Упражнения

1. Пусть $U=\{u(t)=(u^1(t),\ldots,u^r(t))\in L_2^r[t_0,T]$: $u^i(t)\geqslant 0$ почти всюду на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant T$, $i=1,\ldots,r\}$. Найти проекцию любой точки из $L_2^r[t_0,T]$ на множество U. Описать метод проекции градиента для задачи (3)–(5) с этим множеством.

2. Описать метод сопряженных градиентов для задачи (3)–(5) при $U=L_2^r[t_0,T]$.

3. Описать градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента, сопряженных направлений для задач минимизации функций

$$J(u)=|x(T,u)-b|^2+\alpha\int_{t_0}^{T}|u(t)|^2dt,\quad \alpha=\text{const}>0,$$

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}|x(t,u)-b(t)|^2dt,\quad b(t)\in L_2^n[t_0,T],$$

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}|x(t,u)-b(t)|^2dt+\alpha\int_{t_0}^{T}|u(t)|^2dt,\quad \alpha=\text{const}>0$$

при условиях (4), (5). Исследовать сходимость методов.

4. Описать метод возможных направлений для задачи (41) в предположении, что $U=H$ — гильбертово пространство, взяв во вспомогательной задаче (42) поиска возможного направления убывания условие нормировки $\|e\|=1$.

5. Описать градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента, сопряженных направлений для задач минимизации функций из примера 3.4. Рассмотреть случаи, когда $U=H$, или U — шар или гиперплоскость в H.

6. Сформулировать и доказать теоремы сходимости методов барьерных, нагруженных функций из § § 5.17–5.18 для множества (52) из гильбертова пространства.

§ 5. Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функцию

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}f^0(x(t),u(t),t)+\Phi(x(T))\tag{1}$$

при условиях

$$\dot x(t)=f(x(t),u(t),t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T;\quad x(t_0)=x_0,\tag{2}$$

$$u=u(t)\in U\subseteq L_2^r[t_0,T],\tag{3}$$

где $x=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$, $u=(u^1,\ldots,u^r)$, функции $f^0(x,u,t)$, $f(x,u,t)=(f^1(x,u,t),\ldots,f^n(x,u,t))$, $\Phi(x)$ переменных $(x,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,T]$ считаются известными, U — заданное множество из $L_2^r[t_0,T]$, моменты времени t_0, T и начальная точка x_0 заданы.

Определение решения (или траектории) $x=x(t)=x(t,u)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, задачи Коши (2), соответствующего управлению $u=u(t)\in L_2^r[t_0,T]$, а также условия его существования обсуждались в гл. 6 (см. теорему 6.1.1); там же был доказан принцип максимума для задачи (1)–(3) (см. теорему 6.2.1, а также равенства (6.2.25), (6.2.26), § 6.3).

1. Ниже будут сформулированы достаточные условия дифференцируемости функции (1) на $L_2^r[t_0,T]$, и получена формула для ее градиента. Примем обозначения

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix} f^1_{x^1}, & \ldots, & f^1_{x^n}\\ f^n_{x^1}, & \ldots, & f^n_{x^n}\end{pmatrix}=(f^1_x,\ldots,f^n_x)^T,$$

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} f^1_{u^1}, & \ldots, & f^1_{u^r} \\ f^n_{u^1}, & \ldots, & f^n_{u^r} \end{pmatrix} = (f^1_u, \ldots, f^n_u)^T,$$

$$f^i_x = \begin{pmatrix} f^i_{x^1} \\ \vdots \\ f^i_{x^n} \end{pmatrix}, \quad f^i_u = \begin{pmatrix} f^i_{u^1} \\ \vdots \\ f^i_{u^r} \end{pmatrix}, \quad i = 0, \ldots, n; \quad \Phi_x = \begin{pmatrix} \Phi_{x^1} \\ \vdots \\ \Phi_{x^n} \end{pmatrix}.$$

Здесь $f^i_{x^j} = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ — частная производная функции f^i по переменной x^j, T — знак транспонирования матрицы. Напомним, что *нормой матрицы* $A = \{a_{ij}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m\}$ порядка $n \times m$ называется число $\|A\| = \sup |Az|_{E^n}$, где верхняя грань берется по единичному шару $|z|_{E^m} \leqslant 1$. Справедливо неравенство $|Az|_{E^n} \leqslant \|A\| |z|_{E^m}$ при всех $z \in E^m$. Введем знакомую нам по гл. 6 функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle f(x, u, t), \psi \rangle, \quad (\psi)^T = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n). \tag{4}$$

Обозначим

$$H_x = \begin{pmatrix} H_{x^1} \\ \vdots \\ H_{x^n} \end{pmatrix}, \quad H_u = \begin{pmatrix} H_{u^1} \\ \vdots \\ H_{u^r} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть функции f^0, f, Φ непрерывны по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным x, u при $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$ и, кроме того, выполнены следующие условия:*

$$|f(x + \Delta x, u + h, t) - f(x, u, t)| \leqslant L(|\Delta x| + |h|), \tag{5}$$

$$\|f_x(x + \Delta x, u + h, t) - f_x(x, u, t)\| \leqslant L(|\Delta x| + |h|), \tag{6}$$

$$|f^0_x(x + \Delta x, u + h, t) - f^0_x(x, u, t)| \leqslant L(|\Delta x| + |h|), \tag{7}$$

$$\|f_u(x + \Delta x, u + h, t) - f_u(x, u, t)\| \leqslant L(|\Delta x| + |h|), \tag{8}$$

$$|f^0_u(x + \Delta x, u + h, t) - f^0_u(x, u, t)| \leqslant L(|\Delta x| + |h|), \tag{9}$$

$$|\Phi_x(x + \Delta x) - \Phi_x(x)| \leqslant L|\Delta x| \tag{10}$$

при всех $(x + \Delta x, u + h, t), (x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$, где $L = \mathrm{const} \geqslant 0$.

Тогда функция (1) *при условиях* (2) *непрерывна и дифференцируема по $u = u(t)$ в норме $L^r_2[t_0, T]$ всюду на $L^r_2[t_0, T]$, причем ее градиент $J'(u) = J'(u, t) \in L^r_2[t_0, T]$ в точке $u = u(t)$ представим в виде*

$$J'(u) = -H_u(x, u, t, \psi)|_{x = x(t, u),\, u = u(t),\, \psi = \psi(t, u)} =$$
$$= f^0_u(x(t, u), u(t), t) - (f_u(x(t, u), u(t), t))^T \psi(t, u), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{11}$$

где $x(t) = x(t, u)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, — решение задачи (2), *соответствующее управлению $u = u(t)$, а $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, является решением сопряженной системы*

$$\dot\psi(t) = -H_x(x, u, t, \psi(t))|_{x = x(t, u),\, u = u(t)} =$$
$$= f^0_x(x(t, u), u(t), t) - (f_x(x(t, u), u(t), t))^T \psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

при начальных условиях

$$\psi(T) = -\Phi_x(x)|_{x = x(T, u)}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $u = u(t)$, $u + h = u(t) + h(t) \in L_2^r[t_0, T]$, а $x(t, u)$, $x(t, u+h)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, — соответствующие этим управлениям решения задачи (2). Из условия теоремы имеем

$$|f(x, u, t)| \leqslant |f(x, u, t) - f(0,0,t)| + |f(0,0,t)| \leqslant$$
$$\leqslant L(|x| + |u|) + \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |f(0,0,t)|, \quad (x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]. \quad (14)$$

Из (14) и из теоремы 6.1.1 и замечания 2 к ней следует существование и единственность решения задачи (2) при всех $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$. Приращение $\Delta x(t) = x(t, u+h) - x(t, u)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} \Delta \dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t) - f(x(t), u(t), t), \\ t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad \Delta x(t_0) = 0. \end{gathered} \quad (15)$$

Из (15) и из теоремы 6.3.1 следует оценка

$$|\Delta x(t)| \leqslant C_1 \int_{t_0}^{T} |h(t)| dt \leqslant C_1 (T - t_0)^{1/2} \|h\|_{L_2}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad (16)$$

здесь и ниже через $C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать константы, не зависящие от выбора $u = u(t) \in L_2^r[t_0, T]$.

Покажем, что приращение функции (1) представимо в виде:

$$\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = -\int_{t_0}^{T} H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)) dt + R, \quad (17)$$

где $R = R_1 + R_2 + R_3$,

$$R_1 = \langle \Phi_x(x(T) + \theta_1 \Delta x(T)) - \Phi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$
$$R_2 = -\int_{t_0}^{T} \langle H_x(x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_2 h, t, \psi) - H_x(x, u, t, \psi), \Delta x \rangle dt,$$
$$R_3 = -\int_{t_0}^{T} \langle H_u(x + \theta_2 \Delta x, u + \theta_2 h, t, \psi) - H_u(x, u, t, \psi), h(t) \rangle dt, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Так как $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \langle \Phi_x(x + \theta_1 \Delta x), 0 \leqslant \theta_1 < 1$, то

$$\begin{gathered} \Delta J(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t) - f^0(x(t), u(t), t)] dt + \\ + \langle \Phi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle + R_1, \end{gathered} \quad (18)$$

Преобразуем второе слагаемое правой части (18). С учетом соотношений (12), (13), (15) имеем

$$\langle \Phi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle = -\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle = -\int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt} \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle dt -$$
$$- \langle \psi(t_0), \Delta x(t_0) \rangle = -\int_{t_0}^{T} [\langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle + \langle \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \rangle] dt =$$
$$= -\int_{t_0}^{T} \langle \psi(t), f(x(t) + \Delta x(t), u(t) + h(t), t) -$$
$$- f(x(t), u(t), t) \rangle dt + \int_{t_0}^{T} \langle H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t) \rangle dt.$$

Подставим полученное выражение в (18), откуда с помощью функции (4) будем иметь

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{T}[H(x(t)+\Delta x(t), u(t)+h(t), t, \psi(t)) -$$
$$- H(x(t), u(t), t, \psi(t))]dt + \int_{t_0}^{T}\langle H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t)\rangle dt + R_1.$$

Отсюда, пользуясь формулой конечных приращений

$$H(x+\Delta x, u+h, t, \psi) - H(x, u, t, \psi) = \langle H_x(x+\theta_2\Delta x, u+\theta_2 h, t, \psi), \Delta x\rangle +$$
$$+ \langle H_u(x+\theta_2\Delta x, u+\theta_2 h, t, \psi), h\rangle, \quad 0<\theta_2<1,$$

приходим к требуемому представлению (17) приращения функции (1). Так как $H_x(x, u, t, \psi) = -f_x^0(x, u, t) + (f_x(x, u, t))^{\mathrm{T}}\psi$, $H_u(x, u, t, \psi) = -f_u^0(x, u, t) + (f_u(x, u, t))^{\mathrm{T}}\psi$, то с учетом условий (6)–(10) и оценки (16) для величин R_1, R_2, R_3 из (17) имеем

$$|R_1| \leqslant L|\Delta x(T)|^2 \leqslant C_2\|h\|^2_{L_2^r},$$

$$|R_2| \leqslant (1+\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|\psi(t, u)|)L\int_{t_0}^{T}(|\Delta x(t)|^2+|\Delta x(t)||h(t)|)dt \leqslant C_3\|h\|^2_{L_2^r},$$

$$|R_3| \leqslant \Big(1+\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|\psi(t, u)|\Big)L\int_{t_0}^{T}(|\Delta x(t)||h(t)|+|h(t)|^2)dt \leqslant C_4\|h\|^2_{L_2}.$$

Суммируя оценки для R_1, R_2, R_3, получим

$$|R| \leqslant C_5\int_{t_0}^{T}|h(t)|^2dt = C_5\|h\|^2_{L_2}. \qquad (19)$$

Из формулы (17) и оценки (19) следует дифференцируемость функции (1) и формула (11) для градиента. Теорема 1 доказана. □

Таким образом, для вычисления градиента функции (1) при условиях (2) нужно последовательно решить две задачи Коши: сначала из задачи (2) нужно определить $x(t, u)$, затем из (12), (13) — $\psi(t, u)$ и, наконец, по формуле (11) найти искомый градиент. При решении упомянутых задач Коши (2) и (12), (13) можно использовать различные приближенные методы [74; 89; 482; 630; 634].

Заметим, что дифференцируемость функции (1) в теореме 1 доказана при довольно жестких ограничениях на исходные данные задачи (1)–(3). На самом деле, формулу (17) с остаточным членом R, $R/\|h\|_{L_2}\to 0$, при $\|h\|_{L_2}\to 0$, можно получить при несколько меньших требованиях. Например, вместо условия (10) можно требовать $\Phi(x)\in C^1(E^n)$, а вместо условий (6)–(9) для производных f_x^i, f_u^i, $i=0,\ldots,n$, можно ограничиться условиями типа

$$|f_x^i(x+\Delta x, u+h, t) - f_x^i(x, u, t)| \leqslant L|h|^\gamma + o(|\Delta x|),$$

где $0<\gamma\leqslant 1$, $o(\alpha)/\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Заметим, что формулу градиента функции (1) иногда записывают в несколько ином виде: вместо функции (4) берут

$$H(x, u, t, \psi) = f^0(x, u, t) + \langle f(x, u, t), \psi\rangle, \qquad (20)$$

сопряженную задачу (12), (13) заменяют на задачу

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(x, u, t, \psi(t))|_{x=x(t,u),\, u=u(t)}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{21}$$

$$\psi(T) = \Phi_x(x)|_{x=x(T,u)}, \tag{22}$$

и тогда вместо формулы (11) будем иметь

$$J'(u) = H_u(x, u, t, \psi)|_{x=x(t,u),\, u=u(t),\, \psi=\psi(t,u)}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что функции H и $\psi(t, u)$ и, следовательно, производная H_u из (4), (11)–(13) и (20)–(23) отличаются друг от друга лишь знаком.

Пользуясь формулами (20)–(23), найдем градиент в задаче (4.3)–(4.5), являющейся частным случаем задачи (1)–(3) при $f^0=0$, $f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u + f(t)$, $\varphi(x) = |x-b|^2$. Тогда $H(x, u, t, \psi) = \langle \psi, A(t)x + B(t)u + f(t)\rangle = \langle A^T(t)\psi, x\rangle + \langle B^T(t)\psi, u\rangle + \langle \psi, f(t)\rangle$; сопряженная задача имеет вид

$$\dot{\psi} = -H_x = -A^T(t)\psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad \psi(T) = 2(x(T, u) - b),$$

градиент равен $J'(u) = B^T(t)\psi(t,u)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (ср. с формулами (4.6), (4.7)).

Для иллюстрации теоремы 1 приведем пример задачи оптимального управления для нелинейной системы.

Пример 1. Рассмотрим задачу об оптимальном успокоении математического маятника (см. примеры 6.1.1 и 6.2.6):

$$J(u) = (x^1(T))^2 + (x^2(T))^2 = |x(T)|^2 \to \inf; \tag{24}$$

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = -\sin x^1(t) - \beta x^2(t) + u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{25}$$

$$x(0) = (x^1(0), x^2(0)) = x_0 = (x_0^1, x_0^2); \tag{26}$$

$$u = u(t) \in U \subseteq L_2^r[t_0, T]; \tag{27}$$

здесь момент $T>0$, постоянная β, начальная точка x_0 считаются известными. Задача (24)–(27) является частным случаем задачи (1)–(3), когда $f^0=0$, $\Phi(x) = \Phi(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$, $f^1(x, u, t) = x^2$, $f^2(x, u, t) = -\sin x^1 - \beta x^2 + u$, $t_0=0$, $n=2$, $r=1$. Все условия теоремы 1 для задачи (24)–(27) выполнены. Для вычисления градиента функции (24) составим функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(x, u, \psi) = \psi_1 x^2 + \psi_2(-\sin x^1 - \beta x^2 + u).$$

Поскольку $H_{x^1} = -\psi_2 \cos x^1$, $H_{x^2} = \psi_1 - \beta\psi_2$, $\Phi_{x^1} = 2x^1$, $\Phi_{x^2} = 2x^2$, то сопряженная задача (21), (22) запишется в виде

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \cos x^1(t, u), \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \beta\psi_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\psi_1(T) = 2x^1(T, u), \quad \psi_2(T) = 2x^2(T, u).$$

Так как $H_u = \psi_2$, то согласно формуле (23) градиент равен

$$J'(u) = \psi_2(t, u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

2. Имея формулу градиента, нетрудно расписать градиентный метод, методы проекции градиента, условного градиента — это делается так же, как было сделано в § 4 для задачи (4.3)–(4.5). Заметим, что в задаче (1)–(3) в общем случае, конечно, нельзя ожидать, что функция $f(\alpha) = J(u + \alpha h)$ переменной α будет квадратным трехчленом, значит параметр α_k из условий типа (4.9), (4.32) будет определяться не так просто, как в задаче (4.3)–(4.5).

Во многих теоремах о сходимости методов минимизации требуется, чтобы минимизируемая функция принадлежала классу $C^{1,1}(U)$. Приведем достаточные условия принадлежности $C^{1,1}(U)$ для функции (1) при условиях (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и* $U=\{u=u(t)\in L_2^r[t_0,T]\colon u(t)\in V(t)$ *почти всюду на* $[t_0,T]\}$, *где* $V(t)$ — *заданные множества из* E^r, *причем*

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}\ \sup_{u\in V(t)}|u|\leqslant R<\infty.$$

Тогда

$$\|J'(u)-J'(v)\|_{L_2}\leqslant L_1\|u-v\|_{L_2},\quad L_1=\text{const}\geqslant 0, \tag{28}$$

при любых $u,v\in U$.

Доказательство. Возьмем произвольные $u=u(t)$, $v=v(t)\in U$. Из оценки (16) для $\Delta x(t)=x(t,u)-x(t,v)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, следует

$$\|\Delta x(t)\|_C=\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|\Delta x(t)|\leqslant C_6\|u-v\|_{L_2}. \tag{29}$$

Далее, с учетом неравенства (14) имеем

$$|x(t,u)|=\left|x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\tau,u),u(\tau),\tau)d\tau\right|\leqslant L\int_{t_0}^{t}|x(\tau,u)|d\tau+L\int_{t_0}^{T}|u(\tau)|d\tau+$$
$$+|x_0|+\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}|f(0,0,t)|(T-t_0)\leqslant L\int_{t_0}^{t}|x(\tau,u)|d\tau+L(T-t_0)R+C_7.$$

Отсюда с помощью леммы 6.3.1 получим

$$\sup_{u\in U}\|x(t,u)\|_C\leqslant e^{L(T-t_0)}(C_7+L(T-t_0)R)=C_8. \tag{30}$$

Оценим $|\psi(t,u)|$. С этой целью заметим, что $(x(t,u),u(t),t)\in G=\{(x,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,T]\colon |x|\leqslant C_8,\ |u|\leqslant R,\ t_0\leqslant t\leqslant T\}$ при всех $u\in U$. Так как функции Φ_x, f_x^0, f_x, f_u непрерывны по совокупности аргументов на замкнутом ограниченном множестве G, то

$$\max_G\max\{|\Phi_x|,|f_x^0|,\|f_x\|,\|f_u\|\}=C_9<\infty. \tag{31}$$

Отсюда и из (12), (13) имеем

$$|\psi(t,u)|=\Bigg|\Phi_x(x(T,u))+\int_t^T[f_x^0(x(\tau,u),u(\tau),\tau)-$$
$$-f_x(x(\tau,u),u(\tau),(\tau))^T\psi(\tau,u)]d\tau\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant C_9+C_9(T-t_0)+C_9\int_t^T|\psi(\tau,u)|d\tau,\quad t_0\leqslant t\leqslant T.$$

Тогда из леммы 6.3.1 следует

$$\sup_{u\in U}\|\psi(t,u)\|_C\leqslant C_9(1+T-t_0)e^{C_9(T-t_0)}=C_{10}. \tag{32}$$

Далее, оценим $\Delta\psi(t)=\psi(t,u)-\psi(t,v)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$. Из (12), (13), оценок (29)–(32) и условий (6), (7), (10) имеем

$$|\Delta\psi(t)|\leqslant|\Phi_x(x(T,u))-\Phi_x(x(T,v))|+$$

$$+\int_t^T |f_x^0(x(\tau,u),u(\tau),\tau)-f_x^0(x(\tau,v),v(\tau),\tau)|d\tau+$$
$$+\int_t^T(|\psi(\tau,u)-\psi(\tau,v)|\|f_x(x(\tau,u),u(\tau),\tau)\|+$$
$$+|\psi(\tau,v)|\|f_x(x(\tau,u),u(\tau),\tau)-f_x(x(\tau,v),v(\tau),\tau)\|)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant L|\Delta x(T)|+L\int_{t_0}^T(|\Delta x(t)|+|u(t)-v(t)|)dt+$$
$$+C_9\int_t^T|\psi(\tau,u)-\psi(\tau,v)|d\tau+C_{10}L\int_{t_0}^T(|\Delta x(t)|+|u(t)-v(t)|)dt\leqslant$$
$$\leqslant C_9\int_t^T|\psi(\tau,u)-\psi(\tau,v)|d\tau+C_{11}\|u-v\|_{L_2},\quad t_0\leqslant t\leqslant T.$$

Отсюда и из леммы 6.3.1 следует

$$\|\psi(t,u)-\psi(t,v)\|_C\leqslant C_{11}E^{C_9(T-t_0)}\|u-v\|_{L_2}=C_{12}\|u-v\|_{L_2}. \tag{33}$$

Наконец, из формулы (11), оценок (29)–(33) и условий (8), (9) получим требуемое неравенство (28):

$$\|J'(u)-J'(v)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^T|H_u(x(t,u),u(t),t,\psi(t,u))-\right.$$
$$\left.-H_u(x(t,v),v(t),t,\psi(t,v))|^2dt\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant L(1+\|\psi(t,u)\|_C)\left(\int_{t_0}^T(|\Delta x(t)|+|u(t)-v(t)|)^2dt\right)^{1/2}+$$
$$+C_9\left(\int_{t_0}^T|\Delta\psi(t)|^2dt\right)^{1/2}\leqslant L_1\|u-v\|_{L_2},\quad u,v\in U.$$

Теорема 2 доказана. □

3. Отдельно остановимся на одном частном случае задачи (1)–(3), когда система (2) линейна по x, u, т. е.

$$\dot x(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,\quad x(t_0)=x_0, \tag{34}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ — заданные матрицы порядка $n\times n$, $n\times r$, $n\times 1$ соответственно. Для задачи (1)–(3), (34) принадлежность классу $C^{1,1}(U)$ может быть установлена при меньших требованиях, чем в теореме 2, и, кроме того, удается сформулировать условия, гарантирующие выпуклость и сильную выпуклость функции (1).

Теорема 3. *Пусть функции $f^0(x,u,t)$, $\Phi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и матрицы $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ кусочно непрерывны на отрезке $[t_0,T]$. Тогда функция (1) при условиях (34) принадлежит классу $C^{1,1}$ на всем пространстве $L_2^r[t_0,T]$, причем ее градиент $J'(u)$ в точке $u=u(t)\in L_2^r[t_0,T]$ вычисляется по формуле*

$$J'(u)=f_u^0(x(t,u),u(t),t)-B^T(t)\psi(t,u),\quad t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{35}$$

где $x(t,u)$ — решение задачи (34), $\psi(t,u)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}\dot\psi(t)=f_x^0(x(t,u),u(t),t)-A^T(t)\psi(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T;\\ \psi(T)=-\Phi_x(x(T,u)).\end{gathered} \tag{36}$$

Доказательство. Заметим, что здесь все условия (5)–(10) заведомо выполнены. Кроме того, для задачи (34) справедливы теорема 6.1.2, оценка (6.3.9) (см. также оценку (4.19)). Поэтому, рассуждая также, как при доказательстве теоремы 1, приходим к соотношениям (35), (36). Для $\Delta\psi(t)=\psi(t,u)-\psi(t,v)$ с учетом условий (7), (10), (36) будем иметь

$$|\Delta\psi(t)|\leqslant A_{\max}\int_t^T|\Delta\psi(\tau)|d\tau+L|\Delta x(T)|+L\int_{t_0}^T(|\Delta x(t)|+|u(t)-v(t)|)dt.$$

Отсюда и из леммы 6.3.1 следует оценка (33). Наконец, из формулы (35) и условия (9) с учетом оценок (16), (33) получим

$$\|J'(u)-J'(v)\|_{L_2}\leqslant\left(\int_{t_0}^T|f_u^0(x(t,u),u(t),t)-f_u^0(x(t,v),v(t),t)|^2dt\right)^{1/2}+$$
$$+B_{\max}\left(\int_{t_0}^T|\psi(t,u)-\psi(t,v)|^2dt\right)^{1/2}\leqslant L_1\|u-v\|_{L_2}. \quad \square$$

Укажем достаточные условия выпуклости и сильной выпуклости функции (1) при условиях (34), кратко обсудим условия оптимальности в задаче (1)–(3), (34).

Теорема 4. *Пусть матрицы $A(t), B(t), f(t)$ кусочно непрерывны на отрезке $[t_0,T]$, функция $\Phi(x)$ выпукла на E^n, а $f^0(x,u,t)$ выпукла по совокупности переменных (x,u), т. е.*

$$f^0(\alpha x+(1-\alpha)y,\alpha u+(1-\alpha)v,t)\leqslant\alpha f^0(x,u,t)+(1-\alpha)f^0(y,v,t) \quad (37)$$

при всех $(x,u,t),(y,v,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,T]$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, и, кроме того, пусть $f^0(x(t),u(t),t)\in L_1[t_0,T]$ при каждой непрерывной функции $x(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $u(t)\in L_2^r[t_0,T]$. Тогда функция (1) при условиях (34) будет определена и выпукла на $L_2^r[t_0,T]$.

Если при этом функции $f^0(x,u,t)$, $\Phi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то функция (1) при условиях (34) достигает своей нижней грани на всяком выпуклом замкнутом ограниченном множестве $U\subset L_2^r[t_0,T]$, причем для оптимальности управления $u_*=u_*(t)\in U$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\int_{t_0}^T\langle f_u^0(x(t,u_*),u_*(t),t)-B^T(t)\psi(t,u_*),u(t)-u_*(t)\rangle dt\geqslant0 \quad (38)$$

при всех $u(t)\in U$. Если u_* — внутренняя точка множества U, то условие (38) равносильно условию

$$f_u^0(x(t,u_*),u_*(t),t)-B^T(t)\psi(t,u_*)=0,\quad t_0\leqslant t\leqslant T. \quad (39)$$

Если же вместо (37) справедливо неравенство

$$f^0(\alpha x+(1-\alpha)y,\alpha u+(1-\alpha)v,t)\leqslant\alpha f^0(x,u,t)+(1-\alpha)f^0(y,v,t)-$$
$$-\alpha(1-\alpha)\frac{\varkappa}{2}|u-v|^2,\quad \varkappa=\text{const}>0 \quad (40)$$

при всех α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $(x,u,t),(y,v,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,T]$, то функция (1) при условиях (34) является сильно выпуклой на $L_2^r[t_0,T]$ и будет достигать своей нижней грани на любом выпуклом замкнутом множестве $U\subseteq L_2^r[t_0,T]$, причем оптимальное управление единственно.

Доказательство. Нетрудно видеть, что решения задачи (34) обладают свойством

$$x(t, \alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha x(t, u) + (1-\alpha)x(t, v), \quad \forall t \in [t_0, T],$$

при всех $u, v \in L_2^r[t_0, T]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ (ср. с (2.7)). Тогда выпуклость [сильная выпуклость] функции (1) при условиях (34) является простым следствием выпуклости $\Phi(x)$ и условия (37) [условия (40)]. Остальные утверждения теоремы вытекают из теорем 2.8, 2.10, 3.3. □

Пример 2. Пусть требуется минимизировать функцию

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (x^2(t) + u^2(t))dt$$

при условиях $\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $x(0) = x_0$; $u = u(t) \in L_2[0, T] = U$, где a, x_0, $T > 0$ — заданные числа.

Эта задача является частным случаем задачи (1)–(3), (34) при $f^0 = (x^2 + u^2)/2$, $\Phi(x) \equiv 0$, $f = -ax + u$, $n = r = 1$ и к ней применимы теоремы 1–4. Поскольку здесь функция $f^0(x, u)$ удовлетворяет условию (40) при $\varkappa = 1/2$, то функция $J(u)$ сильно выпукла на $L_2[0, T]$ и достигает на $L_2[0, T]$ своей нижней грани в единственной точке $u_* = u_*(t) \in L_2[0, T]$. Поскольку

$$H(x, u, \psi) = -(x^2 + u^2)/2 + \psi(-ax + u),$$

то сопряженная задача (36) (или (12), (13)) здесь имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = a\psi(t) + x(t, u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad \psi(T) = 0,$$

а градиент согласно формуле (35) (или (11)) равен

$$J'(u) = u(t) - \psi(t, u), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Условие (39) для оптимального управления тогда приведет к равенству

$$u_*(t) = \psi(t, u_*), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Этот же результат был получен в примере 6.2.3 с помощью принципа максимума. В силу теоремы 4 последнее равенство является не только необходимым, но и достаточным для оптимальности управления $u_* = u_*(t)$.

Заметим, что, пользуясь условием (37) выпуклости функции $f^0(x, u, t)$, формулой (11) и теоремой 4.2.2, неравенство (38) можно переписать в эквивалентном виде

$$\int_{t_0}^T [H(x(t, u_*), u_*(t), t, \psi(t, u_*)) - \\ - H(x(t, u_*), u(t), t, \psi(t, u_*))]dt \geqslant 0, \quad u(t) \in U, \tag{41}$$

где

$$H(x, u, t, \psi) = -f^0(x, u, t) + \langle \psi, A(t) + B(t)u + f(t) \rangle.$$

Предлагаем читателю установить связь между принципом максимума и условием оптимальности (41) — это может быть сделано так же, как в примере 3.6 (формулы (3.30)–(3.32)).

4. Рассмотренная выше задача (1)–(3) является частным случаем задачи оптимального управления, когда правый конец траектории свободен. Более общие задачи оптимального управления, когда, например, правый конец траектории закреплен или подвижен, или имеются какие-либо другие ограничения на фазовые координаты и управление, могут быть сведены к задаче вида (1)–(3) с помощью штрафных функций (см. § 4, п. 8).

Например, если задача (1)–(3) рассматривается при дополнительном условии $x(T)=x_I$ (правый конец закреплен), то в качестве штрафной функции для этого условия можно взять

$$P_k(u)=A_k|x(T,u)-x_I|^2, \quad k=1,2,\ldots,$$

и рассмотреть задачу минимизации функции

$$\Phi_k(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t,u),u(t),t)dt+\Phi(x(T,u))+A_k|x(T,u)-x_I|^2$$

при условиях (1)–(3); здесь и ниже $\{A_k\}$ — некоторая заданная положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности. Нетрудно видеть, что если функции f^0, f, Φ удовлетворяют условиям теоремы 1, функция $\Phi_k(u)$ дифференцируема и ее градиент определяется той же формулой (11), нужно лишь условие (13) для $\psi(T,u)$ заменить на

$$\psi(T,u)=-\Phi_x(x(T,u))-2A_k(x(T,u)-x_I).$$

Если задача (1)–(3) рассматривается при дополнительных фазовых ограничениях вида

$$a_i\leqslant x^i(t,u)\leqslant b_i, \quad t_0\leqslant t\leqslant T, \quad i=1,\ldots,m, \quad m\leqslant n, \tag{42}$$

где a_i, b_i — заданные постоянные, то штрафом может служить функция

$$P_k(u)=A_k\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{T}[(\max\{x^i(t,u)-b_i;0\})^2+(\max\{a_i-x^i(t,u);0\})^2]dt.$$

Тогда задача (1)–(3), (42) сведется к решению последовательности задач минимизации функции

$$\Phi_k(u)=J(u)+P_k(u)=\int_{t_0}^{T} F_k^0(x(t,u),u(t),t)dt+\Phi(x(T,u)), \quad k=1,2,\ldots \tag{43}$$

при условиях (2), (3), где

$$F_k^0(x,u,t)=f^0(x,u,t)+A_k\sum_{i=1}^{m}[(\max\{x^i-b_i;0\})^2+(\max\{a_i-x^i;0\})^2].$$

При каждом $k=1,2,\ldots$ задача (43) (2), (3) имеет тот же вид, что и задача (1)–(3). Заметим, что

$$F^0_{ku}=f^0_u, \quad F^0_{kx^i}(x,u,t)=f^0_{x^i}(x,u,t)+2A_k\max\{x^i-b_i;0\}-2A_k\max\{a_i-x^i;0\},$$
$$i=1,\ldots,m; \quad F^0_{kx^i}=f^0_{x^i}, \quad i=m+1,\ldots,n.$$

Отсюда ясно, что если функции f^0, f, Φ удовлетворяют условиям теоремы 1, то и для задачи (43), (2), (3) также будут выполнены условия теоремы 1, и формула градиента для функции (43) будет определяться теми же формулами (4), (11)–(13), нужно лишь в них f^0 заменить на F_k^0.

Если задача (1)–(3) рассматривается при дополнительном условии

$$g(u)=\int_{t_0}^{T} G(x(t,u),u(t),t)dt+\Phi_1(x(T,u))\leqslant 0,$$

то штрафной функцией для этого неравенства можно взять

$$P_k(u)=A_k(\max\{g(u);0\})^2.$$

Возможно использование и других штрафных функций, аналогичных приведенным в § 5.15. Комментарии к методу штрафных функций, сделанные в § 5.15, сохраняют силу и для задач оптимального управления.

Отметим, что метод штрафных функций в главе 6 был использован для доказательства принципа максимума.

Упражнения

1. Рассмотреть задачу минимизации функции

$$J(u)=\int_0^T u^2(t)dt$$

при условиях (25)–(27) и с закреплеииым правым концом траектории: $x(T)=x_I$; моменты T и точка x_I заданы. Применить метод штрафных функций для учета условия на правом конце; найти градиент штрафной функцин.

2. Доказать, что при выполнении условий теоремы 1 функция (1) при условиях (2) дифференцируема по переменной $x_0\in E^n$, и по совокупности переменных $(x_0,u)\in E^n\times L_2^r[t_0,T]$; найти градиент.

3. Рассмотреть функцию

$$J(w)=\int_{t_0}^{T} f^0(x(t,w),w,t)dt+\Phi(x(T,w))$$

при условиях $\dot{x}(t)=f(x(t),w,t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$; $x(t_0)=x_0$, $w=(w^1,\ldots,w^r)$ — управляющие параметры, не зависящие от времени. Показать, что если функции f^0,f,Φ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по x,w и $|f(x+\Delta x,w,t)-f(x,w,t)|\leqslant L|\Delta x|$ при всех $(x+\Delta x,w,t),(x,w,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,T]$, то функция $J(w)$ дифференцируема и ее градиент будет равен

$$J'(w)=\int_{t_0}^{T} H_w(x(t,w),w,t,\psi(t,w))dt,$$

где $H(x,w,t,\psi)=f^0(x,w,t)+\langle f(x,w,t),\psi\rangle$, $\psi(t,w)$ — решенне задачи

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(x(t,w),w,t,\psi(t)),\quad t_0\leqslant t\leqslant T;\quad \psi(T)=\Phi_x(x(T,w)).$$

Указание: воспользоваться техникой доказательства теоремы 1.

4. Пусть выполнены все условия теорем 3, 4 (кроме, быть может, условия (40)) и пусть $U=\{u=u(t)\in L_2^r[t_0,T]\colon u(t)\in V$ почти всюду на $[t_0,T]\}$, где V — выпуклое множество из E^r. Доказать, что тогда принцип макснмума является необходимым и достаточным условием оптимальностн в задаче (1)–(3), (34). Указание: доказать выпуклость функции $H(x,u,t,\psi)$ по u и воспользоваться неравенством (38).

5. Пусть $J(u)=\int_0^1(u^2(t)-ax^2(t))dt$, где $\dot{x}(t)=u(t)\in L_2[0,1]$, $x(0)=0$, a — постоянная. При каких значениях параметра a функция $J(u)$ будет выпуклой или сильно выпуклой на $L_2[0,T]$? Показать, что $J(u)\in C^{1,1}(L_2)$, и найти градиент.

6. Пусть функции $f^0(x,u,t),f(x,u,t),\Phi(x)$ непрерывны по $(x,u,t)\in E^n\times E^r\times[t_0,T]$, выполняется условие (5) и $|f^0(x,u+h,t)-f^0(x,u,t)|\leqslant L(|h|^2+|u||h|)$, $L=\text{const}\geqslant 0$, при всех $(x, u+h, t)$, $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$. Доказать, что тогда функция (1) при условиях (2) непрерывна на $L_2^r[t_0, T]$ в метрике этого пространства.

7. Пусть функции $f^0(x, u, t), \Phi(x)$ непрерывны по $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, T]$, $f^0(x, u, t)$ выпукла по переменной $u \in E^r$ при каждом фиксированном $(x, t) \in E^n \times [t_0, T]$. Доказать, что тогда функция (1) при условиях (34) достигает своей нижней грани на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве $U \in L_2^r[t_0, T]$. Указание: установить, что $J(u)$ слабо полунепрерывна снизу на $L_2^r[t_0, T]$.

8. Пусть выполнены все условия теоремы 4 (кроме, быть может, условия (40)), U — выпуклое замкнутое ограниченное множество из $L_2^r[t_0, T]$, функция $g(x, t)$ непрерывна по $(x, t) \in E^n \times [t_0, T]$ и выпукла по $x \in E^n$ при каждом фиксированном $t \in [t_0, T]$. Пусть существует хотя бы одна траектория $x(t, u_0)$ задачи (34), $u_0 \in U$, такая, что $g(x(t, u_0), t) \leqslant 0$ при всех $t \in [t_0, T]$. Доказать, что тогда функция (1) при условиях (34) и ограничении $g(x(t, u), t) \leqslant 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, достигает на U своей нижней грани.

9. Пусть $f^0(x, u, t) = a(x, t) + \langle b(x, t), u \rangle$, $f(x, u, t) = A(x, t) + B(x, t)u$ и пусть матрицы $A(x, t), B(x, t), b(x, t)$ — порядков $n \times 1$, $n \times r$, $n \times 1$ соответственно и функции $a(x, t), \Phi(x)$ непрерывны по $(x, t) \in E^n \times [t_0, T]$, $\|A(x, t)\| \leqslant C_0|x| + C_1$, $\|B(x, t)\| \leqslant C_2$, где C_0, C_1, C_2 — неотрицательные постоянные. Пусть U — выпуклое замкнутое ограниченное множество из $L_2^r[t_0, T]$ и существует управление $u_0 \in U$ такое, что соответствующее решение $x(t, u_0)$ задачи (2) удовлетворяет условию $x(T, u_0) = x_I$. Показать, что тогда функция (1) при условиях (2) и дополнительном условии $x(T, u) = x_I$ достигает своей нижней грани на U. Указание: установить, что если $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность, слабо сходящаяся к точке u_*, то $J(u_k) \to J(u_*)$.

§ 6. Градиент в задаче оптимального управления с дискретным временем

1. Рассмотрим следующую задачу: минимизировать функцию

$$I([u_i]) = \sum_{i=0}^{N-1} F_i^0(x_i, u_i) + \Phi(x_N) \tag{1}$$

при условиях

$$x_{i+1} = F_i(x_i, u_i), \quad i = 0, \ldots, N-1; \quad x_0 = a, \tag{2}$$

$$[u_i] = (u_0, \ldots, u_{N-1}); \quad u_i \in V_i, \quad i = 0, \ldots, N-1, \tag{3}$$

где $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$, $u_i = (u_i^1, \ldots, u_i^r)$, функции $F_i = (F_i^1, \ldots, F_i^n)$, F_i^0, Φ предполагаются известными, V_i — заданное множество из E^r, натуральное число $N \geqslant 1$ и начальная точка a заданы.

Задача (1)–(3) уже изучалась нами выше: в § 7.1 с помощью динамического программирования исследовалась проблема синтеза для этой задачи. В настоящем параграфе сформулируем достаточные условия дифференцируемости, выпуклости функции (1) при условиях (2), (3), а также выведем необходимые условия оптимальности. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$F_{ix} = \begin{pmatrix} F_{ix^1}^1 & \ldots & F_{ix^n}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{ix^1}^n & \ldots & F_{ix^n}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ix}^1 \\ \vdots \\ F_{ix}^n \end{pmatrix}, \quad F_{iu} = \begin{pmatrix} F_{iu^1}^1 & \ldots & F_{iu^r}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{iu^1}^n & \ldots & F_{iu^r}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{iu}^1 \\ \vdots \\ F_{iu}^n \end{pmatrix},$$

$$(F_{ix}^0)^T = (F_{ix^1}^0, \ldots, F_{ix^n}^0), \quad (F_{iu}^0)^T = (F_{iu^1}^0, \ldots, F_{iu^r}^0), \quad (\Phi_x)^T = (\Phi_{x^1}, \ldots, \Phi_{x^n}).$$

Через $L_2^r[0, N]$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций дискретной переменной $[u_i] = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ со скалярным произведением