Методическая разработка. - М., 1991. - 40 с.

Рецензенты:
чл.-корр.АН СССР профессор Лупанов О.Б.
кандидат физико-математических наук, доцент Ложкин С.А.

Надежность управляющих систем - раздел курса, который читался автором в МГУ с 1964 г. сначала как спецкурс, затем как обязательный курс по специальности 0647, а в настоящее время - как обязательный курс "Основы кибернетики" по специальности 01.02.

Повышение надежности управляющих систем является актуальной практической задачей. В теоретическом плане надежность управляющих систем представляет собой отдельное направление в математической кибернетике, которому посвящено большое число статей (см. обзор [12]). Данное пособие содержит изложение некоторых вопросов синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов, а также синтеза самокорректирующихся контактных схем и схем из функциональных элементов. Большинство из рассматриваемых ... уже "классически-ми" ... енствовано.

Введение

Пусть на класс $\mathfrak{U}$ управляющих систем (у.с.) действует источник неисправностей $И$. Под влиянием источника $И$ каждая управляющая система U из класса $\mathfrak{U}$ переходит в у.с. $U_1,\dots,U_r$, где $U_1=U$

$$U \begin{array}{l} \nearrow U_1 \\ \quad \vdots \\ \searrow U_r \end{array}$$

При этом мы считаем, что данное воздействие происходит в момент t и в течение некоторого промежутка времени Δt никаких изменений больше не происходит.

У.с. $U_1,\dots,U_r$ принадлежат классу $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{U}'\supseteq\mathfrak{U}$, т.к. мы считаем, что $U_1=U$

Воздействие источника $И$ на у.с. $U=(\Sigma,f)$ может проявляться в появлении

а) ошибок на входах

б) неисправностей элементов

в) ошибок в соединениях элементов

г) изменений состояний памяти

д) нарушений алгоритма функционирования и т.п.

Случаи а) - г) относятся к случаям, когда источник воздействует на схему Σ . В этой ситуации схема Σ переходит в "неисправные" состояния $\Sigma_1,\dots,\Sigma_r$, включающие в себя и исходное состояние Σ (считая $\Sigma_1=\Sigma$). Пусть этим схемам соответствуют функции $f_1,\dots,f_r$ ($f_1=f$) называемые также функциями неисправностей. Тогда $U_1=(\Sigma_1,f_1),\dots,U_r=(\Sigma_r,f_r)$. В дальнейшем особую роль играют не сами функции $f_1,\dots,f_r$, а классы эквивалентности $g_1,\dots,g_m$, на которые можно разбить эти функции: f_ν и f_μ принадлежат одному классу g тогда и только тогда, когда $f_\nu=f_\mu$ (в качестве g можно взять любого представителя класса эквивалентности). Можно считать, что $g_1=f_1=f$. Таким образом функции $g_1,\dots,g_m$ определяют различные режимы функционирования при воздействии источника

$И$ на схему Σ. Неисправность схемы Σ. Различаем формальную неисправность – такое неисправное состояние Σ_i, что $i>1$ и фактическую неисправность – $f_i \neq f_1$. Очевидно, что при формальной неисправности схема Σ_i может функционировать также как и исправная, для этого необходимо, чтобы $f_i = f_1$, т.е. функция f_i принадлежала классу g_1. Очевидно также, что неисправности f_ν и f_μ, принадлежащие одному классу, неразличимы.

Проблематика надежности у.с. развивается в рамках логико-кибернетического подхода в двух направлениях:

I. Построение надежных схем из ненадежных элементов

2. Синтез самокорректирующихся схем.

Эти направления отличаются способами описания источника $И$. В первом случае источник описывается в вероятностных терминах (вероятностный подход). Во втором случае источник характеризуется ограничениями на возможные функциональные изменения элементов и на число одновременно возможных повреждений элементов (логико-комбинаторный подход).

Проблематика надежности начала складываться в середине 50-х годов нашего столетия. Первыми работами были

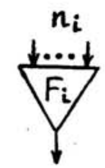
по построению надежных схем из ненадежных элементов: Дж. фон Нейман [I4], Мур и Шеннон [I3] 1956 г.

по синтезу самокорректирующихся схем: Потапов и Яблонский [7] 1960 г.

В дальнейшем существенный вклад в развитие этого направления внесли советские ученые (см. [I2]).

Часть I. Построение надежных схем из ненадежных элементов

Это направление рассматривается здесь для случая, когда $\mathfrak{U}$ – класс схем из функциональных элементов (Ф.Э.). Пусть $U \in \mathfrak{U}$ и $U = (\Sigma, f)$. Тогда схема Σ является соединением элементов $F_i \ (i = 1, \dots)$, принадлежащих некоторому базису $Б$. Каждый элемент F_i (см. черт. 1) является элементарным преобразователем с n_i входами и одним выходом, реализующим некоторую булевскую функцию f_i^0 от n_i переменных.



черт. 1

Для схемы Σ под сложностью $L(\Sigma)$ понимается сумма сложностей $L(F_i)$ элементов, входящих в схему Σ. Наряду с $L(\Sigma)$ рассматривается функция Шеннона $L(n)$

$$L(n) = \max_{f \in P_2^n} \ \min_{\Sigma, \Sigma \text{ реализ } f} L(\Sigma)$$

где P_2^n – множество всех булевских функций от n переменных.

Далее мы будем рассматривать источники $И$, которые воздействуют на элементы схемы независимым образом так, что поврежденный элемент реализует булевскую функцию от тех же переменных:

$$F_i, f_i^0(x_1,\dots,x_{n_i}) \begin{array}{l} \nearrow F_i^{(1)}, f_i^{(1)}(x_1,\dots,x_{n_i}) = f_i^{(0)} \\ \\ \searrow F_i^{(r)}, f_i^{(r)}(x_1,\dots,x_{n_i}) \end{array}$$

Можно считать, что все функции неисправности элементов попарно различны, т.е. $f_i^{(j_1)} \neq f_i^{(j_2)}$ при $j_1 \neq j_2$. Элементы, у которых источник $И$ не вызывает неисправностей, называются абсолютно надежными, остальные – ненадежными. Таким образом базис $Б$ по отношению к источнику $И$ разбивается на две части $Б_1$ – состоящую из абсолютно надежных элементов и $Б_2$ – состоящую из ненадежных элементов, т.е.

$$Б = Б_1 \cup Б_2$$

§ I.I. Вероятностное описание источников помех и повреждений схем.

Существуют различные возможности вероятностного описания повреждений схем и элементов.

Вероятность $\mathcal{P}(\Sigma)$ (фактической) неисправности схемы (элемента) Σ - является важнейшей характеристикой надежности схемы.

Возникает вопрос: известны вероятности повреждения элементов F_i ($F_i \in Б_2$), т.е. величины $p_i = \mathcal{P}(F_i)$, спрашивается, можно ли найти $\mathcal{P}(\Sigma)$? Оказывается, без дополнительной информации, если хотя бы для одного из F_i, $F_i \in Б_2$ число r_i неисправных режимов более или равно 3, то этого сделать в общем случае нельзя. Поэтому при этих же ограничениях набор вероятностей $\{p_i\}$ не является полным описанием источника $И$.

В то же время существует полезная оценка для $\mathcal{P}(\Sigma)$ через величины p_i. Для этого занумеруем все элементы из Σ, принадлежащие $Б_2$, числами $1, 2, \ldots, \ell$ и пусть $\nu(i)$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ указывает тип элемента с номером i.

Теорема 1.

$$\mathcal{P}(\Sigma) \leqslant 1 - \prod_{i=1}^{\ell} (1 - p_{\nu(i)})$$

Доказательство следует из того, что правая часть неравенства есть вероятность формальной неисправности схемы Σ и вероятность фактической неисправности схемы Σ не превосходит вероятности ее формальной неисправности.

Легко видеть, что данное неравенство может быть строгим, т.е. оценка является грубой.

Распределение вероятностей появления для схемы Σ режимов $g_1, \ldots, g_m$, где $g_1 = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $1 \leqslant m \leqslant 2^{2^n}$, определяется указанием вероятностей $q^{(1)}, \ldots, q^{(m)}$ их появления, для которых $\sum_{i=1}^{m} q^{(i)} = 1$. Очевидно, что $\mathcal{P}(\Sigma) = 1 - q^{(1)} = \sum_{i=2}^{m} q^{(i)}$.

Для элементов F_i из $Б_2$ распределение вероятностей имеет вид:

$$\begin{pmatrix} f_i^{(1)}, \ldots, f_i^{(r_i)} \\ p_i^{(1)}, \ldots, p_i^{(r_i)} \end{pmatrix},$$ где

$\sum_{j=1}^{m} p_i^{(j)} = 1$, $f_i^{(1)} = f_i^{\,0}(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $2 \leqslant r_i \leqslant 2^{2^{n_i}}$. Можно также считать, что $p_i^{(j)} > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r_i)$, т.к. иначе можно было бы выбросить функции, для которых вероятность равна 0.

Оказывается, что, зная распределения для элементов F_i из $Б_2$, можно построить распределение для схемы Σ над $Б$, реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Для этого для каждого элемента схемы Σ, принадлежащего $Б_2$, выбирают одну из возможных функций неисправности и вычисляют вероятность этой выборки как произведение вероятностей появления выбранных неисправностей для отдельных элементов. Затем находят режим схемы Σ, соответствующий данному выбору. Эту процедуру проделывают для всевозможных комбинаций выборов. После чего, суммируя все вероятности, соответствующие режиму g_i, находим величину $q^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Отсюда вытекает, что законы распределений вероятностей для базисных элементов из $Б_2$ являются полной характеристикой источника $И$.

Пример. $И_Н$ - неймановский источник, если для каждого F_i из $Б_2$ распределение вероятностей имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_i^{(1)}(x_1, \ldots, x_{n_i}), \ldots, f_i^{(2^{2^{n_i}})}(x_1, \ldots, x_{n_i}) \\ p_i^{(1)}, \quad \ldots, \; p_i^{(2^{2^{n_i}})} \end{pmatrix},$$

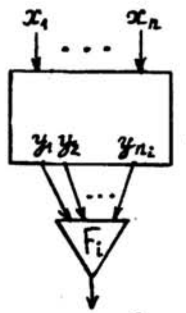
где $f_i^{(1)} = f_i^{\,0}(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $\sum_{j=1}^{2^{2^{n_i}}} p_i^{(j)} = 1$ и $p_i^{(j)} > 0$,

т.е. у ненадежных элементов неймановский источник вызывает всевозможные функциональные повреждения. Обозначим для F_i из $Б_2$ через $p_{min}^{(i)} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 2^{2^{n_i}}} p_i^{(j)}$ и $p_{min} = \min_{i,\, F_i \in Б_2} p_{min}^{(i)}$.

Теорема 2. Для неймановского источника $И_Н$ и $Б_1 = \Lambda$

$$\mathcal{P}(\Sigma) \geqslant p_{min}$$

Доказательство. Пусть выход схемы Σ является выходом элемента F_i. Обозначим входы F_i через $y_1, y_2, \ldots, y_{n_i}$ (см. черт. 2).



черт. 2

Пусть далее $\mathcal{M}_j$ - событие, состоящее в том, что при воздействии источника $И$ на входы $y_1, \ldots, y_{j-1}$, информация поступает без искажений, а на y_j входе есть искажение ($j=1,\ldots,n_i$) и $\mathcal{M}_0$ - событие, при котором на всех входах нет искажений. Очевидно, $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n_i}$ полная система взаимно исключающих событий, т.е.

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}_0) + \mathcal{P}(\mathcal{M}_1) + \ldots + \mathcal{P}(\mathcal{M}_{n_i}) = 1 .$$

Очевидно, что схема Σ будет неисправной, если при осуществлении события

$\mathcal{M}_0$ элемент F_i перейдет в состояние, реализующее $\bar{f}_i^0 = f_i^{j_0}$

$\mathcal{M}_1$ элемент F_i перейдет в состояние, реализующее $y_1 = f_i^{j_1}$

. . . .

$\mathcal{M}_{n_i}$ элемент F_i перейдет в состояние, реализующее $y_{n_i} = f_i^{j_{n_i}}$

Поэтому

$$\mathcal{P}(\Sigma) \geqslant \sum_{k=0}^{n_i} \mathcal{P}(\mathcal{M}_k)\, p_i^{(j_k)} \geqslant \sum_{k=0}^{n_i} \mathcal{P}(\mathcal{M}_k)\, p_{min} = p_{min}$$

Функция $q(x_1, \ldots, x_n)$, задающая вероятность неправильной работы схемы Σ на входных наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0,1\}$ $i = \cancel{1 \ldots n}$. Данная характеристика удобна с практической точки зрения, т.к. она позволяет оценивать надежность работы Σ на входных наборах. В случае, если речь идет о базисных элементах F_i, то соответствующие им функции будем обозначать через $p_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$.

Можно показать, что зная функции $p_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$ для всех базисных элементов F_i из $Б_2$, можно однозначно определить функцию $q(x_1, \ldots, x_n)$ для схемы Σ над $Б$. Для этого постепенно продвигаясь от входов Σ при $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ вычисляем вероятности появления 0 и 1 на выходах элементов пока не достигнем выхода. Вероятность значения $\bar{f}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и есть $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

В силу сказанного, система функций $\{p_i\}$ для базисных элементов из $Б_2$ является полной характеристикой для источника $И$.

Теперь перейдем к рассмотрению связей между

$$\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_m \\ q^{(1)}, & \ldots, & q^{(m)} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q(x_1, \ldots, x_n) .$$

Теорема 3. По распределению $\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_m \\ q^{(1)}, & \ldots, & q^{(m)} \end{pmatrix}$ функция $q(x_1, \ldots, x_n)$ определяется однозначно.

Доказательство. В самом деле, если

а) $g_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, то

$$q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q^{(2)} g_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots + q^{(m)} g_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

б) $g_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$, то

$$q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = q^{(2)} \bar{g}_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots + q^{(m)} \bar{g}_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= q^{(2)}(1 - g_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) + \ldots + q^{(m)}(1 - g_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) =$$

$$= 1 - q^{(1)} - (q^{(2)} g_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots + q^{(m)} g_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$$

Объединяя оба случая, имеем

$$q(x_1,\dots,x_n)=(1-q^{(1)})\,g_1(x_1,\dots,x_n)+$$
$$+\left(q^{(2)}g_2(x_1,\dots,x_n)+\dots q^{(m)}g_m(x_1,\dots,x_n)\right)(1-2g_1(x_1,\dots,x_n))$$

Учитывая тождество для булевских величин u и v

$$u\oplus v=u+v-2uv$$

получим

$$q(x_1,\dots,x_n)=(q^{(2)}g_1+q^{(2)}g_2-2\,q^{(2)}g_1g_2)+\dots$$
$$\dots+(q^{(m)}g_1+q^{(m)}g_m-2\,q^{(m)}g_1g_m)=$$
$$=q^{(2)}(g_1(x_1,\dots,x_n)\oplus g_2(x_1,\dots,x_n))+\dots$$
$$\dots+q^{(m)}(g_1(x_1,\dots,x_n)\oplus g_m(x_1,\dots,x_n))$$

Если осуществить нормировку режимов функционирования, прибавив к функциям $g_1,\dots,g_m$ по $mod\,2$ функцию g_1, то получим $\tilde g_1=g_1\oplus g_1=0$, $\tilde g_2=g_2\oplus g_1,\dots,\tilde g_m=g_m\oplus g_1$ и выражение для $q_1(x_1,\dots,x_n)$ примет вид

$$q(x_1,\dots,x_n)=q^{(2)}\tilde g_2(x_1,\dots,x_n)+\dots+q^{(m)}\tilde g_m(x_1,\dots,x_n)$$

(случай a). В тех случаях, когда важен подсчет вероятностей, можно это делать считая $g_1(x_1,\dots,x_n)=0$.

Про функцию q, получаемую по распределению

$$\begin{pmatrix} g_1,\dots,g_m\\ q^{(1)},\dots,q^{(m)}\end{pmatrix}$$

будем говорить, что она соответствует этому распределению.

Теорема 4. Для каждой функции $q(x_1,\dots,x_n)$, $0\leqslant q(x_1,\dots,x_n)\leqslant 1$ и схемы Σ, реализующей $f(x_1,\dots,x_n)$, можно найти источник $И$ с распределением $\begin{pmatrix} g_1,\dots,g_m\\ q^{(1)},\dots,q^{(m)}\end{pmatrix}$

так, что

1) $g_1(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)$, $g_i\neq g_j$ при $i\neq j$

2) функция $q(x_1,\dots,x_n)$ соответствует распределению

$$\begin{pmatrix} g_1,\dots,g_m\\ q^{(1)},\dots,q^{(m)}\end{pmatrix}$$

Доказательство. Если $q(x_1,\dots,x_n)\equiv 0$, то в качестве источника $И$ надо взять источник не вызывающий в Σ неисправностей - его распределение $\begin{pmatrix} f\\ 1\end{pmatrix}$.

Если $q(x_1,\dots,x_n)\not\equiv 0$, то покажем как строится источник для случая $f\equiv 0$.

Обозначим через $\tilde\alpha^{(1)},\dots,\tilde\alpha^{(m-1)}$ все наборы, на которых $q>0$ и пусть они занумерованы так, что

$$q(\tilde\alpha^{(1)})\leqslant q(\tilde\alpha^{(2)})\leqslant\dots\leqslant q(\tilde\alpha^{(m-1)})$$

Возьмем функции $g_1,\dots,g_m$ согласно табл. 1

	g_1	g_2	g_3	...	g_{m-1}	g_m
$\tilde\alpha^{(1)}$	0	1	0	...	0	0
$\tilde\alpha^{(2)}$	0	1	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
$\tilde\alpha^{(m-2)}$	0	1	1	...	1	0
$\tilde\alpha^{(m-1)}$	0	1	1	...	1	1
на остальных наборах	0	0	0	...	0	0

табл. 1

Вероятности $q^{(1)},\dots,q^{(m)}$ выберем следующим образом

$$q^{(2)} = q(\tilde{\alpha}^{(1)})$$
$$q^{(3)} = q(\tilde{\alpha}^{(2)}) - q(\tilde{\alpha}^{(1)})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q^{(m)} = q(\tilde{\alpha}^{(m-1)}) - q(\tilde{\alpha}^{(m-2)})$$
$$q^{(1)} = 1 - \sum_{i=2}^{m} q^{(i)} = 1 - q(\tilde{\alpha}^{(m-1)})$$

Легко видеть, что построенному распределению вероятностей отвечает исходная функция $q(x_1,\dots,x_n)$:

$$q^{(2)}g_2(x_1,\dots,x_n)+q^{(3)}g_3(x_1,\dots,x_n)+\dots+q^{(m)}g_m(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=q(\tilde{\alpha}^{(1)})g_2+\left(q(\tilde{\alpha}^{(2)})-q(\tilde{\alpha}^{(1)})\right)g_3+\dots+\left(q(\tilde{\alpha}^{(m-1)})-q(\tilde{\alpha}^{(m-2)})\right)g_m=$$
$$=q(\tilde{\alpha}^{(1)})(g_2-g_3)+q(\tilde{\alpha}^{(2)})(g_3-g_4)+\dots+q(\tilde{\alpha}^{(m-2)})(g_{m-1}-g_m)+q(\tilde{\alpha}^{(m-1)})g_m=$$
$$=q(x_1,\dots,x_n)$$

В случае $f\not\equiv 0$, для построения закона распределений нужно вместо $g_1,\dots,g_m$ взять $g_1\oplus f,\dots,g_m\oplus f$, а вероятности оставить прежними. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что выбор распределения по функции $q_1(x_1,\dots,x_n)$ не однозначен.

Пример. Пусть $q(x_1,\dots x_n)\equiv\frac{1}{2}$ и Σ реализует $f(x_1,\dots,x_n)$.

I). Возьмем распределение $\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_{2^{2^n}} \\ \frac{1}{2^{2^n}}, & \dots, & \frac{1}{2^{2^n}} \end{pmatrix}$, где $g_1,\dots,g_{2^{2^n}}$ - все булевские функции от n переменных и $g_1=f(x_1,\dots,x_n)$. Ясно, что на любом наборе $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ половина функций принимает значение 0 и половина - 1. Поэтому ровно в половине случаев будет изменяться значение, т.е. происходит ошибка. Отсюда вероятность ошибки на наборе $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ равна половине.

2). Возьмем распределение $\begin{pmatrix} f & \bar f \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Очевидно, что и в

этом случае ошибка на любом наборе имеет вероятность $\frac{1}{2}$.

Итак, в обоих случаях распределениям соответствует одна и та же функция $q(x_1,\dots,x_n)$.

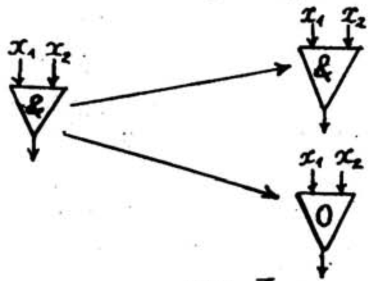
Если рассмотреть распределение $\begin{pmatrix} f(x_1,\dots,x_n) & \bar f(x_1,\dots,x_n) \\ 1-p & p\end{pmatrix}$, то в этом случае $q(x_1,\dots,x_n)\equiv p$ и проходит доказательство теоремы 2. Поэтому для данного источника $\mathcal{P}(\Sigma)\geqslant p$.

§ I.2. Влияние ошибок на надежность схемы.

Появившаяся неисправность элемента в схеме Σ влияет на результат работы других элементов схемы Σ, которые подключены к его выходу, и в конечном счете - на надежность самой схемы. При этом возможны различные эффекты.

I. Эффект нарастания ненадежности.

Рассмотрим базис, состоящий из одного ненадежного элемента конъюнктора, и источник И (см. черт. 3)



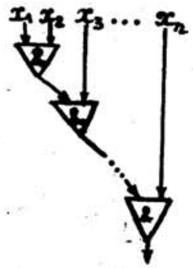
$, f_1 = x_1 \& x_2$

$, f_2 \equiv 0$

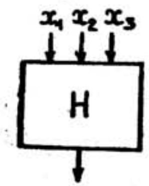
черт. 3

с распределением вероятностей $\begin{pmatrix} \& & ; & 0 \\ 1-p & ; & p\end{pmatrix}$, $0<p<1$.

Очевидно, что схема Σ_n (см. черт. 4) реализует функцию $x_1\&\dots\&x_n$ при отсутствии повреждений.



черт. 4



черт. 5

Мы имеем

$$\mathcal{P}(\Sigma_n) = 1-(1-p)^{n-1}$$

т.к. если хоть один из элементов поврежден, то на наборе $(1,1,\dots,1)$ на выходе получим 0, а не 1. Следовательно при $n\to\infty$ $\mathcal{P}(\Sigma_n)\to 1$, что свидетельствует о нарастании ошибки.

2. В случае базиса $Б=Б_2$ $(Б_1=\Lambda)$, состоящего из одних ненадежных элементов и источника неймановского типа, $\mathcal{P}(\Sigma)\geqslant p_{min}$ (теорема 2), т.е. ненадежность схемы Σ ограничена снизу и поэтому не может быть принципиально сделана сколь угодно малой. Другой вывод состоит в том, что в случае неймановского источника невозможно повысить надежность схемы, не имея абсолютно надежных элементов, т.е. $Б_1\neq\Lambda$.

3. Существование абсолютно надежных элементов, способных повышать надежность.

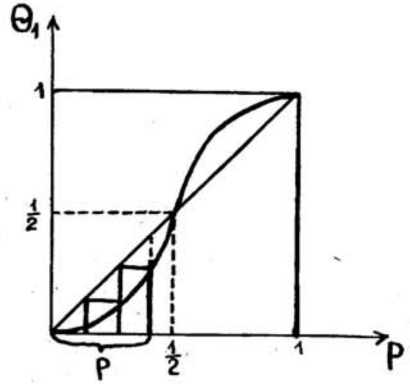
В качестве примера рассмотрим элемент голосования H (или F_h) (см. черт. 5), содержащий три входа и реализующий функцию $h(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$.

Пусть на его входы независимым образом подается одна и та же величина x с вероятностями соответственно p_1, p_2 и p_3 $0\leq p_1,p_2,p_3\leq 1$. Тогда вероятность Θ ошибки на выходе этого элемента (в предположении, что он абсолютно надежен) вычисляется по формуле $\Theta=p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3$. Покажем, что Θ - неубывающая функция по каждому переменному p_1, p_2 и p_3. В силу симметрии достаточно проверить это для первого аргумента. Вычислим

$$\Theta(p_1+\Delta,p_2,p_3)-\Theta(p_1,p_2,p_3)=(p_1+\Delta)p_2+(p_1+\Delta)p_3+p_2p_3-$$
$$-2(p_1+\Delta)p_2p_3-p_1p_2-p_1p_3-p_2p_3+2p_1p_2p_3=$$
$$=\Delta p_2+\Delta p_3-2\Delta p_2p_3\geqslant\Delta(p_2-p_3)^2\geqslant 0,$$

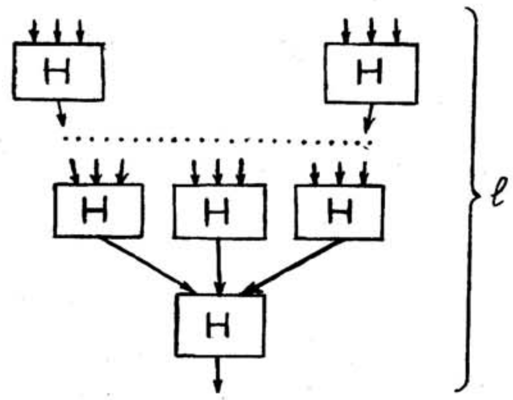
т.к. $\Delta>0$, $p_2\geqslant p_2^2$, $p_3\geqslant p_3^2$

В силу монотонности Θ, если положить $p=max(p_1,p_2,p_3)$, то $\Theta\leqslant 3p^2-2p^3=\Theta_1(p)$. На черт. 6 представлен график функции $\Theta_1(p)$. Из графика видно, что при $p<\frac{1}{2}$ имеет место $\Theta_1(p)<p$, т.е. ошибка на выходе элемента голосования



черт.6

будет меньше максимальной ошибки на входах, и тем самым элемент голосования позволяет увеличивать надежность входного сигнала. Рассмотрим схему (см. черт. 7), представляющую собой дерево с ℓ ярусами, состоящее из элементов H.



черт.7

Если на входы этой схемы подавать независимым образом величину x с вероятностью ошибки, не превосходящей p, то ошибка на выходе - $\Theta_\ell(p)$ - будет вычисляться путем итерации функции $\Theta_1(p)$.

$$\Theta_\ell(p)=\Theta_1(\Theta_{\ell-1}(p))=\ldots=\underbrace{\Theta_1(\Theta_1(\ldots\Theta_1(p)\ldots))}_{\ell \text{ раз}}$$

и из графика на черт. 6 видно, что величина $\Theta_\ell(p)$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом ℓ. Оценка Θ_ℓ через Θ_1 выглядит весьма громоздко. Однако, если наложить более жесткие ограничения на p, например, взять $p<\frac{1}{3}$ или еще лучше $p<\frac{1}{6}$, то формула существенно упростится

$$\Theta_1=3p^2-2p^3<3p^2=\frac{1}{3}(3p)^2$$

Лемма 1. при $p<\frac{1}{6}$

$$\Theta_\ell \leq o\left(\frac{1}{2^{2^\ell}}\right)$$

Доказательство.

$$\Theta_\ell(p)\leq\frac{1}{3}(3\Theta_{\ell-1})^{2^1}\leq(3\Theta_{\ell-2})^{2^2}\leq\ldots\leq\frac{1}{3}(3\Theta_1)^{2^{\ell-1}}\leq\frac{1}{3}(3p)^{2^\ell}$$

при $p<\frac{1}{6}$ имеем $3p<\frac{1}{2}$ и $\Theta_\ell(p)=o\left(\frac{1}{2^{2^\ell}}\right)$ $(\ell\to\infty)$

Возникает вопрос. Задан базис $Б$ и источник $И$. Можно ли для любой булевской функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и любого $\varepsilon>0$ построить схему Σ над $Б$, реализующую $f(x_1,\ldots,x_n)$, такую, что $\mathcal{P}(\Sigma)<\varepsilon$? Эту задачу в дальнейшем мы будем называть задачей о построении сколь угодно надежных схем из ненадежных элементов или просто – задачей о построении надежных схем из ненадежных элементов.

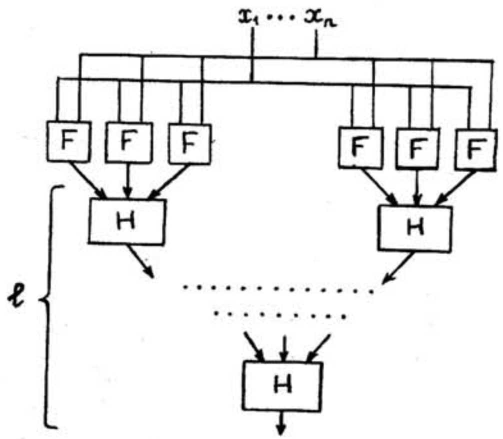
Мы уже сразу можем сказать, что эта задача разрешима не всегда: при определенном выборе базисов и источников $И$ сколь угодно надежных схем построить нельзя.

В 1956 г. Нейманом [14] было показано, правда не совсем в этих терминах, что существует базис и источник $И$, при которых возможно построение сколь угодно надежных схем.

Теорема 5. Пусть $Б=Б_1\cup Б_2$, где $Б_1=\{H\}$, $Б_2=\{F_\neg,F_\&,F_\vee\}$ (H – элемент голосования, $F_\neg$, $F_\&$, $F_\vee$ – инвертор, конъюнктор и дизъюнктор соответственно), а

источник $И$ таков, что $p_1=\mathcal{P}(F_\neg)$, $p_2=\mathcal{P}(F_\&)$, $p_3=\mathcal{P}(F_\vee)$ и $p=max\{p_1,p_2,p_3\}<\frac{1}{2}$. Тогда для любой булевской функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и любого $\varepsilon>0$ можно построить схему Σ_ε над $Б$, реализующую f и такую, что $\mathcal{P}(\Sigma_\varepsilon)<\varepsilon$.

Доказательство. В базисе $Б$ для данной функции f построим схему Σ, реализующую f, не налагая на нее никаких требований о надежности. Пусть $L=L(\Sigma)$ – сложность Σ. Заменим в Σ каждый из элементов $F_\neg$, $F_\&$ и $F_\vee$ на $F_\neg^{(\ell)}$, $F_\&^{(\ell)}$ и $F_\vee^{(\ell)}$ (см. черт. 8, где вместо F надо взять $F_\neg$, $F_\&$, $F_\vee$), а полученную схему обозначим через $\Sigma^{(\ell)}$.



черт. 8

Очевидно, что $F_\neg^{(\ell)}$, $F_\&^{(\ell)}$ и $F_\vee^{(\ell)}$ реализует те же функции, что и $F_\neg$, $F_\&$ и $F_\vee$, а поэтому схема $\Sigma^{(\ell)}$ тоже реализует функцию f.

Выберем $\ell=\ell_\varepsilon$ таким, чтобы $\mathcal{P}(F_\neg^{(\ell)})$, $\mathcal{P}(F_\&^{(\ell)})$ и $\mathcal{P}(F_\vee^{(\ell)})\leq\frac{\varepsilon}{L}$, а построенную таким образом схему $\Sigma^{(\ell)}$ обозначим через Σ_ε. Эта схема реализует функцию f и для нее

$$\mathcal{P}(\Sigma_\varepsilon)\leq max\{\mathcal{P}(F_\neg^{(\ell)}),\mathcal{P}(F_\&^{(\ell)}),\mathcal{P}(F_\vee^{(\ell)})\}\cdot L\leq\varepsilon$$

Теорема доказана.

Замечание. Легко видеть, что схема Σ_ε намного сложнее схемы Σ.

В самом деле, при замене элемента F на $F^{(\ell)}$ при подсчете сложности схемы вместо $L(F)$ надо взять величину $L(F^{(\ell)})$, которая может быть найдена на основе черт. 7, 8:

$$L(F^{(\ell)}) = 3^\ell L(F) + (1+3+\ldots+3^{\ell-1})L(H) =$$
$$= 3^\ell L(F) + \frac{3^\ell-1}{2} L(H)$$

Если сложность L обозначает число элементов, т.е. сложность каждого элемента базиса равна I, то:

$$L(F^{(\ell)}) = \frac{3^{\ell+1}-1}{2} \sim \frac{3^{\ell+1}}{2} \quad (\ell \to \infty)$$

Теперь немного подробнее рассмотрим зависимость возможности построения сколь угодно надежных схем для произвольных булевских функций от выбора базиса и источника помех.

Здесь наиболее полный результат получен в 1975 г. В.В.Тарасовым [8,9] для источников $И$, которые для всех ненадежных элементов F_i из $Б_2$ имеют функции $p_i(x_1,\ldots,x_{n_i})$ - определяющие вероятность неправильной работы элемента на каждом входном наборе, такие, что $0 < \eta < p_i(x_1,\ldots,x_{n_i}) < 1-\eta$ (в частности - для неймановских источников). Упомянутый результат характеризует необходимые и достаточные условия на базис $Б = Б_1 \cup Б_2$, при которых для любой булевской функции возможно построение сколь угодно надежных схем. Эти условия не очень сложны, однако, требуют введения ряда новых понятий, поэтому здесь не формулируются.

В то же время для произвольных источников $И$ можно дать следующий критерий.

Теорема 6. Для того, чтобы в базисе $Б$ с источником $И$ для любой булевской функции можно было построить сколь угодно надежную схему необходимо и достаточно, чтобы можно было бы построить сколь угодно надежную схему для каждой функции некоторой полной системы.

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна. Для установления достаточности условия рассмотрим некоторую полную систему $\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell$, все функции которой допускают

сколь угодно надежную реализацию в базисе $Б$.

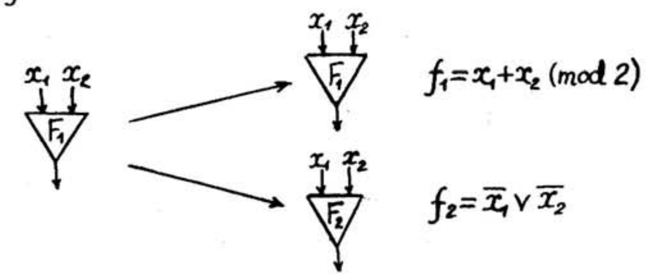
Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ - произвольная булевская функция и $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Рассмотрим реализацию f в базисе $\{F_{\varphi_1},\ldots,F_{\varphi_\ell}\} = Б'$. Соответствующую схему обозначим через Σ, а через $L(\Sigma)$ - число элементов в ней. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{L(\Sigma)}$ и построим реализации функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_\ell$ в базисе $Б$ с ненадежностью не превосходящей δ. Если теперь в схеме Σ заменить элементы $F_{\varphi_1},\ldots,F_{\varphi_\ell}$ через указанные реализации, то получим схему Σ^ε и

$$\mathcal{P}(\Sigma^\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{L(\Sigma)} \cdot L(\Sigma) = \varepsilon$$

Утверждение доказано.

Замечание. Данная теорема представляет собой обобщение теоремы Неймана (теорема 5).

Пример [8] Пусть $Б = Б_2 = \{F_1\}$, где F_1 - элемент, реализующий в исправном состоянии функцию $f = x_1 + x_2 \pmod 2$. Пусть далее $И$ источник, действующий на F_1, так как указано на черт. 9

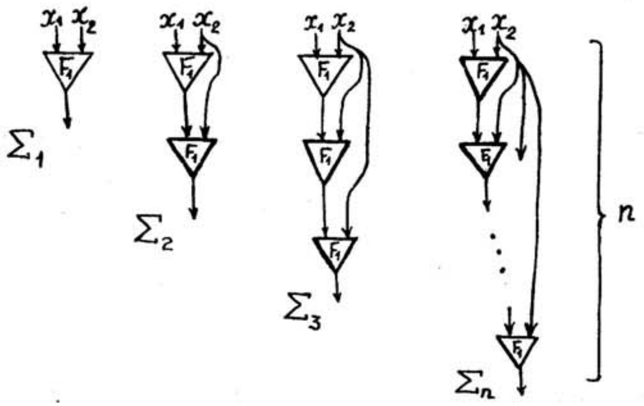


черт. 9

с распределением вероятностей

$$\begin{pmatrix} f_1 & , & f_2 \\ 1-p & , & p \end{pmatrix}, \quad 0 < p < \frac{1}{2}$$

Функции f_1 и f_2 совпадают на всех наборах кроме $(0,0)$. Это позволяет легко найти функции, реализуемые схемами Σ_n (см. черт. 10) и их вероятностные параметры.



черт. 10

Для наглядности эти вычисления сведены в табл. 2 и табл. 3 :

Σ_{2i}	$x_1 \backslash x_2$	0	1
	0	0/1	0
	1	1	1

Σ_{2i+1}	$x_1 \backslash x_2$	0	1
	0	0/1	1
	1	1	0

табл. 2

	$x_1\ x_2$	0	
Σ_1	0 0	$1-p$	p
Σ_2	0 0	$(1-p)^2$	$p+(1-p)p$
Σ_3	0 0	$(1-p)^3$	$p+(1-p)p+(1-p)^2p$
...	...	.....	....
Σ_{2i}	0 0	$(1-p)^{2i}$	$p+(1-p)p+\ldots+(1-p)^{2i-1}p$
Σ_{2i+1}	0 0	$(1-p)^{2i+1}$	$p+(1-p)p+\ldots+(1-p)^{2i}p$

табл. 3

Отсюда видно, что $\{\Sigma_{2i+1}\}$ реализует функцию Шеффера $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ сколь угодно надежно при $0<p<1$. В силу предыдущей теоремы исходный базис позволяет реализовывать любую булевскую функцию сколь угодно надежным образом. При этом следует обратить внимание на то, что

I. Базис $Б$ состоит только из ненадежных элементов;
2. Базис $Б$ в исправном состоянии не является полным;
3. Наличие источника неисправностей иногда может давать дополнительные возможности для реализации булевских функций.

§ I.3. Синтез схем из функциональных элементов в базисе $Б=\{F_\neg, F_\&, F_\vee, F_h\}$

Обсуждая вопрос о построении сколь угодно надежных схем, мы никак не касались вопросов сложности. Наша дальнейшая задача - изучение сложности минимальных схем, для которых $\mathcal{P}(\Sigma)<\varepsilon$, и методов их построения. Наши рассмотрения будут происходить в конкретном классе схем из функциональных элементов, а именно, в классе схем из Ф.Э. над базисом $Б=Б_1 \cup Б_2$, где $Б_1=\{F_h\}$ и $Б_2=\{F_\neg, F_\&, F_\vee\}$. Для решения вышеуказанных задач необходимо уметь строить достаточно простые схемы из Ф.Э. в базисе $Б=\{F_\neg, F_\&, F_\vee, F_h\}$ без требования надежности. Последнее можно осуществить, опираясь на общий результат Лупанова [4], касающийся синтеза схем из Ф.Э. в произвольном конечном базисе. Однако, с практической точки зрения выгодно иметь прямой способ синтеза в указанном базисе, использующий специальные разложения функций через базисные операции $\{\neg, \&, \vee, h\}$ [см. 11].

Данный параграф начнем с формулировки и доказательства двух вспомогательных утверждений (лемм).

Будем рассматривать ориентированные от корня деревья. В них будем различать концевые вершины и вершины внутренние, не являющиеся концевыми. Совокупность ребер, исходящих из внутренней вершины, называется полузвездой. Ориентированное дерево называется однородным порядка k, если все его полузвезды имеют порядок k, кроме, быть может, одной - особой полузвезды, имеющей порядок k', где $1<k'<k$.

Пусть $q>1$, $k=3$ и пусть $\lambda=[\log_3 q]$. Построим дерево $\mathcal{D}$, удовлетворяющее следующим свойствам.

$\lambda = [\log_3 q]$

I. $\mathcal{D}$ - однородное дерево порядка 3 .
2. В $\mathcal{D}$ все ярусы от 1 до λ заполнены полностью.

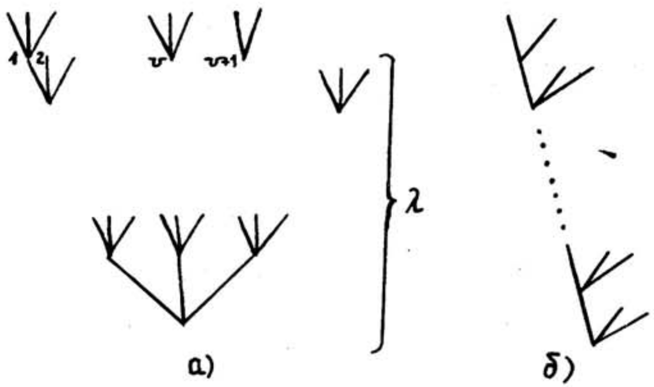
При $\lambda < \log_3 q$ $\lambda+1$ - ярус заполнен частично и так, что сначала идут полузвезды порядка 3 , затем, возможно, особая полузвезда порядка 2 .

3. Общее число концевых вершин $\mathcal{D}$ равно q .

В силу $3^{\lambda} \leq q < 3^{\lambda+1}$. Для построения требуемого дерева $\mathcal{D}$, берем дерево с λ ярусами, в котором из каждой внутренней вершины исходит ровно три ребра (случай $1<q<3$ очевиден). В этом дереве ровно 3^{λ} концевых вершин и, если $q=3^{\lambda}$, то процесс построения окончен. Если же $3^{\lambda+1}>q>3^{\lambda}$, то рассмотрим равенство

$$q-3^{\lambda}=2v+w \ , \ w=0,1 \qquad (*)$$

К первым v концевым вершинам λ - яруса этого дерева пристраиваем полузвезды порядка 3 , а если $w=1$, то к $(v+1)$-й концевой вершине - полузвезду порядка 2 (см. черт. $11a$).



черт.11

Очевидно, что построенное дерево удовлетворяет п.п. $1-3$ и в силу равенства $(*)$ имеет q концевых вершин, т.к. при пристройке полузвезды одна концевая вершина уничтожается, а добавляется столько вершин, сколько содержится концевых вершин в полузвезде.

Лемма 2. Дерево $\mathcal{D}$, удовлетворяющее п.п. $1-3$, содержит $[q/2]$ внутренних вершин.

Доказательство. Основано на преобразовании дерева $\mathcal{D}$ в дерево $\mathcal{D}'$ (см. черт $11б$) путем постепенного перемещения внешних полузвезд. При каждом таком перемещении некоторая внешняя полузвезда сначала отрезается от дерева и при этом возникает новая концевая вершина; затем эта полузвезда прикрепляется своим центром к другой концевой вершине, которая перестает быть концевой. Таким образом, на каждом шаге преобразования число концевых вершин, число внутренних вершин и число ребер не меняются. В дереве $\mathcal{D}'$, очевидно, $[q/2]$ внутренних вершин.

В дереве $\mathcal{D}$ пронумеруем концевые вершины числами от 1 до q и для каждой концевой вершины j выберем поддерево $\mathcal{D}_j$ так, что

(I). $\mathcal{D}_j$ и $\mathcal{D}$ имеют общий корень;
(2). $\mathcal{D}_j$ содержит вершину j ;
(3). Концевые вершины $\mathcal{D}_j$ являются концевыми вершинами $\mathcal{D}$.
(4). Каждая внутренняя вершина дерева $\mathcal{D}_j$ имеет порядок полузвезды равный 2 .

Очевидно, что $\mathcal{D}_j$ с каждой полузвездой дерева $\mathcal{D}$ либо не имеет общих ребер, либо имеет ровно два.

Пусть булевская функция $f(x_1,\dots,x_n)$ задана при помощи табл. 4 , где

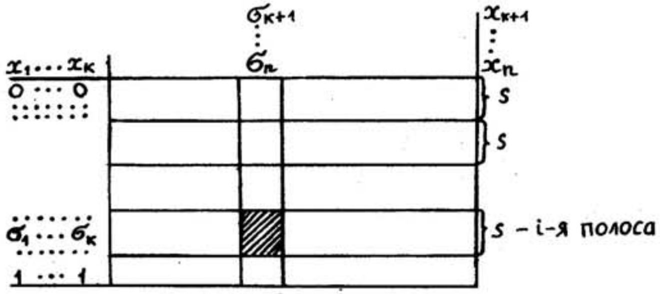


табл. 4

значение $f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$ стоит на пересечении строки $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ и столбца $(\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$. Строки таблицы разделим на полосы ширины s (кроме, быть может, последней, которая содержит s' строк, $s' \leq s$. Пусть q - число полос. Очевидно $q =]\frac{2^k}{s}[$. Занумеруем полосы сверху вниз числами $1,\dots,q$. Обозначим через $\Psi_i(x_1,\dots,x_k)$ характеристическую функцию i -ой полосы. Очевидно, что функция

$$g^i_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k)=\Psi_i(x_1,\dots,x_k)\,f(x_1,\dots,x_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$$

определяется пересечением i -ой полосы таблицы со столбцом $(\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$, т.е. определяет "короткий" столбец таблицы (заштриховано в таблице).

Положим далее

$$G^i_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k)=g^i_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k)\vee\bigvee_{j\in\Xi_i}\Psi_j(x_1,\dots,x_k)$$

где множество Ξ_i включает те и только те числа j, для которых дерево $\mathcal{D}_j\ (j\neq i)$ содержит вершину i. Функция $G^i_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k)$ определяет "удлиненный" столбец, состоящий из короткого столбца $g^i_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}$ и единичных столбцов некоторых полос (определяются множеством Ξ_i).

Сопоставим дереву $\mathcal{D}$ функцию $H(z_1,\dots,z_q)$, считая, что каждой полузвезде порядка 3 соответствует функция $h(u,v,w)$, полузвезде порядка 2 — $h(u,v,0)$, а концевым вершинам $1,\dots,q$ — переменные $z_1,\dots,z_q$.

Лемма 3.

$$f(x_1,\dots,x_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)=H(G^1_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k),\dots,G^q_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k))$$

Доказательство. Пусть $x_1=\sigma_1,\dots,x_k=\sigma_k$; найдем значения функций

$$G^1_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(\sigma_1,\dots,\sigma_k),\dots,G^q_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$$

Предположим, что $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ лежит в i -ой полосе. Тогда

$$g^\nu_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(\sigma_1,\dots,\sigma_k)=\begin{cases}f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) & \text{при } \nu=i\\ 0 & \text{при } \nu\neq i\end{cases}$$

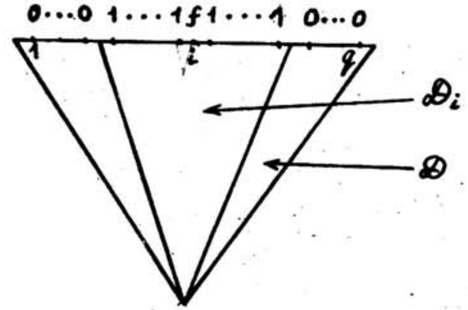
$$\Psi_j(\sigma_1,\dots,\sigma_k)=\begin{cases}1 & \text{при } j=i\\ 0 & \text{при } j\neq i\end{cases}$$

$$G^\nu_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(\sigma_1,\dots,\sigma_k)=\begin{cases}f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) & \text{при } \nu=i\\ 1 & \text{при } \nu\neq i,\ i\in\Xi_\nu\\ 0 & \text{при } \nu\neq i,\ i\notin\Xi_\nu\end{cases}$$

В последнем выражении условия $i\in\Xi_\nu$, $i\notin\Xi_\nu$ эквивалентны соответственно $\nu\in\mathcal{D}_i$, $\nu\notin\mathcal{D}_i$. Таким образом, при $x_1=\sigma_1,\dots,x_k=\sigma_k$ имеет место равенство

$$H(G^1_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(\sigma_1,\dots,\sigma_k),\dots,G^q_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(\sigma_1,\dots,\sigma_k))=H(\gamma_1,\dots,\gamma_q)$$

где набор $(\gamma_1,\dots,\gamma_q)$ на входах соответствующих концевым вершинам из $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_i$ дает 0, а на входах соответствующих концевым вершинам дерева $\mathcal{D}_i$ дает всюду 1, кроме входа с номером i, на который поступает $f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ (см. черт. 12)



черт. 12

Из чертежа видно, что спускаясь по дереву голосование дает на выходе значение $f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, т.е.

$$H(\gamma_1,\dots,\gamma_q)=f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$$

Лемма доказана.

Пусть Σ - схема из Ф.Э. в базисе Б. Обозначим через $L_{Б}^{\neg,\&,\vee}(\Sigma)$ и $L_{Б}^{h}(\Sigma)$ соответственно число элементов $F_\neg$, $F_\&$, $F_\vee$ и число элементов F_h в схеме Σ.

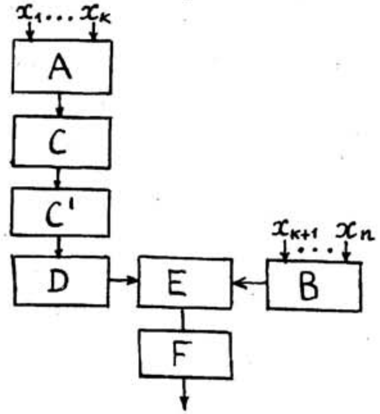
Теорема 7. Для любого натурального m, где $m=m(n)$ и $m(n)=o\left(\frac{n}{\log n}\right)$ существует алгоритм, который для каждой булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ строит схему $\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}$ над базисом Б так, что

$$L_{Б}\left(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}\right) \lesssim \frac{1}{2}\,\frac{2^n}{n}$$

и

$$\frac{L_{Б}^{\neg,\&,\vee}\left(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}\right)}{L_{Б}^{h}\left(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}\right)} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

Доказательство. Искомую схему Σ_f будем строить из блоков A, B, C, C', D, E и F с учетом табл. 4 так, как это указано на черт. 13.



черт. 13

Блок A реализует все конъюнкции $x_1^{\sigma_1}\dots x_k^{\sigma_k}$; $L_{Б}(A)\leq k+k\,2^k$.
Блок B реализует все конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}\dots x_n^{\sigma_n}$; $L_{Б}(B)\leq (n-k)+(n-k)\,2^{n-k}$.
Блок C реализует в виде совершенной д.н.ф. все "короткие" столбцы и функции Ψ_j; $L_{Б}(C)\leq s\,q\,2^s$.
Блок C' реализует с помощью дизъюнкторов все "удлиненные" столбцы

$$L_{Б}(C')\leq \sum_{i=1}^{q} t(i)\,|\Xi_i| \leq 2^s \sum_{i=1}^{q} |\Xi_i| \leq 2^s q^{s/2}$$

где $t(i)$ - число различных столбцов в i-ой полосе и отдельное слагаемое $t(i)|\Xi_i|$ оценивает число дизъюнкторов необходимое для получения "удлиненных" столбцов, исходя из "коротких" столбцов i-ой полосы.
Блок D реализует все функции $f(x_1,\dots,x_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$, исходя из формул

$$H\left(G^1_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k),\dots,G^q_{\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n}(x_1,\dots,x_k)\right)$$

Для этого требуется $[q/2]$ элементов F_h на каждую формулу и, быть может, нужно реализовать 0 (что требует два элемента)

$$L_{Б}(D)=[q/2]\,2^{n-k}+\Delta \qquad (\Delta=0 \text{ или } 2)$$

Блок E реализует функции вида $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}\dots x_n^{\sigma_n} f(x_1,\dots,x_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$

$$L_{Б}(E)\leq 2^{n-k}$$

Блок F реализует функцию $f(x_1,\dots,x_n)$; $L_{Б}(F)\leq 2^{n-k}$

Положим далее
$k=[(m+3)\log_2 n]$ и $s=[n-(3m+6)\log_2 n]$
Мы имеем

$$L_Б(A) \leq (m+3)\log_2 n \cdot n^{m+3} = \frac{2^n}{n^{m+1}} \frac{2^{o(n)}}{2^n} = o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L_Б(B) \lesssim \frac{2n \cdot 2^n}{n^{m+3}} = o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L_Б(C) \lesssim 2^{s+k} \leq 2^{n-(2m+3)\log_2 n} \sim \frac{2^n}{n^{2m+3}} = o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L_Б(C') \lesssim \frac{2^{s+2k}}{s^2} \lesssim \frac{2^{n-m\log_2 n}}{n^2} = \frac{2^n}{n^{m+2}} = o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L_Б(D) \sim L_Б^h(\Sigma_n) \sim \frac{2^n}{2 \cdot s} \sim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

$$L_Б(E) \lesssim L_Б(B) = o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

$$L_Б(F) \lesssim L_Б(B) = o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)$$

Отсюда

$$L_Б(n) \leq L_Б(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}) \sim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

и

$$\frac{L_Б^{\neg,\&,\vee}(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)})}{L_Б^h(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)})} = \frac{o\left(\frac{2^n}{n^{m+1}}\right)}{\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

Как установлено в [4] нижняя оценка для $L_Б(n)$ имеет вид

$$L_Б(n) \gtrsim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

Поэтому

$$L_Б(n) \sim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

§ I.4. Асимптотически оптимальный метод построения надежных схем из ненадежных элементов.

В этом параграфе рассматриваются схемы из Ф.Э. в базисе $Б_P = Б_1 \cup Б_2$, где $Б_1 = \{F_h\}$, $Б_2 = \{F_\neg, F_\&, F_\vee\}$ и $P = \max\{\mathcal{P}(F_\neg), \mathcal{P}(F_\&), \mathcal{P}(F_\vee)\}$ $(0 < P < \frac{1}{2})$.

Пусть $\varepsilon > 0$ некоторое число. Обозначим через γ^ε – класс всех схем Σ в базисе $Б_P$ таких, что $\mathcal{P}(\Sigma) < \varepsilon$. В силу теоремы 5 γ^ε содержит схемы реализующие любые булевские функции.

Пусть далее

$$L_{Б_P}(f,\varepsilon) = \min_{\substack{\Sigma \\ \Sigma \text{ реализ } f \\ \mathcal{P}(\Sigma) < \varepsilon}} L_{Б_P}(\Sigma)$$

и

$$L_{Б_P}(n,\varepsilon) = \max_{f, f \in P_2^n} L_{Б_P}(f,\varepsilon)$$

Очевидно, $L_{Б_P}(n,\varepsilon)$ – функция Шеннона, характеризующая сложность реализации булевских функций от n переменных в классе γ^ε.

<u>Теорема 8.</u> Существует алгоритм, который для каждой булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ строит схему $\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}$ из γ^ε такую, что

1) $L_{Б_P}(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}) \lesssim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ и при $n > N(\varepsilon)$ $\mathcal{P}(\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}) < \varepsilon$, т.е. $\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)} \in \gamma^\varepsilon$

Доказательство. I. Положив $m = 2$, построим в соответствии с теоремой 7 последовательность $\{\Sigma'_{f(x_1,\dots,x_n)}\}$ схем над базисом Б , для которой

$$L_{Б}\left(\Sigma'_{f(x_1,\dots,x_n)}\right)\sim\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

и

$$\frac{L^{\neg,\&,\vee}\left(\Sigma'_{f(x_1,\dots,x_n)}\right)}{L^{h}_{Б}\left(\Sigma'_{f(x_1,\dots,x_n)}\right)}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. Как в доказательстве теоремы 5 построим элементы $\widetilde{F}_{\neg}=F_{\neg}^{(\ell)}$, $\widetilde{F}_{\&}=F_{\&}^{(\ell)}$ и $\widetilde{F}_{\vee}=F_{\vee}^{(\ell)}$ из элементов базиса $Б_p$ так, чтобы

$$\max\{\mathcal{P}(\widetilde{F}_{\neg}),\mathcal{P}(\widetilde{F}_{\&}),\mathcal{P}(\widetilde{F}_{\vee})\}<\frac{1}{6}$$

Обозначим через

$$c=\max\{L_{Б_p}(\widetilde{F}_{\neg}),L_{Б_p}(\widetilde{F}_{\&}),L_{Б_p}(\widetilde{F}_{\vee})\}$$

3. Для каждой схемы F рассмотрим схему(см.черт.8) $\Sigma_F^{(\ell)}$, содержащую ℓ ярусов элементов голосования, где $\ell=]\log_2 n[$. Она, очевидно, в исправном состоянии реализует ту же функцию, что и F .

Взяв в качестве F соответственно $\widetilde{F}_{\neg}$, $\widetilde{F}_{\&}$, $\widetilde{F}_{\vee}$ получим схемы $\Sigma_{\neg}$, $\Sigma_{\&}$, $\Sigma_{\vee}$. В этом случае

$$L_{Б_p}(\Sigma_F)\leq c3^{\ell}+\frac{1}{2}3^{\ell}\leq(c+1)3^{\ell}\leq 3(c+1)n^{\log_2 3}\leq 3(c+1)n^2$$

4. Заменим в схеме $\Sigma'_{f(x_1,\dots,x_n)}$ элементы $F_{\neg}$, $F_{\&}$, $F_{\vee}$ соответственно на $\Sigma_{\neg}$, $\Sigma_{\&}$, $\Sigma_{\vee}$, получим схему $\Sigma_{f(x_1,\dots,x_n)}$ над $Б_p$. Очевидно,

$$L_{Б_p}(\Sigma_f)\leq L^{h}_{Б}(\Sigma'_f)+L^{\neg,\&,\vee}_{Б}(\Sigma'_f)\cdot\max\{L_{Б_p}(\Sigma_{\neg}),L_{Б_p}(\Sigma_{\&}),L_{Б_p}(\Sigma_{\vee})\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}+3(c+1)n^2\cdot o\left(\frac{2^n}{n^3}\right)\sim\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

$$\mathcal{P}(\Sigma_f)\leq L^{\neg,\&,\vee}_{Б}(\Sigma'_f)\cdot\max\{\mathcal{P}(\Sigma_{\neg}),\mathcal{P}(\Sigma_{\&}),\mathcal{P}(\Sigma_{\vee})\}=$$

$$=o\left(\frac{2^n}{n^3}\right)\cdot o\left(\frac{1}{2^{2^\ell}}\right)=o\left(\frac{2^n}{n^3}\right)o\left(\frac{1}{2^n}\right)=o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

поскольку $\ell\geq\log_2 n$, т.е. $2^{\ell}\geq n$ и $o\left(\frac{1}{2^{2^\ell}}\right)=o\left(\frac{1}{2^n}\right)$
Отсюда для любого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$ $\mathcal{P}(\Sigma_f)<\varepsilon$.

Теорема доказана.

Следствие. В силу того, что $L_{Б_p}(n,\varepsilon)\geq L_{Б}(n)$ и предыдущего результата

$$L_{Б_p}(n,\varepsilon)\sim\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

Из свойств нижней оценки и данной асимптотики вытекает также, что при фиксированном $\varepsilon>0$ для почти всех булевских функций минимальная ε - надежная схема имеет сложность асимптотически равную $\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$, т.е. сложности минимальной схемы без требования надежности. Для указанного класса функции удается достичь надежной реализации без существенного усложнения схемы.

Часть II. Синтез самокорректирующихся схем

Пусть $\mathcal{U}$ - класс управляющих систем и $И$ - источник неисправностей. Возьмем у.с. $U\in\mathcal{U}$, где $U=(\Sigma,f)$. Обозначим через $f_1,\dots,f_r$ $(f_1=f)$ - функции неисправностей, вызываемые источником $И$.

Определение. Схема Σ называется самокорректирующейся (относительно источника $И$), если для любого $i=1,2,\dots,r$

$$f_i\equiv f$$

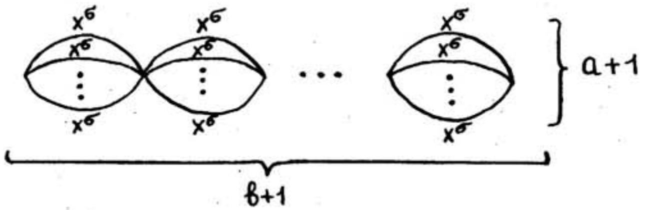
Естественно возникает вопрос о существовании самокорректирующихся схем, о методах их построения, об изучении их сложности. Данные вопросы мы рассмотрим для двух классов у.с. - контактных схем и схем Ф.Э.

§ 2.1. Построение самокорректирующихся контактных схем.

В этом случае обычно рассматривают в качестве источника неисправностей - источник $И_{a,b}$, вызывающий в контактной схеме не более a разрывов и b коротких замыканий контактов, понимая под разрывом (замыканием) контакта x^{σ} приписывание соответствующему ребру символа 0 (соответственно 1).

При наличии источника $И_{a,b}$ класс $\mathcal{U}$ расширяется до класса $\mathcal{U}'$, в котором схемы получаются из P - полюсных сетей путем приписывания ребрам символов из алфавита $\{x_1,\dots,x_n, \bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,0,1\}$. Функционирование доопределяется естественным образом.

Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ реализована контактной схемой Σ. Заменим в ней каждый контакт x^σ на схему (см.черт.14)



черт. 14

Полученную схему обозначим через Σ^c. Очевидно Σ^c реализует ту же функцию $f(x_1,\dots,x_n)$, является самокорректирующейся схемой относительно источника $И_{a,b}$ и имеет сложность $L(\Sigma^c)=(a+1)(b+1)L(\Sigma)$*), т.е. в $(a+1)(b+1)$ большую, чем сложность Σ.

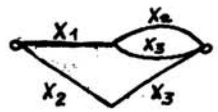
Найденное решение вряд ли можно считать корректным: самокорректирующаяся схема построена за счет усложнения исходной схемы в несколько раз. Можно было бы считать решение корректным, если бы усложнение схемы Σ было бы малым по сравнению с $L(\Sigma)$ (при $n\to\infty$). В дальнейшем приведенное решение будем называть тривиальным. Обозначим через $L_{a,b}(f)$ - сложность минимальной самокорректирующейся схемы, реализующей f.

Существуют функции, для которых тривиальные самокорректирующиеся схемы будут минимальными самокорректирующимися схемами. К ним относится, например, функция $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$. В связи с этим возникает вопрос, а существуют ли нетривиальные самокорректирующиеся схемы ? Рассмотрим пример.

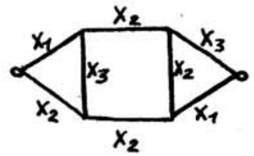
---

*) Сложностью $L(\Sigma)$ контактной схемы называется число контактов в Σ.

Пример. Функция $h(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$ может быть реализована схемой Σ (см. черт. 15), имеющей 5 контактов. В то же время для нее существует самокорректирующаяся схема, относительно $И_{0,1}$, содержащая 8 контактов (см. черт. 16)[1]



черт. 15



черт. 16

Отсюда видно, что нетривиальные самокорректирующиеся схемы существуют. Поэтому имеет смысл изучать величину $L_{a,b}(f)$ - сложность минимальных самокорректирующихся, относительно $И_{a,b}$, схем, реализующих функцию f, а также соответствующую функцию Шеннона - $L_{a,b}(n)$. Очевидно, $L_{a,b}(n)\geqslant L(n)$, т.е. $L_{a,b}(n)\gtrsim\frac{2^n}{n}$. Далее будем исследовать вопрос о построении самокорректирующихся контактных схем для случая простейших источников $И_{0,1}$ и $И_{1,0}$.

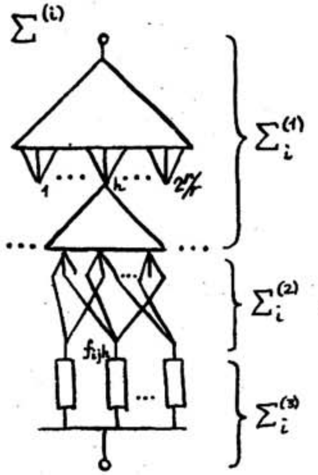
<u>Теорема 9.</u> (Потапов Ю.Г. Яблонский С.В. [7]) Существует метод синтеза, позволяющий для каждой булевской функции $f(x_1,\dots,x_n)$ строить самокорректирующуюся, относительно $И_{0,1}$, схему Σ_f^c такую, что

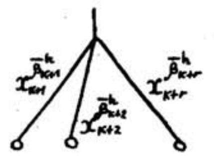
$$L\left(\Sigma^c_{f(x_1,\dots,x_n)}\right)\lesssim\frac{2^n}{n}$$

Доказательство. I. Исходя из разложений

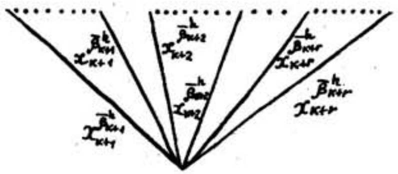
$$f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{p} f_i(x_1,\dots,x_n) \quad \text{и} \quad f_i(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{j=1}^{t(i)}\bigvee_{h=1}^{2^k} f_{ij}^{(h)}(x_1,\dots,x_k)\, f_{ijh}(x_{k+1},\dots,x_n)$$

по методу Лупанова [5] находим схему Σ, являющуюся параллельным соединением схем Σ_i, реализующих f_i, для всех $i=1,\dots,p$. Схема Σ_i разбивается на три части $\Sigma_i^{(1)}$, $\Sigma_i^{(2)}$ и $\Sigma_i^{(3)}$ (см. черт. 17). Часть $\Sigma_i^{(2)}$ состоит из метелок, тип которых определяется центром соответствующей h -ой сферы,



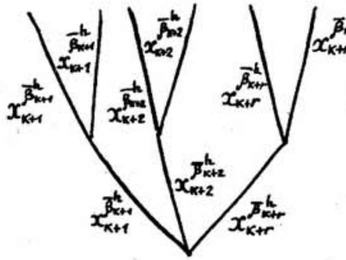


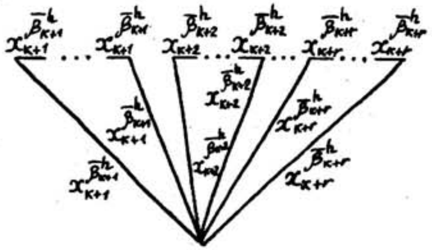
черт. 18



черт. 17

черт. 19





черт. 20

черт. 21

(см. черт. 18) и объединений контактов, входящих в них. Каждое объединение происходит в пределах метелок одного типа и содержит некоторое количество контактов $x_{k+1}^{\bar\beta_{k+1}^h}$, некоторое количество контактов $x_{k+2}^{\bar\beta_{k+2}^h}$, ..., и, наконец, некоторое количество контактов $x_{k+r}^{\bar\beta_{k+r}^h}$ (см. черт. 19). На выходах объединений реализуются функции f_{ijh} $(1\le i\le p\le\,]\frac{2^k}{s}[,\ 1\le j\le t(i)\le 2^s,$

$1\le h\le 2^s/r$.
Положим далее $\Sigma^{(1)}=\bigcup_i \Sigma_i^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}=\bigcup_i \Sigma_i^{(2)}$ и $\Sigma^{(3)}=\bigcup_i \Sigma_i^{(3)}$.

2. Построим схему Σ_f^c путем переделки схемы Σ. Для этого в частях $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(3)}$ каждый контакт x^σ заменим двумя последовательно соединенными контактами x^σ, а в части $\Sigma^{(2)}$ каждую группу одноименных контактов каждого объединения (см. черт. 19), последовательно продублируем еще одним контактом того же типа (см. черт. 20). Таким образом, на каждую функцию f_{ijh} дополнительно добавляется r контактов. Отсюда

$$L(\Sigma_f^c)\le 2L(\Sigma^{(1)})+2L(\Sigma^{(3)})+L(\Sigma^{(2)})+r\frac{2^k}{s}2^s\frac{2^r}{r}$$

Нетрудно видеть, что схема Σ_f^c реализует функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ и является самокорректирующейся относительно $И_{0,1}$.

3. Полагая $r=2^{[\frac{1}{2}\log_2 n]}$, $k=[2\log_2 n]$ и $s=[n-2\sqrt{n}]$ получим: $L(\Sigma^{(2)})\sim\frac{2^n}{n}$, $L(\Sigma^{(1)})=o(\frac{2^n}{n})$, $L(\Sigma^{(3)})=o(\frac{2^n}{n})$ и $\frac{2^{k+s+r}}{s}\lesssim n2^{n-\sqrt{n}}=o(\frac{2^n}{n})$. Следовательно

$$L(\Sigma^c_{f(x_1,\dots,x_n)})\lesssim\frac{2^n}{n}$$

Теорема доказана.

Учитывая нижнюю оценку, мы получаем асимптотику,

$$L_{0,1}(n)\sim\frac{2^n}{n}$$

которая означает, что алгоритм синтеза, содержащийся в доказательстве теоремы, является асимптотически наилучшим.

Теорема 10. (Мадатян Х.А. [6]) Существует метод синтеза, позволяющий для каждой булевской функции $f(x_1,\dots,x_n)$ строить самокорректирующуюся, относительно $И_{1,0}$ схему Σ_f^c такую, что

$$L(\Sigma^c_{f(x_1,\dots,x_n)})\lesssim\frac{2^n}{n}$$

Доказательство. Отличается от предыдущего вторым этапом. При построении схемы Σ_f^c, исходя из схемы Σ: контакты x^σ из частей $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(3)}$ заменяются на параллельное соединение двух таких же контактов x^σ, а в части $\Sigma^{(2)}$ каждое объединение, показанное на черт. 19, заменяется на объединение, изображенное на черт. 21. Эта фигура - "двойственная" фигуре на черт. 20 . Она состоит из контуров, обеспечивающих связь соответствующих вершин при любом единичном разрыве. Легко видеть, что схема Σ_f^c является самокорректирующейся, относительно $И_{1,0}$, и реализует функцию f. Поскольку число контактов в каждом объединении, показанном на черт. 20, равно числу контактов в соответствующем объединении, изображенном на черт. 21, то выкладочная часть полностью совпадает с выкладками в доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема доказана.

Учитывая нижнюю оценку мы получаем, что

$$L_{1,0}(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

т.е. алгоритм синтеза является асимптотически наилучшим. Таким образом, для почти всех функций алгебры логики минимальные самокорректирующиеся, относительно $И_{0,1}$ (и $И_{1,0}$), схемы имеют сложность асимптотически такую же как обычные минимальные схемы и асимптотически равную $\frac{2^n}{n}$. Это означает, что предлагаемые методы построения в теоремах самокорректирующихся схем дают корректные решения.

Вопросы построения самокорректирующихся схем относительно источника $И_{a,b}$ исследовались рядом авторов (см. обзор [12]). В частности, показано, что при любых фиксированных a и b имеет место асимптотика

$$L_{a,b}(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

§ 2.2. Построение самокорректирующихся схем из функциональных элементов

Для данного класса у.с. рассматривается источник $И_d$, вызывающий неисправности не более d функциональных элементов. При этом предполагается, что под воздействием источника ненадежные элементы могут изменить свое функционирование, сохраняя, однако, прежнее число входов и выходов. Если в рамках указанных ограничений функционирование каждого ненадежного элемента, находящегося в неисправном состоянии, может быть произвольным, то такой источник будем называть неймановским.

В дальнейшем теория рассматривается для неймановских источников. Это объясняется тем, что самокорректирующиеся схемы для неймановских источников $И_d$ будут также самокорректирующимися схемами для более слабых источников с числом единичных повреждений, не превосходящим d.

В случае неймановских источников, очевидно, необходимо, чтобы базис $Б$ содержал часть $Б_1$, состоящую из абсолютно надежных элементов (см. рассуждение на стр. 8).

Итак $Б = Б_1 \cup Б_2$, где $Б_1$ - часть из надежных элементов, а $Б_2$ - часть из ненадежных элементов.

Теорема 11. Если $Б_1$ содержит элемент голосования H и $Б$ - полная система, то для каждой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ можно построить самокорректирующуюся, относительно $И_d$, схему Σ^c.

Доказательство. Пусть Σ схема в базисе $Б$, реализующая f. Рассмотрим схему $\Sigma^{(\ell)}$, которая получается из схемы Σ так же, как схема $F^{(\ell)}$ получалась из схемы F (см. черт. 8). Очевидно, $\Sigma^{(\ell)}$ реализует f и является самокорректирующейся, относительно $И_d$, если $d \le \frac{1}{3} 3^{\ell}$. Наименьшее ℓ, удовлетворяющее этому неравенству, равно $\ell =]\log_3 d[+1$ и можно считать, что $\Sigma^c = \Sigma^{(\ell)}$.

Теорема доказана.

Поскольку $L(\Sigma^c) = 3^{\ell} L(\Sigma) + \frac{3^{\ell}-1}{2}$, то видно, что такие самокорректирующиеся схемы - их в дальнейшем будем называть тривиальными - во много раз сложнее исходных. Поэтому, как и в случае контактных схем, данное решение не является корректным. Возникает вопрос о существовании нетривиальных самокорректирующихся схем и об изучении сложности минимальных самокорректирующихся схем.

Пусть $Б = Б_1 \cup Б_2$, где $Б_1 = \{H\}$ и $Б_2 = \{F_\neg, F_\&, F_\vee\}$, и $L_Б(n,d)$ - функция Шеннона для класса самокорректирующихся схем из Ф.Э. над $Б$ относительно источника $И_d$.

Теорема*) (Кириенко Г.И. [2, 3]) $L_Б(n,d) \sim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$, если $\log d(n) = o(n)$.

*) Здесь дается новое доказательство этого результата.

Доказательство. Опирается на конструкцию синтеза схем в базисе Б.

I. Возьмем $d(n)$ такое, что $\log d(n)=o(n)$. Выберем целочисленное $\ell(n)$ из условия

$$d(n)\leqslant \frac{1}{3}\, 3^{\ell(n)} \tag{I}$$

и чтобы $\ell(n)$ было наименьшим. Тогда

$$\frac{1}{9}\, 3^{\ell(n)} < d(n) \tag{2}$$

Далее подберем целочисленную функцию $m(n)$ из условия

$$c\, 3^{\ell(n)} \leqslant n^{m(n)}, \tag{3}$$

где $c=\max\limits_{F}\left(L(F)+\frac{1}{2}\right) \quad (F=F_{\neg}, F_{\&}, F_{\vee})$

и, чтобы $m(n)$ было наименьшим. Тогда

$$n^{m(n)} < c\, n\, 3^{\ell(n)} \tag{4}$$

Используя (2) и (4) имеем

$$n^{m(n)} < c n 3^{\ell(n)} < 9 c n\, d(n)$$

или

$$2^{m(n)\log n} < 2^{\log d(n)+\log(9cn)}$$

и

$$m(n)\log n < \log d(n)+\log(9cn),$$

$$m(n) < \frac{\log d(n)}{\log n}+\frac{\log(9c)}{\log n}+1=o\left(\frac{n}{\log n}\right) \tag{5}$$

2. Поскольку имеет место (5), то для функции $m(n)$ и $f(x_1,\dots,x_n)$ по теореме 7 можно построить в базисе Б схему Σ_n, ее реализующую и такую, что

$$L_Б(\Sigma_n)\sim\frac{1}{2}\frac{2^n}{n} \quad \text{и} \tag{6}$$

$$\frac{L^{\neg,\&,\vee}(\Sigma_n)}{L^h(\Sigma_n)}=o\left(\frac{1}{n^{m(n)}}\right) \tag{7}$$

3. Элементы $F_{\neg}$, $F_{\&}$, $F_{\vee}$ заменяем на $F_{\neg}^{(\ell(n))}, F_{\&}^{(\ell(n))}, F_{\vee}^{(\ell(n))}$, используя конструкцию, указанную на черт. 8. В силу (I) схемы $F_{\neg}^{(\ell(n))}, F_{\&}^{(\ell(n))}, F_{\vee}^{(\ell(n))}$ будут самокорректирующимися для $И_{d(n)}$ и их максимальная сложность, учитывая (3),

$$\max\left(L_Б(F_{\neg}^{(\ell(n))}), L_Б(F_{\&}^{(\ell(n))}), L_Б(F_{\vee}^{(\ell(n))})\right)\leqslant c\,3^{\ell(n)}\leqslant n^{m(n)} \tag{8}$$

В результате указанной замены схема Σ_n преобразуется в схему Σ_n^c, реализующую ту же функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ и являющуюся самокорректирующейся, относительно $И_{d(n)}$.

В силу (6), (7) и (8) имеем

$$L_Б(\Sigma_n^c)\leqslant L_Б^h(\Sigma_n)+n^{m(n)}L_Б^{\neg,\&,\vee}(\Sigma_n)\sim$$

$$\sim L_Б^h(\Sigma_n)+L_Б^h(\Sigma_n)\cdot o(1)\sim L_Б^h(\Sigma_n)\sim\frac{1}{2}\frac{2^n}{n}$$

Кроме того $L_Б(n,d)\geqslant L_Б(n)$.

Теорема доказана.

Данная теорема показывает, что для почти всех булевых функций удается найти корректное решение задачи синтеза самокорректирующихся схем из Ф.Э. в базисе Б, относительно источников $И_{d(n)}$, где $\log d(n)=o(n)$, при котором сложность минимальных самокорректирующихся схем асимптотически равна обычной сложности минимальных схем. Это достигается за счет того, что основная сложность схемы приходится на элементы голосования. В [3] дается другой способ построения, при котором доказывается аналогичная теорема, но доля надежных элементов в самокорректирующейся схеме мала. Развивая эти идеи в [10] показано, что данного эффекта можно достичь, употребляя конечное число надежных элементов голосования.

Литература

I. Быков А.Г. Проблемы кибернетики, вып. I9. - М.: Наука, I967. - с. 39-46
2. Кириенко Г.И. Проблемы кибернетики, вып. I2. - М.: Наука, I964. - с. 29-37.
3. Кириенко Г.И. Дискретный анализ, вып. I6. - Новосибирск: ИМ СО АН СССР, I970. - с. 38-43.
4. Лупанов О.Б. Изв. вузов, Радиофизика, - I958, - т. I, № I. - с. I20-I40.
5. Лупанов О.Б. ДАН СССР, - I958, - II9, № I. - с. 23-26.
6. Мадатян Х.А. ДАН СССР, - I964, - I59, № 2. - с. 290-293.
7. Потапов Ю.Г., Яблонский С.В. ДАН СССР, - I960, - I34, № 3. - с. 544-547.
8. Тарасов В.В. Мат. сборник, - I975, - 98, № 3. - с. 378-394.
9. Тарасов В.В. Мат. заметки, - I976, - 20, № 3. - с. 39I-400.
I0. Улиг Д. Мат. заметки, - I974, - I5, № 6. с. 937-944.
II. Яблонский С.В. Banach center pub. - I982, - № 7, p. II-I9.
I2. Яблонский С.В. Матем. вопросы кибернетики. Вып. I. М.: Наука, I988. - с. 5-25.
I3. Moore E.F., Shannon C.E. Journal of the Franklin Institute - I956. - № 3, 4 Рус. пер. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. - М.: ИЛ, I963. - с. II4-I53 .
I4. Von Neuman J. Princeton University Press , I956. - p. 43 Рус. пер.: Автоматы. - М.: ИЛ. I956. - с. 68-I39 .

Надежность управляющих систем.
Методическая разработка.
Составитель: Яблонский С.В.
Подписано в печать 24.04.9I Формат 60х84/I6. Бумага №I.
Объем 2.5 п.л. Тираж 300 экз. Заказ № 25 . Бесплатно.

Ротапринт НИВЦ МГУ
II9899, Москва, Ленинские горы