В примере #1:

$$x_1(t)=\int_0^t (t-\tau) f_1(\tau)d\tau \ ; \ x_2(t)=\int_0^t (t-\tau) f_2(\tau)d\tau$$

1) $Z=C[0,T]$, $U=C[0,T]$:

$$\|x(t)\|_C=\max_t |x(t)|$$

$$|x_1-x_2|=\left|\int_0^t (t-\tau)(f_1(\tau)-f_2(\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le \int_0^t |(t-\tau)\underbrace{(f_1(\tau)-f_2(\tau))}_{\text{непр.}}|d\tau = \int_0^t \underbrace{\max_{\tau\in[0,t]}|f_1(\tau)-f_2(\tau)|}_{const}\cdot$$

$$\cdot(t-\tau)d\tau =$$

$$=\max_{\tau\in[0,t]}|f_1(\tau)-f_2(\tau)|\cdot\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2}\right)\Big|_0^t=$$

$$=\frac{t^2}{2}\max_{\tau\in[0,t]}|f_1(\tau)-f_2(\tau)| \le \frac{T^2}{2}\max_{\tau\in[0,T]}|f_1(\tau)-f_2(\tau)|=$$

$$=\frac{T^2}{2}\|f_1-f_2\|_{C[0,T]}$$

2) $Z=L_2[0,T]$, $U=L_2[0,T]$:

$$\left\|\int_0^t (t-\tau)(f_1(\tau)-f_2(\tau))d\tau\right\|_{L_2[0,T]}=$$

$$=\left[\int_0^T\left(\left(\int_0^t (t-\tau)(f_1(\tau)-f_2(\tau))d\tau\right)^2\right)dt\right]^{1/2}$$

$$\left(\int_0^t \ldots d\tau\right)^2=\left|\int_0^t \ldots d\tau\right|^2 \underset{\{К-Б\}}{\le} \underbrace{\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau}_{t^3/3} \underbrace{\int_0^t (f_1(\tau)-f_2(\tau))^2 d\tau}_{\le \int_0^T \ldots = \|f_1-f_2\|^2_{L_2}}$$

$$\Rightarrow \left[\int_0^T \frac{t^3}{3}\|f_1-f_2\|^2 dt\right]^{1/2}=\|f_1-f_2\|\left(\int_0^T \frac{t^3}{3}dt\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{T^4}{12}\right)^{1/2}\|f_1-f_2\|=\frac{T^2}{2\sqrt{3}}\|f_1-f_2\|.$$

в примере #2:

Если положить $Z_2 = C^2[0,T]$, то на паре Z_2, U задача корректна, потому что в этом случае (1) будет вып-ся а для (3):

$x_0(t) = 0,\ x_n(t) = \frac{1}{n}\sin n^2 t$

$\|x_0(t) - x_n(t)\|_{C_2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0, \quad \|\ddot{x}_0(t) - \ddot{x}_n(t)\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$

в примере #4:

... 2) Единственность зависит от $K(x,s)$

Исп. $\boxed{T:}$ Если однородн. ур-е $\int_a^b K(s)z(s)\,ds = 0$ имеет только тривиальн. реш-е, то решение неоднородн. ур-я $\int_a^b K(s)z(s)\,ds = u(x)$ $\exists$ и ! [для линейн. опер-ов]

а) $K(x,s) = e^{x+s}$.

В самом деле, $\int_a^b e^{x+s}z(s)\,ds = 0 \Leftrightarrow \int_a^b e^s z(s)\,ds = 0$

$\exists\ z(s) \neq 0:\ z(s) = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{b-a}}{e^s}$:

$$\int_a^b \sin\frac{2\pi}{b-a}s\,ds = \frac{b-a}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{b-a}s\Big|_a^b = \frac{b-a}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi b}{b-a} - \cos\frac{2\pi a}{b-a}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{2\pi}\, 2\sin\frac{2\pi(b+a)}{b-a}\,\overbrace{\sin\frac{2\pi(a-b)}{b-a}}^{=0} = 0.$$

б) $K(x,s) = e^{xs}$

$\int_a^b e^{xs}z(s)\,ds = 0$. Дифф-ем по x n раз:

$\Rightarrow \int_a^b e^{xs}s^n z(s)\,dx = 0,\ \forall n = 0,1,\ldots$

Фиксир-ем произв. $x_0 \in [c,d]$ и обозн. $z_1(s) = e^{x_0 s}z(s)$:

$= \int_a^b s^n z_1(s)\,ds,\ n = 0,1,\ldots$

Т.к. с-ма ф-й s^n — полна на $[a,b]$, то $\Rightarrow z_1(s) = 0$, $s \in [a,b] \Rightarrow z(s) = 0,\ \forall s \in [a,b]$ и $\exists$-ет только тривиальн. реш-е однородн. ур-я.

Пример функции, для которой (*) не выполнено:

$$\bar{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)$$

1) беск. дифф-ма

2) сх-ся по признаку Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

- $\sum_{n=1}^{N} a_n(x) < M \quad \left(\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)\right)$

$\{b_n(x)\}$ моноб. $\rightrightarrows 0 \quad (e^{-k}$ – моноб. $\rightrightarrows 0)$

Тогда $|\varphi_n^2| = \left| e^{a^2 \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 (T - t_0) 2} \circ e^{-k \cdot 2} \right| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{c_1 n^2 - n} \right|$ – расх.