Литература:

1) Введение в теорию обратных задач
А.М. Денисов. 1992 г. МГУ.
3БМ Д-332
2) Некорректные задачи
Тихонов, Арсенин. Наука, 1984.

Андрей Владимирович Баев МФ.

Обратные задачи.

Прямые задачи: по причине определяем следствие.

Обратные: по следствию причину.

Пр. 1: Движение материальной точки. (прямая задача) DP

$m = 1$

$\ddot{x}(t) = f(t)$, $t > 0$

$x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = x_1$.

при $x_0 = x_1 = 0$

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

$f(t)$ - причина

$x(t)$ - следствие.

Пр 2: Обратная задача (IP)

по $x(t)$ определить $f(t)$

Пр 3:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}$$

$a_{ij} = const$

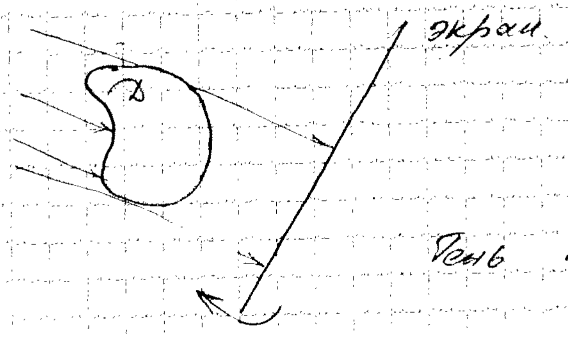
$x_i(0) = \overset{\circ}{x}_i$

Прямая задача

Пр 3' (обратная задача)

определить a_{ij} по $x_i(t)$

Пр 4: Распознавание образов.



Тень поворачивается.

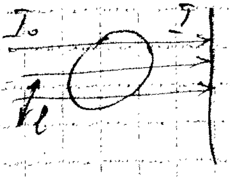
Задача: определить форму тела D по проекциям

Одном решение задачи только для выпуклых D.

D - выпукл n-угольник.

сколько мин проекц нужно?

Пр 5: Компьютерная томография.



изменение интенсивности.

возникает задача о восст. плотности тела по ослаб. интенсивности.

$$\int\limits_{L(l,\theta)} f(x,y)\,dS = u(l,\theta)$$

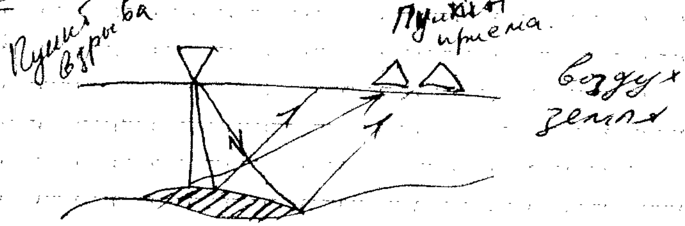
- l - прицельное расстояние

θ - угол поворота.

Обр задача: опр f по u

Обратные задачи геофизики.

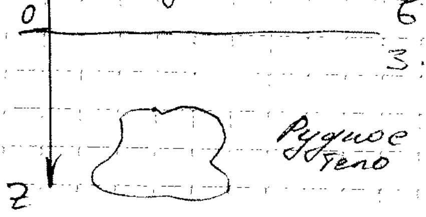
- Пр 6 Разведочная геофизика



Обратная задача: определение структуры геологического разреза по сейсмическим данным.

аномалия земного притяжения.

- Пр 7: $\Delta g = u$



- Обратная задача теории потенциалов

$$u(x,y,z) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}^{\,2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Определить ρ и Ω по U.

Корректные и некорректные задачи.

(1) $z = R(u)$ 　 u - исходные данные
z - результат

$z \in Z$, $u \in U$

Z, U - метрические пр-ва.

Опр: Задача (1) наз-ся корректной по Адамару, если выполняются условия:

1) решение z $\exists$ для $\forall u \in U$
2) решение z единст. для $\forall u \in U$
3) реш z непрерывно зависит от U в метриках Z, U.

Пр.1 $\ddot{x}(t) = f(t)$, $0 < t < T$

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad 0 \le t \le T$$

$x = R(f)$

$x \in X \equiv C[0,T]$ $f \in F \equiv C[0,T]$

1) $\exists$ - да $\oplus$

2) $!$ - $\oplus$

3) устойчив. - $\oplus$, т.к. $\|x_1 - x_2\|_{C[0,T]} \le$

$$\le \frac{T^2}{2} \|f_1 - f_2\|_{C[0,T]}$$

$\Rightarrow$ Задача корректна по Адамару.

Пр 2

$$\ddot{x}(t) = f(t), \quad 0 < t \le T$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Дано $x(t)$, найти $f(t)$

$f = R(x)$ $\qquad R = \frac{d^2}{dt^2}$

$X = C[0,T]$, $F = C[0,T]$

1) реш $f(t)$ $\exists$ не для всех $x(t)$

2) ед-ть $\oplus$

3) устойчивость $\ominus$

Рассм. пос-ть: $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin n^2 t$

$$x_0(t) = 0$$

$$x_n \rightrightarrows x_0, \quad n \to \infty \quad \text{на } [0,T]$$

$\|\ddot{x}_0 - \ddot{x}_n\| = n \longrightarrow \infty$ при $n \to \infty$

если $X = C^2[0,T]$

на X, F обр. задача, т.е $f = R(x)$

- корректна

<u>Пр 3</u> Рассм. сис-му.

$Az = u$, $A: R^n \to R^n$

исслед. на корректн.

1) $\det A \neq 0$ - корректна

2) $\det A = 0$ - некорректна

$$\|z\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|u\|$$

<u>Пр 4</u> (основной пример некорректной задачи).

Интегральное ур-е Фредгольма 1-го рода.

$$\int_a^b K(x,s) z(s) dS = u(x), \quad c \le x \le d$$

K - задана, u - дано,

Найти: z.

$z \in Z = C[a,b]$, $u \in U = C[c,d]$

K, K_x, K_s - непр. $[a,b] \times [c,d]$

1) ∃ [illegible] :] $u \in C$, но не дифф., но

$\int_a^b K(x,s) z(s) dS$ - диф. по x.

2) ед-ть - зависит от K

при $K = e^{x+s}$ - ед-ти нет

$K = e^{xs}$ - ед-ть есть.

3) устойчивость $\ominus$

$z_0 = 0$

$z_n = n \sin n^2 s$

$$\| z_n - z_0 \|_2 = n \underset{n \to \infty}{\to} \infty$$

$$\| u_n - u_0 \|_u = \max_{[c,d]} \left| \int_a^b K(x,s)\, n \sin n^2 s\, ds \right|$$

$$\le \max_{x \in [c,d]} \left| -\frac{1}{n} \cos n^2 s\, K(x,s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \int_a^b K_s(x,s) \cos n^2 s\, ds \right| \le$$

$$\le \frac{M_0}{n} + \frac{M_1}{n}(b-a) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

=> непр. зав-ти нет.

в этой паре пр-в z, u устойчивости всегда нет.

Замечание: результат по устойчивости одн-в для $\forall K \in C$, $K \in L_2$

$\boxed{12.09}$ $Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$.

A - лин. непр. $z = A^{-1}u$,

если $A^{-1} \exists$, т.е. опр-н на всем U.

вып. усл. корр # 1., если

A^{-1} непр. на U, то вып. усл.

корр # 3 => # 2.

Если A - вполне непр, т.е. отобр. огр. в Z мн-во в комп. в U.

и Z - бесконечномерное, то

A^{-1} - неогр., т.е. реш $Az = u$ - некорр

$$z = \int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds = u(x) \qquad c \leq x \leq d$$

$$z \in L_2[a,b] \;, \; u \in L_2[c,d]$$

$$\int_c^d \int_a^b |K(x,s)|^2\, dx\, ds < \infty$$

A - вп. непр. из $L_2 \equiv Z$ в $L_2 \equiv U$, $u \in U$.

Условно корректные задачи

и корректность по Тихонову.

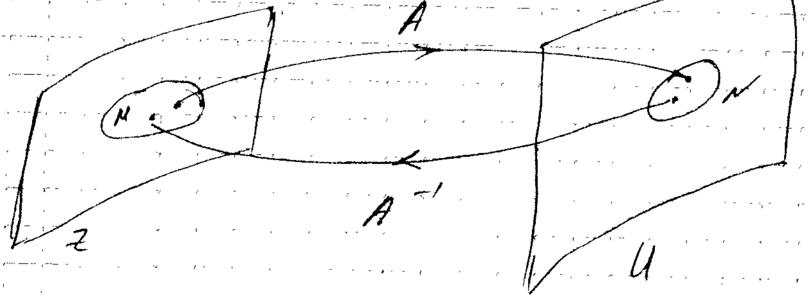
$Az = u$, дано A, u, найти z.

$z \in Z$, $u \in U$.

Z, U - полные метрич. пр-ва.

Теор.: Пусть оп. A непр. из M в N где M - компактов в Z и взаимно однознач. на M, N

Тогда A^{-1} непр из N в M.



Док-во: (от противного)

⅃ A^{-1} не непр, т.е. $\exists \{u_n\} \subset N$:

$u_n \longrightarrow \bar{u} \in N$

$z_n = A^{-1} u \not\longrightarrow \bar{z}$, где $\bar{z} = A^{-1} \bar{u}$

или $A\bar{z} = \bar{u}$

$\forall \varepsilon \quad \exists \{z_{n_k}\}: \rho_z(z_{n_k}, \bar{z}) \geqslant \varepsilon > 0$

$\{z_{n_k}\} \subset M$

$Az_{n_k} \longrightarrow A\bar{z} = \bar{u}$

с др стороны

$z_{n_k} \longrightarrow z^* \in M$, т.к. M – компакт

$Az_{n_k} \to Az^* = A\bar{z}$.

Т.к A - вз однозн, то $z^* = \bar{z}$,

$\rho_Z(z^*, \bar{z}) \geqslant \varepsilon \Rightarrow$ против?!

Таким образом $Az=u$ на M, N – корректн.

<u>ч.т.д.</u>

<u>Опр</u>: Задача $R(u) = z$ корректна по Тихонову (условно корр.) на $M \subset Z$, $N \subset U$, если

1) z опр для $\forall\, u \in N$ и $z \in M$
2) z единств на M
3) z непр зав от $u \in N$, на M.

по док-ной теор. $Az = u$ явл. корректной задачей на M, N, где M – компакт, $N \equiv AM$

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds = u(x)$$

$$c \le x \le d$$

$z \in L_2[a,b] \equiv Z$, $u \in L_2[c,d] \equiv U$

$Az = u$ – некорр.

Как выбрать компакт в L_2?

Это будет мн-во ограниченных и монотонных ф-ий в $L_2[a,b]$.

$z \in C[a,b]$, $u \in C[c,d]$

в C компакт – образ огр ф-ии с огр. произв,

т.е. $|z(s)| < M_1$ и

$|z'(s)| < M_2$ на $[a,b]$.

↑непр. по Липшицу – слабое.

М – мн-во корректных определений априорных информаций о решении количеств. и качеств.

<u>Пример</u>: $|z| \le m_1$ и $|z'| \le m_2$

Определение правой части линейного обыкновенного диф. ур-я.

$$\ddot{x}(t) = f(t) \quad t \in [0, T]$$

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \dots$$

$$+ a_n y(x) = F(x), \quad x \in [a, b]$$

$y(x)$ известно на $[a,b]$, найти $F(x)$.
задача опр-я. $F(x)$ корр., если

$$y \in C^n[a,b]$$

если $y \in C^p[a,b]$, $p < n$, то задача некорр.

$\bar{y}(x)$ - реш ОДУ.

$\bar{y}^{(i)}(a) = 0, \quad 0 \le i \le m$

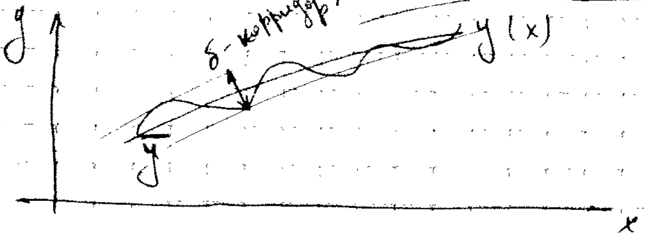
$\bar{y}^{(k)}(b) = 0, \quad 0 \le k \le l$.

$l + m + 2 = n$, тогда

$$\int_a^b G(x,s) F(s) ds = \bar{y}(x),$$

$G(x,s)$ - ф-я Грина.

Задача численного дифференцирован



$\exists\ \bar{y}(x) \in C^1[c, d+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$

и изв. $y_\delta(x) \in C[c, d+\varepsilon]$.

$$\|y_\delta - \bar{y}\|_{C[c,d+\varepsilon]} \le \delta$$

Известно y_δ, $\delta > 0$

$$z_\delta(x) \underset{\delta \to 0}{\rightrightarrows} \bar{y}'(x) \text{ на } [c,d].$$

$$z_{\delta h} = R_h(y)_\delta$$

$$z_{\delta h}(x) = \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h} \equiv R_h(y_\delta)$$

$$|z_{\delta h}(x) - \bar{y}'(x)| \le \left| \frac{y_\delta(x+h) - y_\delta(x)}{h} - \bar{y}'(x) \right|$$

$$\pm \frac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h}$$

$$\le \left| \frac{y_\delta(x+h) - \bar{y}(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{y_\delta(x) - \bar{y}(x)}{h} \right| +$$

$$+|\bar{y}'(x) - \bar{y}'(x^*)| \le \frac{2\delta}{h} + \omega_1(h)$$

$$\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x) = \bar{y}'(x^*)h \qquad x^* \in [x, x+h]$$

$z_{\delta_h}(x) \rightrightarrows \bar{y}'(x)$ на $[c, d]$.

$\frac{\delta}{h} \to 0, \ h \to 0;$

парам. метода $h = h(\delta)$

$h(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ и $\frac{\delta}{h(\delta)} \to 0$ при $\delta \to$

если $h(\delta) = \delta^2$ — сх-ти нет

$h(\delta) = \delta^{1/2}$ — есть сх-ть.

$h = C\delta$ — ?

Пример: Расх-ти при $h = \delta$

$\exists \ \bar{y}(x) = 0, \ y_\delta(x) = \delta \sin\frac{x}{\delta}$

$$z_{\delta h}(0) = \frac{\delta \sin 1}{\delta} = \sin 1 \not\to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Полученные условия не слишком грубые.

$h = C\delta^\gamma, \ 0 < \gamma < 1$ — сход.

Вычисление y'' $\quad \bar{y}(x) \in C^2[c-\varepsilon, d+\varepsilon]$

$|y_\delta - \bar{y}| \le \delta$

$$z_{\delta h} = \frac{y_\delta(x-h) - 2y_\delta(x) + y_\delta(x+h)}{h^2}$$

$$|z_{\delta h}(x) - \bar{y}''(x)| \le \frac{4\delta}{h^2} + \omega_2(h),$$

сх при $\frac{\delta}{h^2} \to 0$, $h \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

Задачи определения коэфф-тов ОДУ и систем. $\boxed{19.09}$

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

Обр. з.: опр. $\{a_0, a_1\}$ по $y(x)$.

1) П $y(x) \equiv 0$

решение неединственно.

2) П $y(x) = const$

$a_0 = 0$, $\forall a_1$ – реш. неед.

3) П $y(x) \ne const$

П $y(x) = e^x$ $\Rightarrow$

$1 + a_1 + a_0 = 0$.

$a_1 = p$, $a_0 = -(1+p)$ $\forall p$ - действ.

$y(x) = \bar{y}(x)$ - точное решение, $x \in [c, d]$

$a_1 \bar{y}'(x) + a_0 \bar{y}(x) = -\bar{y}''(x)$

J $x_1, x_2 \in [c, d]$

$$\begin{cases} a_1 \bar{y}'(x_1) + a_0 \bar{y}(x_1) = -\bar{y}''(x_1) \\ a_1 \bar{y}'(x_2) + a_0 \bar{y}(x_2) = -\bar{y}''(x_2) \end{cases}$$

сист. отн. $\{a_0, a_1\}$ ЛАУ.

Если $\det \neq 0$, то реш ОЗ единств.

(1) $y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = f(x)$

ОЗ: опр $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $a_j = a_j(x)$; $f(x)$

Теор: J на $[c, d]$ задано решение

$y_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$

опр. Вронского $W(y_1, \ldots y_n)\big|_{x=c} \neq 0$;

$y_0^{(i)}(c) = 0$; $i = 0 \div n-1$

Тогда $a_j(x)$, $j = 0 \div n-1$, $f(x)$ опр на $[c, d]$ однозначно (единств. образом).

Док-во: ∡ $u_i(x) = y_i(x) - y_0(x)$, $i = 1 \div n$

$\Rightarrow u^{(n)}(x) + a_{n-1} u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x) u(x) = 0$.

$$u_i^{(k)}(c) = y_i^{(k)}(c) \quad , \quad u(x) = u_i(x)$$

$$W(u_1 \ldots u_n)\Big|_{x=c} = W(y_1 \ldots y_n)\Big|_{x=c}$$

$$\begin{vmatrix} y_1(c) & \ldots \\ y_1'(c) & \ldots \\ \vdots & \\ y^{(n-1)}(c) & \ldots \end{vmatrix} \text{ — для } y_1 \ldots y_n$$

$$\text{\textcircled{=}} \begin{vmatrix} y_1(c) - y_0(c) & \ldots \\ y_1'(c) - y_0'(c) & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(c) - y_0^{(n-1)}(c) & \ldots \end{vmatrix} \text{ — для } u_1 \ldots u_n$$

$$\text{\textcircled{=}}\ W(y_1 \ldots y_n)\Big|_{x=c} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\begin{vmatrix} 0 & \\ 0 & \ldots \\ \vdots & \\ 0 & \text{—} \end{vmatrix}} = W(u_1 \ldots u_n)\Big|_{x=}$$

т.к. $W(u_1 \ldots u_n)\Big|_{x \neq c} \neq 0 \Longrightarrow$

$$W(u_1 \ldots u_n) \neq 0 \quad \forall x \in [c, d]$$

$$a_{n-1}(x)\, u_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)\, u_1(x) = -u_1^{(n)}(x)$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1}(x)\, u_n^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)\, u_n(x) = -u_n^{(n)}(x)$$

$\det(x) \neq 0$ на $[c, d]$

$\forall x \in [c, d]$. $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ - опред. ед. образом.

$\Rightarrow f(x)$ опред. однозначно.

Задача частичного определения коэф-тов лин. ОДУ

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = f(x)$$

$x \in [c, d]$

изв. все $a_k(x)$, $k = 0 \div n-1$, кроме $k = i$ и $k = j$, $f(x)$ - изв.

$$a_i(x) y_1^{(i)}(x) + a_j(x) y_1^{(j)}(x) = F_1(x)$$
$$a_i(x) y_2^{(i)}(x) + a_j(x) y_2^{(j)}(x) = F_2(x)$$

если $\det(x) \neq 0$, то $a_i(x), a_j(x)$ опред. единств. образом.

если $\det = 0$ - ?

$$y^{IV} + a_2(x) y''(x) + a_0(x) y(x) = 0$$

$a_2 = const$, $a_0 = const$

$y_1 = e^{x}$, $y_2 = e^{-x}$

$1 + a_2 + a_0 = 0$.

$\Rightarrow$ ОЗ не имеет единств. решения.

$a_2 = p$, $a_0 = -(1+p)$ $\forall$ p действ.

Задача опр. коэфф-тов сист. лин. ОДУ.

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$ – дано, найти

a_{ij}, $i,j = 1,2$;

$\exists$ $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3a_{11} + a_{12} = 3 \\ 3a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$$ ед. решения нет.

Теор. $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $A = \|a_{ij}\|$, $i,j = 1 \div n$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = const$, матр. $n \times n$

Если на отр. $[c, d]$ $\exists$ t_k, $k = 1 \div n$

такие, что $\bar{X}(t_k)$ лин. незав., то

коэф-ты a_{ij} опр. однозначно.

Док-во:

$\bar{X}(t_k)$, $\dot{\bar{X}}(t_k)$ – изв (дано по усл.)

$$a_{11}x_1(t_1) + \ldots + a_{1n}x_n(t_1) = \dot{x}_1(t_1)$$

$$\vdots$$

$$a_{11}x_1(t_n) + \ldots + a_{1n}x_n(t_n) = \dot{x}_1(t_n)$$

система отн $\{a_{11},\ldots,a_{1n}\}$

$$\det_1 = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & \ldots & x_n(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1(t_n) & \ldots & x_n(t_n) \end{pmatrix} = \left(\left(\bar{X}(t_1)\right)\left(\bar{X}(t_2)\right)\ldots\left(\bar{X}(t_n)\right)\right)^T$$

$\det \neq 0$

$\det M = \det M^T \Rightarrow \det_1 \neq 0$

$\{a_{11},\ldots,a_{1n}\}$ – опр ед. образом.

аналогич. $\{a_{n1}\ldots a_{nn}\} \Rightarrow \|a_{ij}\|$ опр. ! обр.

$\dot{X} = A(t)x(t)$ $A(t)$ – $n\times n$ матр.

$a_{ij}(t) \in C[c,d]$

Теор 3 : J на $[c, d]$ даны $\bar{X}^k(t)$, $k = 1 \div n$ реш. сис-мы $\dot{\bar{X}} = A(t)\bar{X}(t)$, $\bar{X}^k(c) = \bar{b}$ лин. незав.

Тогда $a_{ij}(t)$ опр на $[c, d]$ однозначно.

Док-во :

$$a_{11}(t) X_1^1(t) + \dots + a_{1n} X_n^1(t) = \dot{X}_1^1(t)$$

$$a_{11}(t) X_1^2(t) + \dots + a_{1n}(t) X_n^2(t) = \dot{X}_1^2(t)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{11}(t) X_1^n(t) + \dots + a_{1n}(t) X_n^n(t) = \dot{X}_1^n(t)$$

$\forall\ t \in [c, d]$ система отн. $a_{11}(t), \dots, a_{1n}(t)$

матр. этой сис-мы.

$$\left((\bar{X}^1(t)) (\bar{X}^2(t)) \dots (\bar{X}^n(t)) \right)^T$$

$$\det\Big|_{t=c} = \left| \left((\bar{b}^1)(\bar{b}^2) \dots (\bar{b}^n) \right)^T \right| \neq 0$$

при $t = c$.

если $\det\Big|_{t=c} \neq 0$, тогда

$$\det(t) \neq 0 \quad \forall\ t \in [c, d]$$

$\| X_m^k(t) \|$, $k, m = 1 \div n$

$\det(X_m^k) \neq 0 \Rightarrow \{a_{11}, \dots, a_{1n}\}$ опр!

аналогич. $\Longrightarrow$ $A(x)$ опр. однозн.

Если решение задано приблизительно

$$\|\bar{y}(x) - y_\delta(x)\|_{C[c,d]} \le \delta$$

$$y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0$$

] изв. $a_0(x)$. Найти $a_1(x)$

$$y(c) = y_0\,, \quad y'(c) = y_1$$

$$a_1(x) = -\frac{y_\delta''(x) + a_0(x)\,y_\delta(x)}{y_\delta'(x)}$$

может оказаться $y_\delta'(x_j) = 0$.

Метод решения некорректной задачи

$\boxed{A a_1 = y}$ - основное ур-е для некорректных задач.

26.0

Задачи для ур-я теплопроводности с обратным временем.

$u_t = a^2 u_{xx} \quad 0<x<l, \quad t_0<t\le T$

$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t_0 \le t \le T$

$u(x,t_0) = \varphi(x), \quad 0\le x\le l$

Пр. зад: по $\varphi(x)$ найти $u(x,t)\Big|_{t=T} = g(x)$

Обр. зад: дано $g(x)$, найти $\varphi(x)$.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-t_0)} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Реш. пр. задачи ↑

$$u(x,T) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}}_{\varphi_n} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(T-t_0)}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

Ед-ть реш. ОЗ: из лин. ОЗ $\Rightarrow$

ед-ть $\Leftrightarrow g=0 \Rightarrow \varphi=0$.

$\exists\, g=0$.

$\delta_{nk}\,\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(T-t_0)} = 0$.

$\forall k$ нет $\varphi_k = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

ед-ть доказана.

$\textcircled{\exists}$ не $\forall g \in L_2$ $\exists \varphi \in L_2$

$\exists\, g(x)$ $g_n = e^{-n}$; $\exists \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}$

$$g_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\, dx$$

$$g_n = \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (T - t_0)}$$

$$g_n = e^{-n} \; ; \; \varphi_n = e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (T - t_0) - n}$$

$$\varphi_n \to \infty , \; n \to \infty$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \varphi_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

р-д расх., т.е. $\nexists \; \varphi(x) \sim g(x)$

$\exists\, g(x) \in C^p [0, l]$

сх. $\sum_{n=1}^{\infty} n^p e^{-n} \sin\frac{\pi n x}{l}$

никакая гладкость не решает вопрос уст-ти

Уст - ? $A\varphi = g$.

$$\int_0^l K(x,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = g(x)$$

$$K(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^{2}(T-t_0)} \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}$$

A — вп. непр.

=> задача некоррект.

Сущ — ?

Ед-ть — $\textcircled{+}$

Уст — $\textcircled{-}$

$\measuredangle$ $u_t = u_{xx}$, $0 \le x \le l$,

$t_0-\varepsilon \le t \le T$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t_0-\varepsilon \le t \le T$$

нач. усл. пока не ставим.

$$u \in C^{2,1}\left([0,l]\times[t_0-\varepsilon, T]\right).$$

$$f(t) = \int_0^l u^2(x,t)\,dx$$

$$f'(t) = 2\int_0^l u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx$$

$$f''(t) = 2\int_0^l \left(u(x,t)\,u_{tt}(x,t) + u_t^2(x,t)\right)dx \; \textcircled{=}$$

$$(u_t)_t = (u_{xx})_t = (u_t)_{xx} = u_{xxxx}$$

⊜ $2\int_0^l u_t^2(x,t)dx + 2\Big\{ u(x,t)\,u_{xxx}(x,t)\Big|_0^l -$

$- u_x(x,t)\,u_{xx}(x,t)\Big|_0^l +$

$+ \int_0^l u_{xx}^2(x,t)dx \Big\} = 2\int_0^l u_t^2(x,t)dx$ ⊕

$u_{xx}(x,t)\Big|_{x=0,l} = 0$, т.к. $u_{xx}(0,t) =$

$= u_t(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\overset{0}{u(0,t)}\big) = 0$

⊕ $2\int_0^l u_{xx}^2(x,t)dx =$

$= 4\int_0^l u_t^2(x,t)dx$

$f''(t) = 4\int_0^l u_t^2(x,t)dx$

$h(t) = \ln f(t)$

$h'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$

$$h''(t) = \frac{f''(t)f(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)}$$

Док, что $h''(t) \geq 0$ при $t \in [t_0 - \varepsilon, T]$

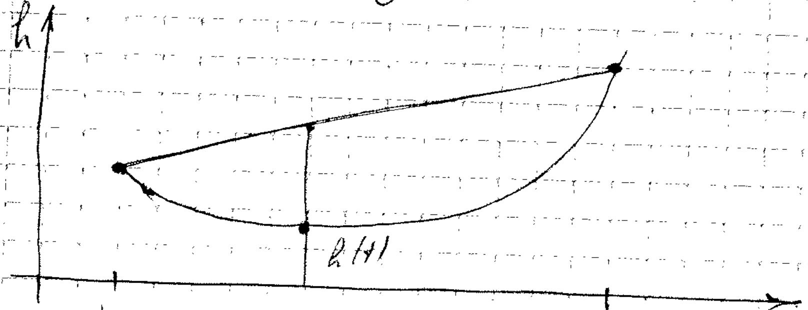
$$h'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$h''(t) = \frac{1}{f^2(t)} \left\{ 4\int_0^l u_t^2(x,t)\,dx \int_0^l u^2(x,t)\,dx - \right.$$

$$\left. - 4\left[\int_0^l u_t(x,t)\, u(x,t)\,dx\right]^2 \right\} \geq 0$$ (нер-во Коши-Бун.)

$$\|a\|^2\|b\|^2 - (a,b)^2 \geq 0$$

=> ф-я выпукла.



$$h(t) \leq h(t_0-\varepsilon)\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)} + h(T)\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}$$

$$\ln f(t) \leq \frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}\ln f(t_0-\varepsilon) + \frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}\ln f(T)$$

$$f(t) \leq \left[f(t_0-\varepsilon)\right]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \left[f(T)\right]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}},$$

$$\forall\ t \in [t_0-\varepsilon, T].$$

$u_i(x,t)$ уд. ур-ю и кр. усл. и

$$\int_0^l u_i^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx \leq C^2$$

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$\int_0^l (u_1(x,t) - u_2(x,t))^2 dx \leq$$

$$\leq \left[\int_0^l u^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx\right]^{\frac{T-t}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_0^l u^2(x,T)\,dx\right]^{\frac{t-(t_0-\varepsilon)}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$

$\underline{t = t_0}$

$$\int_0^l u^2(x,t_0)\,dx \leq \left[4C^2\right]^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \left[\int_0^l u^2(x,T)\,dx\right]^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-}}$$

$$\|u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0)\|_{L_2[0,l]} \le (2C)^{\frac{T-t_0}{T-(t_0-\varepsilon)}} \cdot$$

$$\cdot \|u_1(x,T) - u_2(x,T)\|_{L_2[0,l]}^{\frac{\varepsilon}{T-(t_0-\varepsilon)}}$$

Оценка получена не на компакте, а

и $\int_0^l u_i^2(x,t_0-\varepsilon)\,dx \le C^2$

$$U_{t_0-\varepsilon} = \left\{ u(x,t_0-\varepsilon) : \|u(x,t_0-\varepsilon)\|_{L_2[0,l]} \le C \right\}.$$

$$\hat{K}_\varepsilon : u(x,t_0-\varepsilon) \to u(x,t_0)$$

$$\int_0^l K_\varepsilon(x,\xi)\,u(\xi,t_0-\varepsilon)\,d\xi = u(x,t_0)$$

$$K_\varepsilon(x,\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l}\,\sin\frac{\pi n \xi}{l}\, e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \varepsilon}$$

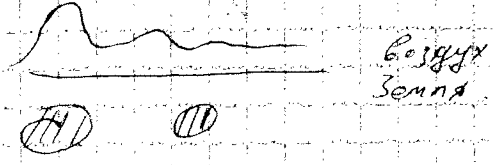
K_ε – непр.

$\Rightarrow$ $\hat{K}_\varepsilon$ – вп. непр. оп.

$\Rightarrow$ он переводит огр. L_2 в компакт.

$U_{t_0} = \hat{K}_\varepsilon U_{t_0-\varepsilon}$ $\quad U_{t_0}$ – компакт.

10.10



Ур-е Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad -\infty < x < \infty, \ y > 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Найти $u(x,y)$ при $y>0$ - некорр. пост., т.к. неустойчива.

Пример Адамара. (для задачи Коши для ур. Лапласа).

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\psi}(x) = 0 \quad |x| < \infty$$

реш. $\bar{u}(x,y) = 0, \ |x| < \infty, \ y > 0$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx, \quad \psi_n(x) = 0.$$

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n} \sin nx \, \mathrm{ch}\, ny$$

$$\sup_{x \in R} |\varphi_n(x) - \bar{\varphi}(x)| = 1/n \to 0 \quad n \to \infty$$

$$\sup_{x \in R} |u_n(x,y) - \bar{u}(x,y)| = 1/n \, \mathrm{ch}\, ny \quad \forall y > 0$$

$$\forall y > 0 \quad \sup_{x \in R} |u_n(x,y) - \bar{u}(x,y)| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \text{неуст.}$$

3.10

Задача определения начального распределения температуры по измерению в точке.

ПЗ:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & 0\le t\le T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0\le x\le l \end{cases}$$

ОЗ: $\varphi(x)$ неизвестна, дано — $u(x_0,t) = g(t)$
$0 < t_1 \le t \le T$

Найти $\varphi(x)$ по $g(t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n x}{l}, \quad \begin{array}{l} 0\le x\le l \\ 0\le t\le T \end{array}$$

Положим $x = x_0$.

$$\underbrace{\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi}_{\varphi_0} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n x_0}{l} = g(t), \quad t_1\le t\le T$$

$$\int_0^l K(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = g(t), \quad t_1 \le t \le T$$

$$K(t,\xi) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{\pi n\xi}{l}\cos\frac{\pi n x_0}{l}$$

$0\le t\le T,\ 0\le\xi\le l$

$e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t n^2}$ $K(t,\xi)$ - непр.

=> имеем инт. ур-е с непр. ядром

=> некорр задача на $L_2 - L_2$, $C - C$.

Исследуем её на ед-ть.

Теор: Пусть $\cos\frac{\pi n x_0}{l} \neq 0$ $\forall n \in N$

Тогда решение обратной задачи единственно в L_2

Док-во: Т.к ОЗ лин. по φ, то

$$\int_0^l K(t,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0.$$

$$\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,d\xi = \varphi_0$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi = \varphi_n, \quad n \geq 1.$$

$$\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi n x_0}{l} = 0, \quad (2)$$

$t_1 \leq t \leq T$

$$F(z) = \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 z} \cos\frac{\pi n x_0}{l}$$

$\mathrm{Re}\, z > \alpha$, $0 < \alpha < t_1$

Док-м, что $F(z)$ аналитич. в $\mathrm{Re}\, z > \alpha$

$$\underset{C}{\underset{\wedge}{|\varphi_n|}}\;\underset{1}{\underset{\wedge}{\left|\cos\frac{\pi n x_0}{l}\right|}}\;\left|e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \mathrm{Re}\, z}\right|\;\underset{1}{\underset{\wedge}{\left|e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 i\, \mathrm{Im}\, z}\right|}} \leq C e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \alpha}$$

$\mathrm{Re}\, z = t$, $t \to \infty$.

$\varphi_0 = 0$.

Домножим р-ю (2) на $e^{\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$ $\Rightarrow$

$$\varphi_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} + \sum_{n=k}^{\infty} \ldots = 0.$$

$$\overset{\parallel}{\sum_{n=k}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi n x_0}{l}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

$$\varphi_1 \cos\frac{\pi x_0}{l} = 0.$$

$$\varphi_n \underbrace{\cos\frac{\pi n x_0}{l}}_{\neq 0 \text{ (по выбор).}} = 0 \quad \forall n \in N$$

$\Rightarrow$ $\varphi_n = 0$.

в силу полн. $\{\cos\frac{\pi n x}{l}\}$ в $L_2[0,l]$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) = 0$.

Ч.Т.Д.

$\cos\frac{\pi n x_0}{l} = \pm 1$ при $x_0 = 0, l$.

J $x_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$; $\cos\frac{\pi n}{\sqrt{2}} \neq 0 \ \forall n \in N$

$x_0 = \frac{p}{q} l$; $\cos\frac{\pi p}{q} n = 0$.

$$\frac{\pi p n}{q} = \frac{\pi}{2}(2s+1)$$

$$p/q = \frac{2s+1}{2n}$$ — недопуст.

Пусть $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{l}$

$$u(x,t) = \cos\frac{\pi x}{l}\, e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$$

$x_0 = \frac{l}{2}$; $u(x_0,t) = 0$.

Задачи определения источника в ур-ии теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t) = a^2 u_{xx} + f(x)g(t) \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

ОЗ: $u(x_0,t) = h(t)$, $0 \le t \le T$

по $h(t)$ опр. → $g(t)$, если $f(x)$ изв.

→ $f(x)$, если $g(t)$ изв.

№ 1 $u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi}_{f_0} \int_0^l g(\tau)\,d\tau \,\cdot$

$\cdot$ ~~$\cos\frac{\pi n x}{l}$~~ $+\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi}_{f_n} \,\cdot$

$\cdot \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} g(\tau)\,d\tau \cos\frac{\pi n x}{l}$

$f_0\int_0^t g(\tau)\,d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^l e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} g(\tau)\,d\tau \,\cdot$

$\cdot \cos\frac{\pi n x_0}{l} = h(t).$ $\quad 0 \le t \le T$

Ур-е отн. $g(t)$: $\int_0^t K(t,\tau) g(\tau)\,d\tau = h(t)$

$0 \le t \le T$

$K(t\tau) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{\pi n x_0}{l} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)}$

$K(t,\tau) = K(t-\tau)$

Теор-$\exists!$ Пусть $f \in C^4[0,l]$, $f'(0) = f'(l) = 0$, $f(x_0) \ne 0$. Тогда, если $h(t) \in C^1[0,T]$ и $h(0) = 0$, то реш ОЗ, т.е. $g(t)$ $\exists!$ и $g \in C[0,T]$.

Док-во: $|f_n| \le \frac{C}{n^4}$

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi = \frac{2}{l}f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,\frac{l}{\pi n}\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2}{\pi n}\int_0^l f'(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\,\frac{l}{\pi n}f'(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\Big|_0^l - \frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l f''(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi =$$

$$= \dots = \frac{C}{n^4}$$

$K(t,\tau)$ непр. дифф. $K(\underset{\theta}{\underset{\parallel}{t-\tau}}) = K(\theta)$

$$K_t(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\frac{\pi n x_0}{l}\left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\right)e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\theta}$$

$\sim \frac{1}{n^2}$ → ряд сх-ся.

$$\int_0^t k(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = h(t)$$

$0 \le t \le T$

$$k(0)g(t) + \int_0^t k_t(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = h'(t)$$

$$K(t,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\cos\frac{\pi n x_0}{l} = f(x_0)$$

$$g(t) + \frac{1}{f(x_0)}\int_0^t K_t(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \frac{1}{f(x_0)}h'(t)$$

$0 \le t \le T$

$g(t)$ $\exists!$

№2 $g(t)$ - изв. $f(x) = ?$

$g(t) = 1$

$$u(x_0,t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi \cdot t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}d$$

$$\cdot\left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2\left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right]\cos\frac{\pi n x_0}{l} = h(t)$$

$0 \le t \le T$

$$\int_0^l k(t,\xi)f(\xi)d\xi = h(t)$$

$$k(t,\xi) = \frac{t}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2\cos\frac{\pi n x_0}{l}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{\pi n\xi}{l}\left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right].$$

ряд равн. сх. $\Rightarrow$

$k(t,\xi)$ - непр. ядро $\Rightarrow$

задача неуст. ед. зависит от x_0.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x)g(t)$$

$u(x_0,t) = h(t)$ → $f(x)$ изв, $g(t)$ - ?, $\exists!$

→ $g(t)$ изв, $f(\xi)$ - ? неуст. неед-ть.

10.10| смотри ранее ○ начало ⇐

○

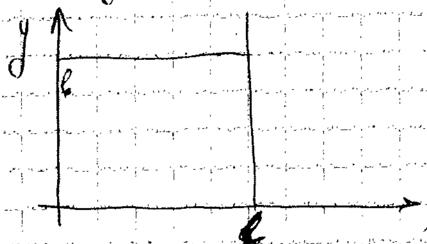
Задача на отрезке (начально-краевая задача для ур-я Лапласа)

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad 0<x<l,\ y>0.$$

$$u(0,y)=u(l,y)=0 \qquad y\geq 0$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leq x\leq l$$

$$u_y(x,0)=\psi(x),\quad 0\leq x\leq l$$



Найти $u(x,b)=f(x) \qquad 0\leq x\leq l$

Обратная задача Дирихле - рассм. задачу.

Задача Дирихле, $\varphi, 0, 0, f$

$$u(x,y)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x}_{\Phi(x,y)\text{ - изв}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{l}}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{l^2} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l}\, d\xi \,\cdot$$

$$\cdot\, \frac{ch\, \frac{\pi n}{l}(b-y)}{sh\, \frac{\pi n b}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{l^2} \int_0^l f(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l}\, d$$

$$\cdot\, \frac{ch\, \frac{\pi n y}{l}}{sh\, \frac{\pi n b}{l}} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Неуст. задача

$$g(x) \Leftarrow \Psi(x) - \Phi_y(x,0) = \int_0^l K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

$$K(x,\xi) = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{sh\frac{\pi n b}{l}} \sin\frac{\pi n \xi}{l} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$$ — непр. в $[0,l]\times[0,l$

Рассм вопрос о ед-ти.

$$\int_0^l K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = g(x) \quad , \quad 0 \le x \le l.$$

Ед. реш f? $g = 0$.

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l}\, d\xi = f_n$$

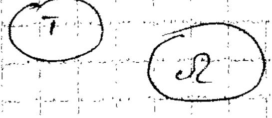
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} f_n \frac{\sin\frac{\pi n}{l}x}{sh\frac{\pi n b}{l}} = 0.$$

$$\frac{\pi n f_n}{l\, sh\frac{\pi n b}{l}} = 0 \Rightarrow f_n = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow$$ Ед-ть реш. ОЗ. Дирихле.

ОЗ. теории потенциала.

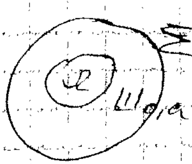
$$v(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\,dx'dy'dz'$$

$v(x,y,z)$ изв. в T.



$T\cap\Omega=\varnothing$

ОЗ: опр. Ω, $\rho(M)$, $M\in\Omega$



$\Sigma_{0,a}$ v изв на $\Sigma_{0,a}$

Найти Ω, ρ

Если v изв. на $\Sigma_{0,a}$, то v изв. вне $Ш_{0,a}$ (как реш. внешней зад. Дирихле)

$\Omega = Ш_{0,b}$, $b<a$.

Тело обладает центральной симметрией

$v(x,y,z)=v(R)$, $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$v(R)=\int\limits_0^b\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(r)\,r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}=$$

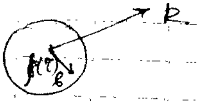
$$=2\pi\int\limits_0^b\int\limits_0^{\pi}\frac{\rho(r)\,r^2\sin\theta\,d\theta\,dr}{\underbrace{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}_{t}}\boxed{=}$$

$$\left|\frac{D(t,r)}{D(\theta,r)}\right| = \begin{vmatrix} t_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |t_\theta| = \frac{R r \sin\theta}{t}$$

$$\left|\frac{D(\theta,r)}{D(t,r)}\right| = \left|\frac{D(t,r)}{D(\theta,r)}\right| = \frac{t}{R r \sin\theta}$$

$$\ominus\ 2\pi \int_0^b \int_{R-r}^{R+r} \frac{\rho(r)\, \cancel{r^2} \cancel{\sin\theta}\, \cancel{t}}{\cancel{t} \cdot R \cdot \cancel{r}\, \cancel{\sin\theta}}\, dr\, dt =$$

$$= \frac{2\pi}{R} \int_0^b \int_{R-r}^{R+r} \rho(r)\, r\, dr\, dt = \frac{4\pi}{R} \int_0^b \rho(r) r^2 dr = v($$



ОЗ 1. Дано: v. Найти ρ, $\cancel{\Sigma}$, $\Omega \sim b$

Пусть $\rho(r) = \rho_0 = const$

$v(R) = 4/3\, \pi b^3 \rho_0 / R$

ρ_0, b одновр. однознач. не опр-ся.

$\rho_{0,1} b_1^3 = \rho_{0,2} b_2^3$

Этот пример показывает, что задача 1 единств. решения не имеет, т.е. ρ и Ω одновр. не опр.

ОЗ 2. Дано: v и Σ (пов-ть Ω)
Найти: ρ.

$$\int_0^b \rho(r)\, r^2 dr = \frac{v|_{\Sigma_R}}{4\pi} k = A = const$$

Очевидно, что $\rho(r)$ не опр. ед. обр-м

$$\rho(r) = c + dr$$

$$\int_0^b (c + dr)\, r^2 dr = c\frac{b^3}{3} + \frac{db^4}{4} = A$$

$c, d = ?$

$\exists\ b = 1$

$\frac{c}{3} + \frac{d}{4} = A$, c, d – неиз-ны

ОЗ 2 не имеет ед. реш.

ОЗ№3: ρ – изв., Σ – неизв.

Дано: v, ρ, Найти $\Sigma = \partial\Omega$.

Теорема (П.С. Новиков)

Если Ω – звездное тело, то его ф-ма опр. ед. обр-м ($\Sigma \in \bar{C}^1$) но

$v|_{\Sigma_{0,R}}$ ($\Omega \subset Ш_{0,R}$)

Опр: Тело Ω наз-ся звездным отн. т. $M_0 \in \Omega$, если $\forall$ луч, вых. из M_0 пересекает $\Sigma = \partial\Omega$ в единст. точке.

$$U(x,y,z)\Big|_{M(x,y,z)\in\Sigma_{0,R}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\int_0^{\sigma(\varphi,\theta)} \frac{\rho_0 r^2\sin\theta\, dr}{\sqrt{(x-r\cos\varphi\sin\theta)^2+(y-r\sin\varphi\sin\theta)+(z-r\cos\theta)^2}}\Big]d\theta\, d\varphi$$

$\rho = \rho_0 = const$

$[\quad]$ - инт. ур-е отн $\sigma(\varphi,\theta)$

$\boxed{17.1}$

Обратные задачи для ур-я колебаний.

$$\text{ПЗ:}\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0<x<l, \quad 0<t\le T \quad (1)\\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0\le t\le T \quad (2)\\ u(x,0) = \varphi(x), & 0\le x\le l \quad (3)\\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0\le x\le l \quad (4)\end{cases}$$

ОЗ: Дано, $u(x,T) = g(x)$, $0\le x\le T$,

Найти: $\to$ $\varphi(x)$, если изв $\psi(x)$ ОЗ1

$\searrow$ $\psi(x)$, если изв. $\varphi(x)$ ОЗ2.

ОЗ1: $\psi(x) = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2/l \int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi \cos\frac{\pi n a t}{l}\,\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\pi n x}{l} \qquad 0\le x\le l, \quad 0\le t\le T$$

$t = T$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2/l \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \cos\frac{\pi n a T}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= g(x), \quad 0 \le x \le l$$

$A_T \varphi = g, \quad A_T : L_2[0,l] \to L_2[0,l]$

$T = \frac{2l}{a}, \quad \cos 2\pi n = 1; \quad A_T = E$ - O31

при $T = 2l/a$ корректна

$$T_{p,q} = \frac{2p}{2q-1} \cdot \frac{l}{a}, \quad p,q \in N$$

$$\cos\frac{\pi n a l \cdot 2p}{la(2q-1)} = \cos\frac{\pi n 2p}{2q-1} \ne 0 \quad \forall n \in N$$

Док-во (от против.)

Пусть $\frac{2\pi n p}{2q-1} = \frac{\pi}{2}(2m-1)$

$4np = (2q-1)(2m-1)$

$\cos\frac{\pi n 2p}{2q-1} = f(n), \quad f(n) = f(n+2q-1)$

$f(n)$ принимает конеч. число знач.

$$\left|\cos\frac{2\pi n p}{2q-1}\right| \ge c > 0 \quad \forall n \in N$$

$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}; \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(g, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}\right)\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 < \infty$$

$$\varphi_n = \frac{g_n}{\cos \frac{2pn}{2q-1}};$$

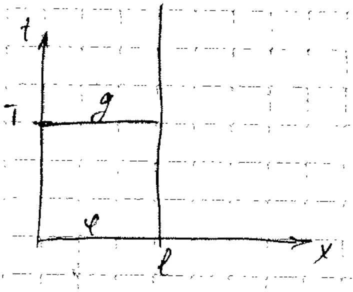
$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \le \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$$

$$\|\varphi\| \le \|g\|/c$$

$T_{p,q} = \frac{2q-1}{2p} \cdot \frac{l}{a}$ – задача некорректн

$\cos \frac{\pi n a T_{p,q}}{l} = 0$ при нек. $n_0 \in N$

$\varphi_{n_0} \cdot 0 = g_{n_0}$



Пример 1

$n = p$

$$\cos \frac{2q-1}{2p} \cdot \pi \cdot p = \cos (2q-1) \frac{\pi}{2}$$

$$g = 0 \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \sin \frac{\pi p}{l} x \end{cases}$$

$T = \frac{2p}{2q-1} \, l/a$

$T = \frac{2q-1}{2p} \, \frac{l}{a}$ A_t – не явл. непр. по t.

$\|A_{t_1} - A_{t_2}\|$ — не мала

$|t_1 - t_2|$ — мала.

$T_1 = t_0 = \frac{2l}{a}$, $A_{t_0} = E$,

$T_2 = t_{0k} = \frac{(4k-1)l}{2ka} \longrightarrow t_0$, $k \to \infty$

$A_{t_{0k}}$: $\|A_{t_{0k}} - A_{t_0}\| = \sup\limits_{\|\varphi\|_{L_2[0,l]} \le 1} \|(A_{t_{0k}} - A_{t_0})\varphi\|_{L_2[0,l]} =$

$= \sup \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \left(\cos \frac{\pi(4k-1)}{2 \cdot 2k} - 1\right)^2 \right\}^{1/2}$

если $n = k$ $\cos \frac{\pi(4k-1)k}{2 \cdot 2k}$

$\|A_{t_{0k}} - A_{t_0}\| \ge 1$ при $t_{0k} \to t_0$, $k \to \infty$

<u>0321</u> $\exists\ \varphi(x) = 0$

$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2/l \int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \, \frac{l}{\pi n a} \cdot \sin\frac{\pi n a t}{l}$

$\cdot \sin\frac{\pi n x}{l}$

<u>$t = T$</u>

$A_T \psi = g$; g - изв, $\psi = ?$

Ед. зав. от T

$g_n = \psi_n \cdot \frac{\sin\frac{\pi n a T}{l}}{\pi n a} \cdot l$

$$\psi_n = g_n \frac{\pi n a}{l \sin \frac{\pi n a T}{l}}$$

$g \in L_2 [0, l]$

Реш: $\exists$ не $\forall g \in L_2$ необх усл сущ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2 n^2}{\left(\sin \frac{\pi n a T}{l}\right)^2}$$

Если $g_n \sim 1/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 < \infty$, но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 = \infty$$

ОЗ2: не явл. корр, т.к. реш. сущ. не $\forall g \in L_2$.

Обратные коэффициентные задачи для уравнений в ч. частных производных.

Задача определения коэффициента в ур-ии теплопроводности.

$$\begin{cases} U_t = K(t) U_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T & (1) \\ U(0,t) = U(\pi, t) = 0 & (2) \\ U(x, 0) = \varphi(x) \qquad 0 \leq x \leq \pi. & (3) \end{cases}$$

ОЗ: Дано: $U(x_0, t) = g(t)$ $x_0 \in (0, l)$, $0 \leq t \leq T$

Найти: $K(t)$.

Реш: (1) - (3)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi \, e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \cdot \sin nx$$

$0 \leq x \leq \pi,$

$0 \leq t \leq T$

$u(x,t;k)$ $\quad u_t(x_0,t) = k(t) u_{xx}(x_0,t)$

$$g'(t) = k(t) u_{xx}(x_0,t,k)$$

$$k(t) = \frac{g'(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} \equiv Ak$$

$$\boxed{k_{n+1} = Ak_n}$$

(1) $u_t = k(t)\,u_{xx}$, $0<x<\pi$, $0<t\le T$ $\boxed{24.}$

ПЗ: (2) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0\le t\le T$

(3) $u(x,0) = \varphi(x)$, $0\le x\le \pi$

ОЗ: дано $u(x_0,t) = g(t)$, $x_0\in(0,\pi)$, $0\le t\le$

Найти: $k(t)$, $t\in[0,T]$.

$u_t(x_0,t) = g'(t)$, $0\le t\le T$

$$k(t) = \frac{g(t)}{u_{xx}(x_0,t;k)} = A_k$$

$$A: k \to \frac{g(t)}{u_{xx}(x_0,t,k)}$$

1) $|\varphi_n| \le \frac{C}{n^6}$

2) $\varphi_n \sin n x_0 \ge 0$ $\forall n\in N$

и $\exists m\in N$: $\varphi_m \sin m x_0 > 0$

3) $g\in C^1[0,T]$, и $g(0) = \varphi(x_0)$

$g'(t) < 0$, $t\in[0,T]$.

$\boxed{K = Ak}$ — ур-е

$C[0,T_0]$, $T_0\in(0,T]$

$K = \{k(t): k\in C[0,T_0],\ 0\le k(t)\le k_0$

$\forall t\in[0,T_0]\}$

k_0, T_0 – упр. пар-ры, гарантир. сжатие

) $AK \subset K$

$$U_{xx}(x_0,t,k) = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 e^{-n^2\int_0^t k(\tau)d\tau} \sin n x_0 .$$

Покажем, что оп. A опр-н на мн-ве K.

Мажор. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| n^2 < \infty$

A непр. по K

Покажем, что $Ak > 0$, $\forall k \in K$

$U_{xx}(x_0,t,k) < 0 \quad \forall k \in K$

$g'(t) < 0$

$Ak > 0$

$(Ak)(t) \le k_0 \quad \forall k \in K$

$$(Ak)(t) = -\frac{g'(t)}{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 e^{-\int_0^t n^2 k(\tau)d\tau} \sin n x_0}$$

$$\|(Ak)(t)\|_{C[0,T_0]} \le \frac{\|g'\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 \sin m x_0 \, e^{-k_0 T_0 m^2}} \le k_0 .$$

$$\boxed{\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]}}{\varphi_m m^2 \sin m x_0} \le k_0 e^{-k_0 T_0 m^2}}$$ Усл ①

Усл. $Ak \subset k$ вып-но.

2) $\| Ak_1 - Ak_2 \|_{C[0,T_0]} \le q \| k_1 - k_2 \|_{C[0,T_0]}$, $q < 1$

$$\| Ak_1 - Ak_2 \|_C \le \| g'(t) \|_{C[0,T_0]} \max_{t \in [0,T_0]} \left| \frac{u_{xx}(x_0,t,k_1) - u_{xx}(x_0,}{u_{xx}(x_0,t,k)\, u_{xx}(x_0,} \right.$$

$$\le \| g'(t) \|_{C[0,T_0]} \frac{\max\limits_{t\in[0,T_0]} \left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 \left(e^{-\int_0^t k_1(\tau)d\tau\, n^2} - e^{-\int_0^t k_2(\tau)d\tau\, n^2} \right. \right.}{\varphi_m^2 m^4 e^{-2k_0 T_0 m^2}} \le$$

$$\le \frac{\| g' \|_{C[0,T_0]} e^{2k_0 T_0 m^2}}{\varphi_m^2 m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 n^2 \| k_1 - k_2 \|_{C[0}$$

$$\{ | e^{-x} - e^{-y} | = | e^{-\xi} | |x - y| \le |x - y| \}.$$

$$\left| e^{-\int_0^t k_1(\tau)d\tau\, n^2} - e^{-\int_0^t k_2(\tau)d\tau\, n^2} \right| \le$$

$$\le n^2 \left| \int_0^t k_1(\tau)d\tau - \int_0^t k_2(\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le n^2 \int_0^t | k_1(\tau) - k_2(\tau) | d\tau \le$$

$$\le n^2 \| k_1(t) - k_2(t) \|_{C[0,T_0]}$$

$$\le \underbrace{\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{\dots}}{\varphi_m^2 m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 \sin n x_0 \|k_1 - k_2\|_{C[0,T_0]} T_0}_{q})$$

$$\boxed{\frac{\|g'\|_{C[0,T_0]} e^{2m^2 k_0 T_0} \cdot T_0}{\varphi_m^2 m^4 \sin m x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n_0 x\, n^4 < 1}$$

Усл ②

$\exists\ k_0 T_0 = 1.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^4 \sin n x_0 = \varphi^{IV}(x_0)$$

В усл 2, если T_0 мало, то $q < 1 \Rightarrow$

$\exists$ решения ОЗ на K

Теорема существования в малом.

Теор (единст. в целом)

$\exists\ \varphi(x)$ удовл. сформул. выше усл.,

тогда ОЗ имеет единст. реш.

Док-во:

$$u(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi) \sin n\xi \, d\xi \, e^{-n^2 \int_0^t k(\tau) d\tau} \sin n x_0,$$

$$0 \le t \le T.$$

От противного.

Пусть $\exists$ $k_1(t)$ и $k_2(t) \in C[0,T]$.

~~Тогда ОЗ имеет 1 реш.~~

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n x_0 [\underbrace{e^{-n^2\int_0^t k_1(\tau)d\tau}}_{e^{-p_1}} - \underbrace{e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau}}_{e^{-p_2}}]=$$

$$f(p_1)-f(p_2) = \int_0^1 f'(p_2+\theta(p_1-p_2)) d\theta (p_1-p_2).$$

$$e^{-p_1} - e^{-p_2} = -\int_0^1 e^{-p_2-\theta(p_1-p_2)} d\theta (p_1-p_2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n x_0 \int_0^1 e^{-\int_0^t k_2(\tau)d\tau - \theta\int_0^t (k_1(\tau)-k_2(\tau))d\tau\, n^2} d\theta \cdot$$

$$\cdot \left(n^2\int_0^t (k_2(\tau)-k_1(\tau))d\tau\right) = 0.$$

$$\Phi(t)\int_0^t (k_1(\tau)-k_2(\tau))d\tau = 0 \,, \quad \text{где}$$

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 \int_0^1 e^{-n^2\int_0^t k_2(\tau)d\tau - \theta n^2\int_0^t (k_1(\tau)-k_2(\tau)} d\theta$$

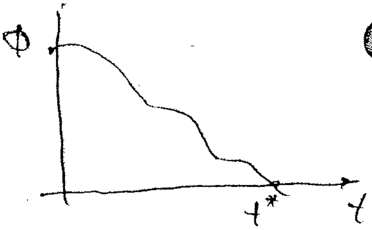
Если $\Phi(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$, то

$$\int_0^t (k_1(\tau)-k_2(\tau))d\tau = 0$$

$\forall\ t \in [0,T] \Rightarrow k_1(t) = k_2(t)\ \forall\ t.$

$\Phi(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n n^2 \sin n x_0 > 0.$

Предп., что $\Phi(t^*) = 0$



$\Phi(t) > 0$, $t \in [0, t^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1(t) = k_2(t)$, $t \in [0, t^*]$

$\Phi(t^*) \neq 0$. $\Rightarrow$ предположение о $\exists\ t^*$ неверное.

$\Rightarrow \Phi(t)$ нигде не обр. в ноль.

$\Phi(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

ч.т.д.

31.1

$$y(x) = y(x,\lambda)$$

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x).$$ (1)

$0 < x < \pi$, $q(x) \in C[0,\pi]$

$0 \le \alpha, \beta \le \pi$

$$y(0,\lambda)\sin\alpha + y'(0,\lambda)\cos\alpha = 0$$ (2)

$$y(\pi,\lambda)\sin\beta + y'(\pi,\lambda)\cos\beta = 0$$ (3)

ПЗ ≡ Задача Штурма-Лиувилля.

$\{\lambda_k\}$, $\{y(x,\lambda_k)\}$.

λ_k - действ., $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$

ОЗ 1: $\{\lambda_k\}$ - даны

Найти: $q(x)$

Решение ОЗ 1 неединств.

$$y(\pi,\lambda)\sin\gamma + y'(\pi,\lambda)\cos\gamma = 0$$ (4)

$\gamma \ne \beta$

∢ З. Ш-Л (1), (2), (4)

с.з. $\{\mu_k\}$ и $\mu_k \ne \lambda_k$

ОЗ 2: дано: $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$

Найти: $q(x)$ - реш. ОЗ 2 единств.

Теор: (Борг – Левинсон) Спектры (с.з.) задач (1)–(3) и (1),(2),(4) одн. опр. $q(x)$.

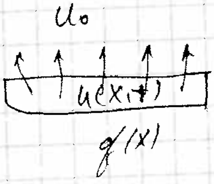
032': дано: $\{\lambda_n\}$, $q(x) = q(\pi - x)$,

$\alpha = -\beta$.

$q(x)$ опр. ед. образом.

1) $u_t = u_{xx} - q(x)u$, $0<x<\pi$, $t>0$.

$q(x) \geq 0$



$Q_н = h(u-u_0)$; $Q_Ф = -k(x)u(x)$

2) $u_x(0,t) = 0$, $t>0$

3) $u_x(\pi,t) = \nu(t)$, $t>0$

(4) $u(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

$\nu \in C^1[0,\infty)$

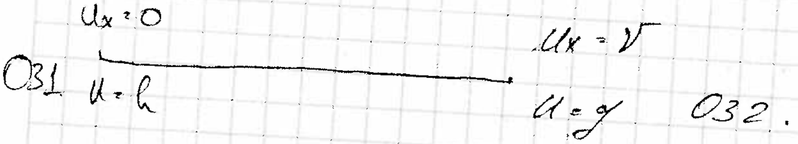
$\nu(0) = 0$, $\nu(t) = 0$, $t \geq T_0$

ПЗ: (1) - (4)

ОЗ: $q(x) = ?$

ОЗ 1: $u(0,t) = h(t)$, $t>0$

ОЗ 2: $u(\pi,t) = g(t)$, $t>0$



Соверш. преобр. Лапласа в (1)-(4)

$$v(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)\,dt, \quad \operatorname{Re} p \geq 0$$

$$u_n(x,t) = y(x, \lambda_n) e^{-\lambda_n t},$$ но

$$q(x) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n \geq 0$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} u_t(x,t)\,dt = e^{-pt} u(x,t)\Big|_0^\infty + \\ + \int_0^\infty p e^{-pt} u(x,t)\,dt = p v(x,p).$$

$$u(x,0) = 0$$

$$p v(x,p) = v_{xx}(x,p) - q(x) v(x,p) \quad 0<x<\pi$$

5) $v_{xx}(x,p) - q(x) v(x,p) = p v(x,p)$

(6) $v_x(0,p) = 0$

7) $v_x(\pi,p) = \tilde{v}(p)$

$\tilde{v}(p) = \int_p^{\infty} e^{-pt} v(t) dt$

$\omega_{xx}(x,p) - q(x)\,\omega(x,p) = p\,\omega(x,p)$

$\omega_x(0,p) = 0$, $\omega(0,p) = 1$.

$\omega(x,p)$ – аналит. ф-я p (целая)

$v(x,p)$ и $\omega(x,p)$ лин. зав.

$W(x,p) = \begin{vmatrix} v_x & \omega_x \\ v & \omega \end{vmatrix}$, $W(0,p) = 0$.

$\Rightarrow$ $W(x,p) = 0$. $\Rightarrow$ v и ω – л.з.

$v(x,p) = C(p)\,\omega(x,p)$.

$x = \pi$, $C(p) = \dfrac{v_x(\pi,p)}{\omega_x(\pi,p)} = \dfrac{\tilde{v}(p)}{\omega_x(\pi,p)}$.

$$\boxed{v(x,p) = \frac{\tilde{V}(p)\,\omega(x,p)}{\omega_x(\pi,p)}}$$ решение прямой задачи.

ОЗ2 $u(\pi,t) = g(t)$, $v(\pi,p) = \tilde{g}(p)$

Ед-ть реш. ОЗ2: предп., что

$\exists$ $q_1(x)$ и $q_2(x)$, $q_1 \neq q_2$:

реш. (1) - (4) $u_1(\pi,t) = u_2(\pi,t) = g(t)$.

$\Rightarrow$ $v_1(\pi,p) = v_2(\pi,p)$;

$q_1 \sim \omega_1$, $q_2 \sim \omega_2$

далее (5), (6), (7)

$$\frac{\omega_1(\pi,p)}{\omega_{1x}(\pi,p)} = \frac{\omega_2(\pi,p)}{\omega_{2x}(\pi,p)}$$

Все нули $\omega_1(\pi,p)$ = нулям $\omega_2(\pi,p)$

$p_0 : \omega(\pi,p_0) = 0$

нули $\omega_{1x}(\pi,p)$ = нулям $\omega_{2x}(\pi p)$

$\omega_{xx} - q(x)\omega = p\omega$;

$-y'' + q(x)y = \lambda y$

$\omega_x(0,p) = 0$, $\omega(\pi,p) = 0.$

$y'(0,\lambda) = 0$, $y(\pi,\lambda) = 0.$

$p_k = -\lambda_k$

$\omega_x(\pi,p) = 0 \sim y'(\pi,\lambda) = 0.$

$q_1 : \{\underset{\shortparallel}{\lambda_n^{(1)}}\}$, $\{\mu_n^{(1)}\}$ $\tilde{g}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)\,dt$

$q_2 : \{\lambda_n^{(2)}\}$, $\{\mu_n^{(2)}\}$ $\frac{\tilde{v}(p)}{\omega_x(\pi,p)}$

$\Rightarrow q_1 = q_2$

ОЗ1: $u(0,t) = h(t)$ – доп. инф.

$v(0,p) = \tilde{h}(p)$

$v_1(0,p) = v_2(0,p)$

$$\frac{\tilde{v}(p)\overset{=1}{\omega_1(0,p)}}{\omega_{1x}(\pi,p)} = \frac{\tilde{v}(p)\overset{=1}{\omega_2(0,p)}}{\omega_{2,x}(\pi,p)}$$

$\{\lambda_k^{(1)}\} = \{\lambda_k^{(2)}\}$ => нед. реш. ОЗ1.

Случай неизв. источника тепла.

$-y''(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda)$

$y(0,\lambda) = y'(\pi,\lambda) = 0$

$q(x) \geq q_0$

1) λ_n – действ., простые.

2) $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$

3) $\{y(x,\lambda_n)\}$ полна в $L_2[0,\pi]$.

она ортонорм.

4) $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$

$\lambda_0 \geq q_0 = \min\limits_{x\in[0,\pi]} q(x)$

<u>Док-во</u>: 4) от противного.

$\exists\, \lambda_0 < q_0 \quad y''(x,\lambda_0) = [\underbrace{q(x) - \lambda_0}_{>0}]\, y(x,\lambda_0)$

$y(0,\lambda_0) \neq 0$, $\exists\, y(0,\lambda_0) = a > 0$

$\Rightarrow y'(x,\lambda_0) > 0$, $y(x,\lambda_0) > 0$

$\forall\, x \in [0,\pi]$.

$y'(\pi,\lambda_0) > 0$ => против. док. 4).

$\lambda_n, \mu_n > 0$, $q(x) \geq 0$ 7.11.03.

1) λ_n - действ. $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$

2) $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$

3) λ_n - прост.

4) $\lambda_0 \geq q_0 = \min\limits_{x \in [0,\pi]} q(x)$

Док-во.

Пусть $\lambda_0 < q_0 \Rightarrow \lambda_0 < q(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$

$$y''(x,\lambda_0) = \underbrace{(q(x) - \lambda_0)}_{>0} y(x,\lambda_0)$$

$y(0,\lambda_0) \neq 0$, $y(0,\lambda_0) = \alpha > 0$

$y''(x,\lambda_0) > 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y(\pi,\lambda_0) \neq 0, \quad y'(\pi,\lambda_0) \neq 0 \\ y(\pi,\lambda_0) = 0 \text{ либо } y'(\pi,\lambda_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ?!$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} y(x,\lambda_n)$$

Случай неизвестного источника.

$\nu(t) = u_x(\pi,t)$

Пусть $\nu(t)$ - ?

$$\frac{\tilde{\nu}_1(p)\,\omega_1(\pi,p)}{\omega_1'(\pi,p)} = \frac{\tilde{\nu}_2(p)\,\omega_2(\pi,p)}{\omega_2'(\pi,p)}$$

$\nu(t) \in C^1(0,\infty)$, $\nu(0)=0$,

$\nu(t)=0$, $t \geq T_0$

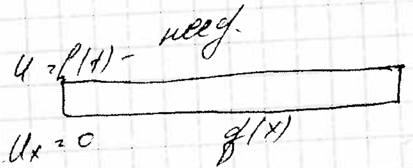
$\nu(t) \geq 0$, $t \in [0, T_0]$

$$\tilde{\nu}(p) = \int_0^\infty \nu(t) e^{-pt}\,dt \Rightarrow$$

$\tilde{\nu}(p) \neq 0$ при p - действ.

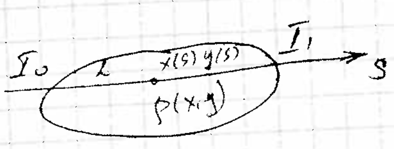
$$\frac{\omega_1(\pi,p)}{\omega_1'(\pi,p)} = \frac{\omega_2(\pi,p)}{\omega_2'(\pi,p)} \Rightarrow q_1(x) = q_2(x)$$

$$\tilde{\nu}_1(p) = \tilde{\nu}_2(p) \Rightarrow \nu_1(t) = \nu_2(t)$$



$$\left.\begin{array}{l} u=g(t) \\ u_x=\nu(t) \end{array}\right\} \text{ ед.}$$

Задачи компьютерной томографии.



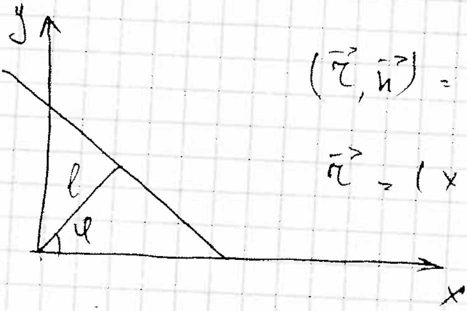
$$\frac{dI(s)}{dS} = -\gamma\,\rho(x,y)\,I(s)$$

$$\frac{dI(s)}{I(s)} = -\gamma\rho(x,y)\,ds$$

$$I(s) = I_0\, e^{-\int_{s_0}^{s}\gamma\rho(x,y)\,ds}.$$

$$\frac{I_1}{I_0} = e^{-\gamma\int_{s_0}^{s_1}\rho\,ds}$$

$$I_L = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(x(s),y(s))\,ds$$



$(\vec{r},\vec{n}) = l$

$\vec{r} = (x,y)$.

$$\cancel{I}\ \int_{L(l,\varphi)} f(x,y)\,ds = u(l,\varphi)$$

Дано: $u(l,\varphi)$

Зад. комп. том. Найти: $f(x,y)$

$f\in C(R^2)$ $u(l,\varphi)$

$l\in(-\infty,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$.

$u(l,\varphi)$ – преоб. Радона, $u = Rf$

$u(-l,\varphi) = u(l,\varphi+\pi)$

) f - финит $\Leftrightarrow$ supp f - огр.

2) $|f(x,y)| \leq \frac{C}{|1+y^2+x^2|^{1+\varepsilon}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,d\tau < \infty$$

$$x(s) = l\cos\varphi - s\cdot\sin\varphi$$

$$y(s) = l\sin\varphi + s\cos\varphi$$

$$u(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds$$

$$|u(l,\varphi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\,ds \leq C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1+l^2+s^2)^{1+\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{C}{(1+l^2)^{1+\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+l^2}\,ds/\sqrt{1+l^2}}{\left(1+\frac{s^2}{1+l^2}\right)^{1+\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{(1+l)^{1/2+\varepsilon}} \leq \frac{C_2}{l^{1+2\varepsilon}}$$

при $l \to \infty$

т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} |u(l,\varphi)|\,dl < \infty$

$$\hat f(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-\dots}$$

$$\hat u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

<u>Теорема</u> 1 (проекционная)

$$\hat f(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \hat u(\omega, \varphi),$$

где $\hat u(\omega,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(l,\varphi)\, e^{-i\omega l}\, dl$

<u>Док-во</u>:

$$\hat f(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi, l\sin\varphi + s\cos\varphi)\, e^{-i\omega l}\, dx\, dy =$$

$(x,y) \to (l,s)$

$x\cos\varphi + y\sin\varphi = l$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(l,s)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = 1.$$

$$dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(l,s)}\right| dl\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega l}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi, l\sin\varphi + s\cos\varphi)\, ds}_{= u(l,\varphi)}\Big)\, dl =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(l,\varphi)\, e^{-i\omega l}\, dl = \hat{u}(\omega,\varphi)$$

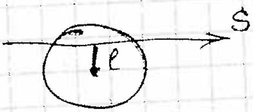
Алгоритм решения зад. СТ.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{u(l,\varphi)} \arrow[r, "\text{БПФ}", "\text{FFT}"'] & \boxed{\hat{u}(\omega,\varphi)} \arrow[r, "\text{Проек.}", "\text{теор.}"'] & \boxed{\hat{f}(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\text{БПФ}", "\text{в } \mathbb{R}^2"'] & \boxed{f(x,y)}
\end{tikzcd}$$

Задача компьютерной томографии в случае радиальной симметрии.

$$f(x,y) = \begin{cases} f(\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$



$$u(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(l\cos\varphi - s\sin\varphi,\ l\sin\varphi + s\cos\varphi)\, ds =$$

$$= \int_{-\sqrt{R^2-l^2}}^{\sqrt{R^2-l^2}} f(\sqrt{l^2+s^2})\, \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-l^2}} \ \textcircled{=}$$

$$l^2+s^2 = r^2, \qquad s\,ds = r\,dr$$

$$⊜ \; 2\int_0^{\sqrt{R^2-\ell^2}} f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{\ell^2-r^2}}$$

$$U(\ell) = 2\int_\ell^R f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}}$$

Дано: $u(\ell)$

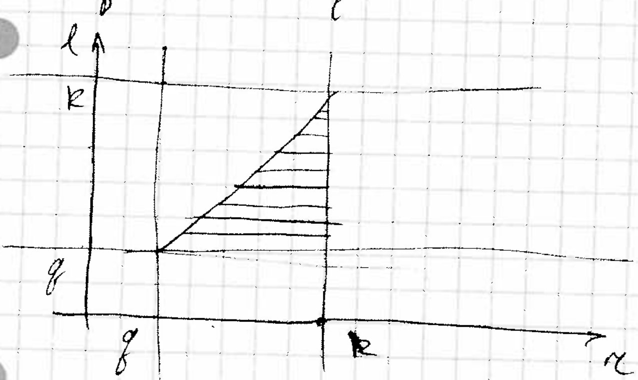
Найти: $f(r)$

ур-е Абеля

Интегральное ур-е Абеля 1-го рода.

домножим на $\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}}$) потом $\int_q^R \cdot\, d\ell$

$$2\int_q^R \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}} \int_\ell^R f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\ell^2}}\,d\ell \; ⊜$$



$$⊜ \; 2\iint_D \frac{f(r)\,r\,\ell\,dr\,d\ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}\,\sqrt{r^2-\ell^2}} \; ⊜$$

$$⊜\ 2\int_q^R f(r)\, r \underbrace{\int_q^r \frac{\ell\, d\ell}{\sqrt{(\ell^2-q^2)(r^2-\ell^2)}}}_{\overset{\shortparallel}{\frac{\pi}{2}}\ \text{инт. Дирихле}} dr =$$

$$= \pi \int_q^R f(r)\, dr = \int_q^R \frac{u(\ell)\, \ell}{\sqrt{\ell^2-q^2}}\, d\ell$$

$$\pi\int_q^R r f(r)\,dr = \int_q^R \frac{l u(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}$$

14.11

(1) $$f(q) = -\frac{1}{\pi q}\,\frac{d}{dq}\int_q^R \frac{l\,u(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}$$

Необх. усл. $u(R)=0$

$$\int_q^R \frac{l u(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}} = u(l)\sqrt{l^2-q^2}\Big|_q^R -$$

$$-\int_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,u'(l)\,dl$$

$$f(q) = \frac{1}{\pi q}\,\frac{d}{dq}\int_q^R \sqrt{l^2-q^2}\,u'(l)\,dl =$$

$$= \frac{1}{\pi q}\Big\{-u'(q)\sqrt{l^2-q^2}\Big|_{l=q} -$$

$$-\int_q^R \frac{u'(l)\,q\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}}\Big\} = \boxed{-\frac{\cancel{q}}{\pi\cancel{q}}\int_q^R \frac{u'(l)\,dl}{\sqrt{l^2-q^2}} = f(q)}$$

решение ур-я Абеля.

$$f(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{u'(l)\,dl}{l} = -\int\frac{du(l)}{\pi l}$$

$u \in C^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$

$|u(l_1) - u(l_2)| \le C\,|l_1 - l_2|^\alpha$

если изв. не $\bar{u}(l)$, а $\tilde{u}(l)$,

то реш. не $\exists$ (вообще говоря)

Методы решения некорректных ОЗ
на компактных мн-вах.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - банах.

A - непр. $A\bar{z} = \bar{u}$

$\bar{z}$ - точное решение для $\bar{u}$

$\|u_\delta - \bar{u}\|_U \le \delta$;

Дано: $\{u_\delta, \delta\}$.

Найти: прибл. реш. z_δ,

$z_\delta \in Z$: $\|z_\delta - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$

$Az = u_\delta$, т.к. задача некорректна,

$\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$ - есть пожелание

$Z_\delta = \{z \in Z \mid \|Az - u_\delta\| \le \delta\}$

$z_\delta \not\to \bar{z}$ при $\delta \to 0$

вообще говоря, т.к ОЗ некорректна

$\exists\ \bar z \in M$, M - компакт в Z

$Z_\delta^M = \{ z \in Z_\delta \mid z \in M \} = Z_\delta \cap M$

$\forall$ эл-т из Z_δ^M явл. приближ. реш.

$Z_\delta^M \neq \emptyset$, т.к. $\bar z \in Z_\delta^M$

$\bar z \in Z_\delta$, т.к. $\|A\bar z - u_\delta\| \le \delta$

__Теорема__: При $\delta \to 0$ $\sup\limits_{z \in Z_\delta^M} \|z - \bar z\| \to 0$

__Док-во__: Пусть $\exists\ \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\}$:

$\|z_{\delta_n} - \bar z\| > \varepsilon$, $z_{\delta_n} \in Z_{\delta_n}^M$

$\{z_{\delta_n}\} \subset M$ - компакт $\Rightarrow \exists \{z_{\delta_{n_p}}\} \to z^* \in M$

$A z_{\delta_{n_p}} \to A z^*$ при $p \to \infty$

$z_{\delta_{n_p}} \in Z_{\delta_{n_p}}^M$, т.е.

$\|A z_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \delta_{n_p}$,

$\|u_{\delta_{n_p}} - \bar u\| \le \delta_{n_p} \Rightarrow$

$A z_{\delta_{n_p}} \to A\bar z = \bar u$ при $p \to \infty$

$A z^* = \bar u$

$A \bar z = \bar u$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow z^* = \bar z \\ \|z_{\delta_{n_p}} - \bar z\| > \varepsilon \end{array}\right\} \to \text{противор. ?!}$$

Алгоритм: $\|Az - u_\delta\| \to \min\limits_{z \in M}$

$\|Az_\delta - u_\delta\| \leq \delta$, останов. и z_δ

$\{u_\delta, \delta\}$ и M - необходимо знать.

Метод квазирешений

$Az - u = 0$

Опр: Квазиреш. $Az = u$ на M

наз $\tilde{z} = \arg\inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$

если $\exists\ \bar{z}$: $A\bar{z} = u$

A - непр., $f(z) = \|Az - u\|$ - непр. ф.

$f(z) \geq 0$, M - компакт $\Rightarrow$

$\exists\ \tilde{z}$: $\|A\tilde{z} - u\| = \inf\limits_{z \in M} \|Az - u\|$

Теор: Пусть Z - банах., U - гильбертово (сепараб.)

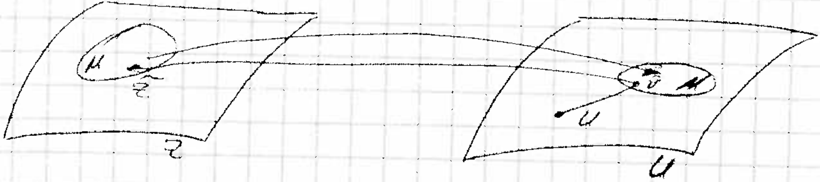
A - линейный, непр, $\ker A = 0$.

$(\ker A \overset{\text{опр-е.}}{=} \{z \mid Az = 0\})$.

M - выпуклый компакт в Z.

Тогда квазиреш. $\exists!$ и устойчиво

Док-во: ∃ док-но.



$A\underset{\text{комп}}{M} = \underset{\text{комп}}{N}$

$Az = v$, $\tilde v = \arg\inf_{v \in N} \|v - u\|$

$A\tilde z = \tilde v$

$\tilde v = P_N u$ — по опр-ю

Факт P_N - однознач, непр

$\|P_N\| < 1$

$\tilde z = A^{-1}\tilde v$

по лемме $\tilde z$ - ед., устойч.

$\tilde z = A^{-1}P_N u$

чтд.

Применение метода квазирешений.

A - непр. из Z в U, Z, U - банах.

$A\bar z = \bar u$, $\|\bar u - u_\delta\| \le \delta$

$\tilde Z_\delta^M = \{z \in M \mid z = \arg\inf_{z \in M} \|Az - u_\delta\|\}$

Теорема: Пусть $\bar{z} \in M$. Тогда

$$\sup_{z \in \tilde{Z}^M_\delta} \|z - \bar{z}\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

Док-во: Пусть $\exists\ \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\}$:

$$\exists\ z_{\delta_n} \in \tilde{Z}^M_{\delta_n} : \|z_{\delta_n} - \bar{z}\| > \varepsilon$$

$$z_{\delta_n} \in M \Rightarrow \exists \{z_{\delta_{n_p}}\} \longrightarrow z^* \in M$$

$$\|Az_{\delta_{n_p}} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \|A\bar{z} - u_{\delta_{n_p}}\| \le \delta_{n_p}$$

$\delta_{n_p} \to 0$, тогда $Az^* = \bar{u}$

предполагали, что реш. ур. $A\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{z}$ - един.

$\Rightarrow$ $Az^* = \bar{u} = A\bar{z}$

$\Rightarrow$ $z^* = \bar{z}$ $\Rightarrow$?!

ч.т.д.

№1 Решение: $\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$ и $z_\delta \in M$

№2 (квазиреш) $\tilde{z} = \arg\inf\limits_{z \in M} \|Az - u_\delta\|$

№1 $\|Az - u_\delta\| \to$ min

$\|Az_\delta - u_\delta\| \le \delta$ - усл. д ост.

№2 $\|Az - u_\delta\| \to \inf$

1) $z \in R^n$ ор, замк. мн-во - компакт.

2) $Z = C[a,b]$

Теор. Арцела - ор-ть и равностеп. непр-ть. => сх-ть.

$|z(x)| \le C_1$, $\forall x \in [a,b]$

$|z(x_1) - z(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$,

$x_1, x_2 \in [a,b]$

Метод регуляризации Тихонова. Случай минимального оператора.

Опр: $z_n \xrightarrow{сл} z^*$, $z_n, z^* \in H$,

если $(z_n, v)_H \to (z^*, v)_H$, $\forall v \in H$

Св-ва сл. сходимости:

1. если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$, то

$\|z^*\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|z_n\|$

2 если A - вп непр., то $z_n \xrightarrow{сл} z^*$

$\Rightarrow Az_n \to Az^*$

3 если $\|z_n\|_H \le C$, то $\exists \{z_{n_p}\}$:

$z_{n_p} \xrightarrow{сл} z^*$, $\|z^*\| \le C$

(шар в H слабокомпактен)

4. если $z_n \xrightarrow{сл} z^*$, $\|z_n\| \to \|z^*\|$,

то $z_n \to z^*$ в H

Пример: $\{\sin nx\}$, $x \in [0, \pi]$

$\sin nx \to 0$ в $L_2[0, \pi]$

$\|\sin nx\|^2_{L_2} = \pi/2$, $\int\limits_0^\pi v(x) \sin nx \, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - гильб

$\exists!$ $\bar z$ для $\bar u$, $\|u_\delta - \bar u\| \le \delta$

Дано: $\{u_\delta, \delta\}$. Найти: $z_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} \bar{z}$

Стабил. ф-л. $\equiv$ ф-л. Тихонова

$$M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|^2 + \alpha \|z\|^2_Z$$

u – фикс., $\alpha > 0$

Теор: $\forall u \in U$ и $\alpha > 0$ $\exists! \, z_\alpha \in Z$ на котором дост. $\min\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u]$, т.е. $\exists \, z_\alpha = \arg \inf\limits_{z} M^\alpha[z, u]$

Док-во:

$M^\alpha \geq 0$, $\exists \; m^* = \inf\limits_{z \in Z} M^\alpha[z, u]$

$\exists \{z_n\}$, минимизирующая $M^\alpha[z, u]$. $\exists \; M^\alpha[z, u] \leq M^\alpha[z_{n-1}, u]$, $n = 1, \ldots$

$M^\alpha[z_n, u] \leq C$.

$\|z_n\|^2 \leq C/\alpha$, то $\exists \; z_{n_p} \xrightarrow{сл} z^*$ в Z,

$z^* \in Z$, $\|z^*\| \leq \underline{\lim}_{p \to \infty} \|z_{n_p}\|$.

$Az_{n_p} \to Az^*$, $p \to \infty$, $\Rightarrow M^\alpha[z_{n_p}, u] \to m^*$

1) $\exists \; \forall \varepsilon > 0$, $\exists \, N_1(\varepsilon)$: $\forall n_p \geq N_1$

$M^\alpha[z_{n_p}, u] \leq m^* + \varepsilon/3$.

2) $\exists N_2(\varepsilon): \forall n_p \geq N_2 \quad \|Az_{n_p} - Az^*\| \leq \varepsilon/3$

$\|Az^* - u\| \leq \|Az_{n_p} - u\| + \varepsilon/3$

3) т.к. $\|z^*\| \leq \underline{\lim} \|z_{n_p}\|$, $\exists N_3(\varepsilon)$:

$\|z^*\|^2 \leq \|z_{n_p}\|^2 + \varepsilon/3$

$M^\alpha[z^*, u] = \|Az^* - u\|^2 + \alpha\|z^*\|^2 \leq$

$\leq \|Az_{n_p} - u\|^2 + \varepsilon/3 + \alpha\|z_{n_p}\|^2 + \varepsilon/3 =$

$= M^\alpha[z_{n_p}, u] + \frac{2}{3}\varepsilon \leq m^* + \varepsilon$

т.к. $\forall \varepsilon > 0$, $M^\alpha[z^*, u] = m^*$

единств. $M^\alpha[z, u]$ = выпук. функ. +

+ строго выпукл. = строго выпукл.

=> точка min — единственная

$M^\alpha[z, u] \to$ min на Z

A - лин, $M^\alpha[z, u]$ - квадр.

необх и дост. усл. . . .

$M^\alpha[z+h, u] - M^\alpha[z, u] =$

$= (A(z+h) - u, A(z+h) - u) -$

$- (Az - u, Az - u)_U +$

$+\alpha(z+h, z+h)_Z - \alpha(z,z) =$

$= (Az-u, Ah) + (Ah, Az-u) +$

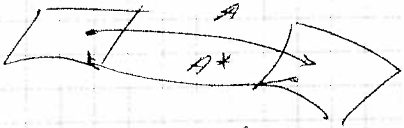
$+ 2\alpha(z,h) + (Ah,Ah) + \alpha(h,h) =$

$= 2(A^*(Az-u),h) + 2\alpha(z,h) + O(\|h\|^2)$

$$\frac{\partial M^\alpha[z,u]}{\partial z} = \text{grad}_z M^\alpha[z,u] =$$

$$= 2\left[A^*(Az-u) + \alpha z\right]$$

) $A^*Az + \alpha z = A^*u$



<u>необх</u> усл min это усл. и <u>дост.</u>

$\exists\ \tilde z$ – реш (1)

$M^\alpha[\tilde z, u] = m^*$, дейст.

(от противного) $\exists\ M^\alpha[\tilde z, u] > m^*$,

но $\exists\ z^* = \arg\inf M^\alpha[z,u]$,

z^* – реш. (1)

$z = \tilde z - z^* \Rightarrow A^*Az + \alpha z = 0$, $z \neq 0$.

$(Az, Az) + \alpha(z,z) > 0$ – противоречие

Построение приближенного решения.

<u>Теор 2</u> : $\exists\ \alpha = \alpha(\delta)$ такого, что

$\alpha(\delta) \to 0\ ,\ \delta \to 0$

$\delta^2/\alpha(\delta) \to 0\ ,\ \delta \to 0.$

Тогда $\| z_{\alpha(\delta)} - z \| \to 0$ при $\delta \to 0$

где $z_{\alpha(\delta)} = \operatorname{argmin} M^{\alpha(\delta)}[z, u_\delta]$,

$\| u_\delta - \bar{u} \| \leq \delta$

<u>Док-во</u> : (от противного), т.е.

$\exists\ \exists\ \varepsilon > 0$ и $\{\delta_n\} \to 0$ и

$$z_{\alpha(\delta_n)} = \operatorname*{argmin}_{z} M^{\alpha(\delta_n)}[z, u_{\delta_n}]$$

$\| z_{\alpha(\delta_n)} - \bar{z} \| \geq \varepsilon \quad \forall n \in N$

$$M^{\alpha(\delta_n)}[z_{\alpha(\delta_n)}, u_{\delta_n}] \leq M^{\alpha(\delta_n)}[\bar{z}, u_{\delta_n}].$$

$$\| A z_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n} \|^2 + \alpha(\delta_n) \| z \|^2 \leq$$

$$\leq \| A\bar{z} - u_{\delta_n} \|^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar{z} \|^2 \leq$$

$$\leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \| \bar{z} \|^2$$

① $\| z_{\alpha(\delta_n)} \|^2 \leq \delta_n^2 / \alpha(\delta_n) + \| \bar{z} \|^2 \leq C_1$

$\Rightarrow \exists\ z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{сл} z^* \in Z$

② $\|Az_{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|^2 \le \delta_n^2 + \alpha(\delta_n)\|\bar z\|^2$

$\|z^*\| \le \underline{\lim} \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \le \overline{\lim} \|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \le$

$\overset{\shortparallel}{\|\bar z\|} \le \|\bar z\|$

② $\longrightarrow$ $Az^* = \bar u$

из единст. $Az^* = \bar u = A\bar z$

$z^* = \bar z$

1) $z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{сл} \bar z$

2) $\|z_{\alpha(\delta_{n_p})}\| \to \|\bar z\|$ $\Big\}$ $\Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_p})} \to \bar z \to$ противор.

Построим оператор R_α: $u \in U \to z \in Z$

$\alpha = \alpha(\delta)$

Замеч. $\alpha(\delta) > 0$

$\alpha(\delta) \to$, $\delta \to 0$

$\delta^2/\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$

Если $\alpha(\delta) = \delta^2$ сх. нет

Метод регуляризации Тихонова для решения нелинейного операторного ур-я.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - банах.

A - непр. из Z в U и для

$\bar{u}$ $\exists!$ $\bar{z}$: $A\bar{z} = \bar{u}$

$H \Subset Z$, т.е. $\|z\|_H \le C$ - компакт в Z

$M^\alpha[z, u] = \|Az - u\|_U^2 + \alpha \|z\|_H^2$, $\alpha > 0$

25.1

C3

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, $H \Subset Z$.

A - непр. $A\bar z = \bar u$, ~~$\exists$~~ $\exists\ \bar z \in H$

$M^\alpha[z,u] = \|Az - u\|_U^2 + \alpha\|z\|_H^2$

Теор (существ. z_α) $\forall \alpha > 0$ и $\forall u \in U$

$\exists\ z_\alpha \equiv z^* : M^\alpha[z^*,u] = \inf\limits_{z\in H} M^\alpha[z,u]$.

Док-во: (аналогич. д-ву теор. в лин. случае)

т.е. считаем доказ., что $\exists\ z^* \in Z$

$\exists\ z_{n_p} \xrightarrow{Z} z^* \Rightarrow m^* = \inf\limits_{z\in H} M^\alpha[z,u] =$

$= \lim\limits_{p\to\infty} M^\alpha[z_{n_p}, U] = \lim\limits_{p\to\infty} \|Az_{n_p} - U\|^2 +$

$+ \lim\limits_{p\to\infty} \alpha\|z_{n_p}\|_H^2 = m^* = \varphi^* + \alpha\psi^*$

$\psi^* = \lim\limits_{p\to\infty} \|z_{n_p}\|_H^2$ и $z_{n_p} \xrightarrow{Z} z^*$

$\sigma_{mp} = 1/2(z_{n_p} + z_{n_{p+m}})$ и

$\rho_{mp} = 1/2(z_{n_p} - z_{n_{p+m}})$

$\|\sigma_{mp}\|_H^2 = 1/4\overset{\nearrow\psi^*}{\|z_{n_p}\|^2} + 1/4\overset{\nearrow\psi^*}{\|z_{n_{p+m}}\|^2} + 1/2(z_{n_p}, z_{n_{p+m}})$

$\|\rho_{mp}\|_H^2 =$ ——— " ——— $- 1/2(z_{n_p}, z_{n_{p+m}})$

$\Downarrow$

0

$\beta_{n_p} \xrightarrow{H} 0$, т.е. z_{n_p} - фунд в H, $z_{n_p} \to \hat{z}$

$z_{n_p} \xrightarrow{Z} z^*$ и $z_{n_p} \xrightarrow{H} \hat{z} \Rightarrow z^* = \hat{z} \in H$

ч.т.д.

Теорема (сх-ти) $\exists\ \alpha = \alpha(\delta) > 0$

и $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $(\alpha(\delta)/\delta^2)^{-1} \le c$

при $\delta \to 0$. Тогда $\sup \|\bar{z} - z_{\alpha(\delta)}\|_Z \to 0$

при $\delta \to 0$, где $z_{\alpha(\delta)} \in H_{\alpha(\delta)}$

$$H_{\alpha(\delta)} = \operatorname{Arg} \inf_{z \in H} M^\alpha[z, u_\delta], \quad \|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$$

Применение метода регуляризации Тихонова для решения интегр. ур-ий I рода.

$$Az \equiv \int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds = u(x), \quad c \le x \le d$$

$z \in L_2[a,b]$, $u \in L_2[c,d]$.

$\int_c^d \int_a^b |K(x,s)|\, ds\, dx < \infty$, то A - вп. непр из $L_2[a,b] \to L_2[c,d]$.

$$A^*(Az - u) + \alpha z = 0$$

$$A^*Az + \alpha z = A^*u$$

$$M^\alpha[z,u] = \int_c^d \Big[\int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds - u(x)\Big]^2 dx +$$

$$+ \alpha \int_a^b z^2(s)\, ds$$

$$A' z = \int_c^d K(x,s)\, z(x)\, dx = \omega(s);$$

$$A^* : U \longrightarrow Z$$

$$\alpha z(t) + \int_c^d \int_a^b K(x,s)\, K(t,x)\, z(s)\, ds\, dx =$$

$$= \int_c^d K(x,t)\, u(x)\, dx$$

$$u = u_\delta$$

$$\alpha \cancel{E} z(t) + \int_a^b B(t,s)\, z(s)\, ds =$$

$$= \int_c^d K(x,t)\, u_\delta(x)\, dx$$

$$B(t,s) = \int_c^d K(t,x)\, K(x,s)\, dx$$

$$B(s,t) = B(t,s) \sim B \geqslant 0$$

$$(\alpha E + B) z = A^* u_\delta$$

$$\begin{cases} \alpha(\delta) > 0 \\ \delta^2 / \alpha(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \\ \alpha(\delta) \to 0 \end{cases}$$

$\alpha(\delta) = \delta^2$ – то сх. нет

$$\| z_{\alpha(\delta)} - \bar{z} \|_{L_2[a,b]} \to 0 \quad \delta \to 0$$

Как получить сх в C?

$z \in W_2^1[a,b] \equiv Z$, $u \in L_2[c,d] \equiv U$

$$M^\alpha[z,u] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)z(s)\,ds - u(x)\right]^2 dx + \alpha\int_a^b \left[(z'(s))^2 + z^2(s)\right] ds.$$

$$B_{mn} = h\sum_{\xi=1}^{N} K_{\xi m} K_{\xi n}$$

$A^* u_\delta = f_\delta$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ z_n \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ z_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_{\delta m} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\det(\alpha E + B) > 0$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 = \delta^2$$

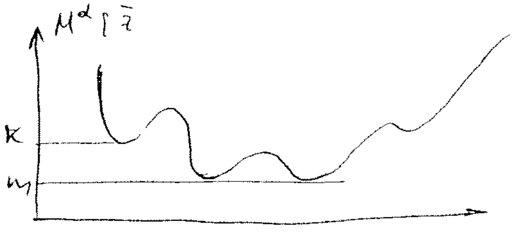
Нелинейный случай

$$\int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds = u(x), \quad c \le x \le d$$

$z \in C[a,b] \equiv Z$, $u \in L_2[c,d]$

$H = W_2^1[a,b].$

$W_2^1 \subset\subset C \qquad z_{\alpha(\delta)} \xrightarrow{C} z \qquad M^\alpha[z,u_\delta] \to \min\limits_{z \in H}$



Выбор параметра регуляризации по принципу невязки.

A - вп непр ! $Z \to U$, Z, U - гильб

$\ker A = 0$, $R(A)$ - образ. оп.

$\overline{R(A)} = U$.

<u>Лемма 1 (без док-ва)</u>

$U \neq 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ $\Rightarrow z_{\alpha_1} \neq z_{\alpha_2}$

док-во :

$\alpha_1 z_1 + A^* A z_1 = A^* u$

$\alpha_2 z_2 + A^* A z_2 = A^* u$

Обозначим ($M^\alpha[z, u] = m(\alpha)$

$\|Az_\alpha - u\|^2 = \varphi(\alpha)$,

$\|z_\alpha\|^2 = \psi(\alpha)$

$m(\alpha) = \varphi(\alpha) + \alpha\psi(\alpha)$, $\alpha > 0$

<u>Лемма 2</u> ! $J\alpha_1 > \alpha_2$ $m(\alpha_1) > m(\alpha_2)$ ①

$\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$ ②

$\psi(\alpha_1) < \psi(\alpha_2)$ ③

<u>Док-во</u> (

① $m(\alpha_1) = M^{\alpha_1}[z_{\alpha_1}, u] = \varphi(\alpha_1) + \alpha_1\psi(\alpha_1) \geqslant$

$\geqslant \varphi(\alpha_1) + \alpha_2\psi(\alpha_1) \geqslant M^{\alpha_2}[z_{\alpha_1}, u] >$

$> M^{\alpha_2}[z_{\alpha_2}, u] = m(\alpha_2)$

③ $\varphi(\alpha_1) + \alpha_1 \psi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2) + \alpha_2 \psi(\alpha_2)$

$\varphi(\alpha_2) + \alpha_2 \psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2 \psi(\alpha_1)$

$(\alpha_1 - \alpha_2)\, \psi(\alpha_1) < (\alpha_1 - \alpha_2)\, \psi(\alpha_2)$

② $\varphi(\alpha_2) + \alpha_2 \psi(\alpha_2) < \varphi(\alpha_1) + \alpha_2 \psi(\alpha_1)$

$\varphi(\alpha_2) - \varphi(\alpha_1) < \alpha_2 (\psi(\alpha_1) - \psi(\alpha_2))$

ч.т.д.

Лемма 3: $m(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ – непр по $\alpha > 0$

z_α: $\alpha z_\alpha + A^* A z_\alpha = A^* u$.

Лемма 4: $\lim\limits_{\alpha \to +0} \varphi(\alpha) = 0$,

$\lim\limits_{\alpha \to \infty} \varphi(\alpha) = \|u\|^2$

Док-во: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists z_\varepsilon$: $\|A z_\varepsilon - u\| < \varepsilon$

$$M^\alpha[z_\varepsilon, u] = \underbrace{\|A z_\varepsilon - u\|^2}_{\leq \varepsilon^2} + \overbrace{\alpha \|z_\varepsilon\|^2}^{\leq \Delta},$$

$\exists \alpha(\varepsilon)$: $M^\alpha[z_\varepsilon, u]$ меньше любого $\Delta \equiv m$

$M^\alpha[z_\varepsilon, u] \geq M^\alpha[z_\alpha, u] = m(\alpha)$, т.е.

$m(\alpha) \to 0$, $\alpha \to +0$

$\Rightarrow \varphi(\alpha) \to 0$.

Продолжим док-во теоремы.

$$\lim_{\alpha \to \infty} \varphi(\alpha) = \|u_\delta\|^2$$

$$M^\alpha[z_\alpha, u_\delta] = \varphi(\alpha) + \alpha\,\psi(\alpha) \le$$

$$\le M^\alpha[0, u_\delta] = \|u_\delta\|^2$$

$A \cdot 0 = 0.$ $\alpha \|z_\alpha\|^2 \le \|u_\delta\|^2;$

$$\|z_\alpha\|^2 \le \frac{\|u_\delta\|^2}{\alpha}$$

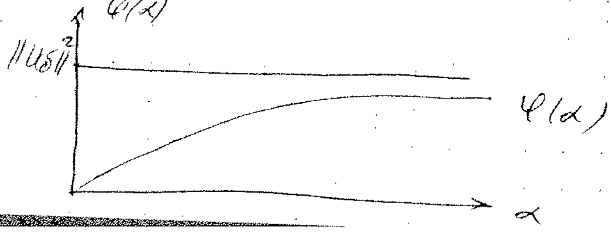
$\|z_\alpha\| \longrightarrow 0, \ \alpha \to \infty$

$$\lim_{\alpha \to \infty} z_\alpha = 0.$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \varphi(\alpha) = \lim_{\alpha \to \infty} \|Az_\alpha - u_\delta\|^2 = \|u_\delta\|^2$$

Св-ва $\varphi(\alpha)$:

1) Монотонно возрастает
2) Непр., $\alpha > 0$
3) $\lim_{\alpha \to 0} \varphi(\alpha) = 0$, $\lim_{\alpha \to \infty} \varphi(\alpha) = \|u_\delta\|^2$



Теор: Пусть $\|u_\delta\| > \delta$. Тогда ур-е
$\varphi(\alpha) \equiv \|Az_\alpha - u_\delta\|^2 = \delta^2$ имеет
ед. решение $\alpha = \alpha(\delta)$, причем
$\|z_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$, т.е.
$z_{\alpha(\delta)}$ явл. приближ. реш. $Az = u$
при $u = u_\delta$

Док-во: $\varphi(\alpha) \to \|u_\delta\|^2, \quad \alpha \to \infty$

$\varphi(\alpha) \to 0, \quad \alpha \to 0$

$\exists!\, \alpha(\delta): \quad \varphi(\alpha(\delta)) = \delta^2$

$z_{\alpha(\delta)}$ – приближ реш. (док-м это от противного)

$\exists\ \varepsilon > 0,\ \delta_k \to 0: \ \|z_{\alpha(\delta_k)} - \bar{z}\| \geq \varepsilon$

① $\|Az_{\alpha(\delta_k)} - u_{\delta_k}\|^2 = \delta_k^2$

② $\|z_{\alpha(\delta_k)}\| \leq \|\bar{z}\|$, т.к.

$$M^{\alpha(\delta_k)}[z_{\alpha(\delta_k)}, u_{\delta_k}] = \overbrace{\|Az_{\alpha(\delta_k)} - u_{\delta_k}\|^2}^{\delta_k^2} +$$

$$+ \alpha(\delta_k)\|z_{\alpha(\delta_k)}\|^2 \leq$$

$$\leq \underbrace{\|A\bar{z} - u_{\delta_k}\|^2}_{\leq\ \delta_k^2} + \alpha(\delta_k)\|\bar{z}\|^2,$$

$\|A\bar{z} - u_{\delta_k}\| \leq \delta_k$

$\exists\ \{z(\alpha_{\delta_{k_p}})\} \xrightarrow{H} z^* \in H,$

$\|z^*\| \le \underline{\lim} \, \| z(\alpha(\delta_{n_p}))\| \le \overline{\lim} \, \| z(\alpha(\delta_{n_p}))\| \le \|\bar z\|$

$\overset{\|}{\bar z}$ $\uparrow$ св-во слабой полунепр снизу

$A z_{\alpha(\delta_{n_p})} \longrightarrow A z^*$, $z^* \in H$

$$\lim_{p \to \infty} \| A z_{\alpha(\delta_{n_p})} - u_{\delta_{n_p}} \| =$$

$$= \| A z^* - \bar u \| = 0$$

$A z^* = \bar u$, но $A \bar z = \bar u$, т.к.

$\operatorname{Ker} A = 0$, то $z^* = \bar z$

Таким образом ① $\exists \lim\limits_{p \to \infty} \| z_{\alpha(\delta_{n_p})} \| = \|\bar z\|$

② $z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow{\text{сл.}} \bar z$ в H

Из ① и ② $\Rightarrow z_{\alpha(\delta_{n_p})} \xrightarrow[p \to \infty]{H} \bar z$?!

принцип невязки применим только в линейном случае

Вариационные способы.

$A: Z \to U$, Z, U - гильбертовы.

$B: Z \to Z$, Z - гильб.

$\operatorname{Ker} B = 0$, $\exists B$ - вполне непр

Теор (Г-Ш.) B имеет счётную послед. с.з. и собст. эл-в $\{\lambda_k, \varphi_k\}$, $\{\varphi_k\}$ образ. в Z ортонорм. базис,

е $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (z, \varphi_k)\varphi_k$ и $Bz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z, \varphi_k)\varphi_k$.

Итерационный метод решения операторных ур-й I рода.

$Az = u$, $z \in Z$, $u \in U$, Z, U - гильб.

A - вп. непр., $\operatorname{Ker} A = 0$.

Дано: $\{u_\delta, \delta\}$, $\|\bar{u} - u_\delta\| \le \delta$, где

$\bar{u} = A\bar{z}$

Найти: z_δ, $\|z_\delta - \bar{z}\| \to 0$ при $\delta \to 0$

$A^*Az = A^*u$

$A^*A : Z \to Z$

A^*A - вп. непр., $A^*A > 0$

$$z_{n+1} = z_n + \mu(A^*u - A^*Az_n)$$

Построим итерац. процесс

$$z_n = R_n u$$

$$R_n = \mu \sum_{k=0}^{n} (E - \mu A^*A)^k A^*$$

Докажем это по индукции

$R_0 = \mu A^*$] верно для n ;

док-м для $n+1$.

$$z_{n+1} = \mu A^* u + (E - \mu A^* A) z_n \;\textcircled{=}$$

$$z_n = R_n u$$

$$\textcircled{=}\; \mu A^* u + (E - \mu A^* A)\mu \sum_{k=0}^{n} (E - \mu A^* A)^k A^* u$$

$$= \mu A^* u + \mu \sum_{k=1}^{n+1} (E - \mu A^* A)^k A u^* =$$

$$= \mu \sum_{k=0}^{n+1} (E - \mu A^* A)^k A^* u$$

<u>Теор</u>: Пусть $0 < \mu < 2/\|A^* A\|$, а целочисл. ф-я $n(\delta)$ такова, что $n(\delta) \to \infty$, $\delta \to 0$ и $\delta \cdot n(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Тогда $\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar z\| \to 0$ при $\delta \to 0$),

т.е. $R_{n(\delta)} u_\delta$ — приближ. реш.

<u>Док-во</u>: $\|R_{n(\delta)} u_\delta \overset{\pm \bar u}{-} \bar z\| \le \|R_{n(\delta)} (\bar u - u_\delta)\| +$

$+ \|R_{n(\delta)} \bar u - \bar z\| \le \|R_{n(\delta)}\| \cdot \delta + \|R \underset{n(\delta)}{\bar u} - \bar z\|$

$0 < \lambda_i \le \|A^* A\|$

$|1 - \mu \lambda_i\| < 1$. $\mu \in (0, 2/\|A^* A\|)$

$$\|R_n\| = \|\mu \sum_{k=0}^{n} (E - \mu A^*A)^k A^* \le$$

$$\le \mu \sum_{k=0}^{n} \|E - \mu A^*A\|^k \|A^*\| \le \mu(n+1)\|A^*\|$$

$$\|R_n(\bar{u} - u_\delta)\| \le \mu(n+1)\|A^*\| \cdot \delta$$

$$R_{n(\delta)}\bar{u} - \bar{z} = (R_{n(\delta)} A - E)\bar{z} =$$

$$= (\mu \sum_{k=0}^{n(\delta)} A^*A(E - \mu A^*A)^k - E)\bar{z} =$$

$$\{ \bar{z} = \sum_{i=1}^{\infty} (z, \varphi_i)\varphi_i \} =$$

$$= (\mu \sum_{k=0}^{n(\delta)} A^*A(E - \mu A^*A)^k - E) \sum_{i=1} (z, \varphi_i)\varphi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (z, \varphi_i)[\mu \sum_{k=0}^{n(\delta)} \lambda_i (1 - \mu\lambda_i)^k - 1]\varphi_i =$$

$$= \{ S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-(1-\mu\lambda_i)^{n+1}}{1 - 1 + \mu\lambda_i} =$$

$$= \frac{1}{\mu\lambda_i}(1 - (1 - \mu\lambda_i)^{n+1}) \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)[1 - (1 - \mu\lambda_i)^{n(\delta)+1} - 1]\varphi_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)(1 - \mu\lambda_i)^{n(\delta)+1} \varphi_i$$

$$\| R_{n(\delta)} \bar{u} - \bar{z} \| \to 0 \quad , \quad n(\delta) \to \infty$$

$$\| R_{n(\delta)} \bar{u} - \bar{z} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \lambda_i \mu)^{2(n(\delta)+1)} (\bar{z}, \varphi_i)^2 <$$

$$\| \bar{z} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 < \infty$$

$$\exists N(\varepsilon) : \sum_{i=N+1}^{\infty} (\bar{z}, \varphi_i)^2 \le \varepsilon/2$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{(1 - \mu\lambda_i)^{2(n(\delta)+1)}}_{\alpha^{2(n(\delta)+1)}} (\bar{z}, \varphi_i) < \varepsilon/2$$

$$|1 - \mu\lambda_i| \le \alpha < 1$$ – мажориф. р-д

$$\| R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z} \| \le \mu \|A^*\| (n(\delta)+1)\delta + \underset{n \to \infty}{\beta(n(\delta))} \to$$

$\delta \to 0$, $\beta \to 0$

$$n(\delta) \cdot \delta \to 0$$
$$n(\delta) \to \infty$$

$\Rightarrow$ сх-ть есть.

Ч.т.д.

Проекционный метод решения операторных уравнений I рода.

$Az=u$: $A: Z\to U$, Z, U – гильб.
A – вп. непр.

$\ker A = 0$

$A^*A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, $\{\varphi_k\}$ – ортонор. базис.

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \dots > 0.$

$A\bar z = \bar u$, $\bar z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_n)\varphi_n$;

$A^*Az = A^*u$ (в прошлый раз).

$A\varphi_k = \hat\psi_k \in U$

$(\hat\psi_k, \hat\psi_m) = (A\varphi_k, A\varphi_m)_U =$

$= (\varphi_k, A^*A\varphi_m) = \lambda_m(\varphi_k, \varphi_m) = \lambda_m \delta_{km}$

$\psi_k = \dfrac{\hat\psi_k}{\|\hat\psi_k\|}$, $\{\psi_k\}$ – ортонор. базис в U.

$\overline{Az} = u$

$\bar u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\bar u, \psi_k)\psi_k$

$A\bar z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_n) A\varphi_n = \bar u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\bar u, \psi_n)\psi_n \textcircled{=}$

$A\varphi_n = \hat\psi_n$

$\psi_k = \dfrac{\hat\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$

$\textcircled{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_n)\sqrt{\lambda_n}\,\psi_n$

$(\bar z, \varphi_n) = (\bar u, \psi_n)/\sqrt{\lambda_n}$

$$\bar z = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar z, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar u, \psi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n = A^{-1}\bar u$$

$A\bar z = \bar u$

если $\bar u \notin R(A)$, то ряд не сх-ся.

$$z = R_n u = \sum_{k=1}^{n} \frac{(u, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k$$

$\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar z\| \to 0$ при $\delta \to 0$

$$\|R_n u_\delta - \bar z\| \leq \|R_n(u_\delta - \bar u)\| + \|R_n \bar u - \bar z\| \leq$$

$$\leq \|R_n\|\delta + \|R_n \bar u - \bar z\|$$

$$\|R_n\|^2 \underset{\lambda_k \geq \lambda_n}{\sup} \|R_n \omega\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\omega, \psi_k)^2}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_k} \sum_{k=1}^{n} (\omega, \psi_k)^2 \leq$$

$$\|R_n\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$$

$$\|R_n \bar u - \bar z\| = \|R_n A \bar z - \bar z\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \frac{(A\bar z, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A\bar z, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k \Big\| = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(A\bar z, \psi_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k \Big\| =$$

$$= \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (z, \varphi_k)\varphi_k \Big\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\|R_n u_\delta - \bar z\| \leq \dfrac{\delta}{\sqrt{\lambda_n}} + \beta(n)$, где

$\beta(n) \to 0, \quad n \to \infty$

Теор: Если целочис. ф-я $n(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ так, что $\frac{\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} \to 0$, то

$$\| R_{n(\delta)} U_\delta - \bar{z} \| \to 0$$

при $\delta \to 0$

Док-во:

$$\| R_{n(\delta)} U_\delta - \bar{z} \| \le \frac{\delta}{\sqrt{\lambda_{n(\delta)}}} + \beta(n(\delta)) = \varepsilon(\delta) \to 0$$

$\delta \to 0$

ч.т.д.

Метод квазиобращения.

ПЗ: $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ОЗ: дано $u(x,T) = g(x)$, $0 \le x \le \pi$

Найти: $\varphi(x)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

$$g_n = \varphi_n e^{-n^2 T}, \quad u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 T} \sin nx = \varphi(x)$$

$$g = K\varphi, \quad \varphi = K^{-1} g$$

K - вп. непр.

$$R_\alpha g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{n^2 T(1-\alpha n^2)} \sin nx \quad , \alpha > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 < \infty , \quad g_n \to 0 \quad , n \to \infty$$

$$\tau = T - t$$

$$\begin{cases} u_\tau = -u_{xx}, & 0 < \tau < T, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,\tau) = u(\pi,\tau) = 0, & 0 \leq \tau \leq T \\ u(x,0) = g(x) & , \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_\tau = -v_{xx} - \alpha v_{xxxx} \\ v(0,\tau) = v(\pi,\tau) = 0, & 0 \leq \tau \leq T \\ v_{xx}(0,\tau) = v_{xx}(\pi,\tau) = 0, & 0 \leq \tau \leq T \\ v(x,0) = g(x) & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$\alpha = \alpha(\delta)$$

$\| R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi} \| \to 0$ при $\delta \to 0$ если $\alpha = \alpha(\delta)$ сп. обр.

$$\| R_\alpha (g_\delta - \bar{g}) + R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi} \| \leq \underset{①}{\| R_\alpha (g_\delta - \bar{g}) \|} + \underset{②}{\| R_\alpha g - \bar{\varphi} \|}$$

1)

$$\| R_\alpha (g_\delta - \bar{g}) \| \leq \| R_\alpha \| \delta$$

$$\| R_\alpha g \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{n^2 T(1-\alpha n^2)} \| \sin nx \|^2 \leq$$

$$\leq \max_{n \geq 1} e^{2n^2 T(1-\alpha n^2)} \| g \|^2$$

$$\max_{x \geq 1} e^{2xT(1-\alpha x)}$$

$$\max_{x \geq 1} xT(1-\alpha x) = T \max_{x \geq 1} x(1-\alpha x)$$

$1 - 2\alpha x^* = 0$, $x^* = 1/2\alpha$

$n_*^2 = 1/2\alpha$

$$\max_{n \geq 1} e^{2n^2 T(1-\alpha n^2)} = e^{\frac{T}{2\alpha}}$$

$$\|R_\alpha\| \leq e^{\frac{T}{4\alpha}}$$

② $\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\|^2 = \|R_\alpha K \bar{\varphi} - \bar{\varphi}\|^2 =$

$$= \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \left(e^{-\alpha T n^4} - 1\right) \sin nx \Big\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n^2 \left(1 - e^{-\alpha T n 4}\right)^2 \|\sin nx\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n^2 \left(1 - e^{\alpha T n^4}\right)^2 \|\sin nx\|^2$$

③ $$\sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n^2 \left(1 - e^{-\alpha T n^4}\right)^2 \|\sin nx\|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \bar{\varphi}_n^2 \|\sin nx\|^2 =$$

$= \gamma(N) \to 0$, $N \to \infty$,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \ \gamma(N) \leq \varepsilon/2 \quad \forall n > N(\varepsilon)$

④ $$\sum_{n=1}^{N} \varphi_n^2 \left(1 - e^{-\alpha n^4 T}\right)^2 \|\sin nx\|^2 \leq \varepsilon/2$$

$\exists N(\varepsilon)$ - фикс. $\exists \alpha(\varepsilon)$: ④ $\leq \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon)$: $\|R_\alpha \bar{g} - \bar{\varphi}\| \le \varepsilon$

$\|R_\alpha g_\delta - \bar{\varphi}\| \le R_\alpha \delta + \beta(\alpha) \le \delta e^{T/4\alpha} + \beta(\alpha)$

Теор: Если $\alpha(\delta) > 0$ таково, что

$\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ и $\delta e^{T/4\alpha(\delta)} \to 0$, то

$\|R_{\alpha(\delta)} g_\delta - \bar{\varphi}\| \to 0$ при $\delta \to 0$