1. Кусочно-линейное восполнение сеточных функций.

Опр. Кусочно-линейным восполнением ф-ции $u(x)\in C[a,b]$ на сетке $\omega_h=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{N-1}<x_N=b\}$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, наз-ся ф-я $\tilde u_h(x)=L_1^{(i)}(x)=u_{i-1}\dfrac{x_i-x}{h_i}+u_i\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}$ [интерп. полином Лагранжа 1ой степени], $x\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1\ldots N$

Обозн. $h=\max\limits_{i=\overline{1,N}} h_i$ – диаметр сетки.

$\tilde u_h(x)=\sum\limits_{i=0}^{N} x_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ 0, & \text{в ост.}\end{cases}$

$\boxed{Л_1}$ Пусть $u(x)\in C[a,b]$, $\exists\, u''(x)$ при $x\in(a,b)$, $\int_a^b(u''(x))^2dx<\infty$

$\Rightarrow \int_a^b(\tilde u_h'(x)-u'(x))^2dx\le h^2\int_a^b(u''(x))^2dx$.

$\boxed{Л_2}$ При тех же условиях $\Rightarrow \int_a^b(\tilde u_h(x)-u(x))^2\le h^4\int_a^b(u''(x))^2dx$

<u>СЛЕДСТВИЕ:</u> В предположении 2ой гладкости $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|\tilde u_h-u\|_{L_2(a,b)}\xrightarrow[h\to0]{}0$, $\|\tilde u_h'-u'\|_{L_2(a,b)}\xrightarrow[h\to0]{}0$

2. Построение схемы МКЭ для обыкновенного диф. ур-я 2го порядка.

$$\begin{cases}u''(x)-q_r(x)u(x)=-f(x), & x\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0 & (q_r(x)\ge0)\end{cases}\quad(1)\qquad \varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_i}, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ 0, & \text{в ост.}\end{cases}$$

Опр. Обобщённым реш-ем (1) наз. $u(x)\in\mathring W_2^1(0,1)$, т.ч. для $\forall v(x)\in\mathring W_2^1(0,1)$: $\int_0^1u'v'dx+\int_0^1q_ruv\,dx=\int_0^1fv\,dx$. (2)

Вводим равн. сетку: $\omega_h=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_N=1\}$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,N}$

Обозн. $H_N=\mathcal{L}(\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1})$

Опр. Приближённым реш-ем (1) наз. $u_N(x)\in H_N$, удовл. (2) $\forall v\in H_N$.

(2) вып-но $\forall v\in H_N \Leftrightarrow$ (2) вып-но для $\forall\varphi_i(x)$, i.e.

$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}u_N'\varphi_i'dx+\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}q_ru_N\varphi_i\,dx=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f\varphi_i\,dx$, где $u_N(x)=\sum\limits_{j=1}^{N-1}y_j\varphi_j(x)$.

↓ построение СЛАУ:

1) $x\in[x_{i-1},x_{i+1}] \Rightarrow u_N(x)=y_{i-1}\varphi_{i-1}(x)+y_i\varphi_i(x)+y_{i+1}\varphi_{i+1}(x)$ –
– верно для $\forall i=\overline{1,N-1}$, если положить $y_0=y_N=0$.

2) $x\in[x_{i-1},x_i] \Rightarrow u_N'(x)=-\frac{y_{i-1}}{h_i}+\frac{y_i}{h_i}=y_{\bar{x},i}$

3) $x\in[x_i,x_{i+1}] \Rightarrow u_N'(x)=-\frac{y_i}{h_{i+1}}+\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}=y_{x,i}$

$$\Rightarrow \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_N'\varphi_i'\,dx = y_{\bar{x},i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{h_i}+y_{x,i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}-\frac{dx}{h_{i+1}}=y_{\bar{x},i}-y_{x,i}$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q u_N\varphi_i\,dx = y_{i-1}\underbrace{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_i\varphi_{i-1}\,dx}_{l_i}+y_i\underbrace{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q\varphi_i^2\,dx}_{m_i}+y_{i+1}\underbrace{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q\varphi_{i+1}\varphi_i\,dx}_{n_i}$$

обозн. $F_i=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i\,dx$ и получ. СЛАУ:

$$\begin{cases} y_{\bar{x},i}-y_{x,i}+l_i y_{i-1}+m_i y_i+n_i y_{i-1}=F_i \\ y_0=y_N=0. \end{cases}$$

3. Существование и единственность приближ. реш-я МКЭ. (*)

Введём $(v,w)=\int\limits_0^1 vw\,dx$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ и $a(v,w)=\int\limits_0^1 v'w'\,dx+\int\limits_0^1 qvw\,dx$

Опр. Обобщённым решением (1) – ОДУ 2-го порядка наз. $u\in\overset{\circ}{W}_2(0,1)$, удовлетворяющая $a(u,v)=(f,v)$, $\forall v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$

Опр. Приобл. реш-ем (1) наз. $u_N\in H_N$, удовл. $a(u_N,\varphi_i)=(f,\varphi_i)$, $i=\overline{1,N-1}$.

$\exists$ $u_N(x)=\sum\limits_{j=1}^{N-1}y_j\varphi_j(x)$ – разложение по базису $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1}$.

$\boxed{Л_1}$ Коэф-ты y_j удовл-ют СЛАУ $A\hat{y}=\hat{f}$, $\hat{y}=(y_1\dots y_{N-1})^T$,
$\hat{f}=(f_1\dots f_{N-1})^T$, $f_i=(f,\varphi_i)$, $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}=a(\varphi_i,\varphi_j)$

$\boxed{Л_2}$ Для $\forall f(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $\forall\hat{v}\in\hat{H}$ и $v(x)=\sum\limits_{i=1}^{N-1}v_i\varphi_i(x)$ вып-ся:
1) $a(v,v)=(A\hat{v},\hat{v})_{\hat{H}}$; 2) $(f,v)=(\hat{f},\hat{v})_{\hat{H}}$.

$\boxed{Л_3}$ М-ца A – симметрична и при $q(x)\ge 0$ положит-но опред-на.

$\boxed{Т}$ Приближ. реш-е $u_N(x)$ задачи (1) $\exists!$

[$A>0\Rightarrow\exists A^{-1}\Leftrightarrow\exists!$ реш-е $A\hat{y}=\hat{f}\Leftrightarrow\exists!\,u_N(x)$]

(*) ОДУ: $\begin{cases} u''(x)-q(x)u(x)=-f(x),\ x\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0,\ q(x)\ge 0. \end{cases}$ $\varphi_i=\begin{cases}\frac{x-x_{i-1}}{h_i},\ x\in[x_{i-1},x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i},\ x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0,\ \text{осп.}\end{cases}$

Опр.: $\hat{H}$ – пр-во векторов $\hat{v}=(v_1\dots v_{N-1})^T$ со скал. произв-ем $(\hat{v},\hat{w})_H=\sum\limits_{i=1}^{N-1}v_iw_i$

4. Свойства приближённого решения, исследование сходимости МКЭ.

Введём в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$: $\mathcal{Y}(v)=a(v,v)-2(f,v)$; Обозн. $H\equiv\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $H_N=\operatorname{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_1}$

$$(1):\begin{cases} u''-q(x)u(x)=-f(x),\ x\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0,\ q(x)\geq 0.\end{cases}\qquad \varphi_i=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i},\ x\in[x_{i-1},x_i],\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}},\ x\in[x_i,x_{i+1}],\\ 0,\ \text{ост.}\end{cases}$$

Обозн. $h=\max\limits_{i=\overline{1,N}} h_i$ – диаметр сетки.

Л1 Пусть введённый в H $\mathcal{Y}(v)$ удовлетворяет:

1) $a(u,v)=a(v,u)$; 2) $a(v,v)\geq 0$, $\forall u,v\in H\Rightarrow$ задачи ① и ② эквивалентны

① найти u: $\mathcal{Y}(u)=\min\limits_{v\in H}\mathcal{Y}(v)$; ② найти u: $a(u,v)=(f,v)$, $\forall v\in H$

Т: Точное (обобщённое) решение (1) $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ доставляет min функционалу $\mathcal{Y}(v)$ в пр-ве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$.

Т: Прибл. реш-е задачи (1) $u_N(x)\in H_N$ доставляет min ф-лу $\mathcal{Y}(v)$ в пр-ве H_N.

Л2 Пусть $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ – точн. реш-е (1), $u_N(x)\in H_N$ – приближ. реш-е (1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow a(u_N-u,u_N-u)\leq a(v-u,v-u)$, $\forall v\in H_N$

Л3 Пусть $v(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ и $q(x)\geq 0$, тогда справедливы неравенства:

1) $\max|v(x)|\leq\left(\int_0^1(v')^2dx\right)^{1/2}$; 2) $\int_0^1 v^2dx\leq\frac{1}{2}\int_0^1(v')^2dx$; 3) $\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\leq\frac{3}{2}a(v,v)$

Т: [сход-ть в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$] Пусть $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2$ – точн. реш-е (1), $u_N(x)$ – приближ. реш-е (1), тогда при $0\leq q(x)\leq C$ справедливо нер-во: $\|u_N-u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\leq M\cdot h$

Док-во: $\boxed{Л2}\Rightarrow a(u_N-u,u_N-u)\leq a(v-u,v-u)$, $\forall v\in H_N$,

$\hat{u}(x)\in H_N\Rightarrow a(u_N-u,u_N-u)\leq(\hat{u}-u,\hat{u}-u)=\int_0^1(\hat{u}'-u')^2dx+\int_0^1(\hat{u}-u)^2q\,dx\leq$
$\leq h^2\int_0^1(u'')^2dx+ch^4\int_0^1(u'')^2dx$

из $\boxed{Л3}\Rightarrow\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\leq\frac{3}{2}a(v,v)$

$\Rightarrow\|u_N-u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}\leq M\cdot h$, $M=\left[\frac{3}{2}(1+ch^2)\int_0^1(u'')^2dx\right]^{1/2}$. ч.т.д.

Т: [сходимость в C] При условиях предыдущей теоремы верно нер-во: $\|u_N-u\|_C\leq M\cdot h$.

Док-во: из $\boxed{Л3}\Rightarrow\max\limits_{x\in[0,1]}|v(x)|\leq\left(\int_0^1(v')^2dx\right)^{1/2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\|u_N-u\|_C\leq\left(\int_0^1(u_N'-u')^2dx\right)^{1/2}\leq\left(\int_0^1[(u_N'-u')^2+(u_N-u)^2]dx\right)^{1/2}\overset{\text{пред. теорема}}{\leq} M\cdot h$, ч.т.д.

⑤ МКЭ для ур-я Пуассона.

$$\begin{cases}\Delta u(x,y) = -f(x,y), & (x,y)\in G,\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial G\end{cases} \qquad (4)$$

<u>Опр.:</u> Обобщ. реш-ем (4) наз. $u(x,y)\in \mathring{W}_2^1(G)$, для кот. $a(u,v)=(f,v)$ для $\forall v\in \mathring{W}_2^1(G)$.

$\boxed{\text{Т:}}$ Обобщ. реш-е (4) дост. min ф-ции $J(v)=a(v,v)-2(f,v)$.

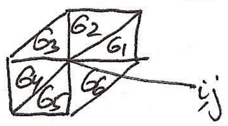
Введём в $\bar G$ сетку: $\Omega=\{(x_i,y_i),\ x_i=ih_x,\ y_j=jh_y;\ i=\overline{0,N_x},\ j=\overline{0,N_y},$
$N_xh_x=l_x;\ N_yh_y=l_y\}$; $w=\{(x_i,y_i),\ i=1\ldots N_x-1,\ j=1\ldots N_y-1\}$,
$\gamma=\Omega\setminus w$

Кажд. узлу сопост. баз. ф-ю $\varphi_{ij}(x,y)$, т.ч.:
1) φ_{ij} — линейна на кажд. Δ-ке Δ-ции; 2) $\varphi_{ij}(x_i,y_j)=1$;
3) $\varphi_{ij}(x_m,y_n)=0$, $m\neq i$, $n\neq j$.

Носителем $\varphi_{ij}(x,y)$ [$\varphi_{ij}\neq 0$] явл-ся 6-угольник из 6 Δ-ов с вершиной в $(x_i;y_j)$: $w_{ij}=\bigcup\limits_{k=1}^{6} G_k$.

$\boxed{Л_1}$ Для $\varphi_i(x,y)$ спр-во предст-е: $\varphi_{ij}(x,y)=1+\xi_k\dfrac{x-x_i}{h_x}+\eta_k\dfrac{y-y_j}{h_y}$,

где $\xi_k=\begin{cases}-1, & k=1,6,\\ 0, & k=2,5,\\ 1, & k=3,4\end{cases}$; $\eta_k=\begin{cases}-1, & k=2,3,\\ 0, & k=1,4,\\ 1, & k=5,6\end{cases}$



<u>Опр.:</u> Кус.-лин. восполнением $u(x,y)$ на сетке w наз.
$$\hat u(x,y)=\sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1}u_{ij}\varphi_{ij}(x,y) \quad [\Rightarrow \hat u(x,y)\in\mathring W_2^1(G),\ \hat u(x_i,y_i)=u_{ij}]$$

<u>Опр.:</u> Прибл. реш-ем (4) наз. $u_N(x,y)\in H_N=\mathrm{span}\{\varphi_{ij}\}$, для кот.:
$a(u_N,v)=(f,v)$ для $\forall v\in H_N$

$$u_N(x,y)=\sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1}z_{ij}\varphi_{ij}(x,y),\ z_{ij}\text{ удовл. СЛАУ: }\begin{cases}-\Delta_h z_{ij}=\dfrac{1}{h_xh_y}\displaystyle\int_{w_{ij}}f\varphi_{ij}\,dxdy, & (x_i,y_j)\in w,\\ z_{ij}=0, & (x_i,y_j)\in\gamma\end{cases}$$

Δ_h — пятиточечный разн. опер-р Лапласа. $\qquad a(u,v)=(f,v), \forall v_H$

$\boxed{\text{Т:}}$ Приближённое решение (4) сх-ся к точному с 1-ым порядком в $W_2^1(G)$.

(6.) Разностная задача Дирихле для ур-я Пуассона.

Рассм. (1) : $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2),\ x\in(x_1,x_2)\in G, \\ u(x) = \mu(x),\ x\in\Gamma=\partial G \end{cases}$

в $G = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$

$f(x)\equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = 0,\ x\in G, \\ u(x)=\mu(x),\ x\in\Gamma \end{cases}$ – задача Дирихле для ур-я Пуассона

Введём в G разн. сетку: $x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$, $x_1^{(i)} = ih_1$, $x_2^{(j)} = jh_2$,
$N_1h_1 = l_1$, $N_2h_2 = l_2$, $\omega = \{x_{ij},\ i=1\ldots N_1-1,\ j=1\ldots N_2-1\}$,
$\gamma = \{x_{0j}, x_{Nj}, x_{i0}, x_{iN_2},\ i=1\ldots N_1-1,\ j=1\ldots N_2-1\}$, $\Omega = \omega\cup\gamma$

$\Rightarrow$ разн. схема для (1):

(3) $\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f_{ij},\ x_{ij}\in\omega, \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}),\ x_{ij}\in\gamma \end{cases}$ где $y_{\bar{x}_1x_1,ij} = \dfrac{y_{i-1j}-2y_{ij}+y_{i+1j}}{h_1^2}$

$y_{\bar{x}_2x_2,ij} = \dfrac{y_{ij-1}-2y_{ij}+y_{ij+1}}{h_2^2}$

$\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2})_{ij}$, $f_{ij} = f(x_{ij})$

С аппрокс-ет (1) со 2-ым порядком по h_1 и h_2.

Каноническ. форма записи:

$\Delta_h y_{ij} = -f_{ij} \rightarrow \left(\dfrac{2}{h_1^2}+\dfrac{2}{h_2^2}\right)y_{ij} = \dfrac{y_{i-1j}+y_{i+1j}}{h_1^2} + \dfrac{y_{ij-1}+y_{ij+1}}{h_2^2} + f_{ij},\ x_{ij}\in\omega$

Обозн. $x = x_{ij}$, $Ш'(x) = Ш(x)\setminus\{x\}$ – окр-ть узла x;

$A(x) = \dfrac{2}{h_1^2}+\dfrac{2}{h_2^2}$; $B(x, x_{i\pm1j}) = \dfrac{1}{h_1^2}$; $B(x, x_{ij\pm1}) = \dfrac{1}{h_2^2}$; $F(x) = f_{ij}$

Тогда $\rightarrow A(x)y(x) = \sum\limits_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x),\ x\in\omega$

Аналогично, для гр. усл-й: $A(x)y(x) = F(x),\ x\in\xi$, где $F(x) = A(x)\mu(x)$,
$Ш'(x) = \varnothing,\ x\in\gamma$

(7.) Принцип максимума. Существование и единств-ть реш-я разн. задачи.

$\boxed{0}$ Пусть вещественные функции $A(x), B(x,\xi), F(x)$ определены при всех $x,\xi\in\Omega$. Тогда разностной схемой в каноническом виде наз. СЛАУ относительно сеточной ф-ции $y(x)$, определённой на Ω, вида: $A(x)y(x) = \sum\limits_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x),\ x\in\Omega$

Опр.: Разностной сеткой Ω наз-ся непустое конечное мн-во точек n-мерного евклидового пр-ва.

Опр.: Шаблоном $\text{Ш}(x)$ узла сетки $x \in \Omega$ наз-ся произвольное подмн-во Ω, содержащее x. Окрестностью узла x наз. мн-во $\text{Ш}'(x) = \text{Ш}(x) \setminus \{x\}$.

Опр.: Сетка Ω наз. связной, если для $\forall x', x'' \in \Omega$: $\text{Ш}'(x') \neq \varnothing$ $\exists x_i \in \Omega$, $x = 1 \dots m$: $x_1 \in \text{Ш}'(x')$, $x_2 \in \text{Ш}'(x_1)$, ..., $x_m \in \text{Ш}'(x_{m-1})$, $x'' \in \text{Ш}'(x_m)$.

Опр.: Замыканием мн-ва $\omega \in \Omega$ наз. мн-во $\overline{\omega} = \bigcup_{x \in \omega} \text{Ш}(x)$

Введём L: $Ly(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \text{Ш}'(x)} y(\xi) B(x, \xi)$, тогда $Ly(x) = F(x)$, $x \in \Omega$

Обозн. $D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \text{Ш}'(x)} B(x,\xi) \Rightarrow Ly(x) = D(x)y(x) + \sum_{\xi \in \text{Ш}'(x)} B(x,\xi)(y(x) - y(\xi))$

Опр.: В узле x вып-ны усл-я полож-ти коэф-тов, если $A(x) > 0$, $B(x,\xi) > 0$, $\forall \xi \in \text{Ш}'(x)$, $D(x) \geq 0$ (5).

$\boxed{T}$: [принцип max] Пусть Ω, $\omega \subset \Omega$ - связные. Пусть вып-но (5) для $\forall x \in \omega$. Пусть $y(x)$ опр-на на Ω, $y(x) \neq const$, тогда если вып-но: $Ly(x) \leq 0 \; (\geq 0)$, $\forall x \in \omega$, то $y(x)$ не может принимать max положит. (мин. отрицат.) зн-е на ω среди всех своих зн-й на $\overline{\omega}$.

Док-во: [от противн.] Пусть $\exists x' \in \omega$: $y(x') = \max_{x \in \overline{\omega}} y(x) > 0$

т.к. $y(x) \neq const$ на $\overline{\omega} \Rightarrow \exists x'' \in \overline{\omega}$: $y(x'') < y(x')$.

1) $\text{Ш}'(x') = \varnothing$: $Ly(x') = \overset{>0}{A(x')}\,\overset{>0}{y(x')} > 0 \Rightarrow$ ✗, т.к. $Ly(x) \leq 0$, $\forall x \in \omega$

2) $\text{Ш}'(x') \neq \varnothing$: $Ly(x') = \underset{\geq 0}{D}\,\underset{\geq 0}{y(x)} + \sum_{\xi \in \text{Ш}'(x')} \underset{>0}{B(x,\xi)}\,\underset{\geq 0}{(y(x') - y(\xi))} \Rightarrow Ly(x') \geq 0$,

т.к. $Ly(x) \leq 0$, $\forall x \in \omega \Rightarrow Ly(x') = 0 \Rightarrow y(x') = y(\xi)$, $\forall \xi \in \text{Ш}'(x')$

учитывая связность ω и $\overline{\omega} \Rightarrow \exists x_i \in \omega$, $i = 1 \dots m$: $x_1 \in \text{Ш}'(x')$, $x_2 \in \text{Ш}'(x_1)$... ... $x_m \in \text{Ш}'(x_{m-1})$, $x'' \in \text{Ш}'(x_m) \Rightarrow y(x') = y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x'')$ ✗, ч.т.д.

$y(x'') < y(x')$

Следствие 1: Пусть вып-но (5) $\forall x \in \Omega$ и $\exists x_0 \in \Omega$: $D(x_0) > 0$, тогда если $Ly(x) \leq 0 \; (\geq 0)$ $\forall x \in \Omega$, то $y(x) \leq 0 \; (\geq 0)$ для $\forall x \in \Omega$.

Док-во: 1) $y(x) \neq const$: Пусть $\exists x$: $y(x) > 0 \Rightarrow \exists x' \in \Omega$: $y(x') = \max_{x \in \Omega} y(x) > 0 \Rightarrow$ ✗ с принц. max.

2) $y(x) = const$, $x \in \Omega$, (6) $\Rightarrow \exists x_0$: $D(x_0) > 0$: $Ly(x_0) = D(x_0)y(x_0) + \sum_{\xi \in \text{Ш}'(x_0)} B(x,\xi)\overset{=0}{(y(x_0) - y(\xi))}$, т.к. $Ly(x_0) \leq 0 \Rightarrow y(x_0) \leq 0$: $y(x) = y(x_0) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, ч.т.д.

$\boxed{T}$ При вып-нии (5) и (6) $\forall x \in \Omega$ $\exists!$ реш-е разн. задачи (4).

8. Принцип максимума. Оценка решений однородн. и неоднор. уравнений.

$\boxed{T:}$ [принцип max] Пусть Ω, $\omega \subset \Omega$ - связные. Пусть вып-но усл-е: $A(x)>0$, $B(x,\xi)>0$, $\forall \xi \in Ш'(x)$, $D(x)\geq 0$, $\forall x \in \omega$. Пусть $y(x)$ опр-на на Ω, $y(x) \neq const$, тогда если $\mathcal{L}y(x) \leq 0 \ (\geq 0)$, $\forall x \in \omega$, то $y(x)$ не может принимать max положит. (min отрицат.) зн-е на ω среди всех своих зн-й на $\bar{\omega}$.

{неодн. ур-ние}

$\boxed{T:}$ [сравнения] Пусть вып-ся $A(x)>0$, $B(x,\xi)>0$, $\forall \xi \in Ш'(x)$, $D(x)\geq 0$, $\forall x \in \omega$ и $\exists x_0 \in \Omega$: $D(x_0)>0$, $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$, $\forall x \in \omega \Rightarrow |y(x)| \leq \bar{y}(x)$, $\forall x \in \Omega$, где $\mathcal{L}y(x)=F(x)$, $x\in\Omega$; $\mathcal{L}\bar{y}(x)=\bar{F}(x)$, $x \in \Omega$.

Док-во: Рассм. $v(x)=\bar{y}(x)-y(x)$, $w(x)=\bar{y}(x)+y(x)$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}v(x)=\bar{F}(x)-F(x)\geq 0, \\ \mathcal{L}w(x)=\bar{F}(x)+F(x)\geq 0 \end{cases} \forall x \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} v(x)\geq 0 \\ w(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\bar{y}(x) \leq y(x) \leq \bar{y}(x)$$

ч.т.д.

$\boxed{T:}$ [сравнения для I-ой кр. задачи] Пусть вып-ны усл-е положи-ти коэф-тов для $\forall x \in \Omega$ {(6) выполнено автом-ки для I кр. зад.}, $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$, $\forall x \in \omega$, $|\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x)$, $\forall x \in \gamma$ $(\gamma \neq \emptyset)$, то $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$, $\forall x \in \Omega$, где $y, \bar{y}$ - реш-я задач:

$\mathcal{L}y(x)=F(x)$, $x\in\omega$, $y(x)=\mu(x)$, $x \in \gamma$
$\mathcal{L}\bar{y}(x)=\bar{F}(x)$, $x\in\omega$, $\bar{y}(x)=\bar{\mu}(x)$, $x \in \gamma$

[следует из пред. теоремы]

{однородн. ур-ние}

$\boxed{T:}$ [уст-ть по гр. усл-ям]: При вып-нии усл. полож. коэф-тов, $\forall x \in \Omega$ для реш-я одн. ур-е $\mathcal{L}y(x)=0$, $x\in\omega$, $y(x)=\mu(x)$, $x\in\gamma$ справедлива оценка: $\|y(x)\|_{C(\Omega)} \leq \|\mu(x)\|_{C(\gamma)}$

Док-во: обозн. $\alpha = \max\limits_{x\in\gamma} |\mu(x)|$

Рассм. $\bar{y}(x)$, являющееся реш-ем $\mathcal{L}\bar{y}(x)=0$, $x \in \omega$, $\bar{y}(x)=\alpha$, $x\in\gamma$ (док-но: $\bar{y}$ $\exists!$) $\Rightarrow$ {$\boxed{T}$ сравнения} $\Rightarrow |y(x)| \leq \bar{y}(x)$.

Рассм. $v(x)=\alpha-\bar{y}(x)$: $\mathcal{L}v(x)=\mathcal{L}\alpha=\underset{0}{\overset{\shortparallel}{D}}(x)\alpha+\sum\limits_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi)(\alpha-\alpha)\geq 0$

т.е. $\begin{cases} \mathcal{L}v(x)\geq 0, x\in\omega \\ v(x)\geq 0, x\in\gamma \end{cases} \Longrightarrow v(x)\geq 0$ (сл-е из пред. вопр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |y(x)| \leq \bar{y}(x) \leq \alpha$, $\forall x\in\Omega \Rightarrow \|y(x)\|_{C(\Omega)} \leq \|\mu(x)\|_{x\in\gamma}$, ч.т.д.

[м. док-ть, как следствие принципа максимума].

(9.) Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле.

$G=\{0<x_1<l_1,\ 0<x_2<l_2\}$: $\begin{cases} \Lambda y(x)=-\Delta_h y(x)=F(x),\ x\in\omega, \\ y(x)=\mu(x),\ x\in\gamma \end{cases}$ (3)

Представим реш-е в виде: $y(x)=y_f(x)+y_\mu(x)$, где

$\Lambda y_f(x)$ – реш-е з. с однор. гр. усл-ями: $y_f(x)=0,\ x\in\gamma$

$\Lambda y_\mu(x)$ – реш-е з. с неодн.: $y_\mu(x)=\mu(x),\ x\in\gamma$.

$\Lambda y_f(x)=F(x),\ x\in\omega,\ \Lambda y_\mu(x)=0,\ x\in\omega$.

$\boxed{T:}$ (уст-ть (3) по гр. усл-ям) Для реш-я $y_\mu(x)$ спр-ва оценка:

$\|y_\mu(x)\|_{C(\Omega)}\le\|\mu(x)\|_{C(\gamma)}$

$\boxed{T:}$ (уст-ть по пр. части) Для реш-я $\begin{cases} \Lambda y_f(x)=-\Delta_h y(x)=F(x),\ x\in\omega, \\ y(x)=0,\ x\in\gamma \end{cases}$

спр-ва оценка: $\|y_f\|_{C(\Omega)}\le\dfrac{l_1^2+l_2^2}{4}\|F\|_{C(\omega)}$

Док-во: Рассм. $\bar y(x)=K(l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2)$ → проецируем на сетку → получаем сеточную ф-ю: $\Lambda\bar y(x)=-\Delta_h\bar y(x)=4K$

$\left[(c)_{\bar x x,i}=\dfrac{c-2c+c}{h^2}=0;\ (x^2)_{\bar x x,i}=\dfrac{(x_i-h)^2-2x_i^2+(x_i+h)^2}{h^2}=2\right]$

Выберем $K=\frac{1}{4}\|F(x)\|_{C(\omega)}$, тогда: $\begin{cases} \Lambda\bar y(x)=\|F(x)\|_{C(\omega)},\ x\in\omega, \\ \bar y(x)\ge 0 \text{ (следует из вида ф-ции)} \end{cases}$ =>

=> в силу т-мы сравнения:

$|y(x)|\le\bar y(x)\le\frac{1}{4}\|F(x)\|_{C(\omega)}(l_1^2+l_2^2)$ => $\|y_f\|\le\frac{1}{4}(l_1^2+l_2^2)\|F(x)\|_{C(\omega)}$, ч.т.д.

$\boxed{T:}$ Решение задачи (3) удовл.: $\|y\|_{C(\Omega)}\le\|\mu\|_{C(\gamma)}+\dfrac{l_1^2+l_2^2}{4}\|f\|_{C(\omega)}$

Док-во: $\|y\|_{C(\Omega)}=\|y_\mu+y_f\|_{C(\Omega)}\le\|y_\mu\|_{C(\Omega)}+\|y_f\|_{C(\Omega)}\le\|\mu\|_{C(\gamma)}+$
$+(l_1^2+l_2^2)\|f\|_{C(\omega)}$, ч.т.д.

$\boxed{T:}$ [о сходимости] Если $u(x)$ – реш-е (1), $y(x)$ – реш-е (3), то

$\|y-u\|_{C(\Omega)}\le M(h_1^2+h_2^2)$ [M – не завис. от h_1,h_2]

погр-ть апп-ции разн. задачи на реш. (1)

Док-во: $z_{ij}=y_{ij}-u(x_{ij})$: $\begin{cases} -\Delta_h z_{ij}=\Psi_{ij},\ x_{ij}\in\omega, \\ z_{ij}=0,\ x_{ij}\in\gamma \end{cases}$ $\Psi_{ij}=(u_{\bar x_1 x_1}+u_{\bar x_2 x_2}+f)_{ij}$

В случае огр. 4-ых произв-ых u => $\|\Psi\|_{C(\omega)}\le M_1(h_1^2+h_2^2)$ $[O(h_1^2+h_2^2)]$

Уст. по пр. части => $\|z\|_{C(\Omega)}\le(l_1^2+l_2^2)\frac{1}{4}\|\Psi\|_{C(\omega)}$ => $\|z\|_{C(\Omega)}\le M(h_1^2+h_2^2)$,

$M=M_1\dfrac{l_1^2+l_2^2}{4}$.

⑩ Применение принципа максимума к нестационарным разн. задачам.

Опр.: Разн. опер-р L - моно. , если из $Ly(x)\geq 0,\ \forall x\in\Omega \Rightarrow y(x)\geq 0,\ \forall x\in\Omega$

Опр.: Разн. схема вида $Ly=F(x)$, где $Ly(x)=A(x)y(x)-\sum\limits_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\xi)y(\xi)$ — монотонная, если вып-но усл-е положит-ти коэф-тов: $A>0,\ B>0,$ $\forall\xi\in Ш'(x),\ D=A-\sum B\geq 0$.

L-моно. $\Rightarrow$ выполнение принципа максимума $\Rightarrow$ корректность задачи

$$\begin{cases} Ly(x)=F(x),\ x\in\omega,\ \omega\subseteq\Omega, \\ y(x)=\mu(x),\ x\in\gamma \end{cases}$$ и $\|y\|_{C(\Omega)}\leq\max\limits_{x\in\Omega}|y(x)|=\max\limits_{x\in\gamma}|\mu(x)|$ (уст-ть по гранич. условиям)

ПРИМЕР 1: Схема с весами для УТ:
$$\begin{cases} u'_t=u''_{xx},\ x\in(0,1), \\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(1,t)=\mu_2(t),\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in[0,1] \end{cases}$$

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\sigma y^{j+1}_{\bar{x}x,i}+(1-\sigma)y^j_{\bar{x}x,i}$$

В канонической форме записи: Обозн. $\gamma=\frac{\tau}{h^2}$

$$(1+2\sigma\gamma)y_i^{j+1}=(1-2(1-\sigma)\gamma)y_i^j+\sigma\gamma(y_{i-1}^{j+1}+y_{i+1}^{j+1})+(1-\sigma)\gamma(y_{i-1}^j+y_{i+1}^j)$$

условие монотонности: $0\leq\sigma\leq 1,\ \sigma\geq 1-\frac{1}{2\gamma}$

[Метод гармоник: искать реш-е в виде $y=q^n e^{Ihk\varphi}$ — даёт необх. усл-е устойчивости]

[монотонность L даёт достаточное усл-е устойчивости]

ПРИМЕР 2: Схемы для уравнения переноса:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ x>0,\ t>0, \\ u(0,t)=\mu(t),\ t>0,\ u(x,0)=u_0(x),\ x\geq 0 \end{cases}$$

1) схема "против ветра":
$$\begin{cases} y^n_{t,i}+y^n_{\bar{x},i}=0,\ i,n=1,2\ldots \\ y^n_0=\mu(t_n),\ n=1,2,\ldots \\ y^0_i=u_0(x_i),\ i=0,1,\ldots \end{cases}$$

усл-е монотонности: $\tau\leq h$

2) схема "по ветру":
$$\begin{cases} y^n_{t,i}+y^n_{x,i}=0, \\ y_i^{n+1}=(1+\gamma)y_i^n-\gamma y^n_{i+1} \end{cases}$$

немонотонная для $\forall\tau,h$.

(11) Монотонные разн. схемы. [для ур-й 2го порядка, содерж. 1ые произв-ые]

Опр.: Разн. опер-р $\mathcal{L}$ – монот., если из $\mathcal{L}y(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega \Rightarrow y(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega$

Опр.: Разн. схема вида $\mathcal{L}y = F(x)$, где $\mathcal{L}y(x) = A(x)y(x) - \sum\limits_{\xi \in Ш'(x)} B(x,\xi)y(\xi)$ – – монотонная, если вып-но усл-е положит-ти коэф-тов: $A > 0$, $B > 0$, $\forall \xi \in Ш'(x)$, $D = A - \sum B \geq 0$.

дифф. задача: $\begin{cases} u''(x) + r(x)u'(x) = -f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

схема 2го порядка для $\forall r(x)$: $\begin{cases} y_{\bar{x}x,i} + r(x_i)y_{\overset{\circ}{x},i} = -f_i, & i = 1 \dots N-1,\ hN = 1, \\ y_0 = y_N = 0. \end{cases}$

в канонич. виде: $\frac{2}{h^2}y_i = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{r(x_i)}{2h}\right)y_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{r(x_i)}{2h}\right)y_{i+1}$

условие монотонности: $h \leq \frac{2}{|r_i|} \mapsto h \leq \frac{2}{\max\limits_i |r_i|}$

монотонными для $\forall h$ будут схемы:

$y_{\bar{x}x,i} + r(x_i)y_{x,i} = -f_i$, $r(x) \geq 0$ и $y_{\bar{x}x,i} + r(x_i)y_{\bar{x},i} = -f_i$, $r(x) \leq 0$.

Обозн. $r_+(x) = \frac{1}{2}(r(x) + |r(x)|) \geq 0$, $r_-(x) = \frac{1}{2}(r(x) - |r(x)|) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ монотонной для $\forall h$ будет схема: $y_{\bar{x}x,i} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i} + r_+(x_i)y_{x,i} = -f_i$

Её погрешность аппрокс-ции: $\psi_i = u_{\bar{x}x,i} + r_-(x_i)u_{\bar{x},i} + r_+(x_i)u_{x,i} + f_i =$
$= u''(x_i) + r_-(x_i)(u'(x_i) - \frac{h}{2}u''(x_i)) + r_+(x_i)(u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(x_i)) + O(h^2) + f_i =$
$= |r(x_i)|\frac{h}{2}u''(x_i) + O(h^2)$.

Тогда 2ой порядок аппрокс-ции будет иметь схема:

$(1 - |r(x_i)|\frac{h}{2})y_{\bar{x}x,i} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i} + r_+(x_i)y_{x,i} = -f_i$

Заметим: $1 - |r(x_i)|\frac{h}{2} = (1 + |r(x_i)|\frac{h}{2})^{-1} + O(h^2)$

Обозн. $k_i = (1 + |r(x_i)|\frac{h}{2})^{-1} \Rightarrow$ получим:

$k_i y_{\bar{x}x,i} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i} + r_+(x_i)y_{x,i} = -f_i$ – схема 2го порядка, монотонная для $\forall h$.

(12) Модельная задача.

Рассм. разн. задачу Дирихле на равном. сетке в $G=\{0<x_1<l_1, 0<x_2<l_2\}$:

$$-\Delta_h y_{ij} = -y_{\bar{x}_1 x_1, ij} - y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = f_{ij}, \ x_{ij}\in\omega,$$

$$y_{ij}=0, \ x_{ij}\in\gamma, \ h_1N_1=l_1, \ h_2N_2=l_2, \ \Omega=\omega\cup\gamma$$

Введём H-пр-во сеточн. ф-й: $(y,v)_H=\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij}v_{ij}h_1h_2, \ \|y\|_H=\sqrt{(y,y)_H}$

Введём $A: H\to H$: $Ay_{ij}=-\Delta_h y_{ij}, \ x_{ij}\in\omega, \ y_{ij}=0, \ x_{ij}\in\gamma$

$\boxed{\Lambda_1}$ (разн. аналог фор-лы инт-я по частям):

$$\sum_{i=0}^{N-1}(y_x v)_i h = y_N v_N - y_0 v_0 - \sum_{i=1}^{N}(y v_{\bar{x}})_i h$$

$\boxed{\Lambda_2}$ (разн. ф-ла Грина): $(Ay,v)_H=\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2-1}(y_{\bar{x}_1}v_{\bar{x}_1})_{ij}h_1h_2+\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2}(y_{\bar{x}_2}v_{\bar{x}_2})_{ij}h_1h_2$

(учит-ся нулевые гранич. усл-я).

Свойства:

1) Опер-р A — $A=A^*>0$.

2) Собств. числа и собств. ф-ции одномерн. задачи имеют вид:

$$\lambda_k=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2l}, \quad \mu_k(x_i)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi k x_i}{l}, \quad i,k=1\ldots N-1.$$

(ОН)

3) Оценки спектра одномерн. оп-ра: $\frac{9}{l^2}\le\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_{N-1}<\frac{4}{h^2}$

4) Собств. зн-я и собств. ф-ции A им. вид:

$$\lambda_k=\lambda_{k_1}^{(1)}+\lambda_{k_2}^{(2)}, \quad \lambda_{k_1}^{(1)}=\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi k_1 h_1}{2l_1}, \quad \lambda_{k_2}^{(2)}=\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k_2 h_2}{2l_2}$$

$$\mu_k(x_{ij})=\mu_{k_1}^{(1)}(x_1^{(i)})\,\mu_{k_2}^{(2)}(x_2^{(j)}), \quad \mu_{k_1}^{(1)}(x_1^{(i)})=\sqrt{\frac{2}{l_1}}\sin\frac{\pi k_1 x_1^{(i)}}{l_1},$$

$$\mu_{k_2}^{(2)}(x_2^{(j)})=\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{\pi k_2 x_2^{(j)}}{l_2}$$

5) Оценка спектра оп-ра A: $\frac{9}{l_1^2}+\frac{9}{l_2^2}\le\lambda_k<\frac{4}{h_1^2}+\frac{4}{h_2^2}$

Модельная задача: з. Дирихле при $l_1=l_2=1, \ h_1=h_2=1/N$

$$\frac{y_{i-1j}-2y_{ij}+y_{i+1j}}{h^2}+\frac{y_{ij-1}-2y_{ij}+y_{ij+1}}{h^2}=-f_{ij}$$

$$y_{0j}=y_{Nj}=y_{i0}=y_{iN}=0, \quad i,j=1\ldots N-1.$$

13) Правила действий с матричными неравенствами.

1) $A=A^T \Rightarrow \exists\, Q: Q^T=Q^{-1}$ (ортогональн.): $A=Q^T\Lambda Q$, где $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k)$, λ_k — собств. зн-я м-цы A (A, λ_k — веществ.) [без док-ва]

2) $A=A^T\geq 0\ (>0) \Leftrightarrow$ собств. зн. A: $\lambda_k \geq 0\ (>0)$

[$\Rightarrow$ $Ax_k=\lambda_k x_k$: $0\leq (Ax_k, x_k)=\lambda_k(x_k,x_k) \Rightarrow \lambda_k\geq 0$;

$\Leftarrow$ $\forall x\in H$: $(Ax,x)=\{1\}=(Q^T\Lambda Qx,x)=(\Lambda Qx, Qx)=\{y=Qx\in H\}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i^2\geq 0$]

3) $A=A^T>0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}: (A^{-1})^T=A^{-1}>0$.

[$A=A^T>0 \Rightarrow \{2\} \Rightarrow \lambda_k>0 \Rightarrow \det A\neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$. Т.к. $Ax_k=\lambda_k x_k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A^{-1}x_k=\lambda_k^{-1}x_k \Rightarrow$ собств. зн. A^{-1}: $\lambda_k^{-1}>0 \Rightarrow A^{-1}>0$.
$(A^{-1})^T A=(A^T A^{-1})^T=(AA^{-1})^T=E \Rightarrow (A^{-1})^T=A^{-1}$].

√4) $S=S^T \Rightarrow (-\rho E\leq S\leq \rho E \Leftrightarrow S^2\leq \rho^2 E)$

[$S\geq -\rho E \Leftrightarrow S+\rho E\geq 0$
$(S+\rho E)^T=(S+\rho E)$; $\{2\} \Leftrightarrow \lambda_k=s_k+\rho\geq 0 \Leftrightarrow s_k\geq -\rho$
т.е. $-\rho E\leq S\leq \rho E \Leftrightarrow s_k^2\leq \rho^2 \Leftrightarrow \{2\}\ S^2\leq \rho^2 E$,
т.к. $Ax_k=\lambda_k x_k \Rightarrow A^2 x_k=\lambda_k^2 x_k$]

5) $A=A^T\geq 0 \Rightarrow \exists\, B=B^T\geq 0: B^2=A$

[Рассм. $B=Q^T\Lambda^{1/2}Q$, где $A=Q^T\Lambda Q$, $\Lambda^{1/2}=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}\dots\sqrt{\lambda_k})$
$B^2=Q^T\Lambda^{1/2}\underbrace{QQ^T}_{E}\Lambda^{1/2}Q=A$; $(B)^T=(Q^T\Lambda^{1/2}Q)^T=Q^T(Q^T\Lambda^{1/2})^T=Q^T\Lambda^{1/2}Q=B$
$(Bx,x)=(\Lambda^{1/2}Qx, Qx)=\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda_k}\,y_i^2\geq 0$, $y=Qx$]

6) $A=A^T$, $\det L\neq 0 \Rightarrow A\geq 0 \Leftrightarrow L^TAL\geq 0$.

[$\Rightarrow$ $\forall x\in H$: $(L^TALx,x)=(ALx,Lx)=\{Lx=y\in H\}=(Ay,y)\geq 0$
$\Leftarrow$ $\forall x\in H$: $(Ax,x)=\left\{\begin{matrix}\det L\neq 0,\\ \exists y\in H: x=Ly\end{matrix}\right\}=(ALy,Ly)=(L^TALy,y)\geq 0$]

√7) $A=A^T$, $B=B^T$, $\det L\neq 0 \Rightarrow A\geq B \Leftrightarrow L^TAL\geq L^TBL$ [следует из (6)]

8) $C=C^T>0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha C\leq \beta E \Leftrightarrow \alpha E\leq \beta C^{-1}$.

[$\alpha C\leq\beta E \Leftrightarrow \{7\} \Leftrightarrow \alpha C^{-1/2}CC^{-1/2}\leq \beta C^{-1/2}EC^{-1/2} \Leftrightarrow \alpha\leq \beta C^{-1}$]

√ 9) Пусть $A=A^T>0$, $B=B^T>0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha A\leq \beta B \Leftrightarrow \alpha B^{-1}\leq \beta A^{-1}$

[$\alpha A\leq\beta B \Leftrightarrow \{7\} \Leftrightarrow \alpha A^{-1/2}AA^{-1/2}\leq \beta A^{-1/2}BA^{-1/2} \Leftrightarrow \alpha\leq\beta A^{-1/2}BA^{-1/2} \Leftrightarrow \{8\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1}\leq\beta E \Leftrightarrow \alpha A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}\leq \beta E \Leftrightarrow \{7\} \Leftrightarrow \alpha B^{-1}\leq \beta A^{-1/2}EA^{-1/2}$.

(14.) Оценки скорости сходимости стационарных итерац. методов.

Опр.1. Энергетическая норма $\equiv \|y\|_A = \sqrt{(A^{1/2}y, A^{1/2}y)} = \sqrt{(Ay, y)}$, где $A = A^T > 0$

Обозн. y – точн. реш-е, y_n – прибл. реш-е, $v_n = y_n - y$ – погрешность y_n

для v: $B\frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} + Av_n = 0$, $v_0 = y_0 - y$, $n = 0, 1, \dots$

$v_{n+1} = Sv_n$, $S = E - \tau B^{-1}A$.

$\boxed{Л_1}$ Пусть $A = A^T > 0$, $B = B^T > 0$, $\rho > 0 \Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|v_{n+1}\|_A \le \rho\|v_n\|_A$, $n = 0, 1, \dots, \forall v_0 \in H$

$\boxed{Л_2}$ $A = A^T > 0$, $B = B^T > 0$, $\rho > 0 \Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B \Leftrightarrow \|v_{n+1}\|_B \le \rho\|v_n\|_B$, $n = 0, 1, \dots, \forall v_0 \in H$

√ $\boxed{Т.}$ Пусть $A = A^T > 0$, $B = B^T > 0$ и $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$ ($\gamma_2 > \gamma_1 > 0$), $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ стационарный итерац. метод $B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f$ сх-ся и верны оценки: 1) $\|y_n - y\|_A \le \rho^n\|y_0 - y\|_A$, $\|y_n - y\|_B \le \rho^n\|y_0 - y\|_B$, $n = 0, 1, \dots, \forall y_0 \in H$, где $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Док-во: $\|v_{n+1}\|_{A(B)} \le \rho\|v_n\|_{A(B)} \Leftrightarrow \gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$ ($\boxed{Л2}$)

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1-\rho}{\tau}, \\ \gamma_2 = \frac{1+\rho}{\tau} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1\tau = 1 - \rho, \\ \gamma_2\tau = 1 + \rho \end{cases} \Leftrightarrow \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

$$\rho = 1 - \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \text{ ч.т.д.}$$

Опр. Методом простой итерации наз. стационарный итерационный метод, в котором $B = E$, т.е. $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay^n = f$, $n = 0, 1, \dots$

$\boxed{О}$ Число $\tau = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}$ наз. оптимальным итерационным параметром.

√ $\boxed{Т.}$ Если $A = A^T > 0$, то при $\tau = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}$ метод простых итераций сходится и справедлива оценка: $\|y^n - y\| \le \rho^n\|y^0 - y\|$, $n = 0, 1, \dots, \forall y_0 \in H$, где $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\lambda_{min}(A)}{\lambda_{max}(A)}$.

[пред. $\boxed{Т}$ при $B = E$ и $\|y\|_E = \|y\| \Rightarrow$ ч.т.д.]

15. Применение методов Якоби и Зейделя к решению сеточных уравнений.

• Метод Якоби: для $Ay=f$: $A=L+D+R$: $Ly^n+Dy^{n+1}+Ry^n=f$

для модельной задачи:
$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1j}-2y_{ij}+y_{i+1j}}{h^2}+\dfrac{y_{ij-1}-2y_{ij}+y_{ij+1}}{h^2}=-f_{ij}, \\ y_{ij}\big|_\gamma=0,\ i,j=1\ldots N-1,\ hN=1 \end{cases}$$

имеет вид:
$$\frac{y^n_{i-1j}-2y^{n+1}_{ij}+y^n_{i+1j}}{h^2}+\frac{y^n_{ij-1}-2y^{n+1}_{ij}+y^n_{ij-1}}{h^2}=-f_{ij},$$
$$y^{n+1}_{ij}\big|_\gamma=0$$

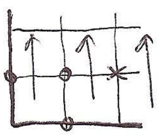
относительно y^{n+1}: $y^{n+1}_{ij}=\frac{1}{4}\left(y^n_{i-1j}+y^n_{i+1j}+y^n_{ij-1}+y^n_{ij+1}\right)+\frac{h^2}{4}f_{ij}$

В канонич. форме записи: обозн. $\{y_{ij}\}^N_{ij=0}=y^n$

подставим : $y^{n+1}=y^n+(y^{n+1}-y^n) \Rightarrow \dfrac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f$, $A=-\Delta_h$, $\tau=\dfrac{h^2}{4}$.

• Метод Зейделя : для $Ay=f$: $Ly^{n+1}+Dy^{n+1}+Ry^n=f$

для модельной задачи имеет вид:
$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1}_{i-1j}-2y^{n+1}_{ij}+y^n_{i+1j}}{h^2}+\dfrac{y^{n+1}_{ij-1}-2y^{n+1}_{ij}+y^n_{ij+1}}{h^2}=-f_{ij}, \\ y^{n+1}_{ij}\big|_\gamma=0. \end{cases}$$



x – старые итерации
o – новые итерации

$(1,1),(1,2),\ldots(1,N-1),$
$(2,1),(2,2)\ldots(2,N-1),\ldots$

В канонической форме записи:

Х одномерный аналог:
$$\frac{y^{n+1}_{i-1}-2y^{n+1}_i+y^n_{i+1}}{h^2}=-f_i,\quad y^{n+1}_0=y^{n+1}_N=0.$$
$$y^n_{\bar{x}x,i}+\frac{y^{n+1}_{i-1}-y^n_{i-1}-2y^{n+1}_i+2y^n_i}{h^2}=y^n_{\bar{x}x,i}-$$
$$-\frac{1}{h}\left(y^{n+1}_{\bar{x},i}-y^n_{\bar{x},i}\right)-\frac{1}{h^2}\left(y^{n+1}_i-y^n_i\right)$$

$\left(\frac{1}{h^2}E+R^{(1)}\right)\dfrac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+A^{(1)}y^n=f$, где $R^{(1)}y_i=\frac{1}{h}y_{\bar{x},i}$, $A^{(1)}y_i=-y_{\bar{x}x,i}$, $\tau=1$

Аналогично, для модельной задачи метод Зейделя им. вид:

$\left(\frac{2}{h^2}E+R\right)\dfrac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f$, где $A=-\Delta_h$,

$Ry_{ij}=\frac{1}{h}\left(y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2}\right)_{ij}$, $B=\left(\frac{2}{h^2}E+R\right)$, $\tau=1$

– метод Зейделя в канонич. виде.

16. Алгебраическая теория попеременно треугольного итерационного метода.

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f.$$

Пусть $A^T=A>0$. Выберем м-цу B:

Рассм. $R=(r_{ij})$, $r_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i>j\\ \frac12 a_{ij}, & i=j \\ 0, & i<j\end{cases}$ $\Rightarrow A=R+R^T$.

$2(Rx,x)=(Rx,x)+(x,Rx)=((R+R^T)x,x)=(Ax,x)>0 \Rightarrow R>0.$

√ $B\equiv(E+\omega R^*)(E+\omega R)$, R^* – сопр. к R, $\omega>0$ – числовой параметр.

1) $(E+\omega R^*)\underbrace{(E+\omega R)y^{n+1}}_{y^{n+1/2}}=\underbrace{(B+\tau A)y^n+\tau f}_{\varphi^n}$

$\Rightarrow (E+\omega R^*)y^{n+1/2}=\varphi_n$ – с-ма с верхн. Δ-ной м-цей;

$(E+\omega R)y^{n+1}=y^{n+1/2}$ – с-ма с нижн. Δ-ной м-цей.

2) $B=E+\omega A+\omega^2R^*R \Rightarrow B=B^*$;

$(Bx,x)=((E+\omega R)x,(E+\omega R)x)\ge0$; $B(\omega)>0$ при $\omega>0$, $B(\omega)\ge0\ \forall\omega$

$\boxed{T}$ Пусть $\exists\,\delta,\Delta>0$: $A\ge\delta E$, $4R^*R\le\Delta A$, тогда $\gamma_1B\le A\le\gamma_2B$, где $\gamma_2=\frac{1}{2\omega}$, $\gamma_1=\left(\frac1\delta+\omega+\frac{\omega^2\Delta}{4}\right)^{-1}$

Док-во: $B=E+\omega A+\omega^2R^*R\le\left(\frac1\delta+\omega+\frac{\omega^2\Delta}{4}\right)A$

$B(\omega)-B(-\omega)=2\omega A\Rightarrow B(\omega)=2\omega A+\overset{\ge0}{B(-\omega)}\Rightarrow B(\omega)\ge2\omega A$, ч.т.д.

√ $\boxed{T}$ Пусть $\delta,\Delta>0$, $A\ge\delta E$, $4R^*R\le\Delta A$, тогда при $\omega=\frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$, $\tau=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, где $\gamma_1=\frac{\delta}{2(1+\sqrt\xi)}$, $\gamma_2=\frac{\delta}{4\sqrt\xi}$, $\xi=\frac\delta\Delta$, попеременно Δ-ный метод сходится, и верна оценка: $\|y^n-y\|_A\le\rho^n\|y^0-y\|_A$, $\rho=\frac{1-\sqrt\xi}{1+\sqrt\xi}$

Док-во: $\gamma_1B\le A\le\gamma_2B$, $\tau=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}\overset{T}{\Rightarrow}$ верна оценка с $\rho=\frac{1-\eta}{1+\eta}$, $\eta=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

при $\gamma_1=\left(\frac1\delta+\omega+\frac{\omega^2\Delta}{4}\right)^{-1}$, $\gamma_2=\frac{1}{2\omega}$

$\rho=\rho(\omega)$. Минимизируем ρ за счёт выбора ω:

$\rho(\omega)\to\min\limits_{\omega>0}\Leftrightarrow\eta^{-1}(\omega)\to\min\limits_{\omega>0}$

$\eta^{-1}(\omega)=\frac{1}{2\omega}\left(\frac1\delta+\omega+\frac{\omega^2\Delta}{4}\right)=\frac12+\frac12\left(\frac{1}{\omega\delta}+\frac{\omega\Delta}{4}\right)=\frac12+\frac12\left(\frac{1}{\sqrt{\omega\delta}}-\frac{\sqrt{\omega\Delta}}{2}\right)^2+\frac12\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\eta^{-1}(\omega)$ достиг. min при $\omega=\frac{2}{\sqrt{\Delta\delta}}$

$\gamma_1=\left(\frac1\delta+\frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}+\frac1\delta\right)^{-1}=\frac{\delta\sqrt\Delta}{2(\sqrt\Delta+\sqrt\delta)}=\frac{\delta}{2(1+\sqrt\xi)}$, $\xi=\frac\delta\Delta$; $\gamma_2=\frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}=\frac{\delta}{4\sqrt\xi}$;

$\eta=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{2\sqrt\xi}{1+\sqrt\xi}$; $\rho=\frac{1-\eta}{1+\eta}=\frac{1-\sqrt\xi}{1+3\sqrt\xi}\in(0,1)$, $0<\xi<1$, т.к. $\Delta>\delta$, ч.т.д.

(17) Применение попеременно Δ-ного метода к модельной задаче.

Метод: $B\dfrac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=f$, $A^T=A>0$, $A=R+R^T$, $R=(r_{ij})$,

$r_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i>j,\\ \frac{1}{2}a_{ij}, & i=j,\\ 0, & i<j \end{cases}$, $B=(E+\omega R^*)(E+\omega R)$, $\omega>0$ – числовой параметр.

Модельная задача: $-y_{\bar{x}_1 x_1, ij}-y_{\bar{x}_2 x_2, ij}=f_{ij}$,

$y_{ij}|_\gamma=0$, $i,j=1\dots N-1$, $hN=1$! (чтобы найти легко $\lambda_{min}(A)$, $\lambda_{max}(A)$).

* $A=-\Delta_h$ в пр-ве H: $(y,v)_H=\sum\limits_{i,j=1}^{N-1}(yv)_{ij}h^2$, $\|y\|_H=\sqrt{(y,y)_H}$

$$Ay_{ij}=\frac{(y_{\bar{x}_1}-y_{x_1})_{ij}}{h}+\frac{(y_{\bar{x}_2}-y_{x_2})_{ij}}{h}=\frac{1}{h}(y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2})_{ij}-\frac{1}{h}(y_{x_1}+y_{x_2})_{ij}=Ry_{ij}+Uy_{ij},$$

$Ry_{ij}=\frac{1}{h}(y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2})_{ij}$ – оп-р с нижн. Δ-ой м-цей,

$Uy_{ij}=\frac{1}{h}(y_{x_1}+y_{x_2})_{ij}$ – оп-р с верхней Δ-ной матрицей.

$\boxed{\Delta}$ $U=R^*$ в H [следует из исп. разн. аналога инт-я по частям! $(Ry,v)=\dots=(y,Uv)$]

$\Rightarrow A=R^*+R$, $R^*=U$. Найдём δ и Δ:

✓ $A\geq\delta E \Leftarrow \delta=\lambda_{min}(A)=\frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2}$

$4R^*R\leq\Delta A \Leftrightarrow 4(R^*Ry,y)\leq\Delta(Ay,y) \Leftrightarrow 4\|Ry\|^2\leq\Delta(Ay,y)$

$$(Ay,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}(y_{\bar{x}_1})^2_{ij}h^2+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N}(y_{\bar{x}_2})^2_{ij}h^2$$

$$\|Ry\|^2=\frac{1}{h^2}\sum_{i,j=1}^{N-1}(y_{\bar{x}_1}+y_{\bar{x}_2})^2h^2 \Rightarrow \|Ry\|^2\leq\frac{2}{h^2}\sum_{i,j=1}^{N-1}\left[(y_{\bar{x}_1})^2_{ij}+(y_{\bar{x}_2})^2_{ij}\right]h^2\leq\frac{2}{h^2}(Ay,y)$$

✓ $\Rightarrow$ можно взять $\Delta=\frac{8}{h^2}$, $\Delta=\frac{8}{h^2}>\lambda_{max}(A)=\frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}$

$\xi=\dfrac{\delta}{\Delta}=\sin^2\dfrac{\pi h}{2} \Rightarrow$ ск-сть сх-сти метода $\rho=\dfrac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}=\dfrac{1-\sin\frac{\pi h}{2}}{1+\sin\frac{\pi h}{2}}$

(18) Решение разностного ур-я Пуассона с использованием быстрого преобразования Фурье.

разн. ур-е Пуассона:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -f_{ij}, \ x_{ij} \in \omega, \\ y_{ij} = 0, \ x_{ij} \in \gamma, \ i = 1 \dots N_1 - 1, \ h_1 N_1 = l_1, \ j = 1 \dots N_2 - 1, \ h_2 N_2 = l_2 \end{cases}$$

Метод = Фурье + одномерная прогонка:

для задачи на собств. зн.: $-\mu_{\bar{x}_2 x_2, j} = \lambda \mu_j, \ j = 1 \dots N_2 - 1, \ h_2 N_2 = l_2$

реш-е им. вид: $\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k h_2}{2 l_2}, \ \mu_k(j) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{\pi k x_2(j)}{l_2}$,

$k, j = 1 \dots N_2 - 1$

фикс. $i \to y_{ij}, f_{ij}$ завис. только от $j \Rightarrow$ м.б. разл-ны по базису $\mu_k(j)$:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2-1} c_k(i) \mu_k(j), \ i = 1 \dots N_1 - 1, \ j = 1 \dots N_2 - 1,$$

$$f_{ij} = \sum_{k=2}^{N_2-1} \hat{f}_k(i) \mu_k(j), \text{ где } \overset{(*)}{\hat{f}_k(i)} = (f_i, \mu_k)_{H_2} = \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij} \mu_k(j) h_2, \quad i = 1 \dots N_1 - 1, \ j = 1 \dots N_2 - 1.$$

Подстав. в ур-е $(y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij} = -f_{ij}$:

$$\sum_{k=1}^{N_2-1} [c_k(i)_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i)] \mu_k(j) = -\sum_{k=1}^{N_2-1} \hat{f}_k(i) \mu_k(j)$$

$\mu_k(j)$ – ЛНЗ $\Rightarrow c_k(i)_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i) = -\hat{f}_k(i), \ i = 1 \dots N_1 - 1,$ (**)

$c_k(0) = c_k(N_1) = 0.$

<u>Замечание</u>: Метод не универсальный, т.к. необх. знать собств. зн. и собств. ф-ции.

(*) выч-ся с исп-м БПФ, основ. на перегруппировке слагаемых

(**) решается м. прогонки.

(19) Метод матричной прогонки.

∃ система: $-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0$ (1)

$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$, $i = 1, \ldots, N-1$, (2)

(3): $A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N$, F_i, y_i – вектора разм-ти M,

A_i, B_i, C_i – м-цы $M \times M$.

Ищем реш-е в виде: $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$.

Подставл. в (2) $\Rightarrow$ $A_i \alpha_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + A_i \beta_i - C_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + B_i y_{i+1} = -F_i$

должно вып-ся: $\begin{cases} (A_i \alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i = 0, \\ (A_i \alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + A_i \beta_i = -F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{i+1} = (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} B_i, \\ \beta_{i+1} = (C_i - A_i \alpha_i)^{-1}(A_i \beta_i + F_i) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $\alpha_1 = C_0^{-1} B_0$, $\beta_1 = C_0^{-1} F_0$

Далее, прямой ход: $\alpha_{i+1} = (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} B_i$; $\beta_{i+1} = (C_i - A_i \alpha_i)^{-1}(A_i \beta_i + F_i)$

(3) $\Rightarrow$ $y_N = (C_N - A_N \alpha_N)^{-1}(A_N \beta_N + F_N)$

Далее, обратный ход: $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$, $y_N = \beta_{N+1}$, $i = N-1, N-2, \ldots, 0$.

<u>Опр.:</u> Матричная прогонка устойчива, если $\exists C_0^{-1}$, $\exists (C_i - A_i \alpha_i)^{-1}$, $\|\alpha_i\| \le 1$, $i = 1, \ldots, N$.

$\boxed{T:}$ Пусть $A_i, B_i \ne 0$, $i = 1, \ldots, N-1$, $\exists C_i^{-1}$, $i = 0 \ldots N$

$\|C_i^{-1} A_i\| + \|C_i^{-1} B_i\| \le 1$, $\|C_0^{-1} B_0\| \le 1$, $\|C_N^{-1} A_N\| < 1$ $\Rightarrow$ матричная прогонка устойчива [без док-ва].

20. Метод редукции: вывод основных формул.

$$\begin{cases} y_{i-1} - Cy_i + y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, & (1) \\ y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \\ \quad (2) \qquad\quad (3) \end{cases}$$

$(1): \; y_{i-2} - Cy_{i-1} + y_i = -F_{i-1}$

$(1): \; y_i - Cy_{i+1} + y_{i+2} = -F_{i+1}$ $\quad (+)$

$$y_{i-2} + 2y_i - C(\underbrace{y_{i-1} + y_{i+1}}_{Cy_i - F_i}) + y_{i+2} = -(F_{i-1} + F_{i+1})$$

$(*) \Rightarrow y_{i-2} - (C^2 - 2E)y_i + y_{i+2} = -(F_{i-1} + CF_i + F_{i+1})$

Осуществляем редукцию по кол-ву узлов

Пусть $N = 2^m$. На каждом k-м этапе:

$$y_{i-2^k} - C^{(k)} y_i + y_{i+2^k} = -F_i^{(k)}, \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (**)$$

Прямой ход: вычисление $C^{(k)}, F_i^{(k)}$:

$$\left.\begin{array}{l} C_k^{(k)} = (C^{(k-1)})^2 - 2E, \quad C^{(0)} = C, \\ F_i^{(k)} = F_{i-2^{k-1}}^{(k-1)} + C^{(k-1)} F_i^{(k-1)} + F_{i+2^{k-1}} \end{array}\right\} (*) \quad k = 0, \dots, m-1$$

Обратный ход: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{пропущ. узлы}}}{y_i} = (C^{(k)})^{-1}(y_{i-2^k} + y_{i+2^k} + F_i^{(k)}) \quad - (*)$

$k = m-1, m-2, \dots, 0.$

(21) Метод редукции: обращение матриц и вычисление правых частей. Подсчёт числа действий.

[В обратном ходе метода редукции требуется выполнить обращение м-цы общего вида $C^{(k)}$, а в прямом ходе – вычислить правые части $F_i^{(k)}$?]

1) вместо обращения м-цы, т.е. реш-я с-мы вида $C^{(k)} v = \varphi$, где ($v = v_{2k}$),

$$C^{(k)} = \prod_{l=1}^{2k} \left(C - 2\cos\frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}} E\right) = \prod_{l=1}^{2^k} C_l^{(k)}, \quad C = C^{(0)},$$

$$C_l^{(k)} v_l = v_{l-1}, \quad l = 1, \dots, 2^k, \quad v_0 = \varphi$$

2) Будем искать $F_i^{(k)}$ в виде $F_i^{(k)} = C^{(k)} p_i^{(k)} + q_i^{(k)}$.

Выбираем $q_i^{(k)}$ так, чтобы выполнялось $q_i^{(k)} = 2p_i^{(k)} + q_{i-2^{k-1}}^{(k-1)} + q_{i+2^{k-1}}^{(k-1)}$ (**)

Тогда будет $C^{(k-1)} s_i^{(k-1)} = p_{i-2^{k-1}}^{(k-1)} + p_{i+2^{k-1}}^{(k-1)} + q_i^{(k-1)}$, где $s_i^{(k+1)} = p_i^{(k)} - p_i^{(k-1)}$. (*)

$\Rightarrow$ Обращаем $C^{(k-1)}$, находим $s_i^{(k-1)}$, вычисляем $p_i^{(k)} = s_i^{(k-1)} + p_i^{(k-1)}$ (из (*)), вычисляем $q_i^{(k)}$ из (**).

[$p_i^{(0)} = 0$, $q_i^{(0)} = F_i$]

3) Число операций есть $O(q N \log_2 N)$, где q – число операций на решение 1 с-мы вида: $C_l^{(k)} w_l = w_{l-1}$.

Для уравнения Пуассона: $O(N_2 N_1 \log_2 N_1)$.

(22.) Разностные схемы как операторные уравнения

Разн. схема предст. собой СЛАУ $A_h y_h = \varphi_h$ (1), где A – м-ца системы, φ - заданный вектор, y – искомый вектор.

$y_h, \varphi_h \in H_h$, $\dim H_h \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$

Пусть $\|\cdot\|_{1h}$, $\|\cdot\|_{2h}$ – нормы в H_h

Опр.: Ур-ние (1) наз. корректным, если:

1) $\forall \varphi_h \in H_h$ $\exists!$ реш-е (1) y_h

2) $\exists M$, не завис. от h: $\forall \varphi_h \in H_h$: $\|y_h\|_{1h} \le M \|\varphi_h\|_{2h}$.

Опр.: Свойство 2)↑ наз-ся устойчивостью разностной схемы (1).

Т.: [достаточное условие корректности] $\exists \delta > 0$ (не завис. от h): $\forall v_h \in H_h$: $(A v_h, v_h)_h \ge \delta \|v_h\|_h^2$ => ур-ние (1) корректно и верна оценка: $\|y_h\|_h \le \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h$.

Док-во: 1) Пусть z_h – реш-е однородной задачи $A_h z_h = 0$,

$\delta \|z_h\|_h^2 \overset{усл.}{\le} (A z_h, z_h)_h = 0 \Rightarrow z_h = 0 \Leftrightarrow \exists!$ реш-е (1).

2) Пусть y_h – реш-е (1).

$\delta \|y_h\|_h^2 \overset{усл.}{\le} (A y_h, y_h)_h \le (\varphi_h, y_h)_h \overset{К-Б}{\le} \|y_h\|_h \|\varphi_h\|_h \Rightarrow$

$\Rightarrow \|y_h\|_h \le \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h$, ч.т.д.

23. Канонический вид и определение устойчивости двуслойных разностных схем.

[О.] Двуслойной разностной схемой называется система операторно-разностных уравнений вида: $B_1 y_{n+1} + B_2 y_n = \varphi_n$, $y_0, y_n \in H_h$, $H_h = \{y(x), x \in \omega_h\}$, где B_1, B_2 – лин. оп-ры: $H_h \to H_h$, y_0, φ_n – заданные вектора. (1)

Обозн. $B = \tau B_1$, $A = (B_1 + B_2)$

[О] Каноническим видом двуслойной разностной схемы наз. её запись в форме: $B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = \varphi_n$, $y_0 \in H_h$ – задан. $[A, B: H_h \to H_h]$ (2)
предп. $\exists B^{-1}_{\tau,h}(t_n)$

[О] Разностная схема (2) наз. устойчивой, если $\exists M_1, M_2 > 0$, не завис. от t_n, τ, h, такие, что для $\forall y_0, \varphi_{\tau,h}(t_n) \in H_h$ для реш-я (2) справ-во:
$\|y_n\|_{1h} \le M_1 \|y_0\|_{1h} + M_2 \max\limits_{j=0 \dots n-1} |\varphi_j|$.

[О] Разн. схема (2) наз. устойчивой по начальным данным, если $\exists M_1 > 0$, не завис. от t_n, τ, h, т.ч. для $\forall y_0 \in H_h$ для решения однородной задачи $B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0$, $y_0 \in H_h$ справедлива оценка:
$\|y_n\|_{1h} \le M_1 \|y_0\|_{1h}$, $n = 0, 1, \dots, K$

[О] Разн. схема (2) наз. устойчивой по пр. части, если $\exists M_2 > 0$, не завис. от t_n, τ, h, т.ч. для $\forall \varphi_{\tau,h}(t_n) \in H_h$ для решения неоднородной задачи с нулевыми начальными данными:

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = \varphi_n, \; y_0 = 0$$

справедлива оценка: $\|y_n\|_{1h} \le M_2 \max\limits_{0 \le j \le n-1} \|\varphi_j\|_{2h}$

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу линейности, устойчивость $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{уст-во по пр. части} \\ \text{уст-во по начальн. данным.} \end{cases}$

(24.) Теорема об устойчивости по начальным данным двухслойных разностных схем.

$(2): B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=\varphi_n$, $y_0, \varphi_n\in H_h$, предп. $\exists B^{-1}_{\tau,h}(t_n)$. $(=0-(2'))$

[О] Разн. схема наз. устойчивой по начальным данным, если $\exists M_1>0$, не завис. от t_n,τ,h, т.ч. для $\forall y_0\in H_h$ для реш-я однородной задачи $B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0$, $y_0\in H_h$ справедлива оц-ка: $\|y_n\|_{1h}\le M_1\|y_0\|_{1h}$.

{Нач: $y_n\equiv y(t_n)\in H$, $A,B: H\to H$, B^{-1}, $t_n=n\tau$, $\varphi_n\in H$ (к (2))}

[О] Разн. схема (2) равномерно устойчива по начальным данным, если $\exists\rho>0, M_1>0$, не завис. от h,τ,t_n, т.ч. для $\forall y_n\in H$ для решения однородного ур-я: $B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0$ справедлива оценка:

$\|y_{n+1}\|_{1h}\le\rho\|y_n\|_{1h}$; $\rho^n\le M_1$, $\forall n=0,1,\ldots$

[из равн. уст-ти по нач. данным => уст. по нач. данным: $\|y_n\|_{1h}\le\rho^n\|y_0\|_{1h}\le M_1\|y_0\|_{1h}$]

$\measuredangle$ $y_{n+1}=(E-\tau B^{-1}A)y_n$ для однородн. ур-я с $\varphi_n=0$.

$y_{n+1}=Sy_n$, $n=0,1,\ldots,K-1$, $S=E-\tau B^{-1}A$ — опер-р перехода.

$K\tau=T$, где $T>0$ — непос. заданное число.

[Т1] Пусть схема (2) равн. уст-ва по начальн. данным в $\|\cdot\|_{1h}$, тогда схема (2) уст-ва по пр. части, и справедлива оценка:

$\|y_n\|_{1h}\le M_1\|y_0\|_{1h}+M_2\max\limits_{0\le j\le n-1}\|\varphi_j\|_{2h}$, где $\|\varphi\|_{2h}=\|B^{-1}_j\varphi_j\|_{1h}$; $M_2=M_1T$.

Док-во: $y_{j+1}=S_{j+1}y_j+\tau B_j^{-1}\varphi_j$

$\|y_{j+1}\|_{1h}\le\|S_{j+1}y_j\|_{1h}+\tau\|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}\le\|S_{j+1}\|\|y_j\|_{1h}$

из равн. уст-ти по нач. данным => $\|y_{n+1}\|_{1h}\le\rho\|y_n\|_{1h}$, $y_{n+1}=Sy_n$ =>

=> $\|Sy_n\|_{1h}\le\rho\|y_n\|_{1h}$, $\forall y_n$ => $\|S\|\le\rho$.

$\|y_{j+1}\|_{1h}\le\rho\|y_j\|_{1h}+\tau\|\varphi_j\|_{2h}\le\ldots$; $\|y_j\|_{1h}\le\rho\|y_{j-1}\|_{1h}+\tau\|\varphi_{j-1}\|_{2h}$

=> $\|y_{n+1}\|_{1h}\le\rho^{n+1}\|y_0\|_{1h}+\sum\limits_{j=0}^{n}\tau\rho^{n-j}\|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}$ =>

=> $\|y_{n+1}\|_{1h}\le M_1\left(\|y_0\|_{1h}+\sum\limits_{j=0}^{n}\tau\|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}\right)$

$\sum\limits_{j=0}^{n}\tau\|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}\le t_{n+1}\cdot\max\limits_{0\le j\le n}\|B_j^{-1}\varphi_j\|_{1h}$ => $\|y_{n+1}\|_{1h}\le M_1\|y_0\|_{1h}+M_1t_{n+1}\max\limits_{0\le j\le n-1}\|\varphi_j\|_{2h}$, ч.т.д.

[Т2] $A=A^*>0$, $B\ge\frac{\tau}{2}A$, (2)-равн. уст. по нач. д. => для (2'): $\|y_{n+1}\|_A\le\|y_n\|_A$, $n=0,1\ldots$

[Т3] $A=A^*>0$, $B^*+B\ge\tau A$, —"— => $\|y_{n+1}\|_A\le\|y_n\|_A$, $n=0,1\ldots$ [без док-ва]

(25.) Устойчивость несамосопряжённых двухслойных разн. схем.

$\gamma \frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + \sigma A_{n+1} + (1-\sigma)Ay_n = 0$, $B = E + \sigma\tau A$, $A: H \to H$ (самосопр-ть A не требуется)

$\boxed{T:}$ Если $\forall v \in H$: $(\ -\frac{1}{2})\tau\|Av\|^2 + (Av, v) \geq 0$, то схема равномерно устойчива по начальн. данным, и спр-во: $\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|$, $n = 0, 1, \ldots$, $\|y_n\| = \sqrt{(y_n, y_n)}$

Док-во: Для однородн. ур-я: $B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} + Ay_n = 0$, $y_0 \in H_h$ имеем:

$y_{n+1} = Sy_n$, $S = E - \tau B^{-1}A$, $B = E + \sigma\tau A$; н-док-ть: $\|Sy_n\| \leq \|y_n\|$.

$\|Sy_n\|^2 = (Sy_n, Sy_n) = (y_n - \tau B^{-1}Ay_n, y_n - \tau B^{-1}Ay_n) = \|y\|^2 - 2\tau(B^{-1}Ay_n, y_n) +$
$+ \tau^2\|B^{-1}Ay_n\|^2 \leq \|y_n\|^2 \Rightarrow (B^{-1}Ay_n, y_n) \geq \frac{1}{2\tau}\|B^{-1}Ay_n\|^2$

$B = E + \sigma\tau A \Rightarrow AB = BA \Rightarrow AB^{-1} = B^{-1}A \Rightarrow (AB^{-1}y_n, y_n) \geq \frac{\tau}{2}\|AB^{-1}y_n\|^2$

$v = B^{-1}y_n \Rightarrow y_n = Bv \Rightarrow (Av, Bv) \geq \frac{\tau}{2}\|Av\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (Av, v + \sigma\tau Av) \geq \frac{\tau}{2}\|Av\|^2 \Rightarrow (Av, v) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau\|Av\|^2 \geq 0$

[все переходы равносильны $\Rightarrow$ рассужд. в обр. сторону].

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\sigma \geq \frac{1}{2}$ и $A > 0$, то однородн. схема устойчива $\forall \tau$.

26. Канонический вид и условие устойчивости трёхслойных разн. схем.

Трёхслойная разностная схема:

$B_2 y_{n+1} + B_1 y_n + B_0 y_{n-1} = \varphi_n$, $n = 1 \ldots K-1$, y_0, y_1 — заданы, $\varphi_{h,\tau}(t_n) \in H_h$.

$\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \ldots\}$ $\{H_h\}$, $B_0, B_1, B_2 : H_h \to H_h$, $\varphi_n = \varphi(t_n) \in H_h$.

найти y_n, $n = 2, 3, \ldots$

__Опр.:__ Канонический вид 3-слойной разностной схемы:

$B y_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi_n$ (3), где $B = \tau(B_2 - B_0)$, $R = \frac{B_2 + B_0}{2}$, $y = y_n$,

$y_t = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$, $y_{\bar{t}} = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}$, $y_{\overset{\circ}{t}} = \frac{1}{2}(y_t + y_{\bar{t}})$, $y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau}$, $A = B_2 + B_1 + B_0$.

$\boxed{T_1}$ Пусть $A^* = A > 0$, $R^* = R > 0$, $R > \frac{1}{4}A$, $B \geq 0$, тогда при $\forall y_0, y_1 \in H$ для реш-я разн. схемы (3) справедливо неравенство: $\| y_{n+1} \|_* \leq \| y_n \|$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\| y_n \|_* = \frac{1}{4}(A(y_n + y_{n-1}), y_n + y_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(y_n - y_{n-1}), y_n - y_{n-1})$

[без док-ва]

(27.) Продольно-поперечная схема для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ [Писмэна-Рэчфорда]

— $n+1$

--- $n+0{,}5$ (1)

— n

1) $\frac{y_{ij}^{n+0,5} - y_{ij}^n}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+0,5} + \Lambda_2 y_{ij}^n$, $x_{ij} \in \omega_h$, $\Lambda_1 y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij}$, $\Lambda_2 y_{ij} = y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$
— неявн. по x_1 (2)

2) $\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+0,5}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+0,5} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}$, $x_{ij} \in \omega_h$ — неявн. по x_2 (3)

Обозн. $\gamma_1 = \frac{\tau}{h_1^2}$, $\gamma_2 = \frac{\tau}{h_2^2}$

$$\Rightarrow 0{,}5\gamma_1 y_{i-1j}^{n+0,5} - (1-\gamma_1) y_{ij}^{n+0,5} + 0{,}5\gamma_1 y_{i+1j}^{n+0,5} = -\overbrace{(y_{ij}^n + 0{,}5\tau\Lambda_2 y_{ij}^n)}^{F_{ij}^n}$$

Треб. кол-во действий для прогонки по x_1: $O(N_1 N_2)$, по x_2: $O(N_1 N_2)$.

$\boxed{\text{T:}}$ Продольно-поперечная схема абс. устойчива.

(3) − (2): $\frac{y_{ij}^{n+1} - 2y_{ij}^{n+1/2} + y_{ij}^n}{0{,}5\tau} = \Lambda_2 (y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n)$, $x_{ij} \in \omega_h$

$\Rightarrow$ во внутр. узлах: $y_{ij}^{n+1/2} = \frac{y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2 (y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n)$

Подставим в (3):

$$\left[y_{ij}^{n+1} - 0{,}5(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n) + \frac{\tau}{4}\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n)\right]\cdot\frac{1}{0{,}5\tau} = 0{,}5\Lambda_1(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n) + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{2}\overset{\Lambda_1+\Lambda_2}{\Lambda}(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n).$$

Обозн. $A_1 = -\Lambda_1$, $A_2 = -\Lambda_2$, $A = A_1 + A_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}}_{} + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2} A (y_n + y_{n+1}) = 0$$

Обозн. y_t; $y_n = y$

$$\Rightarrow y_t + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 y_t + \frac{1}{2} A (y + y + \tau y_t)$$

$$\underbrace{\left(E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 + \frac{\tau}{2}(A_1 + A_2)\right)}_{B} y_t + Ay = 0$$

Имеем: $A_1 A_2 \geq 0 \Rightarrow B \geq E + \frac{\tau}{2} A \Rightarrow B > \frac{\tau}{2} A$

и схема устойчива.

28. Квазилинейное уравнение теплопроводности.

Общая форма УТ: $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}+\operatorname{div} W = f$, $x=(x_1,x_2,x_3)$

$\mathcal{E}$ – уд. внутр. энергия
W – тепловой поток
f – уд. м-ть внеш. источников тепла
$u(x,t)$ – t-ра.

$W(u,x,t)=-K(u,x,t)\operatorname{grad}u$, $K(u,x,t)$ – коэф-т теплопров-ти

$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}=\operatorname{div}(K(u,x,t)\operatorname{grad}u)+f(u,x,t)$

$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}=\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=c(u)\frac{\partial u}{\partial t}$, $c(u)=\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}>0$ – удельная теплоёмкость

Получим квазилин. ур-е теплопр-ти: $c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u)$.

замена: $v=\int_0^u c(s)\,ds$, $\frac{\partial v}{\partial u}=c(u)$, $\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K(u)}{c(u)}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u)$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{K}(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\hat{f}(v)$, где $\tilde{K}(v)=\frac{K(u(v))}{C(u(v))}$, $\hat{f}(v)=f(u(v))$.

$\boxed{\text{Утв.}}$ Квазилинейное УТ $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ допускает автомодельные реш-е, т.е. реш-е, завис. от колоб. комб-ции независ. пер-ых: x и t.

(29) Разностные схемы для уравнения теплопроводности с перем. коэф-тами.

$$\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ x\in(0,1),\ t>0$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(1,t)=\mu_2(t),\ u(x,0)=u_0(x)$$

$\rho(x,t), k(x,t), f(x,t)$ — достаточно гладкие ф-ции; $0<c_1\le k(x,t)\le c_2,\ \rho(x,t)\ge c_3>0$.

аппрокс-ем $\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$

при фикс. t в т. (x,t) разн. отн-ем:

$$\Lambda(t)y_i = (a(x_i,t)y_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right]$$

Обозн. $u=u(x_i,t)$, $u'=\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t)$ и т.д.:

$$\Lambda(t)u = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{hu'+\frac{h^2}{2}u''+\frac{h^3}{6}u'''}{h} + a_i\frac{-hu'+\frac{h^2}{2}u''-\frac{h^3}{6}u'''}{h}\right]+o(h^2) =$$

$$= \frac{a_{i+1}-a_i}{h}u' + \frac{a_{i+1}-a_i}{2}u'' + \frac{a_{i+1}-a_i}{h}\frac{h^2}{6}u''' + o(h^2).$$

Нужно, чтобы вып-сь усл-е 2го порядка аппрокс-ции:

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h} = \frac{\partial k}{\partial x}(x_i,t)+o(h^2),\quad \frac{a_{i+1}-a_i}{2} = k(x_i,t)+o(h^2).$$

На практике исп-ся: $a_i = k(x_i - h/2, t)$ или $a_i = \frac{1}{2}(k(x_{i-1},t)+k(x_i,t))$ или

или $a_i = \dfrac{2k(x_{i-1},t)k(x_i,t)}{k(x_{i-1},t)+k(x_i,t)}$

Схема с весами имеет вид: $\rho(x_i,t)\dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \Lambda(t)(\sigma y_i^{n+1}+(1-\sigma)y_i^n)+f(x_i,t)$

$i=\overline{1,N-1}$, $hN=1$; $y_0^n=\mu_1(t_n)$, $y_N^n=\mu_2(t_n)$; $y_i^0=u_0(x_i)$, $t\in[t_n,t_{n+1}]$.

Схема имеет порядок аппр-ции $O(\tau^2,h^2)$, если $\sigma=1/2$ и $t=t_n+\tau/2$ и $O(\tau,h^2)$ в остальных случаях.

$\boxed{T}$: Явная схема $\rho(x_i,t)\dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = (a(x_i,t)y^n_{\bar{x}})_{x,i}$ устойчива при $\tau\le\dfrac{h^2c_3}{2c_2}$.

Док-во: Предп. $\rho(x_i,t)=\rho=const$, $a(x_i,t)=a=const$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau'} = y_{\bar{x}x,i}$, $\tau'=\dfrac{\tau a}{\rho}$ ← усл-е уст-ти: $\tau'\le\dfrac{h^2}{2}\Rightarrow\tau\le\dfrac{h^2\rho}{2a}$

Треб. вып-е для $\forall\rho(x_i,t), a(x_i,t)$: $\tau\le\dfrac{h^2\rho(x_i,t)}{2a(x_i,t)} \Rightarrow \tau\le\dfrac{h^2c_3}{2c_2}$, ч.т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично можно показать, что при $\sigma\ge\frac{1}{2}$ схема абс-но устойчива.

30. Разностные схемы для квазилинейного ур-я теплопроводности.

Рассм. 1ую кр. задачу для квазилинейного ур-я теплопр-ти:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u)$.

1) чисто неявн. схема, линейная отн-но y_i^{n+1}:

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h} - a_i\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}\right] + f(y_i^n)$$

$a_i = a(y_i^n) = 1/2\,(K(y_i^n)+K(y_{i-1}^n))$

схема абс. уст-ва, аппр-ция: $O(\tau, h^2)$, y_i^{n+1} находится методом прогонки.

2) неявная линейная схема:

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a(y_{i+1}^{n+1})\frac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h} - a(y_i^{n+1})\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}\right] + f(y_i^{n+1}),$$

$a(y_i^{n+1}) = 1/2\,[K(y_i^{n+1})+K(y_{i-1}^{n+1})]$

для реш-я нелин. с-мы исп-ся итерац. метод:

$$\frac{y_i^{(s+1)}-y_i^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a(y_{i+1}^{(s)})\frac{y_{i+1}^{(s+1)}-y_i^{(s+1)}}{h} - a(y_i^{(s)})\frac{y_i^{(s+1)}-y_{i-1}^{(s+1)}}{h}\right] + f(y_i^{(s)}),$$

$y_i^{(0)} = y_i^n$, $y_i^{n+1} = y_i^{(M)}$, $s = 0, \ldots, M-1$, s – номер итерации.

Нелин. const-ты берутся с предыдущей итерации, а в качестве нач прибл-е для y_i^{n+1} берётся y_i^n. Число итераций M задаётся из соообр-й точности.

__ЗАМЕЧАНИЕ!__ При $M=1$ получим абс. уст. схему, $O(\tau, h^2)$, $y_i^{(s+1)}$ находится методом прогонки.

3) схема предиктор-корректор 2го порядка.

1-ый этап: лин. неявная схема для нахожд-я $y^{n+1/2}$:

$$\frac{y_i^{n+1/2}-y_i^n}{1/2\,\tau} = \left(a(y_i^n)\,y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + f(y_i^n),\ i = 1 \ldots N-1,\ y_0^{n+1/2} = \mu_1(t_n + \tau/2),\ y_N^{n+1/2} = \mu_2(t_n + \tfrac{\tau}{2})$$

2-ой этап: симметричная схема с нелин. коэф-тами при $y = y^{n+1/2}$

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = 1/2\left[\left(a(y_i^{n+1/2})\,y_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + \left(a(y_i^{n+1/2})\,y_{\bar{x}}^n\right)_{x,i}\right] + f(y_i^{n+1/2}),\ i = 1 \ldots N-1$$

$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$, $y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$.

схема абс. устойчива, $O(\tau^2, h^2)$.

31. Разностная схема для слабо нелинейного эллиптического ур-я.

∄ 1ую кр. задачу для слабо нелин. эллипт. ур-е:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2, u), & (x_1, x_2) \in G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}, \\ & u(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \partial G \end{cases}$$

на равном. сетке $\Omega = \omega \cup \gamma$ ∄ разн. схему: $\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}, y_{ij}), x_{ij} \in \omega, \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), x_{ij} \in \gamma \end{cases}$ (∂G)

$z_{ij} = y_{ij} - u_{ij}$ – погр-ть: $\Delta_h (u_{ij} + z_{ij}) = -f(x_{ij}, u_{ij} + z_{ij})$

Исп. ф. Лагранжа: $f(x_{ij}, u_{ij} + z_{ij}) = f(x_{ij}, u_{ij}) + f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij}) z_{ij}$,

где $\bar{y}_{ij} = u_{ij} + \theta z_{ij}$, $\theta \in (0, 1)$ $\Rightarrow$ получ. линеаризов-е ур-е для погр-ти:

$$\begin{cases} \Delta_h z_{ij} + f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij}) z_{ij} = -\Psi_{ij}, x_{ij} \in \omega, \\ z_{ij} = 0, x_{ij} \in \gamma \quad , \Psi_{ij} = \Delta_h u_{ij} + f(x_{ij}, u_{ij}) = O(h_1^2, h_2^2). \end{cases}$$

ур-е для погр-ти в кан. форме: $A(x) z(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) z(\xi) + F(x)$, $\{x = x_{ij}\}$

$A(x) = 2/h_1^2 + 2/h_2^2 - f'_u(x, \bar{y})$, $B(x, x_{i\pm1j}) = 1/h_1^2$, $B(x, x_{ij\pm1}) = 1/h_2^2$, $F(x) = \Psi(x)$.

усл-е пр-па максимума: $A(x) > 0$, $B(x, \xi) > 0$, $D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) = \underbrace{-f'_u(x, \bar{y})}_{\geq 0}$

вып-ны, если $f'_u(x, \bar{y}) \leq 0$, $\forall x \in G$, $\forall \bar{y}$.

$\boxed{T}$ $f'_u(x, \bar{y}) \leq 0$, $\forall x \in G, \forall \bar{y}$ $\Rightarrow$ верна оценка: $\|z\|_C \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\Psi\|_C$

Док-во: Рассм. мажорирующую ф-ю: $\bar{Z} = K(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2)$:

$(c)_{x\bar{x}} = 0$, $(x^2)_{x\bar{x}} = \frac{(x-h)^2 - 2x^2 + (x+h)^2}{h^2} = 2$

т.к. $f'_u \leq 0$

$\Rightarrow \Delta_h \bar{Z} + f'_u(x, \bar{y}) \bar{Z} = -\bar{F}$, где $\bar{F} = 4K - f'_u(x, \bar{y}) K(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \geq 4K$

Выберем $K = 1/4 \|\Psi\|_C \Rightarrow \|\Psi\|_C \leq \bar{F} \Rightarrow$ {исп. $\boxed{T}$ сравнения: z удовл. ур-ю с Ψ в пр. части} $\Rightarrow \|z\|_C \leq \|\bar{Z}\|_C = 1/4 \|\Psi\|_C (l_1^2 + l_2^2)$, ч.т.д.

∄ $H = \{y(x_{ij}), x_{ij} \in \Omega, y|_\gamma = 0\}$, $(y, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ – среднекв. норма

$A, R: H \to H$: $Ay_{ij} = -\Delta_h y_{ij}$, $x_{ij} \in \omega$, $y|_\gamma = 0$; $Ry_{ij} = r_{ij} y_{ij}$, $x_{ij} \in \omega$, $r_{ij} = -f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij})$

$\bar{y}_{ij} = u_{ij} + \theta z_{ij}$, $0 < \theta < 1$

$\Rightarrow$ ур-е для погр-ти: $(A + R) y = \Psi$

$\boxed{T:}$ Пусть $\exists \varepsilon > 0$: $f'(x, y) \leq \frac{9}{l_1^2} + \frac{9}{l_2^2} - \varepsilon$, $\forall x \in G, \forall y$. Тогда для погреш-ти справедлива оценка: $\|z\| \leq 1/\varepsilon \|\Psi\|$.

Док-во: $\left.\begin{array}{l} (Ay, y) \geq \delta(y, y), \ \delta = 9/l_1^2 + 9/l_2^2 \\ \text{и } (Ry, y) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} r_{ij} y_{ij}^2 h_1 h_2 \geq (\varepsilon - \delta)(y, y) \end{array}\right\} \Rightarrow ((A + R) y, y) \geq \varepsilon (y, y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon \|z\|^2 \leq ((A + R) z, z) = (\Psi, z) \leq$

$\leq \{К-Б\} \leq \|\Psi\| \|z\| \Rightarrow \|z\| \leq 1/\varepsilon \|\Psi\|$, ч.т.д.

(32) Итерационный метод решения нелинейной разностной схемы.

∀ нелин. разн. задачу: $\Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}, y_{ij}),\ x_{ij}\in\omega,\ y_{ij} = \mu(x_{ij}),\ x_{ij}\in\gamma$

Обозн. $y = (y_{ij})^T$ – вектор с коорд. y_{ij}, $f(y) = (f(x_{ij}, y_{ij}))^T$, $f'(y) = (f'_u(x_{ij}, y_{ij}))^T$

Обозн. $A = -\Delta_h$, тогда: $Ay = f(y)$. Положим $y = y^{k+1}$ и линеаризуем:

$$Ay^{k+1} = f(y^{k+1}) \cong f(y^k) + f'(y^k)(y^{k+1} - y^k).$$

$\Rightarrow$ метод Ньютона: $Ay^{k+1} - f'(y^k)y^{k+1} = F(y^k)$; $F(y^k) = f(y^k) - f'(y^k)y^k$

На практике реш-ся ур-е для поправки: $v^{k+1} = y^{k+1} - y^k$:

$$A(y^k + v^{k+1}) - f'(y^k)(\cancel{y^k} + v^{k+1}) = f(y^k) - \cancel{f'(y^k)y^k}$$

$\Rightarrow Av^{k+1} - f'(y^k)v^{k+1} = -r^k,\ r^k = Ay^k - f(y^k)$, досчитывается: $y^{k+1} = y^k + v^{k+1}$

В покоординатной записи:

$$-\Delta_h v_{ij}^{k+1} - f'_u(x_{ij}, y_{ij}^k)v_{ij}^{k+1} = -r_{ij}^k,\ r_{ij}^k = -\Delta_h y_{ij}^k - f(x_{ij}, y_{ij}^k),\ x_{ij}\in\omega,$$

$v_{ij}^{k+1}\big|_\gamma = 0$ (т.к. $y^{k+1}\big|_\gamma = y^k\big|_\gamma = \mu$),

$y_{ij}^{k+1} = y_{ij}^k + v_{ij}^{k+1}$, где y_0 – заданный вектор начальн. приближ-е.

двухуровневый итерац. процесс:
- внешн. итерации по нелинейности;
- внутр. итерации – для реш-я СЛАУ.

$\boxed{T}$ При условии $\|y_0 - y\|_C < \frac{1}{q}$, $q = \frac{l_1^2 + l_2^2}{8}\|f''\|_C$, y_0 – нач. приближение $\Rightarrow$ метод Ньютона сх-ся со 2ым порядком.

$w^k = y^k - y$ – погр-ть k-ой итерации, y – реш-е $Ay = f(y)$

Подставим: $Ay^{k+1} - f'(y^k)y^{k+1} = f(y^k) - f'(y^k)y^k$

$$A(w^{k+1} + y) + f'(y^k)(w^{k+1} + y) = f(y^k) - f'(y^k)y^k$$

$$(A + R)w^{k+1} + (f(y) - f(y^k)) - f'(y^k)(y - y^k) = 0.$$

Исп. разл-е: $f(y) - f(y^k) = f'(y^k)(y - y^k) + \frac{1}{2}f''(\tilde{y}_k)(y - y^k)^2$

Получим: $(A + R)w^{k+1} = F$, $F = -\frac{1}{2}f''(\tilde{y}_k)w_k^2$

Ранее показано: при $f'_u(x, y) \le 0,\ \forall x\in G,\ \forall y \Rightarrow$ справедлива оценка для реш-я

$$\|w^{k+1}\|_C \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}\|F\|_C \Rightarrow \|w^{k+1}\|_C \le q\|w_k\|_C^2,\ q = \frac{l_1^2 + l_2^2}{8}\|f''\|_C$$

$p_k = q\|w_k\|_C$; $p_{k+1} \le p_k^2 \Rightarrow p_k \le p_0^{2^k}$

$p_0 = q\|y_0 - y\|_C$, для сходимости достаточно потребовать $p_0 < 1$.

$\|y_0 - y\|_C < \frac{1}{q}$, $q = \frac{l_1^2 + l_2^2}{8}\|f''\|_C$ – усл-е выбора начальн. приближения.