МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 20, № 6 (1976), 847—858

УДК 519.3

# ОБ УРАВНЕНИИ ЭЙЛЕРА — ЯКОБИ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

А. В. Дмитрук

Обсуждается применение метода уравнения Эйлера — Якоби при исследовании квадратичного функционала, заданного на конусе. Такие функционалы возникают при варьировании задач оптимального управления. Вводится ряд понятий, с помощью которых уравнение Эйлера — Якоби обобщается и обосновывается применение этого метода также и в том случае, когда уравнение не является линейным дифференциальным. Библ. 6 назв.

Как известно, в классическом вариационном исчислении (КВИ) для определения знака квадратичного функционала применяется метод уравнения Эйлера — Якоби. С помощью его решений находится сопряженная (фокальная) точка, и тогда знак функционала полностью определяется положением этой точки относительно отрезка, по которому ведется интегрирование [1]).

В настоящей заметке рассматривается этот метод применительно к задачам более общего вида (например, из теории оптимального управления). Обобщается классическая теорема о положительной определенности квадратичного функционала на отрезке, не содержащем фокальных точек. Прямое обобщение классического доказательства здесь не проходит, так как в нем существенно используется линейность уравнения Эйлера — Якоби, которое в нашем случае уже нелинейно. Поэтому мы предлагаем следующий подход.

---

[1]) Мы не будем относить к КВИ задачи на условный экстремум, т. е. задачи Лагранжа, Майера, Больца.

1. Введем необходимые определения. Будем рассматривать квадратичный функционал вида

$$J(u)=\int_T^0 ((Ax, x)+2(Bx, u)+(Cu, u))\,dt, \qquad (1)$$

где $\dot{x}=\Gamma x+\Lambda u$, $x(T)=0$, $Fx(0)=0$, $x(t)\in \mathbf{R}^n$, $u(t)\in K(t)\subset \mathbf{R}^r$, $u\in L_2\ [T,\ 0]$, $K(t)$ — замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^r$, измеримо зависящий от $t$, $F$ — постоянная матрица $n\times m$, матрицы $A$, $B$, $C$, $\Gamma$, $\Lambda$ измеримы по $t$ и ограничены. Непрерывность коэффициентов и конуса $K(t)$ не предполагается, так как она не характерна для задач оптимального управления. [1])

Пусть $\mathcal{K}_T=\{u\in L_2\ [T,\ 0]\colon u(t)\in K(t)$ почти всюду$\}$. Рассмотрим все $T$, для которых $J$ положителен (т. е. $J>0$ на любом элементе $\mathcal{K}_T$, отличном от нуля), и пусть $t_0$ есть нижняя грань всех таких $T$. Тогда $J\geqslant 0$ на $\mathcal{K}_{t_0}$. Будем говорить, что $J$ *проходит через нуль*, если на $\mathcal{K}_{t_0}$ он уже не является положительным. Через $t_1$ обозначим нижнюю грань всех тех $T$, для которых $J\geqslant 0$ на $\mathcal{K}_T$. Очевидно, $J\geqslant 0$ и на $\mathcal{K}_{t_1}$. Отрезок $[t_1,\ t_0]$, или полуинтервал $(-\infty,\ t_0]$, если $t_1=-\infty$, назовем *столом*, а $t_1$, $t_0$— дальним и ближним его концами соответственно. Наша задача состоит в нахождении $t_1$, $t_0$. Займемся сначала нахождением ближнего конца стола $t_0$.

Если $J$ проходит через нуль, то по определению $t_0$ существует $u_0\in\mathcal{K}_{t_0}$, $u_0\neq 0$, такая, что $J(u_0)=0$. Так как $J\geqslant 0$ на $\mathcal{K}_{t_0}$, то $u_0$ является точкой минимума $J$ на $\mathcal{K}_{t_0}$ и, следовательно, удовлетворяет необходимому условию минимума — уравнению Эйлера. (Для квадратичного функционала КВИ оно совпадает с уравнением Якоби, поэтому иногда по традиции будем называть его уравнением Эйлера — Якоби).

Для функционала вида (1), рассматриваемого на конусе $\mathcal{K}_T$, и функции $u\in\mathcal{K}_T$ выполнение уравнения Эйлера означает согласно [1], что существуют $\varphi\in L_2\,[T,\ 0]$, $p\in \mathbf{R}^m$ и абсолютно непрерывная функция $\psi$ такие, что почти всюду на $[T,\ 0]$

$$\begin{aligned} Cu &= \Lambda^*\psi - Bx+\varphi, & & \\ -\dot{\psi} &= \Gamma^*\psi - Ax - B^*u, & \psi(0) &= F^*p, \\ \dot{x} &= \Gamma x+\Lambda u, & x(T) &= 0,\ Fx(0)=0 \end{aligned}$$

[1]) В КВИ $n=r$, $\dot{x}=u$, $K(t)\equiv \mathbf{R}^r$, матрицы $A, B, C$ непрерывны.

и, кроме того, $\varphi(t) \in K^*(t)$, $(\varphi(t), u(t)) = 0$. В этом случае будем также говорить, что $u$ есть решение уравнения Эйлера на отрезке $[T, 0]$ [1]).

ЛЕММА 1. *Если $u \in \mathscr{K}_T$ удовлетворяет уравнению Эйлера на отрезке $[T, 0]$, то $J(u) = 0$.*

Доказательство следует из формулы Эйлера для однородных функционалов и однородности множества $\mathscr{K}_T$. Отсюда легко вытекает

ТЕОРЕМА 1. *Если $J$ проходит через нуль, то $t_0$ есть максимальная среди всех тех точек $T$, для которых на отрезке $[T, 0]$ существует нетривиальное решение уравнения Эйлера — Якоби.*

Доказательство. Действительно, в противном случае для некоторого $T > t_0$ $J$ не был бы положительным на $\mathscr{K}_T$, что противоречит определению $t_0$.

Точку $\tau_0$, являющуюся максимальной из тех $T$, для которых на отрезке $[T, 0]$ существует нетривиальное решение уравнения Эйлера — Якоби, назовем ближней фокальной точкой.

Теорема 1 утверждает, что если $J$ проходит через нуль, то ближний конец стола совпадает с ближней фокальной точкой. Отсюда в качестве следствия получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если $J$ проходит через нуль и отрезок $[T, 0]$ не содержит ближней фокальной точки, то $J$ положителен на $\mathscr{K}_T$.*

В КВИ аналогичная теорема доказывается методом приведения $J$ либо к «сумме квадратов» (прием Лежандра, см. [2]), либо, используя формулу Вейерштрасса из теории поля, к заведомо неотрицательному виду ([3], [4]). В обоих случаях это приведение существенно опирается на свойства линейных дифференциальных уравнений, каковым и является в КВИ уравнение Эйлера — Якоби. В рассматриваемом нами случае этот прием повторить нельзя, так как уравнение Эйлера — Якоби не линейно, однако теорема 2, являющаяся обобщением соответствующей

---

[1]) Предположим, что матрица $C^{-1}$ ограничена. Тогда, если $K(t) \equiv \mathrm{R}^r$, то $\varphi = 0$ и уравнение Эйлера принимает вид линейного дифференциального уравнения относительно $x, \psi$. В случае же произвольного $K(t)$ $\varphi \neq 0$, и хотя здесь также удается выразить $u$ через $x, \psi$ и получить систему дифференциальных уравнений относительно $x, \psi$ с липшицевой правой частью, она уже не является линейной.

теоремы КВИ, остается верной. (В КВИ нет предположения о прохождении $J$ через нуль, но, как показано ниже, оно заведомо выполняется, если выполнено сильное условие Лежандра.)

Отметим, что к уравнению Эйлера мы пришли естественно и именно как к необходимому условию минимума. Если $J$ проходит через нуль, то рассмотрение уравнения Эйлера имеет смысл: с помощью его решений мы найдем ближний конец стола $t_0$.

Если $J$ не проходит через нуль, то выписывание уравнения Эйлера бесполезно, потому что все равно с помощью его решений $t_0$ определить нельзя.

Пример 1. $n = r = 1$, $\dot{x} = u$, $F = 0$, $K(t) \equiv \mathrm{R}$,

$$J(u) = \int_T^0 (-2xu + C(t)u^2)\,dt = -x^2(0) + \int_T^0 C(t)u^2\,dt,$$

$$C(t) = \begin{cases} 3\sqrt{t+1}, & t \geqslant -1, \\ (t+1)^2, & t < -1. \end{cases}$$

Покажем сначала, что на $\mathscr{K}_{-1}$ $J$ положителен. В силу однородности $J$ можно считать, что $\int_{-1}^0 \sqrt{t+1}\,u^2\,dt = 1$. Найдем при этом условии $\max x(0)$, т. е. $\max \int_{-1}^0 u\,dt$. Эта задача эквивалентна нахождению $\max \int \frac{v\,dt}{\sqrt[4]{t+1}}$ при условии $\int v^2\,dt = 1$, который достигается на $v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{t+1}}$ и равен $\sqrt{2}$. Отсюда следует, что для любой $u \in \mathscr{K}_{-1}$

$$J(u) \geqslant \int_{-1}^0 \sqrt{t+1}\,u^2\,dt,$$

поэтому $J$ положителен на $\mathscr{K}_{-1}$. С другой стороны, для любого $T < -1$ существует $u_T \in \mathscr{K}_T$ такая, что $J(u_T) < 0$. (Достаточно взять $u_T = \chi_{[T,-1]}$). Таким образом, $t_0 = -1$, и $J$ не проходит через нуль. Уравнение Эйлера на отрезке $[-1, 0]$ не имеет нетривиальных решений — иначе согласно лемме 1 $J$ не был бы положительным на $\mathscr{K}_{-1}$ (Нетрудно показать, что в этом примере уравнение Эйлера не имеет нетривиальных решений ни на каком отрезке $[T, 0]$).

**2.** Обозначим через $L(t)$ линейную оболочку конуса $K(t)$.

ЛЕММА 2. *Пусть выполнено сильное условие Лежандра, т. е. существует* $\delta > 0$ *такое, что для почти всех* $t$ *для любого* $h \in L(t)$

$$(C(t)h, h) \geqslant \delta(h, h). \tag{2}$$

*Тогда* $J$ *проходит через нуль при любых коэффициентах* $A, B, \Gamma, \Lambda, F$.

Доказательство. По определению $t_0$ для любого натурального $n$ существует $u_n \in \mathscr{K}_{t_0 - 1/n}$ такая, что $\| u_n \| = 1$ и $J(u_n) \leqslant 0$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, считаем $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0 \in \mathscr{K}_{t_0}$. Поскольку $J$ слабо полунепрерывен снизу (это вытекает из (2)) и $J \geqslant 0$ на $\mathscr{K}_{t_0}$, имеем $J(u_0) = \lim J(u_n) = 0$. Отсюда

$$\int (Cu_0, u_0)\, dt = \lim \int (Cu_n, u_n)\, dt \geqslant \delta \int (u_n, u_n)\, dt = \delta,$$

поэтому $u_0 \neq 0$, следовательно, $J$ проходит через нуль.

Сильное условие Лежандра есть простейшее условие, обеспечивающее прохождение $J$ через нуль [1]), и в принципе годится любое другое условие с этим свойством. Например, можно рассматривать $J$ на более широком, чем $L_2[T, 0]$, пространстве $\tilde{L}_2[T, 0]$ с нормой $\| u \|' = (\int (Cu, u)\, dt)^{1/2}$. Пусть $\tilde{C} = PCP + E - P$, где $P(t)$ — матрица ортогонального проектирования на подпространство $L(t)$, а $E$ — единичная матрица. Если для всех $T < 0$ $\tilde{C}^{-1} \in L_1[T, 0]$, то $J$ проходит через нуль при любых ограниченных $A, B, \Gamma, \Lambda, F$.

**3.** Предположим, что $J$ проходит через нуль. Попытаемся теперь найти дальний конец стола $t_1$. Известен такой способ [3]. Для каждого $\beta > 0$ рассмотрим функционал $J + \beta I$, где $I(u) = \int (u, u)\, dt$, и соответствующую ему ближнюю фокальную точку $\theta_\beta$. Очевидно, $\theta_\beta \leqslant t_1$ и $\theta_\beta \to t_1$ при $\beta \to 0$. Если при любом $\beta > 0$ функционал $J + \beta I$ проходит через нуль, то все $\theta_\beta$, а с ними и $t_1$ можно определить, решая серию уравнений Эйлера — Якоби, зависящих от параметра $\beta$. Однако хотелось бы обойтись лишь одним уравнением Эйлера, соответствующим функ-

---

[1]) При этом из положительности $J$ на некотором $\mathscr{K}_T$ следует его положительная определенность, т. е. при некотором $\gamma > 0$ $J(u) \geqslant \gamma \int (u, u)\, dt$ на $\mathscr{K}_T$.

ционалу $J$, т. е. $\beta = 0$. Нам представляется естественным следующий способ [5].

Пусть $u \in \mathcal{K}_T$ есть нетривиальное решение уравнения Эйлера — Якоби на отрезке $[T, 0]$, и пусть $\eta = \operatorname{vraimin} \{t \in [T, 0]: u(t) \neq 0\}$, а $\xi$ есть нижняя грань тех $T' < T$, для которых данная функция $u$, продолженная нулем на $[T', T]$, все еще остается решением уравнения Эйлера — Якоби уже на большем отрезке $[T', 0]$ (т. е. является стационарной точкой $J$ не только на $\mathcal{K}_T$, но и на $\mathcal{K}_{T'} \supset \mathcal{K}_T$). Полученный отрезок $[\xi, \eta]$ или полуинтервал $(-\infty, \eta]$, если $\xi = -\infty$, назовем *предфокальным*. Таким образом, каждое нетривиальное решение уравнения Эйлера — Якоби порождает некоторый предфокальный отрезок или полуинтервал. Рассмотрев всевозможные $T$ и для каждого $T$ — множество всех нетривиальных решений уравнения Эйлера — Якоби на отрезке [T, 0], мы получим множество всех предфокальных отрезков и полуинтервалов. Пусть $\{\xi\}$, $\{\eta\}$ — множества из левых и правых концов соответственно. Согласно определению ближней фокальной точки $\tau_0 = \max \{\eta\}$. Положим $\tau_1 = \sup \{\xi\}$. Отрезок $[\tau_1, \tau_0]$, или полуинтервал $(-\infty, \tau_0]$, если $\tau_1 = -\infty$, назовем *фокальным*, а точку $\tau_1$ — дальней фокальной.

ЛЕММА 3. $\tau_1 \leqslant t_1 \leqslant t_0 = \tau_0$.

В доказательстве нуждается только первое неравенство. Если $T < \tau_1$, то для некоторого $T' > T$ существует $u_0 \in \mathcal{K}_{T'}$, стационарная на $\mathcal{K}_{T'}$, но не стационарная на $\mathcal{K}_T$. Так как $J(u_0) = 0$, то существует $u \in \mathcal{K}_T$, для которой $J(u) < 0$. Поскольку на $\mathcal{K}_{t_1}$ $J \geqslant 0$, то $T < t_1$, и следовательно, $\tau_1 \leqslant t_1$.

Отсюда вытекает, что при отсутствии нетривиальных предфокальных отрезков (т. е. если все они состоят из точек) $\tau_1 = t_1 = t_0 = \tau_0$, т. е. стол совпадает с фокальным отрезком, и оба они состоят из одной ближней фокальной точки. Таким образом, если выполняются следующие два условия:

(а) прохождение $J$ через нуль,

(б) отсутствие нетривиальных предфокальных отрезков, то знак функционала $J$ полностью определяется положением его ближней фокальной точки, независимо от того, разрешимо дифференциальное уравнение Эйлера — Якоби относительно старшей производной или нет.

Указанная ситуация является типичной для задач КВИ, а простейшим требованием, обеспечивающим выполнение сразу обоих условий (а), (б), является сильное условие Лежандра [1]). Исследование квадратичного функционала в КВИ проводится всегда в предположении, что сильное условие Лежандра выполняется, а в этом случае для определения знака $J$ достаточно знать лишь его ближнюю фокальную точку (она в КВИ называется просто фокальной), поэтому в КВИ нет надобности во введении понятия стола и фокального отрезка.

Однако уже в задачах Лагранжа, Майера, Больца, где на $x$, $\dot{x}$ накладывается дополнительное ограничение вида $a(t)\,x(t) + b(t)\,\dot{x}(t) = 0$, даже сильное условие Лежандра обеспечивает лишь выполнение (а), но, по-видимому, недостаточно для выполнения (б), поэтому здесь одной ближней фокальной точкой уже не обойтись. Приведем пример из оптимального управления, где выполнено сильное условие Лежандра, но есть нетривиальный фокальный отрезок.

Пример 2. $n = r = 2$, $\dot{x} = u$, $F = 0$, $J(u) = \int_T^0 (-2\,x_1u_1 - 2x_2u_2 + u_1^2 + u_2^2)\,dt$,

$$K(t) = L(t) = \begin{cases} \text{ось}\, u_1, & t \geqslant -1, \\ \text{ось}\, u_2, & t < -1. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что здесь отрезок $[-2, -1]$ является и столом, и фокальным отрезком.

Совпадение стола и фокального отрезка в примере 2 не является случайным. В предположении, что $K(t)$ для почти всех $t$ есть подпространство в $\mathbf{R}^r$, верна следующая.

ТЕОРЕМА 3 (Хазард [5] — Хестенс [6]). *Пусть выполнено сильное условие Лежандра. Тогда дальний конец стола совпадает с дальней фокальной точкой.*

Таким образом, в этом случае оказывается возможным полностью определить знак $J$, т. е. найти положение его стола, с помощью решений уравнения Эйлера — Якоби. Если же $K(t)$ — произвольный замкнутый выпуклый конус в $\mathbf{R}^r$, теорема 3 перестает быть верной. В качестве контрпримера рассмотрим следующий

Пример 3. $n = r = 2$, $\dot{x} = u$, $F = 0$, $x(T) = 0$,

$$J(u) = \int_T^0 (-2x_1u_1 - 2x_2u_2 + \beta u_1^2 + \beta u_2^2)\,dt = -|x(0)|^2 + \beta I(u),$$

[1]) В КВИ $\varphi = 0$ и $\ker \Lambda^*(t) \equiv 0$, так как $\Lambda(t) \equiv E$. Отсюда и из обратимости $C$ следует, что если $u = 0$ на $[T, \eta]$, где $T < \eta$, то $u \equiv 0$ на $[T, 0]$.

где $\beta > 0$ пока произвольно. Конус $K(t)$ в пространстве $\mathbf{R}^2$ порожден единичным вектором

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-i(t+\pi/2)}, & -\pi \leqslant t \leqslant 0, \\ e^{i\pi/2}, & t < -\pi. \end{cases}$$

Напишем уравнение Эйлера — Якоби для отрезка $[T, 0]$:

$$\left.\begin{aligned} \beta\dot{x} &= x + \psi + \varphi, & x(T) &= 0, \\ \dot{\psi} &= -\dot{x}, & \psi(0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\varphi(t) \in K^*(t) \text{ для п. в. } t \text{ и } (\varphi(t), \dot{x}(t)) \equiv 0. \tag{4}$$

Система (3), очевидно, эквивалентна уравнению

$$\beta\dot{x} = x(0) + \varphi. \tag{5}$$

Умножив это уравнение на $\dot{x}(t)$, получим $\beta(\dot{x}, \dot{x}) = (\dot{x}, x(0))$, т. е. $\dot{x}(t) \neq 0$ лишь там, где $(\dot{x}(t), x(0)) > 0$, $|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{1}{\beta}(\dot{x}(t), x(0))}$, а так как $\dot{x}(t) = |\dot{x}(t)|\rho(t)$, то $|\dot{x}(t)| = \frac{1}{\beta}(\rho(t), x(0))^+$, где $a^+ = \max\{0, a\}$. Заметим, что отсюда $u(t) = \dot{x}(t)$ полностью определяется значением $x(0)$. При этом $x(0) = \int |\dot{x}(t)|\rho(t)\,d$, следовательно,

$$x(0) = \frac{1}{\beta}\int_T^0 (\rho(t), x(0))^+ \rho(t)\,dt. \tag{6}$$

Мы получили (6) из (5). На самом деле (6) эквивалентно (5). Пусть для некоторого вектора $x_0 \in \mathbf{R}^2$ выполнено (6). Покажем, что существуют $u$, $x$, $\psi$ такие, что $x_0 = x(0)$, и удовлетворяющие (4), (5).

Положим $|\dot{x}(t)| = \frac{1}{\beta}(\rho(t), x_0)^+$, $\dot{x}(t) = \frac{1}{\beta}(\rho, x_0)^+\rho$,

$$\varphi(t) = (\rho(t), x_0)^+\rho(t) - x_0.$$

Из (6) следует, что $\int \dot{x}(t)\,dt = x_0$, т. е. $x(0) = x_0$. Уравнение (5) выполнено автоматически. Проверим (4):

$$(\varphi(t), \dot{x}(t)) = (\rho, x_0)^+(\rho, \rho)\frac{1}{\beta}(\rho, x_0)^+ - (\rho, x_0)\frac{1}{\beta}(\rho, x_0)^+ = 0.$$

Если $\dot{x}(t) \neq 0$, то $(\varphi(t), \rho(t)) = \frac{1}{|\dot{x}(t)|}(\varphi(t), \dot{x}(t)) = 0$. Если $\dot{x}(t) = 0$, то $(\rho(t), x_0) \leqslant 0$. В этом случае $\varphi(t) =$

$= -x_0$, поэтому $(\varphi(t), \rho(t)) \geqslant 0$. Итак, (4) выполняется. Эквивалентность условий (5) и (6) доказана.

Обозначим $J^0(u) = J(u) - \beta I(u) = -|x(0)|^2$. Найдем теперь $\min J^0$ на пересечении $D_T$ единичного шара пространства $L_2[T, 0]$ с конусом $\mathcal{K}_T$. Если $\|u\| = 1$, то при выполнении (6) по лемме 1 $J^0(u) = -\beta$. С другой стороны,

$$-J^0(u) = (x(0), x(0)) = \frac{1}{\beta}\int(\rho^+, x(0))^2\,dt =$$
$$= \frac{|x(0)|^2}{\beta}\int(\rho^+, \theta)^2\,dt = \int(\rho^+, \theta)^2\,dt,$$

где

$$\theta = \frac{x(0)}{|x(0)|}.$$

Обозначив $\alpha(t)$ угол между $x(0)$ и $\rho(t)$, получим

$$-J^0(u) = \beta = \int_T^0 [\cos^+\alpha(t)]^2\,dt. \tag{7}$$

ЛЕММА 4.

$$\min_{D_T} J^0 = -\max_{\substack{v\in R^2\\ v\neq 0}} \int_T^0 [\cos^+\alpha_v(t)]^2\,dt, \tag{8}$$

*где $\alpha_v(t)$ — угол между векторами $v$ и $\rho(t)$.*

Доказательство. Если для некоторого $v \neq 0$ $\int[\cos^+\alpha_v(t))]^2dt = \gamma > 0$, то существует $u \in D_T$ (не обязательно стационарное), для которого $-J^0(u) \geqslant \gamma$. Действительно, положим $|u(t)| = \gamma^{-1/2}\cos^+\alpha_v(t)$. Очевидно, $\|u\| = 1$. Разложим вектор $x(0)$, соответствующий функции $u$, на два направления — параллельное $v$ и ортогональное $v$: $x(0) = x_v + x_\perp$. Тогда $-J^0(u) = |x_v|^2 + |x_\perp|^2 \geqslant |x_v|^2 = (\int|u(t)| \cos\alpha_v(t)\,dt)^2 = \gamma$. С другой стороны, если на $D_T$ $\min J^0 = -\beta$, то любая точка этого минимума $u_0$ является также точкой минимума функционала $J = J^0 + \beta I$ на всем конусе $\mathcal{K}_T$, следовательно, $u_0$ удовлетворяет уравнению Эйлера — Якоби для функционала $J$, т. е. для соответствующего значения $x(0)$ выполнено (6), а следовательно, и (7). Лемма доказана.

Применим равенство (8) к отрезку $[-\pi, 0]$. Если $v = (\cos z, \sin z)$, то $\cos^+\alpha_v(t) = -\chi_{[-\pi, 0]}(t + z)\sin(t + z)$. Очевидно, максимум в формуле (8) достигается только при

$z = 0$, $v = (1, 0)$, т. е.

$$\min_{D_{-\pi}} J^0 = -\beta_{-\pi} = -\int_{-\pi}^{0} \sin^2 t\, dt,$$

причем существует лишь единственная точка минимума $J^0$ на $D_{-\pi}$. Она соответствует значению $x(0) = \sqrt{\beta_{-\pi}} \cdot (1,0)$. Теперь зафиксируем $\beta = \beta_{-\pi}$. Тогда $J$ примет вид

$$J(u) = -|x(0)|^2 + \beta_{-\pi} I(u). \tag{9}$$

Так как на $D_{-\pi}$ $\min J^0 = -\beta_{-\pi}$, то $J = J^0 + \beta_{-\pi} I \geqslant 0$ на $\mathscr{K}_{-\pi}$, причем на отрезке $[-\pi, 0]$ существует единственное нетривиальное решение уравнения Эйлера — Якоби $u_{-\pi}(t) = \beta_{-\pi}^{-1/2} \sin t\rho(t)$ (в противном случае $J^0$ имел бы более одной точки минимума на $D_{-\pi}$), которому соответствует $x(0) = \sqrt{\beta_{-\pi}} \cdot (1, 0)$. Так как этот вектор $x(0) \in -K^*(t)$ для всех $t \leqslant -\pi$, то из уравнения (5) видно, что $u_{-\pi}$ является решением уравнения Эйлера — Якоби на любом отрезке $[T, 0]$ для $T \leqslant -\pi$. Таким образом, мы нашли один предфокальный полуинтервал, равный $(-\infty, -\pi]$. Далее мы увидим, что других предфокальных полуинтервалов и отрезков нет. Если $T > -\pi$, то по формуле (8)

$$\min_{D_T} J^0 = -\int_{(T-\pi)/2}^{-(T+\pi)/2} \sin^2 t\, dt > \\ > -\int_{-\pi}^{0} \sin^2 t\, dt = \min_{D_{-\pi}} J^0, \tag{10}$$

следовательно, на $[T, 0]$ уравнение Эйлера — Якоби функционала $J$ не имеет нетривиального решения. (В противном случае для некоторой $u \in D_T$ $J^0(u) = -\beta_{-\pi}$, что противоречит последнему неравенству.)

Таким образом, $t_0 = -\pi$ есть ближняя фокальная точка функционала $J$. Пусть $T < -\pi$. Если $v = (\cos z, \sin z)$, где $0 < z < \pi/2$, то

$$\cos^+ \alpha_v(t) = \begin{cases} \sin(t+z)\,\chi_{[-\pi,\,0]}(t+z), & -\pi \leqslant t \leqslant 0, \\ \sin z, & t < -\pi. \end{cases}$$

Очевидно, существует $z$, для которого $\int_T^0 [\cos^+\alpha_v(t)]^2\, dt >$

$> \beta_{-\pi}$, т. е. $\min\limits_{D_T} J^0 < \min\limits_{D_{-\pi}} J^0$ для $T < -\pi$, и следовательно, на $D_T$ $\min J < 0$. Отсюда и из (10) вытекает, что стол состоит из одной точки $t_1 = t_0 = -\pi$.

Теперь найдем все предфокальные отрезки и полуинтервалы. Для этого надо найти все решения уравнения Эйлера — Якоби для $J$ или эквивалентного ему уравнения (6). Пусть $T < -\pi$. Предварительно отметим, что есть, по крайней мере, два вектора $x_0$, удовлетворяющих (6) (возможно, с $\beta \neq \beta_{-\pi}$). Один из них уже был найден выше: $x_0 = \sqrt{\beta_{-\pi}}\cdot(1, 0)$, а второй соответствует точке минимума $u_T$ функционала $J^0$ на $D_T$ (как раз для него $\beta = -\min\limits_{D_T} J^0 > \beta_{-\pi}$).

Пусть $x_0 = |x_0|(\cos z, \sin z)$, где $-\pi/2 \leqslant z \leqslant \pi/2$ (очевидно, что во втором и третьем квадрантах $x_0$ не может быть). Из формулы, задающей $K(t)$, видно, что при $z < 0$ $x_0$ не может удовлетворять (6).

Пусть $z \geqslant 0$. Если $x_0$ стационарно, то согласно (6) проекция вектора $\int_T^0 (\rho, x_0)^+ \rho\, dt$ на ортогональное к $x_0$ направление должна равняться нулю, поэтому $\int_0^z \sin t \cdot \cos t\, dt = b \sin z \cos z$, где $b = -\pi - T > 0$, т. е. $\frac{1}{2}\sin^2 z = b \sin z \cos z$. Это уравнение имеет два корня: $z_1 = 0$, $z_2 = \operatorname{arctg} 2b$. При $z = 0$ получаем уже известное решение $u_{-\pi}$, следовательно, при $z = \operatorname{arctg} 2b$ должен получаться вектор $x_0$, соответствующий точке минимума $u_T$ функционала $J^0$ на $D_T$. Но, как уже было замечено, этот вектор $x_0$ удовлетворяет уравнению (6) с $\beta > \beta_{-\pi}$, тогда как уравнение Эйлера — Якоби функционала $J$ эквивалентно (6) с $\beta = \beta_{-\pi}$, поскольку $J$ имеет вид (9).

Итак, для $J$ имеется единственное нетривиальное решение уравнения Эйлера — Якоби $u_{-\pi}$ и единственный предфокальный полуинтервал $(-\infty, -\pi]$. Поэтому $\tau_1 = -\infty$ и фокальный полуинтервал $(-\infty, -\pi]$ не совпадает со столом, состоящим из одной точки $-\pi$.

В заключение автор благодарит А. А. Милютина за помощь в работе и написании этой заметки.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
31.X.1975

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Задачи на экстремум при наличии ограничений, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 5, № 3 (1965), 395—452.

[2] Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

[3] Блисс Дж., Лекции по вариационному исчислению, М., ИЛ, 1950.

[4] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач, М., «Наука», 1974.

[5] Hazard K., Index theorems for the problem of Bolza in calculus of variations, «Contributions to the calculus of variations, 1938—1941», The University of Chicago Press, 1942.

[6] Hestenes M. R., Application of the theory of quadratic forms in Hilbert spaces to the calculus of variations, Pacific J. of Math., 1, № 4 (1951), 525—580.