GODZINA 06 TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ 06 DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC 09 MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

06.09.06 – лекция N 1.

Обратные задачи.

ПРИМЕР 1: Мат. точка массой 1 : $m=1$

ур-е движения $\ddot{x}(t) = f(t)$, $0 \le t \le T$

$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$

$f(t)$ – причина, $x(t)$ – следствие

Это – прямая задача: $x(t) = \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau$

ПРИМЕР 2: $Rf = x$

обратная задача: по $x(t)$ определить $f(t)$

ПРИМЕР 3:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

$0 \le t \le T$, $x_i(0) = x_i^0$

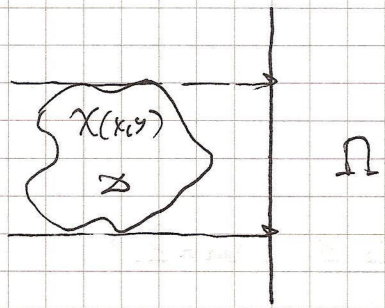
– это прямая задача

ПРИМЕР 4: Обратная задача: по $x_i(t)$ найти a_{ij}

ПРИМЕР 5: Распознавание образов.

По всем ортогональным проекциям восстановить область D.

GODZINA	TIME	6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ	DAY	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC	MONTH	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

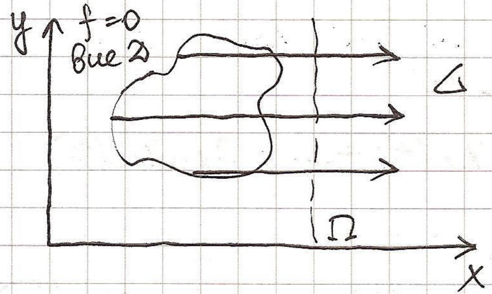


Если область D не выпукла, то единственного реш-я нет.

Пусть обл-ть D - выпуклый n-угольник. Сколько нужно проекций для решения обратной задачи?

$\chi(x,y)$ — характеристическая ф-я обл. D.

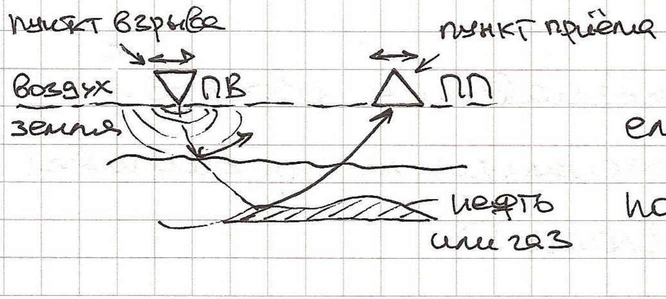
ПРИМЕР 6: Компьютерная томография.



Задан $\int_L f(x,y)\,dl = I_L$

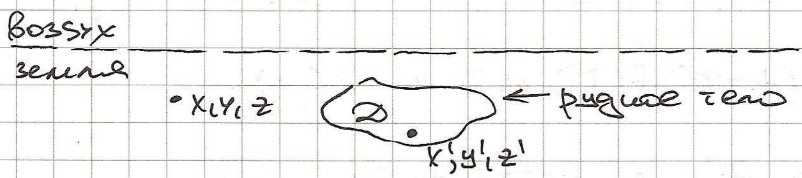
По всевозможным I_L определить $f(x,y)$

ПРИМЕР 7: Геологическая модель.



По регистрируемым сейсмическим полям требуется определить геологическую среду.

ПРИМЕР 8: Из теории потенциалов



Потенциал тела D:

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{D} \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\, dx'dy'dz'$$

По функции $u(x,y,z)$ найти D и ρ.

Корректные и некорректные задачи.

$z = R(u)$, $z \in Z$, $u \in U$,

u – известно, при изв. R найти z

Z, U – метрические пространства

$\boxed{O}$ Задача $z = R(u)$ наз. корректной (по Адамару), если выполнены три условия:

1) $\forall u \in U : \exists z \in Z$,

2) z – единственный,

3) отображение R – непр-но по паре Z, U

Иначе, задача наз. некорректной (по Адамару).

ПРИМЕР 1: $\ddot{x}(t) = f(t),\ 0 \le t \le T$

$$\dot{x}(0) = x(0) = 0$$

Пусть $x \in C[0,T] \equiv Z$, $f \in C[0,T] \equiv U$,

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau \sim Rf = x.$$

Решение $\exists!$ и устойчиво, т.к.

$$\| x_1 - x_2 \|_Z \le \frac{T^2}{2} \| f_1 - f_2 \|_U .$$

ПРИМЕР 2: ОЗ – определить $f(t) \in U$ по $x(t) \in Z$: $f = R(x) \sim f(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$

1. $f \nexists$ не для $\forall x \in C[0,T]$.
2. f определена единственным образом
3. нет устойчивости

$$x_0(t) = 0,\quad x_n(t) = \frac{1}{n} \sin n^2 t$$

$$\| x_0(t) - x_n(t) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\| \dot{x}_0(t) - \ddot{x}_n(t) \| \xrightarrow[n\to\infty]{\times} 0$$

Если положить $Z_2 \equiv C^2[0,T]$, тогда на паре Z_2, U задача корректна.

Корр./некорр. задачи зависит от качества задачи (R) и от пары пространств (Z, U).

ПРИМЕР 3: $Az = u$
1) $\det A \ne 0 \to$ корр.
2) $\det A = 0 \to$ некорр.

В примере #1:

$$x_1(t)=\int_0^t (t-\tau) f_1(\tau)d\tau \; ; \; x_2(t)=\int_0^t (t-\tau) f_2(\tau)d\tau$$

1) $Z=C[0,T]$, $U=C[0,T]$:

$$\|x(t)\|_C = \max_t |x(t)|$$

$$|x_1-x_2| = \left|\int_0^t (t-\tau)(f_1(\tau)-f_2(\tau))d\tau\right| \leq$$

$$\leq \int_0^t |(t-\tau)\underbrace{(f_1(\tau)-f_2(\tau))}_{\text{непр.}}|d\tau = \int_0^t \underbrace{\max_{\tau\in[0,t]} |f_1(\tau)-f_2(\tau)|}_{const}\cdot$$

$$\cdot(t-\tau)d\tau =$$

$$=\max_{\tau\in[0,t]} |f_1(\tau)-f_2(\tau)|\cdot\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2}\right)\Big|_0^t =$$

$$=\frac{t^2}{2}\max_{\tau\in[0,t]} |f_1(\tau)-f_2(\tau)| \leq \frac{T^2}{2}\max_{\tau\in[0,T]}|f_1(\tau)-f_2(\tau)| =$$

$$=\frac{T^2}{2}\|f_1-f_2\|_{C[0,T]}$$

2) $Z=L_2[0,T]$, $U=L_2[0,T]$:

$$\left\|\int_0^t (t-\tau)(f_1(\tau)-f_2(\tau))d\tau\right\|_{L_2[0,T]} =$$

$$=\left[\int_0^T \left(\left(\int_0^t (t-\tau)(f_1(\tau)-f_2(\tau))d\tau\right)^2\right)dt\right]^{1/2}$$

$$\left(\int_0^t \ldots d\tau\right)^2 = \left|\int_0^t \ldots d\tau\right|^2 \underset{\{К-Б\}}{\leq} \underbrace{\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau}_{t^3/3} \underbrace{\int_0^t (f_1(\tau)-f_2(\tau))^2 d\tau}_{\leq \int_0^T \ldots = \|f_1-f_2\|^2_{L_2}}$$

$$\Rightarrow \left[\int_0^T \frac{t^3}{3}\|f_1-f_2\|^2 dt\right]^{1/2} = \|f_1-f_2\|\left(\int_0^T \frac{t^3}{3}dt\right)^{1/2} =$$

$$=\left(\frac{T^4}{12}\right)^{1/2}\|f_1-f_2\| = \frac{T^2}{2\sqrt{3}}\|f_1-f_2\|.$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

ПРИМЕР 4: Основной пример некорректно поставленной задачи.

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [c,d]$$

$z \in C[a,b] \equiv Z$, $u \in C[c,d] \equiv U$

$K(x,s),\ K_x(x,s),\ K_s(x,s) \in C([c,d] \times [a,b])$

$z = R(u)$, $z = Ru$, $Az = u$, $z = A^{-1}u$.

1) Пусть $u(x) \in C[c,d]$, но не $\exists\, u'(z)$ реш. $z\ \nexists$ не для $\forall u \in U$

2) Единственность зависит от $K(x,s)$

$K(x,s) = e^{x+s}$, то ед. нет

$K(x,s) = e^{xs}$, то ед-ть есть

3) Устойчивости нет в этой паре пространств

$z_0(s) = 0$, $z_n(s) = n \sin n^2 s$

$\|z_n - z_0\|_Z \to \infty$, $n \to \infty$.

$\|u_n - u_0\| = ?$

$$u_n(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{u_0}}(x) = n \int_a^b K(x,s) \sin n^2 s\, ds =$$

$$= -n \frac{1}{n^2} \cos n^2 s\, K(x,s) \Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b K_s(x,s) \cos n^2 s\, ds$$

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq \frac{M_0}{n} + \frac{M_1}{n} \leq \frac{M}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u_n - u_0\|_U \to 0, \quad n \to \infty$$

уст-ти нет из C в C, из L_2 в L_2.

в примере #2:

Если положить $Z_2 = C^2[0,T]$, то на паре Z_2, U задача корректна, потому что в этом случае (1) будет вып-ся а для (3):

$x_0(t) = 0,\ x_n(t) = \frac{1}{n}\sin n^2 t$

$\|x_0(t) - x_n(t)\|_{C_2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, $\|\ddot{x}_0(t) - \ddot{x}_n(t)\| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

в примере #4:

... 2) Единственность зависит от $K(x,s)$

Исп. $\boxed{T}$: Если однородн. ур-е $\int_a^b K(s)z(s)\,ds = 0$ имеет только тривиальн. реш-е, то решение неоднородн. ур-я $\int_a^b K(s)z(s)\,ds = u(x)$ $\exists$ и ! [для линейн. опер-ов]

а) $K(x,s) = e^{x+s}$.

В самом деле, $\int_a^b e^{x+s}z(s)\,ds = 0 \Leftrightarrow \int_a^b e^s z(s)\,ds = 0$

$\exists\ z(s) \neq 0$: $z(s) = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{b-a}}{e^s}$:

$\int_a^b \sin\frac{2\pi}{b-a}s\,ds = \frac{b-a}{2\pi}\cos\frac{2\pi}{b-a}s\Big|_a^b = \frac{b-a}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi b}{b-a} - \cos\frac{2\pi a}{b-a}\right] =$

$= \frac{b-a}{2\pi}\, 2\sin\frac{2\pi(b+a)}{b-a}\,\overbrace{\sin\frac{2\pi(a-b)}{b-a}}^{=0} = 0.$

б) $K(x,s) = e^{xs}$

$\int_a^b e^{xs}z(s)\,ds = 0$. Дифф-ем по x n раз:

$\Rightarrow \int_a^b e^{xs}s^n z(s)\,dx = 0$, $\forall n = 0, 1, \ldots$

Фиксир-ем произв. $x_0 \in [c,d]$ и обозн. $z_1(s) = e^{x_0 s}z(s)$:

$= \int_a^b s^n z_1(s)\,ds$, $n = 0, 1, \ldots$

Т.к. с-ма ф-й s^n — полна на $[a,b]$, то $\Rightarrow z_1(s) = 0$, $s \in [a,b] \Rightarrow z(s) = 0$, $\forall s \in [a,b]$ и $\exists$-ет только тривиальн. реш-е однородн. ур-я.

GODZINA 06 TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ 13 DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC 09 MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

13.09.06 — лекция №2

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, $z = A^{-1}u$

1. Если A^{-1} определён на всём U и непр., то задача корректна

2. Если A — вполне непр. оператор (т.е. огр. мн-во $\xrightarrow{A}$ компактное), Z — бесконечномерное, тогда не $\exists$ A^{-1} — непр., т.е. задача некорректна.

ПРИМЕР 1: $Az = \int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x)$, $c \le x \le d$

$z \in Z \equiv L_2[a,b]$, $u \in U \equiv L_2[c,d]$

$$\int_a^b\int_c^d |K(x,s)|^2 dx dy < \infty$$

Тогда A — вполне непр.

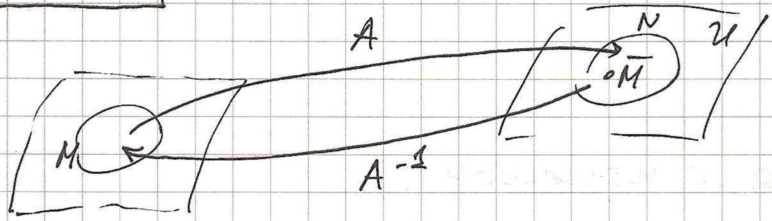
Условно корректные (корректные по Тихонову) задачи.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$,

Z и U — полные метрические пр-ва

$\boxed{T}$: Пусть A — непр., взаимнооднозначно отображает $M \subset Z$ в $N \subset U$. Тогда если M — компакт в Z, то A^{-1} — непр. на мн-ве $N = AM$

Док-во:



Пусть $\bar u \in N$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar u$

$\{z_n\}$ не сх-ся к $A^{-1}u_n \to \bar z$, т.е.

$\exists\, \varepsilon > 0$ и $\{z_{n_p}\}$: $\rho(z_{n_p}, \bar z) \geq \varepsilon$

$\{z_{n_p}\} \equiv \{z_k\} \subset M$

$\exists\, z_{k_m} \to z^* \in M$

$A z_{k_m} = u_{k_m} \to u^*$, $A z^* = u^* = \bar u$, $A \bar z = \bar u$

$\rho(z^*, \bar z) \geq \varepsilon$, что $\nexists$-чит тому, что

$A^{-1}\bar u$ – единств. $\Rightarrow$ A^{-1} непр. на N, ч.т.д.

$Az = u$, $\bar z \in M$, $\bar z$ – решение, т.е. множество всевозможных решений сужается.

$\boxed{О.}$ Задача $z = R(u)$ наз. корректной по Тихонову (условно корректной) на $M \subset Z$, $N \subset U$, если:

1) решение z $\exists$ для $\forall u \in N$, $z \in M$

2) решение z – единственно

3) решение z – устойчиво, непр. по u в метриках Z и U.

Если M – компакт, то M – мн-во корректности.

Вернёмся к примеру:

$M = \{ z(s) \in L_2[a,b] : |z(s)| \leq R,\ z(s)$ – монотонная $\}$

M – компакт в $L_2[a,b]$

<u>ПРИМЕР 2:</u> $\ddot{x}(t) = f(t)$

Задача определения правой части ОДУ.

$(1): \ y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

$a_i = a_i(x)$

Найти $f(x)$, если известно $\bar{y}(x)$ – реш-е (1)

Если $\bar{y}(x) \in C^n[a,b]$, $f(x) \in C[a,b]$

Если $a_i(x)$ – непр., то задача определения $f(x)$ явл-ся корректной (C^n, C)

Если $\bar{y}(x) \in C^p[a,b]$, $p<n$, $f \in C$, то на паре (C^p, C) задача некорректна.

Пусть $\bar{y}$ – решение краевой задачи:

$\bar{y}^{(i)}(a) = 0,\ 0 \leq i \leq m, \quad \bar{y}^{(i)}(b) = 0,\ 0 \leq i \leq S$

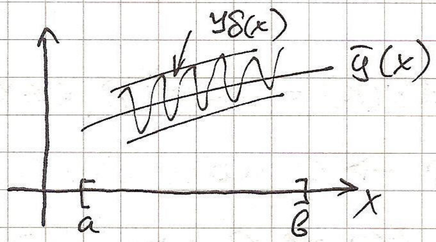
$2 + m + S = n.$

$\bar{y}(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\,ds \;, \; x \in [a,b]$

$G(x,s)$ – функция Грина

Этот оператор – вп. непр. и задача некорректна.

Пусть $\bar{y}(x) \in C^n[a,b]$, $|y_\delta(x) - \bar{y}(x)| \le \delta$, $x \in [a,b]$



$\|y_\delta - \bar{y}\|_{C[a,b]} \le \delta$

$|y_\delta(x) - \bar{y}(x)| \le \delta, \; x \in [a,b]$

$z_{\delta h} \equiv z_\delta(x) \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}'(x)$?

найти такую функцию $z_\delta(x)$

Построим её: $z_{\delta h}(x)$ по $y_\delta(x)$ и δ

$z_{\delta h}(x) = \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h}$, $0 < h < \varepsilon$, $a \le x \le b$,

т.е. $z_{\delta h} = R_h(y_\delta) \sim z = Ry$ – уст. на (C, C)

$$\left| z_{\delta h}(x) - \bar{y}'(x) \right| = \left| \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h} \pm \frac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} - \bar{y}'(x) \right| \le$$

$$\le \left| \frac{y_\delta(x+h) - \bar{y}(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{y_\delta(x) - \bar{y}(x)}{h} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} - \bar{y}'(x) \right| \le \frac{2\delta}{h} + \left| \bar{y}'(\theta) - \bar{y}'(x) \right|_{\theta \in [x, x+h]} \le$$

$$\le \frac{2\delta}{h} + \omega(\bar{y}, h) \;,$$

где $\omega(\bar{y}, h) \equiv \omega(h)$ – модуль непрерывности

ф-ции $\bar{y}$ на $[a,b]$.

$\omega(h) \to 0$ при $h \to 0$ (св-во модуля непр-ти)

$z_{\delta h}(x) \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}'$ при : $\to$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1) $\delta \to 0, h \to 0$, т. е.

2) $\delta / h \to 0$, т.е. $h = h(\delta)$, $h(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$

$\delta / h(\delta) \to 0, \delta \to 0$.

$h(\delta) = \delta^2$ – нет сх-ти

$h(\delta) = \delta^{1/2}$ – сходимость есть

$h(\delta) = \delta$ – ?

<u>ПРИМЕР:</u> Пусть $\bar{y} = 0$; $y_\delta(x) = \delta \sin x/\delta$, $0 \le x \le 1$

Пусть $h = \delta \Rightarrow z_{\delta h} = \sin x/\delta \nrightarrow 0$ при $\delta \to 0$

Пусть $h = \delta^{1/2} \Rightarrow z_{\delta h} = \sqrt{\delta} \sin x/\delta \rightrightarrows 0$ при $\delta \to 0$

$$y'' : z_{\delta h}(x) = \frac{y_\delta(x+h) - 2y_\delta(x) + y_\delta(x-h)}{h^2}, \ 0 < h \le \varepsilon$$

$$|z_{\delta h}(x) - \bar{y}''(x)| \le \frac{4\delta}{h^2} + w_2(h),$$

где $w_2(h) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |\bar{y}''(x+h) - \bar{y}''(x)|$

1) $h(\delta) \to 0, \ \delta \to 0$

2) $\delta / h^2 \to 0, \ \delta \to 0$

Например, $h(\delta) = c\delta^p$ для $\bar{y}'$, $0 < p < 1$.

20.09.06 – лекция №3

$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Обр. задача: a_0 и a_1 по $y(x)$

1) $y \equiv 0$, для $\forall\, a_0, a_1$ единственности нет

2) $y = const \neq 0$ – единственность нет для $a_1, a_0 = 0$.

3) $y \neq const$

$y = e^x \Rightarrow 1 + a_1 + a_0 = 0$

Если $a_0 = p$, $a_1 = -(1+p)$, $\forall p$, то единственности нет.

Пусть $x \in [c,d]$ и пусть $\exists\, x_1, x_2 \in [c,d]$: для $\bar{y}(x)$: $\bar{y}'(x_1)\bar{y}(x_2) - \bar{y}'(x_2)\bar{y}(x_1) \neq 0$

Тогда $\exists!$ решение обратной задачи.

$$a_1 \bar{y}'(x_1) + a_0 \bar{y}(x_1) = -\bar{y}''(x_1)$$
$$a_1 \bar{y}'(x_2) + a_0 \bar{y}(x_2) = -\bar{y}''(x_2)$$

система отн-но $\{a_0, a_1\}$: $\det \neq 0 \Rightarrow$ решение обратной задачи единственно.

Линейное ОДУ n-го порядка и ОЗ для него.

$$(1): \; y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x).$$

$\{a_{n-1}(x), \dots, a_0(x), f(x)\}$ — неизвестные в обратной задаче.

$\boxed{T:}$ Пусть на $[c,d]$ задано решение ур-я (1) $\{y_i(x)\}_{i=1}^{n}$ и $W(y_1 \dots y_n)|_{x=c} \neq 0$, $y_0(x): y_0^{(i)}(c) = 0$, $i = 0 \dots n$, тогда $a_i(x)$, $i = 0 \dots n-1$ и $f(x)$ определяются на $[c,d]$ единственным образом.

<u>Док-во:</u> Рассм. $u_i(x) = y_i(x) - y_0(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{Ly = (1)\} \Rightarrow Lu_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

$$\underset{\text{определитель Вронского}}{W(u_1 \dots u_n)|_{x=c}} = \begin{vmatrix} u_1(c) & \\ u_1'(c) & \\ \vdots & n \times n \\ u^{n-1}(c) & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(c) - y_0(c) & \\ y_1'(c) - y_0'(c) & \\ \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(c) - y_0^{(n-1)}(c) & \end{vmatrix} = W(y_1 \dots y_n)|_{x=c}$$

$$\begin{cases} a_{n-1}(x) u_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) u_1(x) = u_1^{(n)}(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n-1}(x) u_n^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) u_n(x) = -u_n^{(n)}(x). \end{cases}$$

$W(u_1 \dots u_n)|_{x=c} \neq 0 \Rightarrow W(u_1 \dots u_n) \neq 0, \forall x \in [c,d]$

$\Rightarrow \det \neq 0$, для $\forall x \in [c,d]$, ч.т.д.

Задача частичного определения к-ов ОДУ.

Все $a_i(x)$, $i \neq j, k$, $f(x)$ – известны.

Найти $a_j(x)$ и $a_k(x)$ по $\overline{y}_1(x)$ и $\overline{y}_2(x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} a_i(x)\overline{y}_1^{(i)}(x) + a_j(x)\overline{y}_1^{(j)}(x) = f_1(x) \\ a_i(x)\overline{y}_2^{(i)}(x) + a_j(x)\overline{y}_2^{(j)}(x) = f_2(x) \end{array}\right\} \text{известные функции}$$

Если $\det \neq 0$, то $a_i(x)$, $a_j(x)$ определены (!)

Рассм. $y^{IV} + a_2(x)y'' + a_0(x)y = 0$

$a_1 = a_3 = 0$

$\overline{y}_1(x) = e^x$, $\overline{y}_2(x) = e^{-x} \Rightarrow \Delta = 0$.

$\Rightarrow 1 + a_2 + a_0 = 0$

$a_0 = p \Rightarrow a_2 = -(1+p)$, для $\forall p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственность нет.

Задача определения коэффициентов с-мы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{cases}$$

$a_{ij} = \text{const}$

Обратная задача: определить a_{ij}

Достаточно ли задать $\overline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$? = НЕТ!

Пусть $x(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, тогда $\begin{cases} 3a_{11} + a_{12} = 3, \\ 3a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решение не единственно.

$\boxed{T:}$ Пусть $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}(t)$, где A — постоянная матрица $n \times n$, $A = \|a_{ij}\|$, $i,j = 1 \ldots n$. Если на $[c, d]$ задано решение системы

$\bar{x}(t)$: на $[c, d]$ $\exists t_k$, $k = 1 \ldots n$

$\bar{x}(t_k)$ — линейно независимые

, то a_{ij} определяются единственным образом.

<u>Док-во:</u> $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_{11} x_1(t) + \ldots + a_{1n} x_n(t) = \dot{x}_1(t) \\ \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1} x_1(t) + \ldots + a_{nn} x_n(t) = \dot{x}_n(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1(t_1) + \ldots + a_{1n} x_n(t_1) = \dot{x}_1(t_1) \\ \ldots \qquad \ldots \\ a_{11} x_1(t_n) + \ldots + a_{1n} x_n(t_n) = \dot{x}_1(t_n) \end{cases}$$

система отн-но $\{a_{11} \ldots a_{1n}\}$

$\bar{x}(t_k)$ — ЛНЗ $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \bar{x}^T(t_1) \\ \ldots \\ \bar{x}^T(t_n) \end{pmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow a_{11} \ldots a_{1n}$ опред-ся единственным образом и т.д. <u>чтд</u>.

Пусть теперь $A \neq const$: $\dot{\overline{X}}(t) = A(t)X(t)$ (2)

$A = \| a_{ij}(t) \|$, $a_{ij} \in C[c,d]$

$\boxed{T:}$ Пусть на $[c,d]$ заданы $\overline{X}^k(t)$, $k=1..n$, реш. системы (2), такие что $\overline{X}^k(c) = \overline{b}^k$ – ЛНЗ. Тогда $a_{ij}(t)$ определяются на $[c,d]$ единств. образом.

Док-во:

$$\begin{cases} a_{11}(t)x_1^1(t) + a_{12}(t)x_2^1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n^1(t) = \dot{x}_1^1(t) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{11}(t)x_1^n(t) + a_{12}(t)x_2^n(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n^n(t) = \dot{x}_1^n(t) \end{cases}$$

система относительно $\{a_{11}(t) \ldots a_{1n}(t)\}$

$$\det \begin{pmatrix} (\overline{X}^1(t))^T \\ \ldots \\ (\overline{X}^n(t))^T \end{pmatrix} = \Delta$$

при $t=c$ $\Delta(c) \neq 0 \Rightarrow \Delta(t) \neq 0$, $t \in [c,d]$

т.к. $\det(\overline{X}^1(t) \ldots \overline{X}^n(t)) = W(\overline{X}^1(t) \ldots \overline{X}^n(t))$

$\Rightarrow a_{1j}(t)$, $j = 1 \ldots n$ опред ! $\forall t \in [c,d]$ и т.д.

ч.т.д.

Устойчивость

$$\| \overline{y}(x) - y_\delta(x) \|_{C[c,d]} < \delta$$

Изв. не $\overline{y}$, а $y_\delta \in C[c,d]$

ПРИМЕР: $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$

Пусть $a_0(x)$ — изв.

$$a_1(x) = -\frac{y_\delta''(x) + a_0 y_\delta(x)}{y'_\delta(x)}$$

не обяз. $y'_\delta(x) \approx \bar{y}_1(x)$

Требуется использовать методы регуляризации

$Aa_1 = u$.

GODZINA 06 TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ 27 DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC 09 MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

лекция N 4

Обратные задачи:

- Задачи восстановления климата;
- Керамические плитки шаттлов

} –

– з-чи теплопереноса.

Задачи для уравнений теплопроводности с обратным временем.

Будем рассматривать одномерн. ур-е на отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < l, \ t_0 \le t \le T, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t_0 < t \le T, \\ u(x,t_0) = \varphi(x), \ 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Обратная задача:

дано $u(x,T) = g(x)$, $0 \le x \le l$ – след. реш-я при $t = T$.

Найти нач. распред-е т-ры $\varphi(x)$.

Решение прямой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 (t-t_0)} \sin\frac{\pi n x}{l} d\xi$$

положим $u(x,T) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} \odot$

$$\odot\, e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})(T-t)} \sin\frac{\pi n x}{l} d\xi.$$

Исследуем единственность: $g(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow$ ед-ть реш. обр. задачи.

Приравниваем $u(x, T)$ к нулю, домножаем на $\sin \frac{\pi k x}{l}$ и проинтегрируем на $[0, l]$.
Система синусов на отрезке ортогональна, потому из всей суммы останется единств. слагаемое при $n = k$:

$$\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi \cdot \frac{l}{2} = 0, \forall k \in N.$$

сокращается временной множ-ль — то, что осталось от синусов.

В силу полноты системы синусов $\{\sin \frac{\pi n}{l}\}$ на $[0, l] \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow$ единственность реш-я обратной задачи.

Исследуем существование:

$$u(x, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 (T - t_0)} \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x)$$

$g(x)$ формально тоже можно представить рядом Фурье:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\varphi_n e^{-a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 (T - t_0)} = g_n \Rightarrow \varphi_n = e^{a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 (T - t_0)} g_n$$

$$\varphi(x) \in L_2[0, l] \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 < \infty \qquad (*)$$

WAŻNE NOW

УСЛОВИЕ (*) НАКЛАДЫВАЕТ СИЛЬНОЕ УСЛОВИЕ НА ХАРАКТЕР УБЫВАНИЯ g_n ПРИ $n \to \infty$. ОЧЕВИДНО, ЧТО ЭТО УСЛОВИЕ ВЫПОЛНЕНО НЕ ДЛЯ ВСЕХ $g_n \in L_2[0, l]$ (см. Денисов, стр. 113)

Пример функции, для которой (*) не выполнено:

$$\overline{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)$$

1) беск. дифф-ма

2) сх-ся по признаку Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

- $\sum_{n=1}^{N} a_n(x) < M$ $\left(\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right)\right)$

$\{b_n(x)\}$ моноб. $\rightrightarrows 0$ $(e^{-k}$ – моноб. $\rightrightarrows 0)$

Тогда $|\varphi_n^2| = |e^{a^2 (\frac{\pi n}{\ell})^2 (T-t_0) 2} \circ e^{-k \circ 2}| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |e^{\Phi_1 n^2 - n}|$ – расх.

Если возьмём $\varphi(x) \equiv \varphi_k(x) = k\frac{2}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}$ — гармоники, то

$$g(x) \equiv g_k(x) = k e^{a^2(\frac{\pi k}{l})^2(T-t_0)} \frac{2}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}$$

$$g(x) \equiv g_t(x) = k e^{a^2(\frac{\pi k}{l})^2(T-t_0)} \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x}{l}.$$

$$\|\varphi_k(x)\|^2_{L_2[0,l]} = k^2 \to \infty$$

$$\|g_k(x)\|^2_{L_2[0,l]} = k^2 e^{a^2(\frac{\pi k}{l})^2(T-t_0)} \to 0.$$

Получаем, что для этого $\varphi(x)$ обратная задача неустойчива для норм из $L_2[0,l]$ в $L_2[0,T]$.

[очевидно, что найдётся $g(x)$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|g_n|^2 < \infty$, но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_k|^2$ — неогранич.]

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^l K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = g(x), \quad 0 \le x \le l,$$

где $K(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-a^2(\frac{\pi n}{l})^2(T-t_0)}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}$

— интегральное уравнение Фредгольма с непр. ядром: $K \in C([0,l]^2)$. Оно соответствует операторному ур-ю $Au = g$, A — вп. непр. опер-р.

[мы знаем, что такая задача неустойчива]

д.б. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|g_k e^{a^2(\frac{\pi n}{l})^2(T-t_0)}|^2 < \infty$.

Рассмотрим задачу:

$a^2=1,\ u_t=u_{xx},\ 0\le x\le l,\ t_0-\varepsilon\le t\le T,$

$u(x,t)\in C^{2,1}([0,l]\times[t_0-\varepsilon,T]),$

$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t_0-\varepsilon\le t\le T.$

начальн. усл-я пока не ставим.

Получим оценку устойчивости:

Для этого введём $f(t)=\int_0^l u^2(x,t)\,dx$:

$$f'(t)=2\int_0^l u_t(x,t)u(x,t)\,dx$$

$$f''(t)=2\int_0^l u_{tt}(x,t)u(x,t)\,dx+2\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx$$

$$\left[u_t=u_{xx},\ u_{tt}=(u_{xx})_t=\left\{\begin{matrix}\text{поменяем}\\ \text{местами}\\ \text{частн. произв-е}\end{matrix}\right\}=(u_t)_{xx}=u_{xxxx}=\partial_x^4 u\right]$$

$$f''(t)=2\int_0^l u_{xxxx}u\,dx+2\int_0^l u_t^2\,dx=$$

$$=2u_{xxx}\overset{=0}{u}\Big|_0^l-2u_{xx}u_x\Big|_0^l+2\int_0^l(\overset{=u_t}{u_{xx}})^2dx+$$

$$+2\int_0^l u_t^2\,dx \;=$$

? $\left[u_{xx}\big|_0^l=\overset{=0}{u_t}\big|_0^l=0\right]$

$$=4\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx \quad (*)$$

Пусть $h(t)=\ln f(t)$. Покажем, что $h''(t)\ge0$ при $t\in[t_0-\varepsilon,T]$

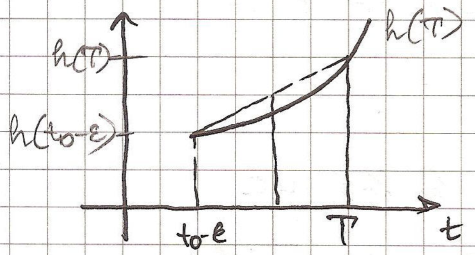
исп.(*)

$$h'(t)=\frac{f'_t}{f(t)};\ h''(t)=\frac{f'(t)f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f^2(t)}\Big\{4\int_0^l u_t^2\,dx\int_0^l u^2\,dx - \qquad (*)$$

$$-4\Big[\underbrace{\int_0^l u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx}_{I''}\Big]^2\Big\} \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow h(t)$ – выпуклая. (2ая произв-ая)



$$\ln f = h(t) \le$$

$$\le h(t_0-\varepsilon)\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)} + h(T)\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}$$

потенцируем нер-во, чтобы получить f:

$$f(t) \le [f(t_0-\varepsilon)]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}\,[f(T)]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$

Рассм. $u_i(x,t)$, $i=1,2$, кот. удовл-ют ур-ю и корр. усл-ю, т.е. для них выполнено:

$$\int_0^l u_i^2(x,t)\Big|_{t=t_0-\varepsilon}dx \le c^2$$

L_2-норма^2 разности

Рассм. $u=u_1-u_2$: $\overbrace{\int_0^l u^2(x,t)\,dx}^{(**)} =$

$t=t_0-\varepsilon$

$$= \int_0 |u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2dx \le$$

$$\le \Big[\int_0^l u^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx\Big]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}\Big[\int_0^l u^2(x,T)\,dx\Big]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}} \le$$

$$\Big[\ |u|^2 = |u_1-u_2|^2 \le |u_1|^2+|u_2|^2+2|u_1||u_2| \le$$

$$\le 2(|u_1|^2+|u_2|^2)\ \Big]$$

$$\le [4c^2]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}}\Big[\int_0^l u^2(x,T)\,dx\Big]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$

?

$t=t_0$: $\underbrace{\|u_1(x,t_0)-u_2(x,t_0)\|_{L_2(0,l)}}_{(**)} \le [2c]^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \odot$

(*) $\int_0^l u_t^2\,dx\int_0^l u^2\,dx \underset{К-Б}{\geq} \Big[\int_0^l u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx\Big]^2$

$\odot\ \|u_1(x,T) - u_2(x,T)\|_{L_2[0,l]}^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$ —

— оценка условной устойчивости.[1]

Заметим, что мы потребовали вып-е усл-я не в момент t_0, а в момент $t_0-\varepsilon$.

$$\int u^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx \le C^2$$

($\|\cdot\|^2_{L_2} \le C^2$ — мн-во, огр. в L_2 не явл-ся компактным $\equiv$ из огр. мн-ва м. выделить только слабо сходящуюся посл-ть) $\Rightarrow$ Вообще говоря, такое ограничение не выделяет компактности.

Связь t_0 и $t_0-\varepsilon$:

$$\int_0^l K_\varepsilon(x,\xi)\,u(\xi,t_0-\varepsilon)\,d\xi = u(x,t_0),$$

$$K_\varepsilon(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\varepsilon} \sin\frac{\pi k x}{l}\,\sin\frac{\pi k \xi}{l}$$

$u(\cdot,t_0-\varepsilon) \in$ ограниченному в L_2 мн-ву
A - вполне непрерывный оператор $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A$: ограниченное мн-во $\to$

$\to$ компактное мн-во $U_{t_0-\varepsilon}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow u \in$ не только ограниченному, но и компактному мн-ву: $AU_{t_0-\varepsilon} = U_{t_0}$ — компакт. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеем оц-ку устойчивости на компакте U_{t_0} в $L_2[0,l]$.

WAŻNE NOW

[1] „ЭТА ОЦЕНКА МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ НЕСКОЛЬКО СТРАННОЙ"
(c) Денисов

лекция N 5

Задача определения распределения t-ры по измерению t-ры в точке.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t\le T, \\ \text{теплоизолир. концы: } u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, \quad 0<t\le T, \\ \qquad u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l \end{cases}$$

Обратная задача: найти $\varphi(x)$, дано $u(x_0,t)=g(t)$, $0<t_1\le t\le T$.

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\cdot$$
$$\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n x}{l}, \quad 0\le x\le l, \; 0\le t\le T.$$

рассм. $x=x_0$: $\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)d\xi+$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}d\xi\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n x_0}{l}=$$
$$=g(t), \quad t_1\le t\le T.$$

$$\int_0^l K(\xi,t)\varphi(\xi)d\xi=g(t), \quad t_1\le t\le T;$$

$K(\xi,t)$ – непр,

$Au=g$, A - вп. непр. : $C\to C$.

$\Rightarrow$ обратная задача поставлена некорректно (неустойчива).

Исследуем единственность:

Т! Пусть $\cos\frac{\pi n x_0}{l} \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда реш-е обратной задачи ! в $L_2[0,l]$.

<u>Док-во:</u> Единственность реш-я обр. задачи $\Leftrightarrow g = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

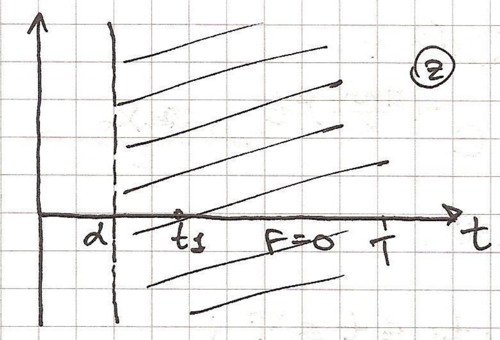
$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi n x_0}{l} = 0,\ t_1 \le t \le T.$$

и.д.: $\varphi_n = 0$.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 z} \cos\frac{\pi n x_0}{l};\quad (*)$$

аналитич. при $\operatorname{Re} z > \alpha,\ 0 < \alpha < t_1$.

$$\left|\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 z} \cos\frac{\pi n x_0}{l}\right| \le |\varphi_n| \left|e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \operatorname{Re} z}\right| \le$$



$$\le |\varphi_n| \left|e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \alpha}\right| \le$$

$$\le C e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \alpha}$$

$F(z) = 0$ при $\operatorname{Re} z > \alpha$

$F(t) = 0$ при $t \ge t_1$.

Устремим $t \to \infty$: $\varphi_0 \cos\frac{\pi \overset{=0}{n} x_0}{l} = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$$(*):\ \varphi_1 e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi x_0}{l} + \varphi_2 e^{-\left(\frac{\pi 2 a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{2\pi x_0}{l} + \ldots$$

домножим на $e^{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$:

$$\varphi_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} + \varphi_2 e^{-3\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{2\pi x_0}{l} + \ldots$$

$t \to \infty$: $\varphi_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0$ и т.д. =)

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$\Rightarrow$ получим: $\varphi_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

В силу того, что с-ма $\{\cos\frac{\pi n x}{l}\}$ полна в $L_2[0,l]$, получим $\varphi = 0$, ч.т.д.

Пусть $x_0 = 0; l$, тогда $\cos\frac{\pi n x_0}{l} = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если изм. t-ру на концах, то получим единственность решения.

Пусть $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $\cos\frac{\pi n x_0}{l} \neq 0$ то же.

Узнаем, когда условия теоремы нарушаются:

Возьмём $x_0 = \frac{p}{q} l$, подставим:

$$\frac{\pi n p l}{q l} = \frac{\pi}{2}(2s+1) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2s+1}{2n}$$ нечётн. / чётн.

$x_0 = \frac{l}{2}$. Пусть $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{l}$.

$u(x,t) = \cos\frac{\pi x}{l}\, e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$

$u(x_0,t) = 0$.

Задача определения источника в уравнении теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t), & 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & 0 < t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x) = 0, & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

— прямая задача.

Обратная задача:

1) дано: $u(x_0,t)=h(t)$. Найти $g(t)$, $0\le t\le T$

2) дано: $u(x_0,t)=h(t)$. Найти $f(x)$, $0\le x\le l$.

1) $$u(x,t)=\frac{1}{l}\overbrace{\int_0^l f(\xi)d\xi}^{f_0}\int_0^t g(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d\xi}_{f_n}\cdot\int_0^t e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2(t-\tau)}\odot$$

$$\odot\, g(\tau)d\tau\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\int_0^t e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2(t-\tau)}g(\tau)d\tau\cos\frac{\pi n x_0}{l}=h(t),$$
$$0\le t\le T.$$

$$\int_0^t K(t,\tau)g(\tau)d\tau=h(t),\quad 0\le t\le T.$$

$$K(t,\tau)=K(t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2(t-\tau)}\cos\frac{\pi n x_0}{l}$$

(ур-е Вольтерра)

$\boxed{T:}$ Пусть $f\in C^4[0,l]$ и $f'(0)=f'(l)=0$, $f(x_0)\ne 0$. Тогда если $h\in C^1[0,T]$, то $\exists!$ реш-е обратной задачи из $C[0,T]$.

<u>Док-во:</u> $|f_n|\le\frac{c}{n^4}$

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{l}\left\{\left[f(x)\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}\right]\Big|_0^l-\right.$$

$$\left.-\frac{l}{\pi n}\int_0^l f'(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right\}=\frac{1}{n^4}\int_0^l f^{(IV)}(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$

$$K_t(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(\frac{\pi n a}{l})^2\theta}\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cos\frac{\pi n x_0}{l},\quad 0\le\theta\le T.$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Мажорирующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| n^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \text{ — ск-ся}$$

$K_t(\theta) \in C[0,T]$.

$$g(t) \underbrace{K(t,t)}_{K(0)} + \int_0^t K_t(t-\tau) g(\tau) d\tau = h'(t), \ 0 \le t \le T.$$

$$K(0) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{\pi n x_0}{l} = f(x_0).$$

$$g(t) + \frac{1}{f(x_0)} \int_0^t K_t(t-\tau) g(\tau) dx = \frac{1}{f(x_0)} h'(t),$$

$0 \le t \le T$ — ур-е Вольтера $\underline{\text{II}}$-$\underline{\text{го}}$ рода.

т.о. $\exists!$ => из принципа сжимающих отображений;
$!$ => из леммы Гронуолла, $\underline{\text{ч.т.д.}}$

$$g(t) + \int_0^t \hat{K}(t,\tau) g(\tau) d\tau = 0.$$

$$|g(\tau)| \le c \int_0^t |g(\tau)| d\tau + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{a}^{0}$$

$$|g(t)| \le a e^{ct} \Rightarrow g = 0.$$

2) $g(t)$ — изв. $f(x) = ?$ по $h(t)$
$g = 1$

$$u(x_0,t) = \frac{t}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2}\right].$$

$$\int_0^l K(t,\xi) f(\xi) d\xi = h(t), \ 0 \le t \le T.$$

$$K(t,\xi) = \frac{t}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2 \cos\frac{\pi n x_0}{l}\cos\frac{\pi n \xi}{l}\cdot$$
$$\cdot\left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right].$$

$K(t,\xi)$ – непр.

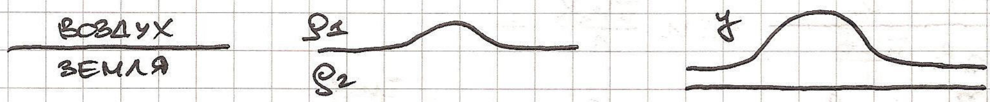
обр. задача неустойчива

ед-ть опр. выберем x_0

$$u(x_0,t) = h(t) \to g(t)$$
$$\to f(t) \text{ – не уст. из } C \text{ в } C.$$

$\exists\, h'(t),\ h(0)=0$ – зад. уст. из C^1 в C

11.10.06 — лекция N 6



$u_{xx}+u_{yy}=0, \quad -\infty<x<\infty, \quad y>0.$

$u(x,0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<\infty,$

$u_y(x,0)=\psi(x), \quad -\infty<x<\infty,$

$\bar\varphi(x)=\bar\psi(x)=0 \Rightarrow \bar u(x,y)=0.$

$\psi(x)=0,$

$\varphi(x)=\frac{1}{n}\sin nx$

$u(x,y)=\frac{1}{n}\sin nx \operatorname{ch} ny$

$|\varphi(x)-\bar\varphi(x)|\le\frac{1}{n} \qquad \|\varphi-\bar\varphi\|_C=\frac{1}{n}\to 0 \quad n\to\infty$

$\sup\limits_{x,y>0}|u(x,y)-\bar u(x,y)|\to\infty, \quad n\to\infty.$

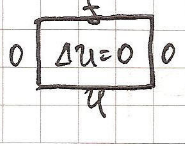
Обратная задача Дирихле (нач.-краевая задача для уравнения Лапласа на отрезке)

$u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,$

$u(0,y)=u(a,y)=0, \quad 0<y<b,$

$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_y(0,x)=\psi(x), \quad 0<x<a.$

Найти $u(x,b)=f(x)$



— задача Дирихле.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{a}\, d\xi \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \sin\frac{\pi n x}{a} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{a}\, d\xi\, \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \sin\frac{\pi n x}{a}, \quad 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b.$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \int_0^a \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{a}\, d\xi \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n (y-b)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\pi n x}{a}.$$

$$u_y(x,0) = \Phi_y(x,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \frac{\pi n}{a} \int_0^a f(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{a}\, d\xi \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \sin\frac{\pi n x}{a}$$

Пусть известно $\Psi(x)$. $f(x) = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{a^2} \int_0^a f(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{a}\, d\xi \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \sin\frac{\pi n x}{a} =$$

$$= \underbrace{\psi(x) - \Phi_y(x,0)}_{\Psi(x)}$$

$$\frac{n}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \sim n e^{-n}$$

$$\int_0^a K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \Psi(x), \quad 0 \le x \le a.$$

$$K(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{a^2 \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} \sin\frac{\pi n x}{a} \sin\frac{\pi n \xi}{a}$$

$Af = \Psi$, A - вп. непр. => задача некорр.

Единственность: Пусть $\Psi = 0$.

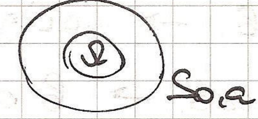
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{\pi n x}{a} = 0$ на $[0, a]$ => $f_n = 0$;

$$F_n = \frac{2\pi n}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} f_n \Rightarrow f_n = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ на } [0,a].$$

$$U(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\, dx'dy'dz'$$

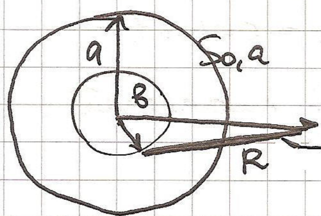
$\Delta U = 0$ вне Ω

U – изв. вне $S_{0,a}$



Обратная задача: дано U вне $S_{0,a}$
найти Ω, ρ.

Ω – шар радиуса b, $\rho = \rho(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2})$



$$U(R) = \int_0^b \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\, d\varphi d\theta dr =$$

длина этого отрезка по т. косинусов

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{\pi} \frac{\rho(r) r^2 \sin\theta \, d\theta dr}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} =$$

Обозн. $t = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$

$$\left|\frac{D(t,r)}{D(\theta,r)}\right| = \begin{vmatrix} t_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{Rr\sin\theta}{t}$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r) r^{\cancel{2}} \cancel{\sin\theta}\, t}{t R \cancel{r} \cancel{\sin\theta}}\, dt dr =$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r) r}{R}\, dt dr = \frac{4\pi}{R} \int_0^b \rho(r) r^2 dr = U(R).$$

Задачи:

1) Пусть $\rho(r)$ известно, и, для простоты,

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$\rho(r) = const = \rho_0$.

Определить форму тела, т.е. b.

$$v(R) = \frac{4\pi}{R}\rho_0\frac{b^3}{3} = \left(\frac{4\pi}{3}b^3\rho_0\right)\frac{1}{R} = \frac{m}{R} \Rightarrow m$$

ρ_0 – изв. $\to$ найдём b

ρ_0 – неизв. $\to$ b опред-ся неединств. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ форма и плотность одновременно не восстанавливаются однозначно.

2) форма известна, $\rho = ?$ $Ш_{a,b}$.

$$\int_0^b \rho(r) r^2\, dr = \frac{v^2(R-a)}{4\pi}a = A = const -$$

– второй момент.

$\rho(r) = cr + d$

$$\int_0^{b=1} \rho(r) r^2\, dr = \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = A,$$

c, d определяются не единств. образом.

при известной форме Ω ρ восст. не единств. образом.

Итак, пусть $\rho(x,y,z)$ – известна, найти $\Sigma = \partial\Omega$

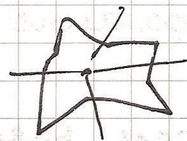
Пусть $\rho(\ldots) = const$.

Тогда справедлива следующая

$\boxed{T:}$ (Новикова): Если Ω – звёздное тело, $\partial\Omega \in \bar{C}^1$, то Σ определяется единственным образом.

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$\boxed{0}$ Тело Ω наз. звёздным относительно т. О, если $\forall$ луг, проведённый из О пересекает $\partial\Omega$ в единств. точке.



Док-во: $v(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in S_{0,a}} \;=$

т.к. тело звёздн. $\Rightarrow$ можно взять его точку центра зв-ти, как начало коорд-т, тогда форма будет описываться $r = \sigma(\theta,\varphi)$.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\sigma(\theta,\varphi)} \frac{\rho_0 r^2\,dr}{\sqrt{(x-r\cos\varphi\sin\theta)^2+(y-r\sin\varphi\sin\theta)^2+(z-r\cos\theta)^2}}\right]d\theta\, d\varphi$$

$K\sigma = v|_\Sigma$
$\sigma = ?$

[звёздность гарантирует единств-то получ. формы].

18.10.06 – лекция № 7

Обратные задачи для уравнений колебаний.

Рассм. задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ 0<x<l, \ 0<t\le T, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ 0<t\le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ 0\le x\le l, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0\le x\le l. \end{cases}$$ – прямая задача

Две обратные задачи, касающиеся нахождения нач. данных:

1) дано: $u(x,T) = g(x)$, $x\ge 0$, $x\le l$ –
– финальное смещение,
найти: $\varphi(x)$, если $\psi(x)$ – известно.

2) дано: $u(x,T) = g(x)$, $0\le x\le l$ –
– финальное смещение
найти: $\psi(x)$, если $\varphi(x)$ – известно.

1) Пусть для простоты $\psi(x) = 0$.

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\cos\frac{\pi n a t}{l}\cdot$$
$$\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}, \ 0\le x\le l, \ t>0,$$

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\cos\frac{\pi n a T}{l}\sin\frac{\pi n x}{l} = g(x)$$

$$\int_0^l K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = g(x), \quad 0\le x\le l$$

$$A_T\varphi = g : L_2[0,l] \xrightarrow{A_T} L_2[0,l].$$

Если $T = \frac{2l}{a}$, то $A_T = E$.

Если $T = \frac{2p}{2q-1}\cdot\frac{l}{a}$, то задача оказывается корректной; $\cos\frac{\pi n a T}{l} = \cos\frac{2\pi n p}{2q-1}$.

Покажем, что $\ne 0$ ни при каком n:

Предположим противное, т.е. $\cos\frac{2\pi n p}{2q-1} = 0$, тогда $\frac{2\pi n p}{2q-1} = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $4pn = (2k+1)(2q-1)$

$\cos\frac{2pn\pi}{2q-1}$ — периодический по n с периодом $2q-1$, т.е. $f(n) = \cos\frac{2pn\pi}{2q-1}$: $f(\mu+2q-1) = f(\mu)$.

$\Rightarrow$ имеется конечный min этих косинусов:

$$\min_{n\in\mathbb{N}}\left|\cos\frac{2pn\pi}{2q-1}\right| \ge c > 0$$

Пусть $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ — представима рядом Фурье,

тогда $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\cos\frac{\pi n T a}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 / \cos^2\frac{\pi n a T}{l} \le \frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2,$$

т.е. $\|\varphi\|_{L_2} \le \frac{1}{c}\|g\|$, т.е. A_T^{-1} огр. из L_2 в L_2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ задача корректна.

Понятно, что задача корректна далеко не при всех T:

$T = \frac{(2q-1)l}{2pa}$ — задача некорректна.

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Т.е. найдём такое T, что cos обр. в 0 и попадаем на случай неединственности!

$$\cos\frac{\pi n a T}{l} = \cos\frac{\pi n(2q-1)}{2p}\Big|_{n=p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)=0 \begin{array}{l}\nearrow \psi=0\\ \searrow \psi=\sin\frac{\pi p x}{l}\end{array}.$$

$A_{\frac{2p}{2q-1}\cdot\frac{l}{a}}$ – корр., $A_{\frac{2q-1}{2p}\cdot\frac{l}{a}}$ – некорр.

Причиной такой ситуации является то, что A_T не непрерывен по T.

Докажем, что A_T – не непр. по T:

н.д.: $\|A_{T_1}-A_{T_2}\|$ не мала, когда $|T_1-T_2|$ мала.

$$T_1=t_0=\frac{2l}{a},\ T_2=t_{0k}=\frac{(4k-1)}{2ka}l\to t_0,\ k\to\infty$$

$$A_{t_0}=E,\quad \|A_{t_{0k}}-A_{t_0}\| = \sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le 1}\|(A_{t_{0k}}-A_{t_0})\varphi\|_{L_2[0,l]} =$$

$$=\{\|A_{t_0}-A_{t_{0k}}\|\geq 1\} =$$

$$=\sup_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]}\le 1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2\left(\cos\frac{\pi(4k-1)n}{2k}-1\right)\right\}^{1/2},$$

т.к. при $n=k$ $\cos\frac{\pi(4n-1)}{2}=0$

$\Rightarrow \sup\le 1$, т.к. предъявлен пример с единицей.

2) Опр. $\psi(x)$ по $g(x)$. Пусть для простоты $\varphi(x)=0$.

Выпишем решение:

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \Psi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \sin\frac{\pi n a t}{l} \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad 0 \le x \le l.$$

$$A_T \varphi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \Psi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \frac{1}{\pi n a} \sin\frac{\pi n a T}{l} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} = g(x), \quad 0 \le x \le l.$$

$$\frac{1}{\pi n a} \Psi_n \sin\frac{\pi n a T}{l} = g_n, \quad \forall g \in L_2 \ \exists \Psi \in L_2 ?$$

$$\exists \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\sin^2 \frac{\pi n a T}{l}} (\pi n a)^2 < \infty; \text{ но } \forall g \text{ реш. } \nexists$$

$$g_k \sim \frac{1}{k}, \ \{g_k\} \in l_2 \sim g \in L_2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\sin^2 \frac{\pi n a T}{l}} n^2 = \infty.$$

Задача определения коэффициента в уравнении теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t = k(t) u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ 0 < t \le T, \ k(t) > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$ — прямая задача

Обратная задача:

Найти $k(t)$, если дано $u(x_0,t) = g(t)$, $x_0 \in (0,\pi)$.

Выпишем решение прямой задачи:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin ns\, ds\; e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \sin nx$$

$$x = x_0: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin ns\, ds\; e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \sin nx_0 = g(t),\ 0 \le t \le T.$$

$$u_t(x_0,t) = k(t)\, u_{xx}(x_0,t) = g(t).$$

$$k(t) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t\,|\,k)}$$

u зависит от k функционально

$k = A(k)$ – нелин. операт. ур-е II рода.

Одна из наиболее мощных групп методов: МЕТОДЫ СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ. (нужно для док-ва $\exists$-я и ед-ти реш-я).

Докажем, что $\exists!\ k = A(k)$ (в малом) огр. коэф-ты K ⓘ?

условия:

1) $|\varphi_n| \le \frac{c}{n^6} \sim \varphi(x)$ – дост. гладкая и вып-ся условие периодичности.

2) $\varphi_n \sin nx_0 \ge 0,\ \forall n$ и $\exists m: \varphi_m \sin mx_0 > 0$.

3) $g(t) \in C^1[0,T]$ и $g(0) = \varphi(x_0)$, $g(t) < 0$, $\forall t \in [0,T]$.

$c\ [0,T_0]$, $T_0 \in (0,T]$.

Рассм. $K = \{ k(t) \mid k(t) \in C[0,T_0],\ 0 \le k(t) \le k_0,\ \forall k \in [0,T_0] \}$

условия:

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1) АКСК

$\forall k \in K$ оператор A — определён.

$$u_{xx}(x_0, t; k) = -\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_n n^2 e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \sin n x_0}_{O\left(\frac{1}{n^4}\right)}$$

$O(\frac{1}{n^4})$ — поточная ряд сх-ся по пр. Вейерштрасса.

Имеем: $u_{xx}(x_0, t; k) < 0$, $\forall t \in [0, T_0]$

[экспонента, положительное дело, в ноль не обращается]

$A(k)$ — непр. по k, $\forall k \in K$ и $A(k) > 0$, $\forall k \in K$

Докажем: $A(k) \le k_0$, $\forall k \in K$

$$(A(k)) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0, t; k)} \le \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 e^{-m^2 k_0 T_0} \sin m x_0} \le k_0$$

нс-е на T_0, k_0

$$\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 \sin m x_0} \le k_0 e^{-m^2 k_0 T_0}$$

2) условие сжатия:

[на следующей лекции]

25.10.06 – лекция N 8

Прямая задача:

$$\begin{cases} u_t = k(t)\, u_{xx}, \quad 0<x<\pi, \; 0<t\le T. \\ k(t)>0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\le x\le \pi \end{cases}$$

Обратная задача:

$$u(x_0,t) = g(t), \quad x_0 \in (0,\pi).$$

$$k(t) = \frac{u_t(x_0,t)}{u_{xx}(x_0,t)} = \frac{g(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} = Ak$$

1) $AK \subseteq K$

2) A – опер-р сжатия в $\|\cdot\|_C$

1) $$\frac{\|g'\|}{\varphi_m m^2 \sin mx} \le e^{-m^2 k_0 T} k_0$$

2) $$\|Ak_1 - Ak_2\| \le \|g'\| \max \left| \frac{u_{xx}(x_0,t;k_1) - u_{xx}(x_0,t;k_2)}{u_{xx}(x_0,t;k_1)\cdot u_{xx}(x_0,t;k_2)} \right| \le \|g'\| \frac{e^{2m^2 k_0 T}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \cdot$$

$$\cdot \max_{t\in[0,T_0]} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 \cdot$$

$$\cdot \left| e^{-n^2 \int_0^t k_1(\tau)d\tau} - e^{-n^2 \int_0^t k_2(\tau)d\tau} \right| \le$$

$$\{ |e^{-x} - e^{-y}| \le |x-y| \}$$

$$\le \frac{\|g'\| e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 \sin n x_0 \cdot$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\odot \left| \int_0^t [k_1(\tau) - k_2(\tau)]\, d\tau \right| \leq T_0 \| k_1 - k_2 \|_{C[0;T_0]}$$

$$\leq \frac{\|g'\| e^{2m^2 k_0 T_0}}{\varphi_m^2 m^4 (\sin m x_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 \sin n x_0 < 1 \sim$$

а сжатие.

Пусть $k_0 T_0 = 1$, T_0 — достаточно малое.

$\boxed{T.}$ [единственность в целом] Пусть $\varphi(x)$ условиям, сформулир. выше, тогда реш-е обратной задачи единственно.

__Док-во:__ $u(x_0 t) =$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin ns\, ds \sin n x_0 e^{-n\int_0^t k_i(\tau) d\tau} =$$

$= g(t)$, $i = 1, 2$

Пусть $\exists$ $k_1(t)$, $k_2(t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n x_0 \left[e^{-n^2 \int_0^t k_1(\tau) d\tau} - e^{-n^2 \int_0^t k_2(\tau) d\tau} \right] = 0.$$

$$f(p_1) - f(p_2) = \int_0^1 (f' p_2 + \Theta (p_1 - p_2))\, d\Theta\, (p_1 - p_2)$$

$$\Rightarrow e^{-p_1} - e^{-p_2} = -\int_0^1 e^{-p_2 - \Theta(p_1 - p_2)}\, d\Theta\, (p_1 - p_2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n x_0 \int_0^1 e^{-n^2 \int_0^t k^2(\tau) d\tau - \Theta^2 n^2 \int_0^t k_1(\tau) - k_2(\tau) d\tau}\, d\Theta \otimes$$

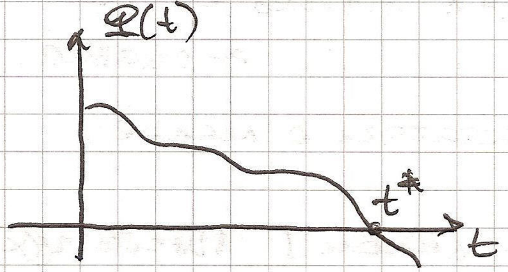
$$\otimes\, n^2 \int_0^t [\underbrace{k_1 - k_2}_{=0}]\, d\tau$$

$$\Phi(t) \int_0^t (k_1(\tau) - k_2(\tau))\, d\tau = 0, \quad \forall t \in [0; T].$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Если $\Phi(t) \neq 0, \forall t \Rightarrow k_1(t) = k_2(t), \forall t$

$$\Phi(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \underbrace{\sin n x_0}_{0} \geq \varphi_m m^2 \sin m x_0 > 0$$



Пусть $\exists t^* : \Phi(t^*) = 0$

$t < t^*$ $\Phi(t) > 0 \Rightarrow k_1(t) = k_2(t), \ t < t^*$

$$\Phi(t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \varphi_n \sin n x_0 \, e^{-n^2 \int_0^{t^*} k_1(\tau) d\tau} \geq$$

$$\geq \underbrace{m^2 \varphi_m \sin m x_0}_{>0} e^{-m^2 \int_0^{t^*} k_1(\tau) d\tau} > 0$$

$\Rightarrow \Phi(t) \neq 0$ на $[0, T_0]$, $k_1 = k_2$, $\forall t \in [0, T]$,

ч.т.д.

Обратная задача Штурма – Лиувилля и её связь с обр. задачей для УРЧП.

(1) $-y''(x,\lambda) + q(x) y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \ 0 < x < \pi$

$\left\{ \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)\right) \Psi = E\Psi \right\}$

(2) $y(0,\lambda)\sin\alpha + y'(0,\lambda)\cos\alpha = 0$

$0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$

(3) $y(\pi,\lambda)\sin\beta + y'(\pi,\lambda)\cos\beta = 0$

$\{\lambda_n\}$ – собств. зн., $\{y_n(x,\lambda)\}$ – собств. ф-ции.

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

λ_n – действит., счётное число

$\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$.

$\{y_n(x,\lambda)\}$ – полная система в $L_2[0,\pi]$.

Прямая задача:

задача Ш–Л – дано $q(x)$, найти $\{\lambda_n\}$ и $\{y_n\}$.

Обратная задача:

обр. з. Ш–Л – дано $\{\lambda_n\}$. Найти $q(x)$

$\subset$ решение такой задачи не единств-но.

Добавим условие (4):

$$y(\pi,\lambda)\sin\gamma + y'(\pi,\lambda)\cos\gamma = 0,$$
$$0 \le \gamma \le \pi,\ \gamma \ne \beta.$$

Рассмотрим две задачи Ш–Л:

I: (1), (2), (3), $\{\lambda_n\}$

II: (1), (2), (4), $\{\mu_n\}$.

Т.о. обр. задача #1:

даны $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, найти $q(x)$

обр. задача #2:

дано $\{\lambda_n\}$, известно $q(x) = q(\pi - x)$,

$\alpha = -\beta$. Найти $q(x)$.

[ОЗ #1 и ОЗ #2 – реш.].

01.11.06 – лекция №9

Прямая задача:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - q(x)u, \ 0<x<\pi, \ t>0, \ q(x)\geq 0, \\ u_x(0,t)=0, \ t>0, \ u_x(\pi,t)=D(t), \ t>0, \\ u(x,0)=0, \ 0\leq x\leq \pi, \\ D\in C^1[0,+\infty), \ D(0)=0, \ D(t)=0, \ t\geq T_0 \end{cases}$$

ОЗ #1: $u(0,t)=h(t)$ – известна;
найти $q(x)$

ОЗ #2: $u(\pi,t)=g(t)$ – известна;
найти $q(x)$

$v(x,p) = \int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}\,dt$ ← преобразование Лапласа

$v(x,p)$ – аналитическая при $\operatorname{Re} p\geq 0$.

т.к. $u(x,t)\to 0$ при $t\to\infty$

со скоростью $e^{-\lambda_0 t}$, где $\lambda_0=\min\limits_n(\lambda_n)$

$$\int\limits_0^{+\infty} u_t e^{-pt}\,dt = ue^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} ue^{-pt}\,dt =$$

$$= p\int\limits_0^{+\infty} ue^{-pt}\,dt = pv.$$

$\Rightarrow v_{xx} - q(x)v = pv(x,p), \ 0<x<\pi,$

$v_x(0,p)=0, \ v_x(\pi,p)=\tilde{D}(p)$, где

GODZINA	TIME	6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ	DAY	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC	MONTH	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$\tilde{D}(p) = D(t) \leftarrow$ преобразование Лапласа.

Рассм. $w_{xx} - q(x)w = pw,\ 0 < x < \pi$

$w_x(0,p) = 0,\ w(0,p) = 1$

$w(x,p)$ — аналитическая по p на $\mathbb{C}$

$v(x,p) = c(p)\, w(x,p)$, т.к.

$$\begin{vmatrix} v_x' & w_x' \\ v & w \end{vmatrix}_{x=0} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} v_x' & w_x' \\ v & w \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$$

$v'(\pi,p) = \tilde{D}(p) = c(p)\, w'(\pi,p)$

$\Rightarrow N(x,p) = \dfrac{\tilde{D}(p)\, w(x,p)}{w'(\pi,p)}$ — реш. с. прямой задачи

ОЗ #2: $\quad v(\pi,p) = \tilde{D}(p)\dfrac{w(\pi,p)}{w'(\pi,p)}$

Единственность решения обр. задачи:

Пусть $\exists\ q_1(x)$ и $q_2(x)$ $\sim$ $v_1(\pi,p) = v_2(\pi,p)$

$\Rightarrow \tilde{D}(p)\dfrac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \tilde{D}(p)\dfrac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \dfrac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)}$.

$y'' - q(x)y = -\lambda y(x,\lambda)$

$\lambda = -p$

$p_n = -\lambda_n$ $\qquad w_1(\pi,p_n) = 0 \sim \begin{cases} y'(0,\lambda_n) = 0, \\ y(\pi,\lambda_n) = 0, \end{cases}$

$\tilde{p}_n = -\mu_n$ $\qquad w_1'(\pi,\tilde{p}_n) = 0 \sim \begin{cases} y'(\pi,\mu_n) = 0, \\ y'(0,\mu_n) = 0. \end{cases}$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Если $\rho_n = \hat{\rho}_n \Rightarrow w \equiv 0$ ⨳ $w(a,p) = 1$

$$\begin{cases} \lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(2)} \\ \mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)} \end{cases} \Rightarrow q_{r1} = q_{r2} \quad \{\text{по т. Борга}\}$$

ОЗ #1: $\quad v(0,p) = \hat{v}(p) \dfrac{\overbrace{w(a,p)}^{=1}}{w'(a,p)}$

Единственность реш-я ОЗ #1:

Пусть $\exists\ q_{r1}(x), q_{r2}(x)$ – реш-я $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{v}(p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{\tilde{v}(p)}{w_2'(\pi,p)} \Rightarrow \frac{1}{w_1'(\pi,p)} = \frac{1}{w_2'(\pi,p)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нули знаменателей равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_n^{(1)} = \mu_n^{(2)} \Rightarrow q_{r1} = q_{r2}$ ⨳

Рассм. $\quad y'' - q_r(x)\, y = -\lambda y, \quad q_r(x) \geq q_{r0}$

$y'(0,\lambda) = y'(\pi,\lambda) = 0.$

Собств. знач-я λ_n:

1) λ_n – действ.

2) $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, λ_n – простые, $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$

3) $\{y_n(x) = y(x, \lambda_n)\}$ – ОНС

4) $\lambda_0 \geq q_{r0}$.

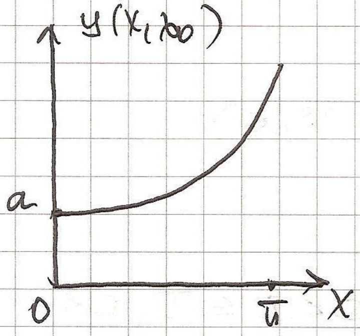
Док-во (4): Пусть $\lambda_0 < q_{r0}$. Тогда:

$y''(x,\lambda_0) = (q_r(x) - \lambda_0)\, y, \quad q_r(x) - \lambda_0 > 0$

$y'(0,\lambda_0) = 0$, Пусть $y(0,\lambda_0) = a > 0$.

$\Rightarrow y(x,\lambda_0) > 0 \Rightarrow y'(x,\lambda_0) > 0$ ⨳ $\underbrace{y'(\pi,\lambda_0)}_{\text{т.к. }[\ldots]}$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



$D(t) = 0,\ t \geq T_0,$

$D(t) > 0,\ 0 < t < T_0,$

$\tilde{D}(p) = \int_0^{T_0} D(t) e^{-pt} dt > 0,$ для $\forall$ действ. p.

ОЗ #2. Считаем, что $D(t)$ - неизвестно

$$\tilde{D}_1 \frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \tilde{D}_2 \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)},$$

p_n и $\tilde{p}_n$ - действительные.

нули $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ - не действительны =>

=> они совпадают только между собой =>

=> $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_2$ [по нулям]

$$\Rightarrow \frac{w_1(\pi,p)}{w_1'(\pi,p)} = \frac{w_2(\pi,p)}{w_2'(\pi,p)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q_1(x) = q_2(x) \Rightarrow w_1(x,p) = w_2(x,p). \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{D}_1(p) = \tilde{D}_2(p) \Rightarrow D_1(t) = D_2(t)$

Это - задача с неизвестным источником тепла.

Метод квазиобращения.

Прямая задача:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Обратная задача:

$u(x,T) = g(x)$ - дано, найти $\varphi(x)$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 t} \sin nx$

$\tau = T - t$, $\begin{cases} v_\tau = -v_{xx},\ 0 < \tau \le T,\ 0 < x < \pi, \\ v(0,\tau) = v(\pi,\tau) = 0, \\ v(x,0) = g(x) \end{cases}$

$v(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 \tau} \sin nx$, $\forall g \in L_2\ \nexists v(x,\tau)$

Рассмотрим: $v_\tau = -v_{xx} - \alpha v_{xxxx}$,
$0 < x < \pi,\ 0 \le \tau \le T,\ \alpha > 0$

$v(0,\tau) = v(\pi,\tau) = 0$

$v_{xx}(0,\tau) = v_{xx}(\pi,\tau) = 0$

$v(x,0) = g(x)$.

$v(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2\tau - \alpha n^4 \tau} \sin nx$

$v_\alpha(x,\tau) = R_\alpha g(x)$, $v_\alpha = R_\alpha g$

$\|\bar{g} - g_\delta\|_{L_2[0,\pi]} \le \delta$, где $\bar{g} = K\bar{\varphi}$

Будем считать, что известно не точное решение g, а его приближение $\bar{g}$.

$\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\| \le \|R_\alpha g_\delta \overset{①}{-} R_\alpha \bar{g}\| + \|R_\alpha \bar{g} \overset{②}{-} \bar{\varphi}\|$

$\|R_\alpha (g_\delta - \bar{g})\| \le \|R_\alpha\| \delta$

$\|R_\alpha g\|^2 = \|\sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 T - \alpha n^2 T} \sin nx\|^2$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\max_{n\geq 1} n^2 T(1-\alpha n^2) = T\max_{n\geq 1} \alpha\frac{n^2}{\alpha}(1-\alpha n^2) =$$

$$= \frac{T}{\alpha}\max_x x(1-x) = \frac{T}{4\alpha}$$

$$\Rightarrow \|R_\alpha g\|^2 \leq e^{\frac{T}{2\alpha}}\|g\|^2 \Rightarrow \|R_\alpha\| \leq e^{\frac{T}{4\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) \leq e^{\frac{T}{4\alpha}}\cdot\delta$$

$$\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|^2 = \|R_\alpha K\bar{\varphi} - \bar{\varphi}\|^2 =$$

$$= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\bar{\varphi}_n e^{-\alpha n^4 T} - \bar{\varphi}_n)\sin nx\right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}^{(2)} \left\{\bar{\varphi}_n^2 \|\sin nx\|^2 (1-e^{-\alpha n^4 T})^2\right\} \leq$$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty}\bar{\varphi}_n^2\|\sin nx\|^2}_{(2)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N}(1-e^{-\alpha n^4 T})\cdot}_{(1)}$$

$$\cdot\,\bar{\varphi}_n^2\|\sin nx\|^2.$$

Рассм. $\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $(2) < \varepsilon/2$ и

$\exists\alpha(N(\varepsilon),\varepsilon)$: $(1) < \varepsilon/2 \Rightarrow \|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|^2 < \varepsilon$

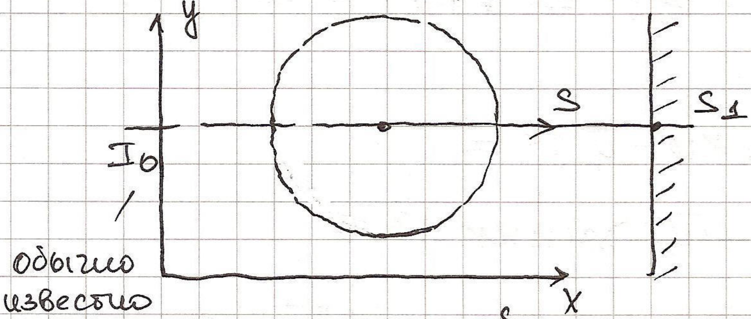
$$\Rightarrow \|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\| \leq e^{\frac{T}{4\alpha}}\cdot\delta + \gamma(\alpha) \to 0 \text{ при } \alpha \to 0$$

α — δ/м величина

$\boxed{T}$ Если $\alpha = \alpha(\delta) > 0$: $\delta e^{\frac{T}{4\alpha(\delta)}} \to 0$ при $\delta \to 0$, то $\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\|_{L_2} \to 0$ при $\delta \to 0$.

08.11.06 — лекция N 10

Обратные задачи интегральной геометрии.

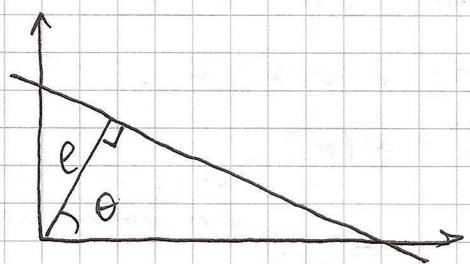


$$\frac{dI(s)}{ds} = -\gamma\rho(x,y)\Big|_{\substack{x=x(s)\\ y=y(s)}} I(s)$$

$$I(s) = I_0 e^{-\gamma\int_0^s \rho(x,y)\,ds}$$

$$\frac{I_1}{I_0} = e^{-\gamma\int_0^{S_1}\rho\,ds} \Rightarrow \int_L \rho(x(s),y(s))\,ds = I_L$$

$L \in \mathfrak{L}$ сем. кривых γ, изв. I_L, опр. ρ



$$\bar{r} = \{x,y\}$$

$$L:\ (\bar{r},\bar{n}) = l$$

$$\bar{n} = \bar{n}(\theta)$$

$$\int_{L(l,\theta)} \rho(x(s),y(s))\,ds = V(l,\theta)$$

$\rho \to f;\quad \theta \to \varphi$

$$x(s) = l\cos\varphi - s\sin\varphi;\quad l = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$y(s) = l\sin\varphi + s\cos\varphi;\quad s = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds = \psi(l,\varphi)$$

↑ основное уравнение компьютерной томографии.

$R : f(x,y) \to u(l,\varphi)$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

преобразование Радона $\qquad u(l,\varphi+\pi) = u(-l,\varphi)$

$-\infty < l < \infty,\ 0 \le \varphi \le \pi,$
$0 \le l < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

$R^{-1} a = f$

условия на f:

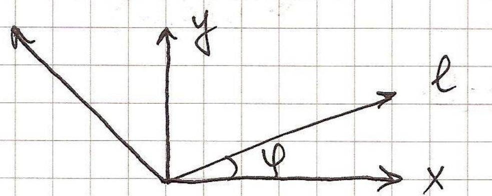
Пусть $|f(x,y)| \le \dfrac{c}{(1+x^2+y^2)^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$

$f \in C(\mathbb{R}^2)$

тогда интеграл определён.

$$|u(l,\varphi)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x(s),y(s))|\,ds \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{(1+l^2+s^2)^{1+\varepsilon}}\,ds \le$$



$\Rightarrow x^2(s)+y^2(s) = l^2+s^2$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2+s^2)}\,ds$ — сх-ся

$$\le \frac{c}{(1+l^2)^{1+\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+l^2)^{1/2}\, d\left(s/\sqrt{1+l^2}\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{s^2}{1+l^2}}_{\xi^2=}\right)^{1+\varepsilon}} =$$

$$= \frac{c}{(1+l^2)^{1+\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+l^2)^{1/2}\,d\xi}{(1+\xi^2)^{1+\varepsilon}} \le \frac{c}{(1+l^2)^{1/2+\varepsilon}},$$

при $l \to \infty$: $|u(l,\varphi)| \le \dfrac{c}{l^{1+2\varepsilon}}$, $l \to \infty$.

радоновская томография $\equiv$ если $x(s)$ и $y(s)$ явл. прямыми.

$\boxed{T:}$ [проекционная] $\downarrow$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \hat{u}(\omega,\varphi)$$

$$\hat{u}(\omega,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\ell,\varphi) e^{-i\omega\ell} d\ell$$

$$\hat{f}(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)} dx\,dy$$

Док-во: $\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{-i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} dx\,dy \ominus$$

$$dx\,dy = \left|\overbrace{\frac{D(x,y)}{D(\ell,s)}}^{=1}\right| d\ell\, ds$$

$$\ominus \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi, \ell\sin\varphi - s\cos\varphi)\cdot$$

$$\cdot e^{-i\omega\ell} d\ell\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\ell} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\ell\cos\varphi - s\sin\varphi, \ell\sin\varphi - s\cos\varphi)\cdot}_{=u(\ell,\varphi)}$$

$\cdot\, ds\, d\ell = \hat{u}(\omega,\varphi)$, ч.т.д.

СЛЕДСТВИЯ:

1) Единственность решения задачи томографии:

Пусть $\exists f_1 \neq f_2$, $\bar{f} = f_1 - f_2 \Rightarrow R\bar{f} = Rf_1 - Rf_2 =$
$= u_1 - u_2 = 0$, т.о. $R\bar{f} = 0$

$\hat{\bar{f}}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \hat{0} = 0 \Rightarrow \bar{f} = 0.$

2) Алгоритм решения задачи компьютерной томографии:

$$\boxed{u(l,\varphi)} \xrightarrow{\text{БПФ}} \boxed{\hat{u}(\omega,\varphi)} \longrightarrow \boxed{\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)}$$

$$\boxed{f(x,y)} \xleftarrow[\text{в } \mathbb{R}^2]{\text{БПФ}^{-1}} \boxed{\hat{f}(\omega_1,\omega_2)} \longleftarrow \text{пересчёт в } (\omega_1,\omega_2)$$

Задача компьютерной томографии в случае интегральной геометрии.

$$f(x,y) = \begin{cases} f(\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \le R^2, \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

$$u(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi, l\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds =$$

$$= \int_{-\sqrt{R^2-l^2}}^{\sqrt{R^2-l^2}} f(\sqrt{l^2+s^2})\,ds = 2\int_0^{\sqrt{R^2-l^2}} f(\sqrt{l^2+s^2})\,ds =$$

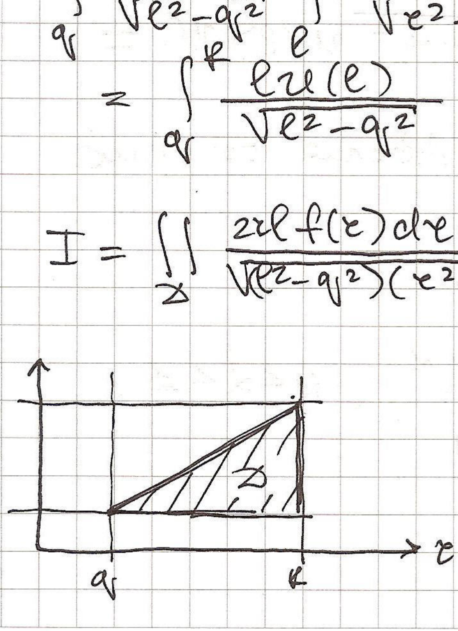
$$= 2\int_l^R f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-l^2}} = u(l) \quad \Big| \frac{l}{\sqrt{l^2-q^2}} \text{ и проинтегр.}$$

Интегральное ур-е Абеля I-го рода:

$$\int_q^R \frac{l}{\sqrt{l^2-q^2}} \int_l^R \frac{2f(r)r}{\sqrt{r^2-l^2}}\,dr\,dl =$$

$$= \int_q^R \frac{l\,u(l)}{\sqrt{l^2-q^2}}\,dl$$

$$I = \iint_D \frac{2rl f(r)\,dr\,dl}{\sqrt{(l^2-q^2)(r^2-l^2)}} = \int_q^R 2f(r)\,dr \int_q^r \frac{dl\,dr}{\sqrt{(l^2-q^2)(r^2-l^2)}}$$



$$\int_q^r \frac{dl}{\sqrt{(l^2-q^2)(r^2-l^2)}} = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{r^2-q^2}{2}\,dz}{\frac{r^2-q^2}{2}\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$l^2 = (r^2-q^2)\frac{z}{2} + \frac{1}{2}(r^2+q^2)$$

$$2\ell\, d\ell = (r^2 - q_r^2)/_2\, dz$$

$$(\ell^2 - q_r^2) = (r^2 - q_r^2)\frac{z+1}{2}$$

$$r^2 - \ell^2 = (\ \ ^2 - q_r^2)(1-z)/_2 \qquad [?]$$

$$\Leftrightarrow \pi \int_{q_r}^{R} r R(r)\, dr = \int_{q_r}^{R} \frac{\ell u(\ell)\, d\ell}{\sqrt{\ell^2 - q^2}}$$

продифф. по q_r:

$$q_r \cdot f(q_r) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dq_r}\int_{q_r}^{R}\frac{\ell u(\ell)\, d\ell}{\sqrt{\ell^2 - q_r^2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ находим $f(q_r)$.

необх. усл-е разрешимости: $u(R) = 0$.

Если инт-л можно взять по частям, то:

$$\int_{q_r}^{R}\frac{\ell u(\ell)\, d\ell}{\sqrt{\ell^2 - q_r^2}} = \underbrace{u(\ell)\sqrt{\ell^2 - q_r^2}\Big|_{q_r}^{R}}_{0} -$$

$$- \int_{q_r}^{R}\sqrt{\ell^2 - q_r^2}\, u'(\ell)\, d\ell$$

Т.о. $f(q_r) = \frac{1}{\pi q_r}\frac{d}{dq_r}\int_{q_r}^{\ell}\sqrt{\ell^2 - q_r^2}\, u'(\ell)\, d\ell =$

$= -\frac{1}{\pi}\int_{q_r}^{R}\frac{u'(\ell)\, d\ell}{\sqrt{\ell^2 - q_r^2}}$ – ур-е Абеля решено.

$$f(0) = \int_0^R \frac{u'(\ell)\, d\ell}{\ell}$$

$$|u(\ell_1) - u(\ell_2)| \le c\, |\ell_1 - \ell_2|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

15.11.06 – лекция N 11

Методы решения некорректных обратных задач. Обратные задачи на компактных мн-вах.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - банах.,
A – непр.
Будем предполагать, что для $u = \bar{u}$ $\exists!$ решение $\bar{z}$, т.е. $A\bar{z} = \bar{u}$. Из результатов экспериментов известно прибл. u_δ:
$\| u_\delta - \bar{u} \|_U \le \delta$.

Задача: изв. $u_\delta \in U$: $\| u_\delta - \bar{u} \|_U \le \delta$
найти z_δ : $\| A z_\delta - u_\delta \| \le \delta$ и
$z_\delta \to \bar{z}$, $\delta \to 0$.

$Z_\delta = \{ z \in Z$, т.ч. $\| Az - u_\delta \| < \delta \}$

Казалось бы, мы можем брать $\forall$ эл-т из и объявл. его приближ. решением, однако, не тут-то было: это мн-во слишком широкое. Его нужно сузить.

Первый способ сужения предл. Тихонов:
Пусть $\bar{z} \in M$, где M – компакт в Z,

$Z_\delta \cap M = \{ z \in Z \mid z \in M,\ \|Az - u_\delta\| < \delta \} = Z_\delta^M$

$A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{z} \in Z_\delta^M$

Оказ-ся, $\forall z \in Z_\delta^M$ является приближённым решением.

$\boxed{T:}$ При $\delta \to 0$ $\sup\limits_M \|z - \bar{z}\| \to 0$.

<u>Док-во:</u> Пусть $\exists \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n > 0\}$ и $\{z_{\delta_n} \in Z_{\delta_n}^M\}$: $\|z_{\delta_n} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$.

$\{z_{\delta_n}\} \subset M \Rightarrow$ можно выделить подпосл-ть $\{z_{\delta_{n_p}}\}$, т.ч. $z_{\delta_{n_p}} \to z^* \in M$

Кроме того, $\|A z_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \leq \delta_{n_p}$, $\forall p$

$u_{\delta_{n_p}} \to \bar{u}$ при $p \to \infty$.

$Az^* = \bar{u}$, но $A\bar{z} = \bar{u} \Rightarrow z^* = \bar{z}$

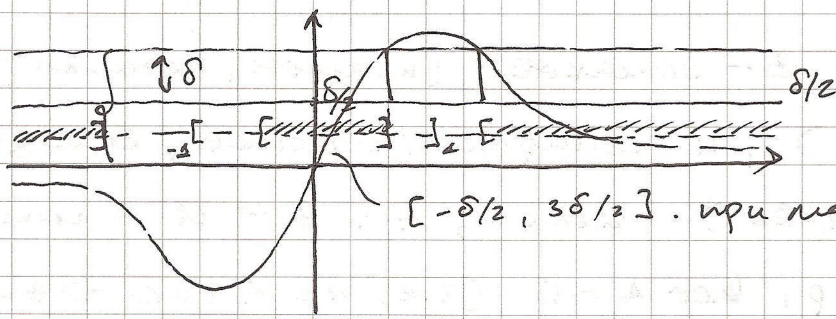
$z_{\delta_{n_p}} \to \bar{z}$, с другой стороны,

$\|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$ $\times\times$, <u>чтд</u>.

<u>ПРИМЕР:</u> $A: R^1 \to R^1$.

$Az = \dfrac{z}{z^2 + 1}$. Пусть требуется решить ур-е $\bar{u} = 0 \Rightarrow$ точное реш-е : $\bar{z} = 0$, и оно единственно.

$\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, $|u_\delta| \leq \delta$. Пусть $u_\delta \leq \delta/2$:



$[-\delta/2, 3\delta/2]$. при малых $\delta \subset [-1, 1]$.

$$Z_\delta = \left\{ z \,\middle|\, \left| \frac{z}{z^2+1} - \frac{\delta}{2} \right| \le \delta \right\}.$$

Компакт выбирается из каких-то априорных соображений.

Метод квазирешений

$\boxed{О.}$ Квазирешением $\tilde{z}$ на мн-ве M наз-ся эл-т, т.ч. $\bar{z} = \arg\inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$.

Пусть $\underline{M}$ – компакт. На нём рассм-ся ф-ал $\Phi(z) = \|Az - u\|$, $z \in M$,

Если A – непр. $\Rightarrow$ Φ – непр. ф-я $\Rightarrow$ по т-ме Вейерштрасса, непр. ф-я на компакте достигает своих точн. верхн. и нижн. граней.

$$\exists\, z: \ \Phi(z) = \inf_{z \in M} \Phi(z) = \Phi^*$$

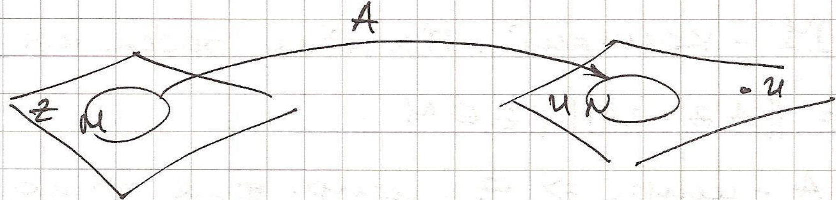
Это означает, что квазирешение всегда сущ-ет. Правда, если $\Phi^* = 0$, то $A\bar{z} = u$, а если $\Phi^* > 0$, то классич. реш-е $Az = u$ не существует.

$\boxed{T.}$ Пусть Z – банахово (полное, бесконечномерное, евкл.), U – сепараб. (счётное, всюду плотное мн-во), пусть $A: Z \to U$ – лин. непр. опер-р, $\ker A = 0$ (т.е. из $Az = 0 \Rightarrow z = 0$).
Если M - выпукл. компакт. в Z, то $\exists !$ квазирешение, и оно устойчиво

<u>СЛЕДСТВИЕ:</u> Задача нахождения квазирешения корректна.

<u>Док-во:</u> 1) [сущ-е]: квазирешение $\exists$-ет для $\forall u \in U$.

2) [единственность]



$$\tilde{z} = \arg\inf_{v \in N} \|v - u\|, \quad \inf_{v \in N} \|v - u\| = \|\tilde{v} - u\|_{\tilde{v} \in N}$$

$\tilde{v}$ – проекция эл-та u на мн-во N (по опр-ю): $\tilde{v} = P_N u$.

$v \in N$, $\tilde{v} \in N$, $\tilde{v} \overset{def}{=} P_N u$

$\tilde{v} \in AM \Rightarrow \exists \tilde{z} : A\tilde{z} = \tilde{v}$

P_N – однозн. и непр. ($\|P_N\| \le 1$)

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$\boxed{\tilde{z} = A^{-1} P_N u}$ A^{-1} – непр. на N, ч.т.д.

Использование квазирешений для нахождения приближённого решения операторного уравнения.

$$\tilde{Z}_\delta^M = \{ z \in M \subset Z \mid z = \arg\inf_{z \in M} \|Az - u_\delta\| \}$$

$$\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$$

$\boxed{T!}$ Пусть $\bar{z} \in M$. Тогда $\sup_{z \in \tilde{Z}_\delta^M} \|z - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

[$\tilde{Z}_\delta^M$ стягивается к точке]

Док-во: Пусть $\exists\, \varepsilon > 0$, $\{\delta_n > 0\}$, $\{z_{\delta_n}\}$: $z_{\delta_n} \in \tilde{Z}^M_{\delta_n}$, $\|z_{\delta_n} - \bar{z}\| \ge \varepsilon$, $\forall n$; $z_{\delta_n} \in M$ $\forall n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{z_{\delta_{n_p}}\}$: $z_{\delta_{n_p}} \to z^* \in M$, $\|Az_{n_p} - u_{\delta_{n_p}}\| \le$

$\le \|A\bar{z} - u_{\delta_{n_p}}\| < \delta_{n_p}$

$p \to \infty \Rightarrow \delta_{n_p} \to 0 \Rightarrow Az^* = \bar{u} \Rightarrow$ (т.к. $A\bar{z} = \bar{u}$)

$z^* = \bar{z}$ $\Rightarrow \begin{cases} z_{\delta_{n_p}} \to \bar{z}, \\ \|z_{\delta_{n_p}} - \bar{z}\| \ge \varepsilon, \ \forall p \end{cases}$ $\times$, ч.т.д.

МЕТОД #1: $Z_\delta^M = \{ z \in M \mid \|Az - u_\delta\| \le \delta \}$

МЕТОД #2: $\tilde{Z}_\delta^M = \{ z \in Z \mid \arg\inf_{z \in M} \|Az - u_\delta\| \}$ – квазирешение.

Заметим, что в первом методе треб-ся

GODZINA	TIME	6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ	DAY	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC	MONTH	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

знать не только прибл. реш-е, но и δ. Во втором методе оценки погрешности нет, но тогда придётся минимизировать "до конца".

Компакт выделяется с пом. т. Арцела́: из ∀ непр. и равностеп. огр. посл-ти можно выделить подпосл-ть, сх-ся в метрике непр. ф-й.

реш. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}^n$.

дост. усл. компактности:

1) компактн. в $\mathbb{R}^n$ - огр. замкн. мн-во

2) $\exists z = C[a, b]$: $|f(x)| \leq m$,

3) усл-е Липшица: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq$
$\leq L(x_1 - x_2)$, $x_1, x_2 \in [a, b]$.

[для дифф. на отрезке ф-й усл-е ↑ вып-ся автоматически].

Сведения из функционального анализа.

$\boxed{0}$ $z_n \xrightarrow{\text{сл.}} z^*$ в H (гильб.), если $(z_n, v) \to$
$\to (z^*, v)$, $\forall v \in H$

Свойства слабой сходимости:

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1) Если $z_n \xrightarrow{сл.} z^*$ в H, то $\|z^*\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|z_n\|$ (слабо полунепр. снизу).

2) Если $z_n \to z^*$ в H, A - вп. непр., $A: H \to U$, то $\|Az_n - Az^*\|_U \to 0$ при $n \to \infty$.

3) $\|z_n\| \le C$, то $\exists \{z_{n_p}\}$: $z_{n_p} \to z$ в H (шар слабо компактен в гильб. пр-ве)

4) $z_n \to z^*$ и $\|z_n\| \to \|z^*\|$, то $\|z_n - z^*\|_H \to 0$

<u>ПРИМЕР:</u> $\sin nx \to 0$, в $L_2[-\pi, \pi]$.

$(f, \sin nx) = f_n \to 0$, $n \to \infty$ - коэф-т Фурье.

22.11.06 – лекция N 12

Метод регуляризации Тихонова

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U – гильб.,

A – вп. непр., $\exists!\, \bar{z}$: $A\bar{u} = \bar{z}$, $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$ –

– известна пара $\{u_\delta, \delta\}$

$M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|^2_U + \alpha\|z\|^2_Z$

фиксируем $\forall u \in U$.

$\boxed{T_1}$ Для $\forall u \in U$ и $\alpha > 0$ $\exists!\, z_\alpha$: достигается $\inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u]$

Док-во: $\exists z_\alpha$: $M^\alpha[z_\alpha, u] = \inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u]$

$M^\alpha[z, u] \ge 0$, т.е. $\exists \inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u] = m^* \ge 0$

Пусть посл-ть $\{z_n\}$ явл-ся минимизирующей и пусть $M^\alpha[z_{n+1}, u] \le M^\alpha[z_n, u]$, $n \to \infty$

$M^\alpha[z_n, u] \longrightarrow m^*$ при $n \to \infty$

$M^\alpha[z_n, u] \le M^\alpha[z_1, u] \Rightarrow \alpha\|z_n\|^2 \le M^\alpha[z_1, u] = C$

$\Rightarrow \|z_n\|^2 \le C/\alpha \Rightarrow \exists \{z_{n_p}\}$: $z_{n_p} \xrightarrow{сл.} z^* \in Z$ и

$\|z^*\| \le \varliminf\limits_{p \to \infty} \|z_n\|$

т.к. A – вп. непр., то $Az_{n_p} \to Az^*$ при $p \to \infty$

Докажем, что $M^\alpha[z^*, u] = m^*$:

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1) Пусть $\varepsilon > 0$: $\exists N_1(\varepsilon)$: $M^\alpha[z_{n_p}, u] \le m^* + \varepsilon/3$, $\forall n_p \ge N_1$

2) $\exists N_2(\varepsilon)$: $\|Az^* - u\|^2 \le \|Az_{n_p} - u\|^2 + \varepsilon/3$, $\forall n_p \ge N_2$

3) $\exists N_3(\varepsilon)$: $\|z^*\|^2 \cdot \alpha \le \|z_{n_p}\|^2 \cdot \alpha + \varepsilon/3$, $\forall n_p \ge N_3$.

(1)-(3) вып-ны для $\forall n_p \ge \max\{N_1, N_2, N_3\}$

$M^\alpha[z^*, u] = \|Az^* - u\|^2 + \alpha\|z^*\|^2 \le M^\alpha[z_{n_p}, u] +$
$+ 2\varepsilon/3 \le m^* + \varepsilon$

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow M^\alpha[z^*, u] = m^*$.

Т.о., $\exists$-ние $\min M^\alpha[z, u]$ доказано.

Докажем единственность:

$\|Az - u\|^2$ - выпукл.
$\|z\|^2$ - сильно выпукл. } $\Rightarrow$ сумма - сильно вып. ф-ал $\Rightarrow$

$\Rightarrow$! min

Необходимое и достаточное усл-е минимума: ур-ние Эйлера.

$\delta M^\alpha[z, u] = (\Lambda, \delta z)_z +$ квадр. член $\sim$

$\sim dM^\alpha[z, u] = (\Lambda, dz)_z$

$\Lambda = \operatorname{grad} M^\alpha = \frac{\partial}{\partial z} M^\alpha[z, u] = (M^\alpha[z, u])'_z$

$M^\alpha[z + \delta z, u] - M^\alpha[z, u] = (A(z + \delta z) - u$ ②

$\Rightarrow A(z+\delta z)-u) - (Az-u, Az-u) + \alpha(z+\delta z,$
$z+\delta z) - \alpha(z, z) = (Az-u, A\delta z) +$
$+ (A\delta z, Az-u) + \alpha(z, \delta z) + \alpha(\delta z, z) +$ квадр.чл. $=$
$= 2(Az-u, A\delta z) + 2\alpha(z, \delta z) +$ квадр. чл. $=$
$= 2(A^*(Az-u), \delta z) + 2\alpha(z, \delta z) + \underline{O}(\|\delta z\|^2)$

$M^\alpha[z, u]$ дифф-ем по z

необх усл-е min

$\operatorname{grad} M^\alpha = 2A^*(Az-u) + 2\alpha z = 0$

Уравнение Эйлера: $(A^*A + \alpha E)z = A^*u$ (1)

Пусть $\tilde{z}$ – решение, $M^\alpha[\tilde{z}, u] = m^*$

Допустим, что не так: $M^\alpha[\tilde{z}, u] > m^*$, но
$\exists z_\alpha = \operatorname{argmin} M^\alpha[z, u] \Rightarrow (A^*A + \alpha E)z_\alpha = A^*u$

$\tilde{z} - z_\alpha = z$; $(A^*A + \alpha E)z = 0$, $z \neq 0$
$(A^*Az, z) + \alpha(z, z) = (\overset{\geq 0}{Az, Az}) + \alpha\overset{> 0}{\|z\|^2} \Rightarrow z = 0.$

A^* зависит от z, u.

Построение приближённых решений.

$\boxed{T_2}$ Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$: $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta > 0$ и $\alpha(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$,
$\delta^2/\alpha(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$, тогда:
$\|z_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$, где
$$z_{\alpha(\delta)} = \operatorname*{argmin}_z M^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta]$$

Док-во: (от противного): Пусть $\exists\, \varepsilon > 0$ и

$\{\delta_n\} \to 0$, $\{z_{\alpha(\delta_n)}\}$: $\|\bar z - z_{\alpha(\delta_n)}\| \geq \varepsilon$, $\forall n$

Т.к. $z_{\alpha(\delta_n)} = \arg\min\limits_{z} M^{\alpha(\delta_n)}[z, u_{\delta_n}]$, то

$$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] \leq M^{\alpha(\delta_n)}[\bar z, u_{\delta_n}]$$

$$\|A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 + \alpha(\delta_n)\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \underbrace{\|A\bar z - u_{\delta_n}\|^2}_{\leq\,\delta_n^2} + \alpha(\delta_n)\|\bar z\|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar z\|^2$$

1) $\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \overbrace{\delta_n^2/\alpha(\delta_n)}^{\to 0 \text{ при } \delta_n \to 0} + \|\bar z\|^2 < const$

2) $\|A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar z\|^2$

Из (1) $\Rightarrow \exists\, \{z_{\alpha(\delta_{n_p})}\}$: $z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{сл.} z^*$ в Z

$$\|z^*\| \leq \underline{\lim}\, \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \overline{\lim}\, \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \leq \|\bar z\|$$

Из (2) $\Rightarrow$ A - вп. непр. $\Rightarrow A z_{\alpha(\delta_{n_p})} \to A z^*$

$\|A z^* - \bar u\| = 0$ ($u_{\delta_n} \to u$), $A z^* = \bar u$, но $A\bar z = \bar u \Rightarrow z^* = \bar z$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{p\to\infty} \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| = \|\bar z\| \\ 2)\ z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{сл.} \bar z \text{ в } Z \end{array}\right\} \Rightarrow \|z_{\alpha(\delta_{n_p})} - \bar z\| \xrightarrow{p\to\infty} 0$$

Ж, ч.т.д.

Из $\boxed{T_2} \Rightarrow (A^*A + \alpha E) z = A^* u_\delta$

Методы регуляризации Тихонова для решения нелинейных операторных уравнений.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - банаховы.

H — компактно вложено в Z: $H \Subset Z$

$\exists!$ реш-е $Az = \bar{u}$, т.е. $z = \bar{z}$

$$M^\alpha[z,u] = \|Az-u\|^2_U + \alpha\|z\|^2_H$$

$\boxed{T_1'}$ Для $\forall \alpha > 0$ и $\forall u \in U$ $\exists\, z^* = \arg\min_{z\in H} M^\alpha[z,u]$, $z^* \in H$.

Док-во: Аналогично док-ву $\boxed{T_1}$

$z_{n_p} \xrightarrow{Z} z^* \in Z$

Остаётся док-ть, что $z^* \in H$ — это является следствием свойств гильб. пр-ва.

29.11.06 – лекция N 13

$\boxed{T_1}$: $M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|^2_U + \alpha\|z\|^2_H$,

$H \subset\subset Z$, U – банахово.

$$H_{\alpha(\delta)} = \operatorname{Arg}\min_{z \in H} M^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta]$$

$\boxed{T_2}$: Пусть $\alpha = \alpha(\delta)$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta^2/\alpha(\delta) \le C$, $\delta \to 0$. Тогда $\sup\limits_{z_\alpha \in H_{\alpha(\delta)}} \|z_\alpha - \bar{z}\|_Z \to 0$, $\delta \to 0$.

$H^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta] \to z_{\alpha(\delta)}$

Практическая схема: $\{u_\delta, \delta\}$

1. K – множество $\ni \bar{z}$

   $z \in K$, $Az = u$

2. $u_\delta = u + \delta \Rightarrow \{u_\delta, \delta\}$
3. $M^\alpha[z, u_\delta]$ min $\Rightarrow z_\alpha$
4. сравн. z_α и z.
5. $\alpha \in \Lambda = [\alpha_0, \alpha_g]$

   $\alpha = \alpha^*$, $z_{\alpha^*} \approx z$

6. $z \in K$, $z_{\alpha^*} \approx z$
7. решается настоящая задача с неизв. z и реальными данными $\{u_\delta, \delta\}$

   $\alpha(\delta) = c\delta^2$

   $\alpha^* = \alpha(\delta) = c\delta^2$.

Есть и другой класс задач, для которых можно выбрать другой параметр регуляризации [позже]

Применение метода регуляризации Тихонова для решения интегральных уравнений I го рода.

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)\, z(s)\, ds = u(x), \quad x \in [c, d]$$

$Z = L_2[a, b]$, $U = L_2[c, d]$

Z, U — гильб.

$\{u_\delta, \delta\}$, $\ker A = 0$ $\quad \int_a^b \int_c^d |K(x,s)|^2 dx\, ds < \infty$

Восп-ся методом регуляризации Тихонова:

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b z^2(s)\, ds$$

$\operatorname{argmin} M^\alpha[z, u_\delta] = z_\alpha$, $z_{\alpha(\delta)} \to \bar{z}$, $\delta \to 0$

$A^* A z + \alpha z_\alpha = A^* u_\delta \quad (*)$

$(A^* v, u) = (v, Au)$, $\forall u \in Z$, $\forall v \in U$

$$A^* v = \int_c^d K(x,s)\, v(x)\, dx$$

Только для случая, когда $A: L_2[a, b] \to L_2[c, d]$

для случая $A : W_2^1[a,b] \to L_2[c,d]$,
A^* – другой.

$W_2^1[a,b] = \{\varphi \in L_2[a,b] \mid \varphi' \in L_2[a,b]\}$.

$(\varphi, g)_{W_2^1} = (\varphi, g)_{L_2} + (\varphi', g')_{L_2}$

Если вместо $\alpha\|z\|^2_{L_2}$ поставить $\alpha\|z\|^2_{W_2^1}$,
то уравнение (*) будет другим.

$$\int_c^d K(x,t)\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds\,dx + \alpha z(t) =$$

$$= \int_c^d K(x,t)\,u_\delta(x)\,dx$$ – ур-ние Эйлера.

$$\int_a^b B(t,s)\,z(s)\,ds + \alpha z(t) = f_\delta(t)$$

$B(t,s)$ – т.н. повторное ядро.

$$B(t,s) = \int_c^d K(x,s)\,K(x,t)\,dx = B(s,t)$$

$A^*A \geq 0$, $\alpha E + A^*A > 0$.

Практически, можно решать с помощью квадратурных формул.

$$\sum_{s=1}^{N} B_{t,s}\, c_h z_s + \alpha z_t = f_t, \quad t = 1 \div N$$

алгебраическая задача

$$h\left(\cancel{B}\right) + \alpha\left(1\right) = (f)$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Если $z \in C[a,b] = Z$

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s, z(s)) - u_\delta(x) \right]^2 dx +$$
$$+ \alpha \left(\int_a^b z^2(s)\,ds + \int_a^b (z'(s))^2\,ds \right)$$

[в этом случае придётся честно решать задачу минимизации].

Выбор α по принципу невязки.

A - вп. непр., $H \to U$ - числ.
$\ker A = 0$, $\overline{R(A)} = \overline{AH} = U$.

$\boxed{Л_1}$ Если $u = 0$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то $z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$
[док-во следует из рассм-я ур-я Эйлера]

Обозн. $M^\alpha[z_\alpha u] = \min\limits_{z \in H} M^\alpha[z, u] = m(\alpha)$
$\|Az_\alpha - u\|^2 = \varphi(\alpha)$, $\|z_\alpha\|^2 = \Psi(\alpha)$

$\boxed{Л_2}$ Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то $m(\alpha_1) > m(\alpha_2)$,
$\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$, $\Psi(\alpha_1) < \Psi(\alpha_2)$.

<u>Док-во:</u> $M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1} u] = m(\alpha_1) > M^{\alpha_2}[z_{\alpha_1} u] >$
$> M^{\alpha_2}[z_{\alpha_2} u] = m(\alpha_2)$

$m(\alpha_1) = \varphi(\alpha_1) + \alpha_1 \Psi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2) + \alpha_1 \Psi(\alpha_2)$ $\oplus$
$\varphi(\alpha_2) + \alpha_2 \Psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2 \Psi(\alpha_1)$

GODZINA	TIME	6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ	DAY	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC	MONTH	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\Rightarrow (\alpha_1-\alpha_2)\Psi(\alpha_1) < \underbrace{(\alpha_1-\alpha_2)}_{>0}\Psi(\alpha_2)$$

$$\Rightarrow \Psi(\alpha_1) < \Psi(\alpha_2)$$

$$\varphi(\alpha_2)+\alpha_2\Psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1)+\alpha_2\Psi(\alpha_1)$$

$$\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1) < a_2(\Psi(\alpha_1)-\Psi(\alpha_2)) < 0,$$ ч.т.д.

$\boxed{Л_3}$ $m(\alpha), \varphi(\alpha), \Psi(\alpha)$ непр. при $\alpha>0$.

z_α непр. по α.

$\boxed{Л_4}$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha)=0$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(\alpha)=\|u\|^2$.

Док-во: Возьмём $\forall\varepsilon>0$, $\forall u\in U$ $\exists z_\varepsilon\in H$:

$\|Az_\varepsilon-u\|^2\le\varepsilon/2$.

$\exists\,\alpha(\varepsilon):\ \alpha(\varepsilon)\|z_\varepsilon\|^2\le\varepsilon/2 \Rightarrow M^{\alpha(\delta)}[z_\varepsilon,u]\le\varepsilon$

$\varphi(\alpha(\delta))\le M^{\alpha(\delta)}[z_\delta,u]\le\varepsilon$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} m(\alpha)=0$ $\Rightarrow z_\alpha\to 0$.

$\varphi(\alpha)=\|Az_\alpha-u\|^2\to\|u\|^2,\ \alpha\to\infty$

$\alpha\|z_\alpha\|^2\le M^\alpha[z_\alpha,u]\le M^\alpha[0,u]=\|u\|^2$

ч.т.д.

Рассм. ф-ал Тихонова не для произвольного u, а для того u_δ, кот. дано в задаче:

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$\boxed{\text{Т.}}$ Пусть $\|u_\delta\| > \delta$, тогда $\varphi(\alpha) \equiv \|Az_\alpha - u_\delta\|^2 = \delta^2$ имеет единств. реш-е $\alpha(\delta)$ и $\|z_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Док-во: Докажем сход-ть от противного:

Пусть $\exists \varepsilon > 0$ и $\delta_n \to 0$, $z_{\alpha(\delta_n)}$ – выбирается по невязке

$$\|z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$$

$$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] = \overbrace{\|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2}^{\delta^2} +$$

$$+ \alpha(\delta_n)\|z_{\alpha(\delta_n)}\|^2 \leq \underbrace{\|A\bar{z} - u_\delta\|^2}_{\delta^2} + \alpha(\delta_n)\|\bar{z}\|^2$$

$$\Rightarrow \|z_{\alpha(\delta_n)}\| < \|\bar{z}\|$$

$z_{\alpha(\delta_n)} \xrightarrow{\text{сл.}} z^* \in H$, $z_{\alpha(\delta_n)}$ – слабокомпактная

$$\|z^*\| \leq \underline{\lim} \|z_{\alpha(\delta_n)}\| \leq \overline{\lim} \|z_{\alpha(\delta_n)}\| \leq \|\bar{z}\|$$

$$Az_{\alpha(\delta_n)} \to Az^*, \ n \to \infty$$

$$\Rightarrow \|Az^* - \bar{u}\| = 0 \Rightarrow z^* = z \Rightarrow \|z^*\| = \|z\|^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \|z_{\alpha(\delta_n)}\| \to \|\bar{z}\| \\ z_\alpha(\delta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

слабая сходимость + сходимость норм $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходимость по норме.

$$\Rightarrow \|z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z}\| \to 0 \quad \not\Rightarrow, \text{ ч.т.д.}$$

GODZINA 06 TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ 06 DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC 12 MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

06.12.06 — лекция N 14

[вопросы к экзамену на сайте кафедры матфизики].

Итерационные и проекционные методы решения некорректно поставленных задач.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U — гильб.

Пусть $B: Z \to Z$, вп. непр.

$\boxed{T:}$ [Гильберта – Шмидта] Пусть $\ker B = 0$, $B = B^*$, тогда оператор B имеет счётное число собственных значений λ_k и счётное число собств. ф-й $\{\lambda_k, \varphi_k\}$, таких что с-ма этих функций образует ОНБ, т.е. для $\forall z \in Z$ представим в виде $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (z, \varphi_k)\varphi_k$, и $Bz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z, \varphi_k)$, и $B\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$

Использование:

A - вп. непр., $\ker A = 0$

$\underbrace{A^*A}_{\text{вп. непр.}} z = A^* u$, A^* - вп. непр., $A^*A : Z \to Z$.

$0 = \mu A^* u - \mu A^* A z$

$\underbrace{z_{n+1} = z_n}_{=} + \mu A^* u - \mu A^* A z_n$ явл-ся реш-ем уравнения.

<u>Утв-е:</u> $z_n = R_n u, \quad R_n = \mu \sum_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A)^k A^*$

докажем по индукции:

$$z_0 = \mu A^* u, \quad z_{n+1} = \mu A^* u \sum_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A)^k \cdot$$

$$\cdot A^* u - \mu A^*A \sum_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A)^k A^* u =$$

$$= \mu A^* u + \mu \sum_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A)^{k+1} A^* u \underset{\text{изм. индексе}}{=}$$

$$= \mu \sum_{k=0}^{n+1} (E-\mu A^*A) A^* u = R_{n+1} u, \text{ ч.т.д.}$$

$\boxed{\text{Т:}}$ [обоснование метода построения реш-я операторного ур-я I го рода] Пусть μ: $0 < \mu < \frac{2}{\|A^*A\|}$, а целочисленная функция $n(\delta)$ такова, что $\delta \cdot n(\delta) \to 0$, $n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Тогда $\|R_{n(\delta)} \underset{\text{приближ. пр. часть}}{u_\delta} - \bar z\| \to 0$ при $\delta \to 0$

[Напомним, что определено точное реш-е $A\bar z = \bar u$, $\bar z$, но сам $\bar u$ неизвестен, а дано некоторое его приближение с известной оценкой ошибки δ: $|\bar u - u_\delta| \le \delta$]

<u>Док-во:</u> Дано, что опер-р R_n — линейный, действ.: $u \to z$.

$$\|R_n u_{\delta\, \pm \bar u} - \bar z\| \le \|R_n \underbrace{(u_\delta - \bar u)}_{①}\| + \|R_n \underbrace{(\bar u)}_{②} - \bar z\|$$

Оценим ① и ②:

① $\|R_n(u_\delta - \bar u)\| \le \|R_n\| \cdot \delta$

$$R_n = \mu \sum_{k=0}^{n} (E - \mu A^* A)^k A^*$$

Оценим норму оператора $(E-\mu A^*A)\Psi$

Для этого представим $\Psi \in Z$ разложением по базису: $\Psi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\Psi, \varphi_j)\varphi_j$

Тогда $\|(E-\mu A^*A)\Psi\| = \|(E-\mu A^*A) \circ$

$\circ \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\Psi, \varphi_j)\varphi_j \| = \| \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\Psi, \varphi_j)(1-\mu\lambda_j)\varphi_j\| =$

$$\|(E-\mu A^*A)\Psi\|^2 \underset{\text{рав-во Парсеваля}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\Psi, \varphi_j)^2 (1-\mu\lambda_j)^2 \le$$

$A^*A \sim \{\lambda_j\}$ – собств. зн-я, $\lambda_j > 0$, $\ker A^*A = 0$ не явл. собств. зн-ем, а только точкой непрерывного спектра. Среди $\{\lambda_j\}$ есть максимальное $\Rightarrow$ упорядочим след. образом:

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_j \ge \ldots > 0$$

Макс. собств. зн-е $\lambda_1 = \|A^*A\| \Rightarrow |1-\mu\lambda_j| < 1$

$\Rightarrow \le \|\Psi\|$, значит $\|E - \mu A^*A\| < 1$

$$\|R_n\| = \|\mu \sum_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A)^k A^*\| \le$$

$$\le \mu \sum_{k=0}^{n} \|(E-\mu A^*A)^k A^*\| \underset{\|AB\| \le \|A\|\|B\|}{\le}$$

$$\le \mu \sum_{k=0}^{n} \|A^*\| = \mu(n+1)\|A^*\|$$

2) $\|R_n \bar{u} - \bar{z}\| \le \mu \sum\limits_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A)^k A^*A\bar{z} - \bar{z} \xRightarrow{z = \sum_{j=1}^{\infty} (z, \varphi_j)\varphi_j}$

$$\textcircled{=}\ \mu \sum_{j=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_j) \Big[\mu \sum_{k=0}^{n} (E-\mu A^*A) A^*A - E \Big] \varphi_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_j) \Big[\mu \sum_{k=0}^{n} (1-\mu\lambda_j)^k \lambda_j - 1 \Big] \varphi_j \ \textcircled{=}$$

[в квадратных скобках – геом. прогрессия]

$$\textcircled{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_j) \Big[\mu\lambda_j \frac{\cancel{1} - (1-\mu\lambda_j)^{n+1}}{\cancel{1-(1-\mu\lambda_j)}} - \cancel{1} \Big] \varphi_j =$$

$$= - \sum_{j=1}^{\infty} (1-\mu\lambda_j)^{n+1} (\bar z, \varphi_j) \varphi_j$$

$$\Rightarrow \|R_n \bar u - \bar z\| = \Big\| \sum_{j=1}^{\infty} (1-\mu\lambda_j)^{n+1} (\bar z, \varphi_j) \varphi_j \Big\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

надо док-ть

$$\|R_n \bar u - \bar z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)} (\bar z, \varphi_j)^2,$$

$$\|\bar z\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_j)^2 < \infty.$$

Ясно, что и этот ряд будет сходиться.

Докажем, что при $n \to \infty$ $\sum_{j=1}^{\infty} (1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)} (\bar z, \varphi_j)^2 \to 0$

λ_1 – самое большое собств. зн-е $\Rightarrow$

$\Rightarrow |1-\mu\lambda_j| \le \alpha \le 1, \ \forall \lambda_j$

Разобьём сумму на две: $\sum_{j=1}^{N} + \sum_{j=N+1}^{\infty}$

По опр-ю: пусть $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} (1-\mu\lambda_j)^{2(n+1)} (\bar z, \varphi_j) \le \sum_{j=N+1}^{\infty} (\bar z, \varphi_j)^2 \ \textcircled{\le}$$

$\exists N(\varepsilon)$, что $\textcircled{\le}\ \varepsilon/2$

$\exists N$ дост. большое, что $\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \le \varepsilon/2$.

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \| R u_{n(\delta)}^{\delta} - \bar{z} \| \le \mu \|A^*\| (n(\delta)+1)\delta + \beta(n(\delta)) \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \\ n(\delta)\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| R u_\delta - \bar{z} \| \to 0, \text{ ч.т.д.}$$

[А можно ли непосредственно пользоваться св-вами базиса оператора?]

Проекционный метод решения ур-я $Az=u$

A^*A – вп. непр. $\Rightarrow$ определяет собств. базис $\{\varphi_k\}$

Посмотрим, что будет, когда на эти собств. ф-ии подействует опер-р $A: Z \to U$, $u_k \in Z$

$$A\varphi_k = \hat{\psi}_k$$

$\{\hat{\psi}_k\}$ – образует ортогональный (но не нормированный!) базис.

$$(\hat{\psi}_k, \hat{\psi}_k) = (A\varphi_k, A\varphi_k) = (\varphi_k, A^*A\varphi_k) = \lambda_k$$

$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \hat{\psi}_k$, $\{\psi_k\}$ образ. ОНБ в U.

$$\bar{z} = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k)\varphi_k, \quad \bar{u} = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{u}, \psi_k)\psi_k$$

$$A\bar{z} = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k)\sqrt{\lambda_k}\,\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{u}, \psi_k)\psi_k$$

$$(\bar{z}, \varphi_k) = \frac{(\bar{u}, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}; \quad \bar{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{u}, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k = A^{-1}\bar{u}$$

$\forall \bar{u} \in R(A)$.

$\lambda_k \to 0$

брать только и больших собств. зн-й

Т.о. проекц. оп-р действует след. образом:

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$R_n u = \sum_{k=1}^{n} \frac{(u, \Psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k$$

Цель: док-ть, что если мы каким-то образом согласуем u и $\tilde{u}$ погр-ть, что есть сходимость:

$R_{n(\delta)}, u_\delta$ – приближ. реш.

$\| R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z} \| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Получим оценку:

$$\| R_{n(\delta)} \underbrace{u_\delta}_{\tilde{u}} - \bar{z} \| \le \overset{①}{\| R_{n(\delta)} \| \delta} + \| R_{n(\delta)} \overset{②}{A\bar{z}} - \bar{z} \|$$

$$\| R_n w \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left((u, \Psi_k) \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \right)^2 \le \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (w, \Psi_k)^2 \le$$

λ_n – самое маленькое собств. зн-е

$$\le \frac{\|w\|^2}{\lambda_n} \Rightarrow \| R_n \| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$$

$$R_{n(\delta)} A \bar{z} - \bar{z} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (A\bar{z}, \Psi_k) \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (\bar{z}, A^* \Psi_k) \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}} -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k) \varphi_k = - \sum_{k=n+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_k) \varphi_k$$

[$A^* \Psi_k = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k$ – убедиться самим]

Получаем: $\| R_{n(\delta)} \bar{u} - \bar{z} \|^2 \le \sum_{k=n}^{\infty} (z_k, \varphi) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Т.о. доказали: $\boxed{\text{Т:}}$ Если $n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, т.что $\frac{\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$, тогда $\| R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z} \| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

WAŻNE NOW

ДОК-ВО СВОДИТСЯ К ТОМУ, ЧТОБЫ ПОКАЗАТЬ, ЧТО В СУММЕ $\frac{\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} + \beta(n(\delta))$ ОБЕ ВЕЛИЧИНЫ – БЕСК. МАЛЫЕ.