в ней согласованное переименование переменных

в) либо в ней отождествятся некоторые переменные $(2,4,6_m)$ - и тогда она или превратится в тавтологию (2) или может быть заменена на комбинацию подстановок из $1-5, 6_m, m\le n$, (4) или останется вариантом того же типа подстановки (6_m).

Очевидно лемма будет доказана, если она будет установлена для частного случая, когда Σ'' получается из Σ' эквивалентной подстановкой из $1-5, 6_m, m\le n$. Для этого рассмотрим шесть случаев

I) Σ'' получена из Σ' при помощи тождества 1. Пусть

$$\Delta\varphi=\varphi_{\Sigma''}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})-\varphi_{\Sigma'}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})=(p''-\ell''+k'')-(p'-\ell'+k')=$$
$$=\Delta p-\Delta\ell+\Delta k$$

Очевидно мы имеем для тождества 1: $\Delta p=0$ и $|\Delta\varphi|=|-\Delta\ell+\Delta k|=0$
Поэтому $\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$

2) Σ'' получена из Σ' при помощи тождества 2. Здесь очевидно $\varphi_{\Sigma'}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})=\varphi_{\Sigma''}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ для любого набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ и отсюда

$$\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$$

3) Σ'' получена из Σ' при помощи тождества 3. Здесь для каждого набора $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ $\Delta k=0$ и $\Delta\varphi=\Delta p-\Delta\ell$, причем при подстановке и p и ℓ либо одновременно уменьшаются на I, либо увеличиваются на I. Тогда $\Delta\varphi=0$ и $\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$.

4) Σ'' получается из Σ' при помощи тождества 4. Для каждого набора $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ в котором

а) $\alpha_1=0$. Здесь либо $\Delta p=1$, $\Delta\ell=2$, $\Delta k=1$, либо $\Delta p=-1$, $\Delta\ell=-2$, $\Delta k=-1$ (правило применено справа налево). Мы имеем $\Delta\varphi=0$

б) $\alpha_1=1$. Здесь либо $\Delta p=2$, $\Delta\ell=2$, $\Delta k=0$, либо $\Delta p=-2$, $\Delta\ell=-2$, $\Delta k=0$ опять получаем $\Delta\varphi=0$. Поэтому $\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$

5) Σ' получается из Σ' при помощи тождества 5. В этом случае для каждого набора $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ величина $\Delta\varphi=0$. Поэтому

$\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$

6) Σ'' получается из Σ' при помощи тождества $6_m, m\le n$. Тут также $\mathrm{Ind}\,\Sigma''=\mathrm{Ind}\,\Sigma'$ (см. рассуждение в примере перед этой леммой для $m<n+1$). Лемма доказана.

Следствие. Тождество 6_{n+1} не выводимо из тождеств $1-5, 6_m, m\le n$. В самом деле, совершая эквивалентные преобразования схемы Σ_1 (левая часть тождества 6_{n+1}) при помощи тождеств $1-5, 6_m, m\le n$, мы будем получать схемы Σ с $\mathrm{Ind}\,\Sigma=\mathrm{Ind}\,\Sigma_1=1$, в то же время схема Σ_0 (правая часть тождества 6_{n+1}) такова, что $\mathrm{Ind}\,\Sigma_0=0$.

__Теорема.__ Для контактных схем не существует конечной полной системы тождеств.

Доказательство. Допустим противное, пусть для контактных схем существует конечная полная система тождеств

$$\begin{cases}\Sigma_1'\leftrightarrow\Sigma_1''\\ \text{- - - - -}\\ \Sigma_\ell'\leftrightarrow\Sigma_\ell''\end{cases}$$

Тогда найдется такое n, что все схемы из этих тождеств будут схемами над $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,x_1,\ldots,x_n$. Тогда каждое тождество из этой системы может быть выведено из $1-5, 6_m, m\le n$. С другой стороны система тождеств полна, поэтому из нее может быть получено тождество 6_{n+1}. Следовательно, из $1-5, 6_m, m\le n$ выводимо 6_{n+1}, что противоречит следствию предыдущей леммы.

Теорема доказана.

6. Эквивалентные преобразования автоматов

Как и в случае схем из Ф.Э. необходимо сначала расширить понятие автомата, иначе естественные правила преобразований могут вывести за пределы класса автоматов[3].

I. Допускаются изолированные входы. Они отражают несущественность переменных;

2. Могут быть автоматы без входов. В этом случае в канонических уравнениях отсутствуют переменные из алфавита X. Такие автоматы реализуют константы - являющиеся периодическими последовательностями;

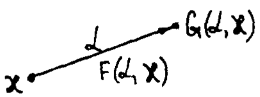
3. Допускаются выходы, которым не приписан символ из алфавита Z, т.е. не являющимися выходами схемы. В частности схема может быть без выходов. В этом случае в канонических уравнениях отсутствуют переменные из алфавита Z. По определению, функционирование будет пустым.

Для автоматов принимаются те же уточнения в изображении автоматных схем, что и для схем из Ф.Э. Существенной чертой в проблематике эквивалентных преобразований является то, что эквивалентность двух автоматов определяется через равенство соответствующих о.д. функций (в случае отсутствия выходов автоматы считаются эквивалентными). В остальном все аналогично случаю схем из Ф.Э.

Как мы видели, исследуемый класс автоматов включает в себя класс схем из функциональных элементов в базисе, состоящем из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов. А наличие конечной полной системы тождеств для схем из функциональных элементов не позволяет сделать прогноз о возможности распространения этой ситуации на более широкий класс - класс автоматов. И на самом деле в автоматном случае проблема эквивалентных преобразований решается значительно сложнее.

Мы начнем наши рассмотрения с изучения класса $\mathcal{K}_\ell$ всех автоматов, содержащих не более ℓ элементов задержки. Автомат с n входами и m выходами определяет о.д. функцию, которую можно задать каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} Z(t)=F(x(t),Q(t-1)) \\ Q(t)=G(x(t),Q(t-1)) \\ Q(0)=0 \end{cases}$$



черт. 2I

Эти канонические уравнения задают нумерацию вершин и нумерацию ребер дерева для о.д. функции:

Вершинам приписываются числа $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_r$, являющиеся номерами различных типов поддеревьев. α - ому ребру исходящему из вершины $\mathcal{X}$ приписывается число (вектор) $F(\alpha,\mathcal{X})$, а вершине, в которое ведет ребро, число (вектор) $G(\alpha,\mathcal{X})$. При этом корню дерева приписывается число $\mathcal{X}_1=0$ (начальное условие). (см. черт. 2I)
Очевидно функции $F(X,\mathcal{X})$ при фиксированном $\mathcal{X}$ определяют нумерацию ребер в пучке, исходящем из вершины $\mathcal{X}$. В таком случае типы этих функций и их число однозначно определяются о.д. функцией. Пусть $F^{(1)}(x_1,\dots,x_n),\dots,F^{(r_0)}(x_1,\dots,x_n)$ - представители этих типов функций. Обозначим это множество через $\mathfrak{M}_0$. Мощность этого множества $|\mathfrak{M}_0|=r_0\le r$. Пусть о.д. функция реализована двумя автоматными схемами Σ' и Σ'' имеющими каждая ровно ℓ элементов задержек. С ними связаны естественные системы канонических уравнений (см. алгоритм получения канонических уравнений по автоматной схеме)

$$\begin{cases} Z(t)=F'(X(t),Q(t-1)) \\ Q(t)=G'(X(t),Q(t-1)) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Z(t)=F''(X(t),Q(t-1)) \\ Q(t)=G''(X(t),Q(t-1)) \end{cases}$$

с одинаковыми начальными условиями $Q(0)=0$, в которых
$X(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$, $Q(t)=(q_1(t),\dots,q_\ell(t))$, $Z(t)=(z_1(t),\dots,z_m(t))$
и функции F',F'',G',G'' - всюду определены. Легко видеть, что вес исходной о.д. функции удовлетворяет неравенству $r\le 2^\ell$. Очевидно, что эти системы в дереве для этой о.д. функции определяют, вообще говоря, различные нумерации вершин, каждая из которых удовлетворяет следующему свойству: вершины принадлежащие различным классам эквивалентности будут иметь различные номера, в то же время поддеревья из одного класса не обязательно имеют один и тот же номер. Рассмотрим векторные разложения

$$F'(x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_\ell)=\bigvee_{(\sigma_1',\dots,\sigma_\ell')} F'(x_1,\dots,x_n,\sigma_1',\dots,\sigma_\ell')\,\&\,q_1^{\sigma_1'}\&\dots\&\,q_\ell^{\sigma_\ell'}$$

$$F''(x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_\ell)=\bigvee_{(\sigma_1'',\dots,\sigma_\ell'')} F''(x_1,\dots,x_n,\sigma_1'',\dots,\sigma_\ell'')\,\&\,q_1^{\sigma_1''}\&\dots\&\,q_\ell^{\sigma_\ell''}$$

Компоненты этих разложений образуют некоторое подмножество $\mathfrak{M}$ вектор функций от переменных $x_1,\dots,x_n$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}_0\subseteq\mathfrak{M}$ и $r_1=|\mathfrak{M}|\le 2^{\ell+1}$. В частности, если набор $(\sigma_1',\sigma_2',\dots,\sigma_\ell')$ или $(\sigma_1'',\dots,\sigma_\ell'')$ является номером некоторой вершины дерева для соответствующей о.д. функции, то $F'(x_1,\dots,x_n,\sigma_1',\dots,\sigma_\ell')\in\mathfrak{M}_0$ соответственно $F''(x_1,\dots,x_n,\sigma_1'',\dots,\sigma_\ell'')\in\mathfrak{M}_0$. Поэтому можно занумеровать функции множества $\mathfrak{M}$ числами $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{m})$ и так, что первые r_0 номеров относятся к подмножеству $\mathfrak{M}_0$. Мы имеем

$$\mathfrak{M}=\{F^{(1)}(x_1,\dots,x_n),\dots,F^{(r_0)}(x_1,\dots,x_n),F^{(r_0+1)}(x_1,\dots,x_n),\dots,F^{(r_n)}(x_1,\dots,x_n)\}$$

Пусть $F'(x_1,\dots,x_n,\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)=F^{(\lambda')}(x_1,\dots,x_n)$

и $F''(x_1,\dots,x_n,\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)=F^{(\lambda'')}(x_1,\dots,x_n)$ тогда мы получаем два отображения φ' и φ'', где

$$\varphi'(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_{\ell+1})=\lambda',\ \varphi''(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)=(\lambda''_1,\dots,\lambda''_{\ell+1})=\lambda''$$

Рассмотрим разложения

$$G'(x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_\ell)=\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}G'(\alpha_1,\dots,\alpha_n,q_1,\dots,q_\ell)\,\&\,x_1^{\alpha_1}\&\dots\&\,x_n^{\alpha_n}$$

и

$$G''(x_1,\dots,x_n,q_1,\dots,q_\ell)=\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}G''(\alpha_1,\dots,\alpha_n,q_1,\dots,q_\ell)\,\&\,x_1^{\alpha_1}\&\dots\&\,x_n^{\alpha_n}$$

их компоненты $G'(\alpha_1,\dots,\alpha_n,q_1,\dots,q_\ell)$ и $G''(\alpha_1,\dots,\alpha_n,q_1,\dots,q_\ell)$ определяют (ℓ,ℓ) - преобразования, т.е. системы из ℓ булевских функций от ℓ переменных $q_1,\dots,q_\ell$. Число s таких преобразований, очевидно, есть $s=2^{\ell\cdot 2^\ell}$. Обозначим их через $G^{(1)}(q_1,\dots,q_\ell),\dots,G^{(s)}(q_1,\dots,q_\ell)$.

Мы имеем $G'(\alpha_1,\dots,\alpha_n,q_1,\dots,q_\ell)=G^{(\mu')}(q_1,\dots,q_\ell)$, где $\mu'=(\mu'_1,\dots,\mu'_{\log s})$

и $G''(\alpha_1,\dots,\alpha_n,q_1,\dots,q_\ell)=G^{(\mu'')}(q_1,\dots,q_\ell)$, где $\mu''=(\mu''_1,\dots,\mu''_{\log s})$.

Отсюда получаем два преобразования ψ' и ψ''

$$\psi'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\mu'_1,\dots,\mu'_{\log s})=\mu',\ \psi''(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\mu''_1,\dots,\mu''_{\log s})=\mu''$$

Теперь вычисление о.д. функции на основе автомата Σ' можно определить в следующей стандартной форме:

1. По входному значению $\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)$ при помощи функции ψ' находят номер $\mu'=(\mu'_1,\dots,\mu'_{\log s})$ (ℓ,ℓ)- полюсника.

2. При помощи функции $G^{(\mu')}(q_1,\dots,q_\ell)$ по состояниям $(q_1(t-1),\dots,q_\ell(t-1))$ находим новые состояния $(q_1(t),\dots,q_\ell(t))$, т.к.

$$(q_1(t),\dots,q_\ell(t))=G'(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t),q_1(t-1),\dots,q_\ell(t-1))=G^{(\mu')}(q_1(t-1),\dots,q_\ell(t-1))$$

3. По состояниям $(q_1(t-1),\dots,q_\ell(t-1))=(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и функции φ' находим номер $\lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_{\ell+1})$ функции $F^{(\lambda')}(x_1,\dots,x_n)$

4. При помощи функции $F^{(\lambda')}(x_1,\dots,x_n)$ и входных значений $(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$ находим выходные значения $(\gamma_1(t),\dots,\gamma_m(t))$, а именно: $(\gamma_1(t),\dots,\gamma_m(t))=F'(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t),q_1(t-1),\dots,q_\ell(t-1))=$

$=F'(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t),\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)=F^{(\lambda')}(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$.

Аналогичное вычисление получается на основе автомата Σ''.

Определение. Номера $(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и $(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)$ приписанные одной и той же вершине дерева двумя эквивалентными автоматами называются согласованными.

Замечание. Для двух согласованных номеров $(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и $(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)$ имеют место следующие соотношения

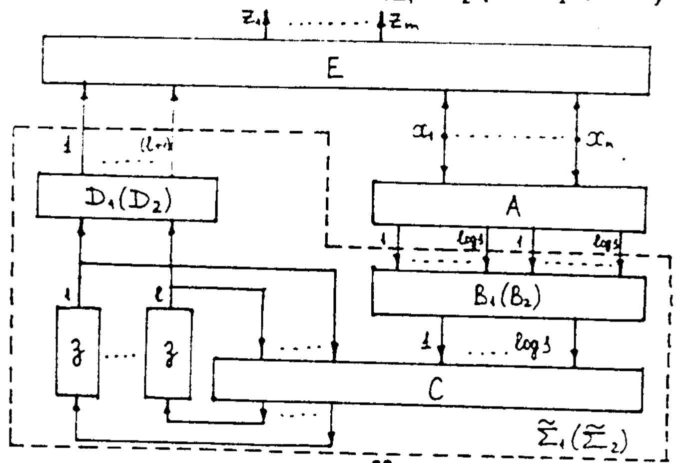
а) если $\lambda'=\varphi'(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и $\lambda''=\varphi''(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)$, то $\lambda'=\lambda''$;

б) если $\mu'=\psi'(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$ и $\mu''=\psi''(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$, то номера $G^{(\mu')}(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и $G^{(\mu'')}(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)$ так же согласованы.

Первое замечание очевидно, второе вытекает из того, что при указанных предположениях мы из некоторой вершины дерева, которой приписаны согласованные номера $(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и $(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)$, смещаемся по ребру $(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t))$ в новую вершину, которой приписаны номера $G^{(\mu')}(\sigma'_1,\dots,\sigma'_\ell)$ и $G^{(\mu'')}(\sigma''_1,\dots,\sigma''_\ell)$.

Теперь можно определить для двух эквивалентных автоматов согласованный канонический вид.

Для этого построим две схемы Σ_1 и Σ_2 (см. черт. 22)



черт. 22

Блоки $A-E$ представляют собой функциональные многополюсники, реализация которых выбрана в канонической форме, определенной для схемы из Ф.Э. Опишем функциональные характеристики блоков. Блок A имеет n входов и $2\log s$ выходов; на первой группе из $\log s$ выходов реализуется функция φ', на второй - φ''.

Блок $B_1(B_2)$ имеет $2\log s$ входов и $\log s$ выходов. Этот блок дает на выходе

а) $(\mu'_1,\dots,\mu'_{\log s})$ (соотв. $(\mu''_1,\dots,\mu''_{\log s})$), если на входе был набор $(\mu'_1,\dots,\mu'_{\log s},\mu''_1,\dots,\mu''_{\log s})$ такой, что $(\mu'_1,\dots,\mu'_{\log s})=\psi'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

и $(\mu''_1,\dots,\mu''_{\log s})=\psi''(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ для некоторого входного набора $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и

б) $(\mu^0_1,\dots,\mu^0_{\log s})=\mu^0$ такой, что $G^{(\mu_0)}(\sigma_1,\dots,\sigma_l)\equiv(\sigma_1,\dots,\sigma_l)$ (тождественное преобразование) – в остальных случаях

Блок C имеет $\log s+l$ входов и l выходов. Этот блок, если на вторую группу из $\log s$ входов подать набор $(\mu_1,\dots,\mu_{\log s})=\mu$, то он реализует (l,l) оператор $G^{(\mu)}(q_1,q_2,\dots,q_l)$.

Блок D_1 (D_2) имеет l входов и $(l+1)$ выход. Он преобразует входной набор $(\sigma'_1,\dots,\sigma'_l)$ (соответственно $(\sigma''_1,\dots,\sigma''_l)$) в значение (набор) $\lambda'=\varphi'(\sigma'_1,\dots,\sigma'_l)$ (соответственно $\lambda''=\varphi''(\sigma''_1,\dots,\sigma''_l)$)

Блок E имеет $(n+l+1)$ вход и m выходов. В случае если на первые $(l+1)$ входов поступает набор $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{l+1})$, то он реализует $F^{(\lambda)}(x_1,\dots,x_n)$ при $\lambda\le\tau_1$ и $\tilde{0}=(0,\dots,0)$ при $\lambda>\tau_1$.

Очевидно, что автоматы Σ_1 и Σ_2 эквивалентны и эквивалентны также автоматам Σ' и Σ''.

Лемма. При помощи конечной полной системы правил преобразований для схем из Ф.Э. в базисе из конъюнктора, дизъюнктора и инвертора можно преобразовать Σ' в Σ_1 (соответственно Σ'' в Σ_2).

Доказательство. Из построения вытекает, что Σ_1 имеет те же самые канонические уравнения, что и Σ'. Откуда следует, что функциональные многополюсники, получающиеся из Σ_1 и Σ' путем удаления элементов задержек, при естественном соответствии возникающих входов и выходов, эквивалентны (их функционирование описывается уравнениями, которые строятся из одних и тех же канонических уравнений с полностью определенными функциями). Остальная часть доказательства очевидна.

Обозначим через $\tilde{\Sigma}_1$ часть схемы Σ_1 (см. черт. 22), образованную из блоков B_1, C и D_1 и через $\tilde{\Sigma}_2$ часть схемы Σ_2 (см. черт. 22), образованную из блоков B_2, C и D_2. Эти подсхемы на указанном чертеже очерчены пунктиром. Схемы $\tilde{\Sigma}_1$ и $\tilde{\Sigma}_2$ имеют $2\log s$ входов и $(l+1)$ выход и естественное соответствие между входами и между выходами.

Лемма. Автоматы $\tilde{\Sigma}_1$ и $\tilde{\Sigma}_2$ эквивалентны.

Доказательство. Автоматы $\tilde{\Sigma}_1$ и $\tilde{\Sigma}_2$ определены так, что при любых входах $(\mu'_1(t),\dots,\mu'_{\log s}(t),\mu''_1(t),\dots,\mu''_{\log s}(t))$, $t=1,2,\dots$ в них вырабатываются согласованные наборы состояний $(\sigma_1(t),\dots,\sigma_l(t))$ (в начальный момент времени имеем наборы из нулей, которые тоже согласованы). Далее многополюсники D_1 и D_2 согласованные наборы

переводят в один и тот же набор $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{l+1})$

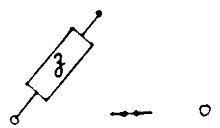
Теорема. (Мурский [15]) Для класса автоматов γ_l над базисом $Б$ и содержащим не более чем l задержек существует конечная полная система тождеств.

Доказательство. Состоит в постепенном построении системы тождеств и доказательстве ее полноты.

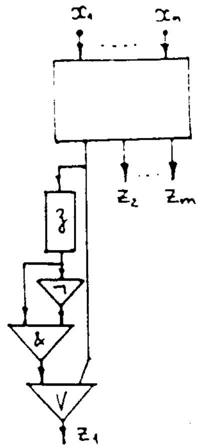
1. В систему тождеств включим конечную полную систему тождеств для схем из Ф.Э., состоящих из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов, что позволяет преобразовать эквивалентные схемы без элементов задержек.

2. Далее присоединим тождество (см. черт. 23). При помощи этого тождества, а также правила VII мы можем любой автомат, содержащий менее l задержек, преобразовать в автомат, содержащий ровно l задержек.

Это наращивание числа задержек может быть сделано путем подключения к выходу автомата цепочки схем вида (см. черт. 24)



черт. 23



черт. 24

Данное "подключение" осуществляется присоединением задержки без выхода (правило черт. 23) и применением правила VII.

Итак можно предполагать, что эквивалентные автоматы Σ' и Σ'' имеют одинаковое число задержек равное l.

3. Лемма позволяет схемы Σ' и Σ'' эквивалентным образом преоб-

разовать к согласованному каноническому виду, т.е. к Σ_1 и Σ_2.
4. Остается построить эквивалентное преобразование Σ_1 в Σ_2. Для этого рассмотрим в Υ_ℓ подмножество автоматов с $2\log_2 s$ входами и $(\ell+1)$ выходами. Разобъем его на конечное число классов: два автомата с указанными параметрами относятся к одному классу тогда и только тогда, когда существует такое соответствие элементов задержек, при котором их канонические уравнения будут иметь эквивалентные правые части (или если из их схем удалить элементы задержек, то полученные схемы из Ф.Э. будут эквивалентными). Очевидно, что число классов не более чем число функциональных многополюсников с $\ell+2\log_2 s$ входами и $2\ell+1$ выходами т.е. $\left(2^{2^{\ell+2\log_2 s}}\right)^{2\ell+1}=2^{(2\ell+1)2^{\ell+2\cdot\ell\cdot 2^\ell}}$. Выберем из каждого класса по одному представителю. Пусть это будут автоматы $\Sigma_1^0, \Sigma_2^0, \ldots, \Sigma_\nu^0$, $\nu \le 2^{(2\ell+1)2^{\ell+2\cdot\ell\cdot 2^\ell}}$. Рассмотрим все пары Σ_i^0, Σ_j^0, которые эквивалентны как автоматы и присоединим к списку тождеств все тождества вида $\Sigma_i^0 \leftrightarrow \Sigma_j^0$ (очевидно конечное число).

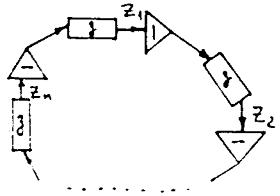
Теперь можно описать процесс преобразования Σ_1 в Σ_2. Схемы Σ_1 и Σ_2 имеют тождественные части, а именно блоки A и E, оставшиеся части-подсхемы $\tilde{\Sigma}_1$ и $\tilde{\Sigma}_2$ по лемме эквивалентны и принадлежат подклассу автоматов с $2\log_2 s$ входами и $(\ell+1)$ выходами. Легко видеть, что существуют такие автоматы Σ_i^0 и Σ_j^0, что $\tilde{\Sigma}_1$ входит в тот же класс эквивалентности что и Σ_i^0, $\tilde{\Sigma}_2$ входит в тот же класс эквивалентности что и Σ_j^0.

Преобразование $\tilde{\Sigma}_1$ в Σ_i^0 осуществляется применением правил для схем из Ф.Э.. $\Sigma_i^0 \sim \Sigma_j^0$, т.к. $\tilde{\Sigma}_1 \sim \tilde{\Sigma}_2$ и потому эта эквивалентность содержится в системе тождеств и Σ_i^0 можно преобразовать в Σ_j^0 применяя правила для схем из Ф.Э. Теорема доказана.
Легко видеть, что данная теорема является обобщением известного факта для схем из функциональных элементов, т.к. при $\ell=0$ мы имеем Υ_0 - класс схем из функциональных элементов. Следует заметить, что сама по себе конечная система тождеств, построенная нами, весьма громоздка даже при $\ell=1$. Поэтому остается неясным насколько возможно эти правила упростить.

Теперь мы перейдем к рассмотрению класса всех автоматов и покажем, что для него не существует конечной полной системы тождеств.

Пусть Σ' - автомат без входов и выходов. Обозначим через

$z_1, \ldots, z_\ell$ - выходы элементов задержки автомата Σ'. Очевидно на этих выходах автомат $\Sigma'(z_1, \ldots, z_\ell)$ будет реализовать периодическую последовательность. Пусть τ' - ее период.
<u>Лемма.</u> Предположим, что в автомате Σ' некий его подавтомат Σ_1, имеющий k задержек заменен на эквивалентный ему автомат Σ_2 $(\Sigma_1 \sim \Sigma_2)$. В результате чего получается автомат Σ''. Тогда, если p - простое число такое, что $p>2^k$ и период τ' автомата Σ' делится на p, то и период τ'' автомата Σ'' делится на p.
Доказательство. Можно считать, что подавтомат Σ_1 содержит задержки с выходами $z_1, \ldots, z_k$. Очевидно, что задержки с выходами $z_{k+1}, \ldots, z_\ell$ принадлежат как автомату Σ' так и Σ''. В силу того, что $\Sigma_2 \sim \Sigma_1$ на выходах $z_{k+1}, \ldots, z_\ell$ в этих автоматах реализуется одна и та же периодическая последовательность с периодом τ_0, причем τ_0 является делителем как τ' так и τ''. Ясно так же, что период автомата Σ' не может быть больше, чем $\tau_0 \cdot 2^k$, т.е. $\tau' \le \tau_0 \cdot 2^k$. Значит τ'/τ_0 - целое число и $\tau'/\tau_0 \le 2^k$ т.к. простое число $p>2^k$, то оно не является делителем τ'/τ_0. С другой стороны по условию леммы τ' делится на p; значит и τ_0 делится на p. Следовательно τ'' также делится на p. Лемма доказана.
<u>Теорема.</u> Для класса автоматов в данном базисе не существует конечной полной системы тождеств.
Доказательство. Рассмотрим семейство автоматов Σ^n $(n=2,3,\ldots)$ без входов и выходов (см. черт. 25)



черт. 25

	0	1	2	...	(n-1)	n
z_1	0	1	1	...	1	0
z_2	0	1	0	...	0	0
z_3	0	0	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
z_{n-1}	0	0	0	...	0	0
z_n	0	0	0	...	1	0

табл. 3

Данные автоматы по определению попарно эквивалентны. На табл. 3 показано как во времени меняются состояния на выходах. Из таблицы видно, что период автомата Σ_n равен n. Предположим, что теорема не верна, т.е. существует конечная полная система тождеств. Обозначим через k суммарное число задержек, встречающееся в тождествах этой системы. Возьмем простое число p такое, что $p>2^k$. Рассмотрим автомат Σ^p. Он реализует на выходах задержек периодическую последовательность с периодом p. В силу доказанной леммы при любой эквивалентной подстановке при помощи тождеств нашей системы мы будем получать автоматы на выходах задержек которых будет реализоваться периодическая последовательность кратная p. Следовательно мы никогда не сможем получить автомат Σ^2, который эквивалентен Σ^p. Получили противоречие. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что, если рассматривать класс автоматов над заданным конечным входным алфавитом $x_1,\dots,x_n$, то для него нет также конечной полной системы тождеств, т.к. он содержит $\{\Sigma^n\}$.

Эта ситуация является новой, ибо для формул в многозначных логиках и для контактных схем в подклассах над конечным алфавитом $x_1,\dots,x_n$ всегда есть конечная полная система тождеств.

Литература

1. Янов Ю.И. Проблемы кибернетики, вып.1, М.: Физматгиз, 1958, с. 75-127.
2. Яблонский С.В. Проблемы кибернетики, вып.2, М.: Физматгиз, 1959, с. 7-38.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику - М.: "Наука", 1979.
4. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies, v. 5, Princeton Univ. Press; Princeton-London, 1941
5. Линдон Р.К. Киб.сборник, № 1, 1960, с. 234-245.
6. Линдон Р.К. Киб.сборник, № 1, 1960, с. 246-248.
7. Вишин В.В. ДАН, 150 (1963), № 4, с. 719.
8. Мурский В.Л. ДАН, 163 (1965), № 4, с. 815-818.
9. Лупанов О.Б. Проблемы кибернетики, вып.7, М.: Физматгиз, 1962, с. 61-115.
10. Горбовицкая Н.А. Проблемы кибернетики, вып.12, М.: "Наука", 1964, с. 5-28.
11. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике. - Труды МИАН СССР, 51, 1958, с. 5-142.
12. Мурский В.Л. Проблемы кибернетики, вып.5, М.: Физматгиз, 1961, с. 61-76.
13. Мурский В.Л. Проблемы кибернетики, вып.15, М.: "Наука", 1965, с. 101-116.

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Методическая разработка
по курсу "Элементы кибернетики"

1986