МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Д.В. Камзолкин, А.В. Кряжимский

ВВЕДЕНИЕ В

ПОЗИЦИОННЫЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

ИГРЫ

Москва

2009

Данный курс содержит основные элементы теории позиционных дифференциальных игр, разработанной в школе Н.Н. Красовского [5]. Позиционная стратегия – это обратная связь, работающая в паре с неизвестным управлением-помехой и обеспечивающая нужное качество для всех движений управляемой системы. Изложение построено вокруг двух задач: задачи наведения управляемой системы на целевое множество и задачи уклонения от целевого множества, образующих в совокупности дифференциальную игру наведения-уклонения. Излагаемые материалы снабжены примерами, иллюстрирующими теорию.

Пособие предназначено для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области управления динамическими процессами.

Содержание

1 Постановка задач наведения и уклонения

1.1 Управляемая система

Дадим описание управляемой системы. Рассмотрим временной интервал $[t_0, \Theta]$. Состояние управляемой системы в каждый момент времени $t \in [t_0, \Theta]$ описывается *фазовой переменной* $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \in R^n$, R^n называется *фазовым пространством* системы, n (натуральное число)– размерностью системы.

Определение 1. *Всякая пара $(t, x) \in [t_0, \Theta] \times R^n$ называется позицией (управляемой системы).*

Далее P – фиксированное ограниченное и замкнутое множество из R^p, называется *ресурсом управления первого игрока*, и Q – фиксированное ограниченное и замкнутое множество из R^q, называется *ресурсом управления второго игрока*. Натуральные числа p и q называются *размерностями управлений первого и второго игроков* соответственно, переменные $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^p(t)) \in P$ и $v(t) = (v^1(t), \ldots, v^q(t)) \in Q$ – значениями управлений первого и второго игроков в момент времени $t \in [t_0, \Theta]$.

Динамика системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)); \tag{1}$$

здесь $f : [t_0, \Theta] \times R^n \times P \times Q \to R^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию *локальной липшицевости* по фазовой переменной x: для любого компактного множества $K \subset R^n$ существует константа $L_K \geq 0$ такая, что для любых x_1, $x_2 \in K$, $t \in [t_0, \Theta]$ и любых $u \in P$ и $v \in Q$

$$\|f(t, x_1, u, v) - f(t, x_2, u, v)\| \leq L_K \|x_1 - x_2\|.$$

Кроме того предполагаем, что существует константа $C \geq 0$ такая, что для любых $t \in [t_0, \Theta]$, $x \in R^n$, $u \in P$ и $v \in Q$

$$\langle f(t, x, u, v), x \rangle \leq C(1 + \|x\|^2).$$

Последнее условие называется *условием Филиппова* [10].

Определение 2. *Пусть* $t_* \in [t_0, \Theta]$. *Допустимым программным управлением первого игрока на отрезке* $[t_*, \Theta]$ *называется любая кусочно-непрерывная функция* $u(\cdot)$, *определенная на* $[t_*, \Theta]$ *и принимающая значения в множестве* P.

Допустимым программным управлением второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ *называется любая кусочно-непрерывная функция* $v(\cdot)$, *определенная на отрезке* $[t_*, \Theta]$ *и принимающая значения в множестве* Q.

Будем обозначать класс всех допустимых программных управлений первого игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ через $\mathcal{U}[t_*, \Theta]$, а класс всех допустимых программных управлений второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ через $\mathcal{V}[t_*, \Theta]$.

Пусть задана позиция (t_*, x_*), которую назовем *начальной*, и выбраны допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ соответственно первого и второго игроков на отрезке $[t_*, \Theta]$.

Определение 3. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции* (t_*, x_*) *под действием допустимых программных управлений* $u(\cdot)$ *первого игрока и* $v(\cdot)$ *второго игрока на отрезке* $[t_*, \Theta]$, *называется определенное на отрезке* $[t_*, \Theta]$ *решение* $x(\cdot)$ *дифференциального уравнения (1) с начальным условием* $x(t_*) = x_*$. *Под решением дифференциального уравнения (1) будем понимать кусочно-дифференцируемую функцию, удовлетворяющую этому дифференциальному уравнению при всех* $t \in [t_*, \Theta]$ *за исключением конечного числа точек.*

Будем обозначать указанное движение $x(\cdot)$ через $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$. Коснемся вопроса существования и единственности такого движения.

Лемма 1. *При сделанных выше предположениях о функции* $f(\cdot)$ *движение* $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ *существует и единственно для любой начальной позиции* (t_*, x_*) *и любых допустимых программных управлений* $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ *и* $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$.

На доказательстве леммы мы не останавливаемся, оно проводится методами, стандартными для теории обыкновенных дифференциальных уравнений ([6, 7]).

1.2 Неформальная постановка задач наведения и уклонения

Нас интересуют задачи управления системой (1), стоящие перед первым и вторым игроками (см. также [1], [5]). Пусть задано некоторое замкнутое множество $M \subset R^n$, которое назовем *терминальным множеством.*

Задача первого игрока – это задача наведения на терминальное множество. Она состоит в выборе такого закона формирования допустимого программного управления $u(\cdot)$, который обеспечивал бы наведение состояния системы из заданной начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в конечный момент времени Θ при любом способе формирования допустимого управления второго игрока.

Задача второго игрока – это задача уклонения от терминального множества. Она состоит в выборе такого закона формирования допустимого программного управления $v(\cdot)$, который обеспечивал бы уклонение состояния системы из заданной начальной позиции (t_*, x_*) от терминального множества M в конечный момент времени Θ при любом способе формирования допустимого управления первого игрока.

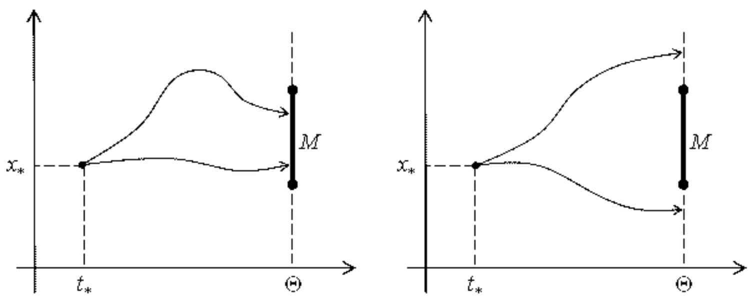

Рис. 1. Задачи наведения и уклонения.

Совокупность задач наведения и уклонения (рис. 1), очевидно, противоположных, образует дифференциальную игру наведения-уклонения.

Данное выше описание дифференциальной игры неформально. Для точной, формальной постановки требуется, во первых, определить классы законов управления игроков в рамках которых игроки будут решать свои задачи и, во вторых, описать движения управляемой системы, отвечающие этим законам управления.

1.3 Постановка задач наведения и уклонения в классах программных управлений

Пусть игроку, решающему свою задачу (см п. 1.2), в начальный момент t_* известно начальное состояние x_* системы и в процессе управления никакой дополнительной информации ему не поступает. В данной ситуации естественным представляется использование игроком заранее, до начала движения определенных допустимых программных управлений как функций времени. Определим пучок движений системы, порожденных допустимым программным управлением того или иного игрока.

Определение 4. *Пучком движений из заданной начальной позиции (t_*, x_*), порожденным допустимым программным управлением первого игрока $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ называется множество*

$$X(t_*, x_*, u(\cdot)) = \{x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) : \, v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]\},$$

то есть множество всех движений управляемой системы (1), исходящих из начальной позиции (t_*, x_*), под действием заданного допустимого программного управления $u(\cdot)$ первого игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ и всех возможных допустимых программных управлений $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$.

Определение 5. *Пучком движений из заданной начальной позиции (t_*, x_*), порожденным допустимым программным управлением второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ называется множество*

$$X(t_*, x_*, v(\cdot)) = \{x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) : \, u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]\}.$$

Задача наведения из начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент времени Θ в классе допустимых программных управлений первого игрока заключается в отыскании такого допустимого программного управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ первого игрока, что для любого движения $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, u(\cdot))$ справедливо включение $x(\Theta) \in M$.

Задача уклонения из начальной позиции (t_*, x_*) от терминального множества M в момент времени Θ в классе допустимых программных управлений второго игрока заключается в отыскании такого допустимого программного управления $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ второго игрока, что для любого движения $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, v(\cdot))$ справедливо условие $x(\Theta) \notin M$.

Описанные выше задачи наведения и уклонения в совокупности формируют *дифференциальную игру наведения-уклонения в момент Θ с начальной позицией (t_*, x_*) и терминальным множеством M в классах допустимых программных управлений первого и второго игроков.*

Для иллюстрации применения программных стратегий рассмотрим пример.

Пример 1.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с ресурсами управления первого и второго игроков, задаваемыми множествами $P = [-1, 1]$ и $Q = [-1, 1]$ соответственно. Терминальное множество представляет собой отрезок $M_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$, где $\varepsilon \geq 0$.

Рассмотрим решение задачи наведения из начальной позиции $(t_*, x_*) = (0, 0)$ в классе допустимых программных управлений первого игрока при разных значениях ε. При $\varepsilon \geq 1$ решение задачи доставляет допустимое управление $u(t) \equiv 0$. Действительно, при любом допустимом программном управлении $v(\cdot)$ второго игрока на $[0, 1]$ для движения $x(\cdot) =$

$x(\cdot|0,0,u(\cdot),v(\cdot))$ имеем

$$|x(1)| = \left|\int\limits_0^1 v(t)dt\right| \leq 1 \leq \varepsilon,$$

и следовательно, $x(1) \in M$. Покажем, что при $\varepsilon < 1$ рассматриваемая задача наведения не имеет решения в классе программных управлений. Рассмотрим какое-либо допустимое программное управление $u(\cdot)$ первого игрока на $[0,1]$. Представим движение $x(\cdot) = x(\cdot|0,0,u(\cdot),v(\cdot))$, где $v(\cdot)$ – произвольное допустимое программное управление второго игрока на $[0,1]$, в виде

$$x(1) = \int\limits_0^1 u(\tau)d\tau + \int\limits_0^1 v(\tau)d\tau.$$

Полагая $a = \int\limits_0^1 u(\tau)d\tau$, запишем:

$$x(1) = a + \int\limits_0^1 v(\tau)d\tau.$$

В случае $a \geq 0$ при $v(t) \equiv 1$ имеем $x(1) = a+1 \geq 1 > \varepsilon$, а в случае $a < 0$ при $v(t) \equiv -1$ имеем $x(1) = a - 1 < -1 < -\varepsilon$. Таким образом, рассматриваемая задача наведения решения не имеет.

Нетрудно показать, (см. ниже упражнение 1), что при любом $\varepsilon \geq 0$ задача уклонения из начальной позиции $(0,0)$ от терминального множества $M = M_\varepsilon$ в момент $\Theta = 1$ в классе допустимых программных управлений второго игрока не разрешима.

Таким образом в дифференциальной игре наведения-уклонения в момент 1 с начальной позицией $(0,0)$ и терминальным множеством M_ε в классах допустимых программных управлений первого и второго игроков при $\varepsilon < 1$ не разрешима ни одна из составляющих ее задач, а при $\varepsilon \geq 1$ разрешима только одна из них – задача наведения.

Упражнение 1. *Рассмотрим управляемую систему и терминальное множество $M = M_\varepsilon$ из примера 1. Показать, что при любом $\varepsilon \geq 0$ задача уклонения из начальной позиции $(0,0)$ от множества M в момент 1 в классе допустимых программных управлений второго игрока не разрешима.*

Упражнение 2. *На отрезке времени* $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ *рассмотрим двумерную управляемую систему*

$$\dot{x}^1(t) = u(t),$$

$$\dot{x}^2(t) = |x^1(t)| + v(t),$$

с ресурсными множествами $P = \{-1, 1\}$ *первого игрока и* $Q = [0, 1]$ *второго игрока и с терминальным множеством* $M = \{(x^1, x^2) : \quad x^2 \leq 1 + \varepsilon\}$.

Показать, что задача наведения из начальной позиции $(0, (0, 0))$ *на* M *в момент* 1 *в классе допустимых программных управлений первого игрока разрешима при любом* $\varepsilon > 0$ *и не разрешима при* $\varepsilon = 0$

Упражнение 3. *На отрезке времени* $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ *рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t)v(t)$$

с ресурсными множествами $P = \{-1, 1\}$ *первого игрока и* $Q = \{-1, 1\}$ *второго игрока. Пусть* M *– произвольное замкнутое терминальное множество в* R^1. *Показать, что*

(а) задача наведения из начальной позиции $(0, 0)$ *на* M *в момент* 1 *в классе допустимых программных управлений первого игрока разрешима тогда и только тогда, когда* $[-1, 1] \subset M$.

(б) задача уклонения из начальной позиции $(0, 0)$ *от* M *в момент* 1 *в классе допустимых программных управлений второго игрока разрешима тогда и только тогда, когда* $M \cap [-1, 1] = \emptyset$.

1.4 Постановка задач наведения и уклонения в классе контр-управлений

Рассмотрим другие законы управления, которые позволяют расширить возможности игроков. Пусть теперь первому игроку в каждый момент времени известно текущее значение управления второго игрока.

Определение 6. *Пусть задан момент времени* $t_* \in [t_0, \Theta]$*. Допустимым контр-управлением первого игрока на отрезке времени* $[t_*, \Theta]$ *называется любая функция* $\bar{u}(\cdot)\colon (t, v) \to \bar{u}(t, v)\colon [t_*, \Theta] \times Q \to P$ *такая, что для всякого допустимого программного управления* $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ *второго игрока функция* $u(\cdot) : t \to u(t) = \bar{u}(t, v(t))$ *является допустимым программным управлением первого игрока на отрезке* $[t_*, \Theta]$*.*

Обозначим класс всех допустимых контр-управлений первого игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ через $\bar{\mathcal{U}}[t_*, \Theta]$.

Определение 7. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции* (t_*, x_*)*, под действием допустимого контр-управления* $\bar{u}(\cdot) \in \bar{\mathcal{U}}[t_*, \Theta]$ *первого игрока и допустимого программного управления* $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ *второго игрока называется движение* $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$*, где* $u(t) = \bar{u}(t, v(t))$ *при всех* $t \in [t_*, \Theta]$*.*

Отметим, что по Лемме 1, это движение определено на отрезке $[t_*, \Theta]$ и единственно, так как управление $u(\cdot)$ по определению контр-управления есть допустимое программное управление первого игрока. Обозначим это движение через $x(\cdot|t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), v(\cdot))$.

Определение 8. *Пучком движений из начальной позиции* (t_*, x_*)*, порожденным допустимым контр-управлением* $\bar{u}(\cdot) \in \bar{\mathcal{U}}[t_*, \Theta]$ *первого игрока, называется множество*

$$X(t_*, x_*, \bar{u}(\cdot)) = \{x(\cdot|t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), v(\cdot)) : v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]\}.$$

Определим теперь контр-управления второго игрока.

Определение 9. *Допустимым контр-управлением второго игрока на отрезке* $[t_*, \Theta]$ *называется любая функция* $\bar{v}(\cdot)\colon (t, u) \to \bar{v}(t, u)\colon [t_*, \Theta] \times P \to Q$ *такая, что для всякого допустимого программного управления* $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ *первого игрока функция* $v(\cdot) : t \to v(t) = \bar{v}(t, u(t))$ *является допустимым программным управлением второго игрока на отрезке* $[t_*, \Theta]$*.*

Обозначим класс всех допустимых контр-управлений второго игрока через $\bar{\mathcal{V}}[t_*, \Theta]$.

Определение 10. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции* (t_*, x_*) *под действием допустимого контр-управления* $\bar{v}(\cdot) \in \bar{\mathcal{V}}[t_*, \Theta]$ *второго игрока и допустимого программного управления* $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ *первого игрока, называется движение* $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$, *где* $v(t) = \bar{v}(t, u(t))$ *при всех* $t \in [t_*, \Theta]$.

Обозначим это движение через $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), \bar{v}(\cdot))$.

Определение 11. *Пучком движений из начальной позиции* (t_*, x_*), *порожденным допустимым контр-управлением* $\bar{v}(\cdot) \in \bar{\mathcal{V}}[t_*, \Theta]$ *второго игрока, называется множество*

$$X(t_*, x_*, \bar{v}(\cdot)) = \{x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), \bar{v}(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]\}.$$

Задача наведения из начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент времени Θ в классе допустимых контр-управлений первого игрока заключается в отыскании такого контр-управления $\bar{u}(\cdot) \in \bar{\mathcal{U}}[t_*, \Theta]$ первого игрока, что для любого движения $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, \bar{u}(\cdot))$ справедливо включение $x(\Theta) \in M$.

Задача уклонения из начальной позиции (t_*, x_*) от терминального множества M в момент времени Θ в классе допустимых контр-управлений второго игрока заключается в отыскании такого контр-управления $\bar{v}(\cdot) \in \bar{\mathcal{V}}[t_*, \Theta]$ второго игрока, что для любого движения $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, \bar{v}(\cdot))$ справедливо условие $x(\Theta) \notin M$.

Описанные выше задачи наведения и уклонения в совокупности формируют *дифференциальную игру наведения-уклонения в момент* Θ *с начальной позицией* (t_*, x_*) *и терминальным множеством* M *в классах допустимых контр-управлений первого и второго игроков.*

Заметим, что в силу определения контр-управлений, невозможно одновременное использование контр-управлений обоими игроками (см. упражнение 6).

Пример 2.

Для управляемой системы, терминального множества и начальной позиции из примера 1 рассмотрим задачу наведения в классе допустимых контр-управлений первого игрока.

Допустимое контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока на $[0,1]$ вида $\bar{u}(t,v) = -v$ решает эту задачу при любом $\varepsilon \geq 0$. При этом для любого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока имеем

$$x(1|0,0,\bar{u}(\cdot),v(\cdot)) = \int_0^1 (-v(t)+v(t))dt = 0 \in M.$$

Нетрудно показать (см. ниже упражнение 4), что задача уклонения из начальной позиции $(0,0)$ от терминального множества M_ε в момент 1 в классе допустимых контр-управлений второго игрока не разрешима ни при каком $\varepsilon > 0$. Таким образом, в дифференциальной игре наведения-уклонения в момент 1 с начальной позицией $(0,0)$ и терминальным множеством M_ε в классах допустимых контр-управлений первого и второго игроков при всяком $\varepsilon > 0$ разрешима задача наведения и не разрешима задача уклонения.

Упражнение 4. *В условиях примера 2 показать, что задача уклонения из начальной позиции $(0,0)$ от терминального множества M_ε в момент 1 в классе допустимых контр-управлений второго игрока не разрешима ни при каком $\varepsilon > 0$.*

Упражнение 5. *На отрезке времени $[t_0,\Theta] = [0,1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t)v(t)$$

с ресурсными множествами $P = \{-1,1\}$ и $Q = \{-1,1\}$ первого и второго игроков соответственно и с терминальным множеством $M = M_\varepsilon = [-\varepsilon,\varepsilon]$, где $\varepsilon \geq 0$. Показать, что

(а) задача наведения в момент 1 из начальной позиции $(0,0)$ на терминальное множество M_ε в классе допустимых контр-управлений первого игрока разрешима при любом $\varepsilon > 0$.

(б) задача уклонения в момент 1 из начальной позиции $(0,0)$ от терминального множества M_ε в классе допустимых контр-управлений второго игрока разрешима при всяком $\varepsilon < 1$.

Упражнение 6. *Привести пример управляемой системы (1) и допустимых контр-управлений $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока и $\bar{v}(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ таких, что ни при какой начальной позиции вида (t_*, x_*) не существует движения $x(\cdot)$ системы, исходящего из (t_*, x_*) и порожденного одновременно контр-управлением $\bar{u}(\cdot)$ и контр-управлением $\bar{v}(\cdot)$, то есть такого, что $x(\cdot) = x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$, где $u(t) = \bar{u}(t, v(t))$ и $v(t) = \bar{v}(t, u(t))$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$.*

1.5 Постановка задач наведения и уклонения в классе позиционных стратегий

1.5.1 Позиционные стратегии и идеальные движения

Предположим, что первый игрок в каждый момент времени t наблюдает текущее фазовое состояние $x(t)$ и формирует значение $u(t)$ своего управления по принципу обратной связи, то есть как функцию $u(t) = U(t, x(t))$. Такой способ формирования управления называется позиционной стратегией. Формальное определение позиционной стратегии первого игрока таково.

Определение 12. *Позиционной стратегией первого игрока на отрезке времени $[t_*, \Theta]$ называется любая функция $U\colon (t, x) \to U(t, x)\colon [t_*, \Theta] \times R^n \to P$.*

Принадлежность значений функции $U(\cdot)$ множеству P является единственным ограничением на эту функцию.

Обозначим класс всех позиционных стратегий первого игрока на отрезке времени $[t_*, \Theta]$ через $\mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$.

Возникает вопрос определения движения, из начальной позиции (t_*, x_*) под действием позиционной стратегии U первого игрока. Если первый игрок использует позиционную стратегию U, то в соответствии со сказанным выше естественным представляется определение соответствующего движения, как решения дифференциального уравнения (1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$, где $v(\cdot)$ – некоторое допустимое программное управление второго игрока, а значение программного управления $u(\cdot)$ первого игрока задается по правилу $u(t) = U(t, x(t))$.

Так определенное движение называется *идеальным движением*, исходящим из начальной позиции (t_*, x_*), под действием позиционной стратегии $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока и допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$.

Но таким образом определенные движения могут существовать не для всякой позиционной стратегии U первого игрока. Рассмотрим пример.

Пример 3.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с начальной позицией $(0, 0)$ и ресурсными множествами $P = [-1, 1]$ и $Q = \{0\}$ первого и второго игроков соответственно. Пусть позиционная стратегия U первого игрока на отрезке $[0, 1]$ имеет вид:

$$U(t, x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x > 0, \\ 1, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что идеального движения, исходящего из позиции $(0, 0)$, под действием стратегии U первого игрока и нулевого допустимого программного управления второго игрока не существует.

Упражнение 7. *Доказать утверждение из примера 3.*

Эта отмеченная трудность не позволяет использовать идеальные движения для постановки задачи наведения в классе всех позиционных стратегий $\mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока. Однако, такая постановка возможна при наложении дополнительных ограничений на класс позиционных стратегий первого игрока. Естественным условием является условие непрерывности позиционной стратегии.

1.5.2 Задача неведения в классе непрерывных позиционных стратегий первого игрока. Улучшаемость непрерывных позиционных стратегий: пример А.И. Субботина

Если позиционная стратегия U первого игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ непрерывна, то, как следует из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для любой начальной позиции (t_*, x_*) и для любого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ идеальное движение, исходящее из позиции (t_*, x_*), под действием управлений U и $v(\cdot)$ существует, хотя, возможно, оно и не единственно.

Обозначим через $X_c(t_*, x_*, U)$ множество всех идеальных движений, исходящих из позиции (t_*, x_*), под действием непрерывной позиционной стратегии U первого игрока на $[t_*, \Theta]$ и всевозможных допустимых программных управлений второго игрока на $[t_*, \Theta]$.

Задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент времени Θ в классе непрерывных позиционных стратегий первого игрока заключается в отыскании такой непрерывной позиционной стратегии U первого игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$, что для любого идеального движения $x(\cdot) \in X_c(t_*, x_*, U)$ справедливо включение $x(\Theta) \in M$.

Данная постановка задачи наведения (в классе непрерывных позиционных стратегий первого игрока) не до конца раскрывает возможности управления по принципу обратной связи. Точнее, непрерывные позиционные стратегии первого игрока улучшаемы: возможны ситуации, когда первый игрок, используя свои непрерывные позиционные стратегии, не может решить задачу наведения, но решает ее, применяя другой способ управления по принципу обратной связи. Приведем пример такой ситуации, построенный А.И. Субботиным [9].

Пример 4.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 2]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + (2 - t)v(t), \tag{2}$$

с ресурсными множествами $P = [-1, 1]$ и $Q = [-1, 1]$ первого и второго игроков соответственно. Пусть терминальное множество M есть внешность интервала $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, то есть

$$M = \{x \in R^1 : |x| \geq \frac{1}{2}\}.$$

Покажем, что задача наведения из позиции $(t_*, x_*) = (0, 0)$ на терминальное множество M в момент 2 в классе непрерывных позиционных стратегий первого игрока не разрешима. Введем в рассмотрение класс непрерывных позиционных стратегий U первого игрока на отрезке $[0, 2]$, удовлетворяющих условию локальной липшицевости по фазовой переменной, то есть таких, что $|U(t, x_1) - U(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in R^1$, $t \in [t_*, \Theta]$, где L – некоторая константа. Каждую стратегию этого класса назовем для краткости *липшицевой*.

Возьмем произвольную липшицеву стратегию U первого игрока и покажем, что она не решает задачу наведения на множество M в момент 2 из позиции $(0, 0)$. Вследствие липшицевости позиционной стратегии U для каждого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока идеальное движение из позиции $(0, 0)$ под действием управлений U и $v(\cdot)$ единственно. Такое движение для случая, когда $v(\cdot)$ принимает постоянное значение $v \in [-1, 1]$, обозначим через $x(\cdot|U, v)$. Очевидно, что

$$x(2|U, v) = \int\limits_0^2 U(t, x(t|U, v))dt + \int\limits_0^2 (2 - t)v dt = \int\limits_0^2 U(t, x(t|U, v))dt + 2v.$$

Так как первый интеграл заключен в отрезок $[-2, 2]$, имеем $-2 + 2v \leq x(2|U, v) \leq 2 + 2v$. Отсюда $x(2|U, -1) \leq 0$ и $x(2|U, 1) \geq 0$. По теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра (см. [6]) функция $v \to x(2|U, v)$ непрерывна на $[-1, 1]$. Поэтому найдется $v \in [-1, 1]$, для которого $x(2|U, v) = 0 \notin M$. Так как движение $x(\cdot|U, v)$ лежит в пучке $X_c(t_*, x_*, U)$, то позиционная стратегия U первого игрока не решает задачу наведения из позиции $(0, 0)$.

Пусть теперь U – произвольная непрерывная позиционная стратегия первого игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$. Ее можно аппроксимировать липшицевыми стратегиями (подробнее см.

[2]). Другими словами, существует последовательность U_k липшицевых позиционных стратегий первого игрока такая, что

$$\int\limits_0^2 \max_{|x|\le a} |U_k(t,x) - U(t,x)| dt \to 0. \tag{3}$$

Здесь $a > 0$ столь велико, что $|x(t)| < a$ для движений $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$ при всех возможных допустимых программных управлениях $u(\cdot)$ первого и $v(\cdot)$ второго игроков на отрезке $[0,2]$. По доказанному выше для каждой липшицевой позиционной стратегии U_k первого игрока существует $v_k \in [-1,1]$ такое, что $x(2|U_k, v_k) = 0$. Не нарушая общности, (выбирая, если нужно, подпоследовательность), считаем, что $v_k \to v \in [-1,1]$. Из (3) следует, что последовательность движений $x_k(\cdot) = x(\cdot|U_k, v_k)$ сходится равномерно к некоторому решению $x(\cdot)$ рассматриваемой управляемой системы с $u(t) = U(t, x(t))$ и $v(t) = v$ ($t \in [0,2]$), удовлетворяющему начальному условию $x(0) = 0$. Ясно, что $x(\cdot) \in X_c(0,0,U)$ и $x(2) = \lim\limits_{k\to+\infty} x(2|U_k, v_k) = 0 \notin M$. Следовательно, U не решает задачу наведения из позиции $(0,0)$. В силу произвольного выбора непрерывной позиционной стратегии U, заключаем, что задача наведения из позиции $(0,0)$ на терминальное множество M в момент 2 в классе непрерывных позиционных стратегий первого игрока не разрешима.

Покажем, что эта задача разрешима при ином способе позиционного управления. Рассмотрим разрывную стратегию U_* первого игрока вида

$$U_*(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \ge 0; \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Выберем возрастающую последовательность

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = 2$$

моментов времени такую, что $\tau_k = 1$ при некотором k. Пусть первый игрок пересчитывает значение своего управления согласно позиционной стратегии U_* только в моменты τ_i $(i = 0, 1, \dots, m-1)$, оставляя управление постоянным между этими моментами. Такой способ управления, вместе с произвольным допустимым управлением $v(\cdot)$ второго игрока, порождает из позиции $(0,0)$ движение системы в виде решения $x(\cdot)$ системы (2) с нулевым начальным условием $x(0)=0$, где $u(t)=U_*(\tau_i,x(\tau_i))$ $(t\in[\tau_i,\tau_{i+1}))$. Проверим, что $x(2)\in M$.

Рассмотрим состояние $x(\tau_k)=x(1)$. Предположим, что $x(\tau_k)\geq 0$ (случай $x(\tau_k)<0$ рассматривается аналогично). Тогда $U_*(\tau_k,x(\tau_k))=1$ и $\dot{x}(t)=1+(2-t)v(t)$ при почти всех $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$. Так как $|v(t)|\leq 1$, имеем $x(\tau_{k+1})\geq 0$. Повторяя рассуждение, получаем, что $x(\tau_{k+2})\geq 0$ и вообще $x(\tau_i)\geq 0$ при всех $i>k$. Следовательно $u(t)=U_*(\tau_i,x(\tau_i))=1$ $(t\in[\tau_i,\tau_{i+1}))$ при всех $i\geq k$. Значит,

$$x(2)=x(1)+1+\int\limits_1^2(2-t)v(t)dt\geq 1-\int\limits_1^2(2-t)dt=\frac{1}{2},$$

то есть $x(2)\in M$. Таким образом, выбранный способ управления с помощью разрывной позиционной стратегии U_* позволяет первому игроку решить интересующую нас задачу наведения.

1.5.3 Задачи наведения и уклонения в классе позиционных стратегий

Разрешим теперь первому игроку использовать произвольные позиционные стратегии с тем ограничением, что он может изменять значения своего управления только в конечном числе моментов времени, образующих разбиение временного отрезка, оставляя значения управления постоянным между этими моментами.

Определение 13. *Разбиением отрезка времени $[t_*,\Theta]$ называется всякое конечное семейство вида*

$$\Delta=(\tau_i)_{i=0}^m:\quad t_*=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m=\Theta, \tag{4}$$

при этом число $d(\Delta)=\max\limits_{i=0,\ldots,m-1}(\tau_{i+1}-\tau_i)$ – называется диаметром разбиения.

Определение 14. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции (t_*,x_*) под действием позиционной стратегии U первого игрока и допустимого* *программного управления* $v(\cdot) \in V[t_*, \Theta]$ *второго игрока на разбиении* Δ *(4), называется решение* $x(\cdot)$ *дифференциального уравнения (1) с начальным условием* $x(t_*) = x_*$*, где* $u(t) = U(\tau_i, x(\tau_i))$ *(*$t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$*,* $i = 0, \ldots, m-1$*).*

Данное движение, очевидно, существует и единственно, будем обозначать его через $x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, U, v(\cdot))$.

Определение 15. *Пучком движений из начальной позиции* (t_*, x_*)*, порожденным позиционной стратегией* $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ *первого игрока на разбиении* Δ*, называется множество*

$$X_\Delta(t_*, x_*, U) = \{x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, U, v(\cdot)) : v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]\}.$$

Аналогичным образом определим позиционные стратегии второго игрока и соответствующие им движения.

Определение 16. *Позиционной стратегией второго игрока называется любая функция* $V(\cdot)$*:* $(t, x) \to V(t, x)$*:* $[t_*, \Theta] \times R^n \to Q$*.*

Класс всех позиционных стратегий второго игрока на отрезке времени $[t_*, \Theta]$ обозначим через $\mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$.

Определение 17. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции* $(t_*, x_*) \in [t_0, \Theta] \times R^n$ *под действием позиционной стратегии* $V \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$ *второго игрока и допустимого программного управления* $u(\cdot)$ *первого игрока на разбиении* Δ *(4), называется решение* $x(\cdot)$ *дифференциального уравнения (1) с начальным условием* $x(t_*) = x_*$*, где* $v(t) = V(\tau_i, x(\tau_i))$ *(*$t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$*,* $i = 0, \ldots, m-1$*).*

Данное движение обозначим через $x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), V)$.

Определение 18. *Пучком движений из начальной позиции* $(t_*, x_*) \in [t_0, \Theta] \times R^n$*, порожденным позиционной стратегией* $V \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$ *второго игрока на разбиении* Δ*, называ-*

ется множество

$$X_\Delta(t_*, x_*, V) = \{x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), V) :\, u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]\}.$$

Задачи наведения и уклонения сформулируем в асимптотической постановке.

Задача наведения из начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент времени Θ в классе позиционных стратегий первого игрока заключается в отыскании позиционной стратегии $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока такой, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для каждого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ справедливо $x(\Theta) \in M^\varepsilon$.

Здесь и далее M^ε – ε-окрестность множества M.

Задача уклонения из начальной позиции (t_*, x_*) от терминального множества M в момент времени Θ в классе позиционных стратегий второго игрока заключается в отыскании позиционной стратегии $V \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$ второго игрока такой, что существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для каждого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, V)$ справедливо $x(\Theta) \notin M^\varepsilon$.

Описанные выше задачи наведения и уклонения в совокупности формируют *дифференциальную игру наведения-уклонения в момент Θ с начальной позицией (t_*, x_*) и терминальным множеством M в классах позиционных стратегий первого и второго игроков.*

1.5.4 Несовместность задач наведения и уклонения

Докажем, что задачи наведения и уклонения из одной начальной позиции в классе позиционных стратегий несовместны, то есть одновременно не разрешимы. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой позиции (t_*, x_*), любых позиционных стратегий U первого игрока и V второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ и любых разбиений Δ_1 и Δ_2 отрезка $[t_*, \Theta]$ имеем*

$$X_{\Delta_1}(t_*, x_*, U) \cap X_{\Delta_2}(t_*, x_*, V) \neq \emptyset.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно построить движение, принадлежащее обоим пучкам движений $X_{\Delta_1}(t_*, x_*, U)$ и $X_{\Delta_2}(t_*, x_*, V)$. Рассмотрим новое разбиение Δ отрезка $[t_*, \Theta]$, являющееся объединением разбиений Δ_1 и Δ_2. Будем строить искомое движение с использованием одновременно позиционных стратегий U и V обоих игроков. Дадим игрокам возможность изменять свое управление только в моменты времени τ_i из разбиения Δ. Если при этом $\tau_i \in \Delta_1$, то первый игрок изменяет свое управление в соответствии с позиционной стратегией U, если $\tau_i \in \Delta_2$, то второй игрок изменяет свое управление в соответствии с позиционной стратегией V. Построенное таким образом движение будет принадлежать пересечению пучков движений. $\square$

Упражнение 8. *Доказать лемму 2 строго.*

Очевидным следствием из леммы 2 является следующая теорема о несовместности задач наведения и уклонения.

Теорема 1. *Задача наведения из начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ в классе позиционных стратегий первого игрока и задача уклонения из начальной позиции (t_*, x_*) от терминального множества M в момент Θ в классе позиционных стратегий второго игрока одновременно не разрешимы.*

Приведем пример использования позиционных стратегий первого игрока для решения задачи наведения.

Пример 5.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с ресурсными множествами $P = [-1, 1]$ и $Q = [-1, 1]$ первого и второго игроков соответственно и с терминальным множеством $M = \{0\}$. В примере 2 было показано, что задача наведения из начальной позиции $(0,0)$ разрешима в классе допустимых контр-управлений первого игрока. Покажем, что позиционная стратегия U вида

$$U(t,x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x > 0, \\ 1, & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

решает задачу наведения на множество M в момент 1 из позиции $(0,0)$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[0,1]$ с диаметром δ и произвольное допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока. Пусть $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot|0,0,U,v(\cdot))$. Покажем, что если в момент τ_i $(i = 0,\ldots,m-1)$ выполняется условие $x(\tau_i) \in (-2\delta, 2\delta]$, то и $x(\tau_{i+1}) \in (-2\delta, 2\delta]$. Если $x(\tau_i) \in (0, 2\delta]$, то на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ первый игрок использует постоянное значение $u_i = U(\tau_i, x(\tau_i)) = -1$ управления. Следовательно,

$$x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (-1 + v(t))dt$$

и, поскольку $|v(t)| \leq 1$, имеем $-2\delta < x(\tau_{i+1}) \leq 2\delta$.

Если же $x(\tau_i) \in (-2\delta, 0]$, то на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ первый игрок использует постоянное значение $u_i = U(\tau_i, x(\tau_i)) = 1$ управления. Следовательно,

$$x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (1 + v(t))dt$$

и значит $-2\delta < x(\tau_{i+1}) \leq 2\delta$.

Поскольку $x(\tau_0) = 0$, то получаем для любого $i = 0,\ldots,m$ оценку $-2\delta < x(\tau_i) \leq 2\delta$ и, следовательно,

$$-2\delta < x(\Theta) \leq 2\delta.$$

Выбирая теперь $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем для движения $x(\cdot)$ включение $x(\Theta) \in M^\varepsilon$. Таким образом позиционная стратегия U первого игрока решает рассматриваемую задачу наведения.

Упражнение 9. *Рассмотрим управляемую систему из примера 5. Показать, что задача уклонения из начальной позиции $(0,0)$ от множества M в момент 1 в классе позиционных стратегий второго игрока не разрешима.*

1.6 Сравнение различных законов управления

Нами рассмотрены постановки задач наведения и уклонения в классах допустимых программных управлений, допустимых контр-управлений и позиционных стратегий игроков. Встанем на место первого игрока. Предположим, что задача наведения из начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ разрешима в одном из указанных выше классов законов управления первого игрока. Исследуем вопрос, будет ли при этом такая же задача наведения разрешима в оставшихся двух классах стратегий.

Начнем с класса допустимых программных управлений первого игрока. Предположим, что задача наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ разрешима в классе допустимых программных управлений первого игрока, то есть существует допустимое программное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ первого игрока, решающее эту задачу. Но тогда допустимое контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока вида $\bar{u}(t, v) = u(t)$ и позиционная стратегия U первого игрока вида $U(t, x) = u(t)$ также решают задачу наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ в классах допустимых контр-управлений и позиционных стратегий первого игрока соответственно. Здесь мы пользуемся тем, что классы допустимых контр-управлений и позиционных стратегий содержат в себе класс допустимых программных управлений, то есть $\mathcal{U}[t_*, \Theta] \subset \bar{\mathcal{U}}[t_*, \Theta]$ и $\mathcal{U}[t_*, \Theta] \subset \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$.

Предположим теперь, что задача наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ разрешима в классе допустимых контр-управлений первого игрока. Рассмотрим задачу наведения из примера 2. Случай неразрешимости этой же задачи наведения в классе допустимых программных управлений первого игрока рассмотрен в примере 1 при $\varepsilon < 1$.

Рассмотрим пример, показывающий, что из разрешимости задачи наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ в классе допустимых контр-управлений первого игрока не всегда следует разрешимость этой же задачи наведения и в классе позиционных стратегий первого игрока.

Пример 6.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t)v(t),$$

с ресурсными множествами $P = \{-1, 1\}$ и $Q = \{-1, 1\}$ первого и второго игроков соответственно. Пусть терминальное множество M представляет собой точку $M = \{1\}$.

Покажем, что задача наведения из позиции $(0, 0)$ на множество M в момент 1 разрешима в классе допустимых контр-управлений первого игрока. Рассмотрим контр-управление $\bar{u}(t, v) = v$ первого игрока и произвольное допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока. Для любого движения $x(\cdot) = x(\cdot|0, 0, \bar{u}(\cdot), v(\cdot))$ имеем $\dot{x}(t) = v(t)^2 \equiv 1$, и следовательно $x(1) = 1 \in M$.

Далее покажем, что не существует позиционной стратегии первого игрока, решающей поставленную задачу наведения. Рассмотрим произвольную позиционную стратегию U первого игрока и произвольное разбиение Δ отрезка $[0, 1]$ и построим движение, не попадающее в ε-окрестность терминального множества.

Движение $x(\cdot)$ будем строить следующим образом. Управление второго игрока будем изменять только в моменты $\tau_i \in \Delta$ и считать его постоянным между этими моментами, то есть $v(t) = v_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \ldots, m-1$, где значения v_i вычисляются по правилу $v_i = -U(\tau_i, x(\tau_i))$. Данное движение строится аналогично движению под действием позиционной стратегии первого игрока, с той лишь разницей, что в моменты τ_i пересчитываются управления сразу обоих игроков.

Полученное кусочно-постоянное управление $v(\cdot)$ является допустимым программным управлением второго игрока. Соответствующее ему движение $x(t) = x_\Delta(t|0, 0, U, v(\cdot)) = -t$ не попадает на терминальное множество, так как $x(1) = -1$. Кроме того $x(\cdot) \in X_\Delta(0, 0, U)$ и следовательно позиционная стратегия U первого игрока не решает задачу наведения.

В силу произвольности выбора стратегии U задача наведения из позиции $(0,0)$ не разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока.

Наконец, предположим, что задача наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока. Рассмотрим задачу наведения из примера 5. Случай неразрешимости этой же задачи в классе допустимых программных управлений первого игрока дает пример 1.

Рассмотрим пример, построенный А.В. Кряжимским, показывающий, что из разрешимости задачи наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ в классе позиционных стратегий первого игрока не всегда следует разрешимость этой же задачи наведения и в классе допустимых контр-управлений первого игрока.

Пример 7.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с ресурсными множествами $P = \{-1, 1\}$ и $Q = \{-1, 0, 1\}$ первого и второго игроков соответственно. Пусть терминальное множество M представляет собой точку $M = \{0\}$.

Как следует из примера 5, позиционная стратегия U первого игрока вида

$$U(t,x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x > 0, \\ 1, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

решает задачу наведения из позиции $(0,0)$ на множество M в момент 1. Предположим, что существует допустимое контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока, решающее эту задачу наведения. Рассмотрим постоянное программное управление второго игрока $v_1 \equiv 0$. Так как допустимое управление первого игрока может принимать только значения ± 1 и имеет конечное число точек разрыва, то движение $x_1(\cdot) = x(\cdot|0, 0, \bar{u}(\cdot), v_1)$ будет состоять из линейных участков с угловым коэффициентом ± 1. Следовательно всегда найдется момент времени $\xi \in [0,1]$, такой что $x_1(\xi) \neq 0$. Предположим, что $x_1(\xi) > 0$ (случай $x_1(\xi) < 0$ рассматривается аналогично). Определим новое программное управление второго игрока

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \xi; \\ \\ 1, & \text{при } t \geq \xi. \end{cases}$$

и рассмотрим движение $x(\cdot) = x(\cdot|0,0,\bar{u}(\cdot),v(\cdot))$. При $t \geq \xi$ имеем $\dot{x}(t) = 1 + u(t) \geq 0$ и соответственно $x(t) \geq x(\xi) = x_1(\xi) > 0$. Значит и $x(1) > 0$ и задача наведения из позиции $(0,0)$ на множество M в момент 1 в классе допустимых контр-управлений первого игрока не разрешима.

Результаты данного раздела можно отобразить на следующей диаграмме (рис. 2). Пунктирные стрелки означают, что данное следствие возможно не во всех ситуациях.

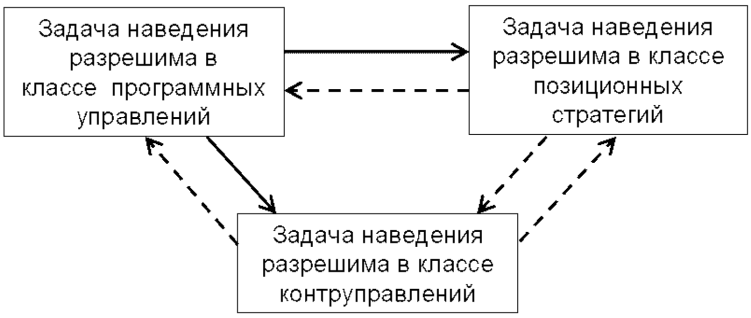

Рис. 2. Разрешимость задачи наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ в различных классах законов управления первого игрока.

2 Теория стабильных множеств

Теория стабильных множеств представляет собой один из подходов к исследованию дифференциальной игры наведения-уклонения в момент Θ с начальной позицией (t_*, x_*) и терминальным множеством M в классах позиционных стратегий игроков. Рассмотрим вначале теорию для первого игрока.

Определение 19. *t-сечением множества $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ при заданном $t \in [t_*, \Theta]$ называется множество $W(t) = \{x \in R^n : (t,x) \in W\}$.*

Предлагаемый подход к решению задачи наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ неформально можно описать следующим образом. Если первому игроку удастся построить такое множество в пространстве позиций (t, x), что оно захватывает начальную позицию (t_*, x_*), оканчивается на терминальном множестве M в момент времени Θ и, кроме того, при любом способе формирования допустимого управления второго игрока первый игрок всегда выбором своего управления может удержать позицию $(t, x(t))$ системы (1) на этом множестве или в сколь угодно малой его окрестности, то цель первого игрока достигнута. Таким образом задача первого игрока сводится к построению множества $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$, обладающего следующими тремя свойствами:

1. Множество W содержит начальную позицию (t_*, x_*).

2. $W(\Theta) \subset M$.

3. Существует позиционная стратегия $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения Δ временного интервала $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ при любом $t \in [t_*, \Theta]$ выполняется включение $x(t) \in W^\varepsilon(t)$.

Аналогичный подход применяется при решении задачи уклонения из позиции (t_*, x_*) от терминального множества M в момент Θ. Задача второго игрока сводится к построению множества $Z \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ со следующими свойствами:

1. Множество Z содержит начальную позицию (t_*, x_*).

2. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $Z(\Theta) \cap M^\varepsilon = \emptyset$.

3. Существует позиционная стратегия $V \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$ второго игрока такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения Δ временного интервала $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, V)$ при любом $t \in [t_*, \Theta]$ выполняется включение $x(t) \in Z^\varepsilon(t)$.

Далее дадим точное определение множеств W и Z и покажем, что они обладают указанными выше тремя свойствами. Через $\bar{X}(t_*, x_*, u(\cdot))$ обозначим замыкание пучка движений

$X(t_*, x_*, u(\cdot))$ в пространстве непрерывных на отрезке $[t_*, \Theta]$ функций, а через $\bar{X}(t_*, x_*, v(\cdot))$ обозначим замыкание пучка движений $X(t_*, x_*, v(\cdot))$.

Замечание. Вообще говоря, $\bar{X}(t_*, x_*, u(\cdot)) \neq X(t_*, x_*, u(\cdot))$ (см. ниже упражнение 10).

Упражнение 10. *Рассмотреть на отрезке времени* $[t_*, \Theta] = [0, 1]$ *одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t)$$

с ресурсными множествами $P = \{-1, 1\}$ *и* $Q = \{0\}$ *первого и второго игроков соответственно и начальной позицией* $(t_*, x_*) = (0, 0)$. *Показать, что движение* $x(t) \equiv 0$ *принадлежит замыканию* $\bar{X}(0, 0, v(\cdot))$, *но при этом не входит в пучок движений* $X(0, 0, v(\cdot))$, *где* $v(t) \equiv 0$.

Определение 20. *Множество* $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ *называется* u*-стабильным, если для любой позиции* $(t_1, x_1) \in W$, *любого* $t_2 \in [t_1, \Theta]$ *и любого допустимого программного управления* $v(\cdot)$ *второго игрока, определенного на отрезке* $[t_1, t_2]$, *существует движение* $x(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_1, v(\cdot))$ *такое, что* $x(t_2) \in W(t_2)$.

Определение 21. *Множество* $Z \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ *называется* v*-стабильным, если для любой позиции* $(t_1, x_1) \in Z$, *любого* $t_2 \in [t_1, \Theta]$ *и любого допустимого программного управления* $u(\cdot)$ *первого игрока, определенного на отрезке* $[t_1, t_2]$, *существует движение* $x(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_1, u(\cdot))$ *такое, что* $x(t_2) \in Z(t_2)$.

Упражнение 11. *На отрезке времени* $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ *рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t)$$

с ресурсными множествами $P = [-1, 1]$ *и* $Q = [-1, 1]$ *первого и второго игроков соответственно. Показать, что множество* $W = \{(t, x) \in [0, 1] \times R : x = 0\}$ *является* u*-стабильным.*

Упражнение 12. *На отрезке времени* $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ *рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t)v(t)$$

с ресурсами управления первого и второго игроков, задаваемыми множествами $P = \{-1, 1\}$ *и* $Q = \{-1, 1\}$ *соответственно. Показать, что множество* $W = \{(t, x) : t \in [0, 1], x = t\}$ *является u-стабильным.*

Упражнение 13. *Может ли множество* $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ *быть одновременно u- и v-стабильным? Рассмотреть управляемую систему и множество* W *из упражнения 11.*

2.1 Свойства стабильных множеств

Непосредственно из определения стабильных множеств следует следующая лемма.

Лемма 3. *Объединение любого семейства u-стабильных (v-стабильных) множеств u-стабильно (v-стабильно).*

Упражнение 14. *Доказать лемму 3.*

Упражнение 15. *Является ли пересечение конечного числа u-стабильных множеств u-стабильным?*

Лемма 4. *Пусть множество* $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ *u-стабильно. Тогда его замыкание по t-сечениям* $\bar{W}$ *также u-стабильно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $(t_1, x_1) \in \bar{W}$, $t_2 \in [t_1, \Theta]$ и произвольное допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_1, t_2]$. Если $x_1 \in W(t_1)$, то свойство u-стабильности выполняется очевидным образом. Нас интересует случай $x_1 \notin W(t_1)$. При этом $x_1 \in \bar{W}(t_1)$ и, следовательно, существует последовательность точек $x_k \to x_1$: $x_k \in W(t_1)$ $(k = 2, 3, \dots)$. Из u-стабильности множества W получаем существование последовательности движений $y_k(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_k, v(\cdot))$ со свойствами $y_k(t_1) = x_k$ и

$y_k(t_2) \in W(t_2)$ $(k = 2, 3, \dots)$. Из включения $y_k(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_k, v(\cdot))$ следует существование такого допустимого программного управления $u_k(\cdot)$ первого игрока на отрезке $[t_1, t_2]$, что

$$\max_{t \in [t_1, t_2]} |y_k(t) - x(t|t_1, x_k, u_k(\cdot), v(\cdot))| \leq \frac{1}{k}. \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность движений $z_k(\cdot) = x(\cdot|t_1, x_1, u_k(\cdot), v(\cdot)) \in X(t_1, x_1, v(\cdot))$. По теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начального условия (см. [7]) имеем

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\max_{t \in [t_1, t_2]} |z_k(t) - x(t|t_1, x_k, u_k(\cdot), v(\cdot))| \right) = 0. \tag{6}$$

Последовательность $z_k(\cdot)$ представляет собой семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на отрезке $[t_1, t_2]$ функций (см. [4]), и, следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $z_{k_j}(\cdot)$ равномерно сходящуюся к некоторому предельному движению $z(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_1, v(\cdot))$. Из (5) и (6) и включения $y_k(t_2) \in W(t_2)$ следует, что $\lim\limits_{k_j \to +\infty} z_{k_j}(t_2) \in \bar{W}(t_2)$. Таким образом движение $z(\cdot)$ обладает следующими свойствами: $z(t_1) = x_1$, $z(t_2) \in \bar{W}(t_2)$ и $z(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_1, v(\cdot))$, что доказывает u-стабильность множества $\bar{W}$. □

Тем же свойством обладают v-стабильные множества.

Лемма 5. *Пусть множество $Z \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ v-стабильно. Тогда его замыкание по t-сечениям $\bar{Z}$ также v-стабильно.*

2.2 Маленькая игра

Пусть дано u-стабильное множество $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$. Возникает вопрос существования такой позиционной стратегии U первого игрока, которая бы удерживала любое движение системы (1) на этом u-стабильном множестве или в малой его окрестности. Аналогичный вопрос встает перед вторым игроком. Пусть дано v-стабильное множество $Z \subset [t_*, \Theta] \times R^n$. Всегда ли можно найти такую позиционную стратегию V второго игрока, которая бы удерживала любое движение системы (1) на этом v-стабильном множестве или в малой его окрестности? Приведем достаточное условие существования таких позиционных стратегий, называемое *условием седловой точки в маленькой игре*. Выберем произвольную позицию (t, x) и вектор $s \in R^n$ и рассмотрим две задачи.

1. Найти значение $u_* \in P$ управления первого игрока такое, что

$$\max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u_*, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle. \tag{7}$$

2. Найти значение $v_* \in Q$ управления второго игрока такое, что

$$\min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v_*) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle. \tag{8}$$

Задачи (7) и (8) составляют *маленькую игру в позиции* (t, x) *по направлению вектора* s. Если окажется, что в некоторой позиции (t, x) при некотором s выполняется равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle, \tag{9}$$

то маленькая игра имеет седловую точку (u_*, v_*), для которой при любых $u \in P$ и $v \in Q$ справедливы неравенства

$$\langle s, f(t, x, u_*, v) \rangle \leq \langle s, f(t, x, u_*, v_*) \rangle \leq \langle s, f(t, x, u, v_*) \rangle.$$

Условие (9) называется *условием седловой точки в маленькой игре*.

Упражнение 16. *Доказать, что условие седловой точки в маленькой игре выполняется для любых* (t, x) *и* $s \in R^n$, *если функция* $f(t, x, u, v)$ *имеет вид*

$$f(t, x, u, v) = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v).$$

Геометрическая интерпретация скалярного произведения $\langle s, f(t, x, u, v) \rangle$. Заметим, что скалярное произведение $\langle s, f(t, x(t), u, v) \rangle$ в позиции $(t, x(t))$ определяет сдвиг Δl (см. рис. 3) вдоль решения $x(\cdot)$ уравнения (1) при фиксированных значениях управлений $u \in P$ первого игрока и $v \in Q$ второго игрока в направлении вектора s за малое время Δt с точностью до членов высшего порядка малости по Δt. Действительно, величина Δl

представима в виде

$$\Delta l = \left\langle \frac{s}{\|s\|}, f(t, x(t), u, v)\Delta t \right\rangle + o(\Delta t),$$

откуда и следует данная интерпретация.

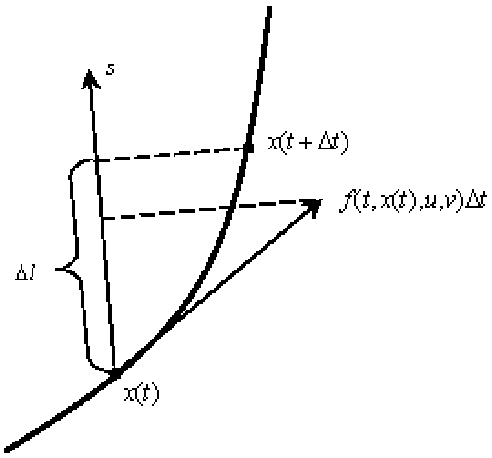

Рис. 3. Геометрическая интерпретация скалярного произведения $\langle s, f(t, x, u, v)\rangle$.

2.3 Стратегия экстремального сдвига

Пусть задано множество $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ с непустыми замкнутыми сечениями $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$. Определим позиционную стратегию U_ε первого игрока, которую будем называть *экстремальной* к этому множеству или *стратегией экстремального сдвига на* W.

Определение 22. *Стратегией первого игрока экстремальной к множеству* $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ *называется позиционная стратегия* $U_\varepsilon \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$, *удовлетворяющая в каждой позиции* $(t, x) \in [t_*, \Theta] \times R^n$ *условию*

$$\max_{v \in Q} \langle x - \omega, f(t, x, U_\varepsilon(t, x), v)\rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x - \omega, f(t, x, u, v)\rangle,$$

где $\omega \in W(t)$ *удовлетворяет условию* $\|x - \omega\| = \min\limits_{z \in W(t)} \|x - z\|$.

Существование ближайшей к x точки $\omega \in W(t)$ следует из замкнутости t-сечений множества W. При этом таких точек может быть несколько. Таким образом, стратегия экстремального сдвига на W определяется возможно не единственным образом. Определим стратегию экстремального сдвига для второго игрока.

Определение 23. *Пусть задано множество $Z \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ с непустыми замкнутыми сечениями $Z(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$. Стратегией второго игрока экстремальной к множеству Z называется позиционная стратегия $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$, удовлетворяющая в каждой позиции $(t, x) \in [t_*, \Theta] \times R^n$ условию*

$$\min_{u \in P} \langle \omega - x, f(t, x, u, V_\varepsilon(t, x)) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle \omega - x, f(t, x, u, v) \rangle.$$

где $\omega \in Z(t)$ удовлетворяет условию $\|x - \omega\| = \min\limits_{z \in Z(t)} \|x - z\|$.

Упражнение 17. *Построить стратегии первого и второго игроков, экстремальные к множеству W из примера 11.*

Докажем ряд свойств стратегии экстремального сдвига первого игрока.

Лемма 6 (о локальной оценке). *Пусть $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ u-стабильное множество с замкнутыми сечениями $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и U_ε – стратегия первого игрока, экстремальная к W. Тогда для любой начальной позиции (t_*, x_*) существуют константа $K \geq 0$ и функция $\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что для любого разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ временного интрервала $[t_*, \Theta]$, любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U_\varepsilon)$ и любого τ_i $(i < m)$ справедлива оценка:*

$$\operatorname{dist}^2(x(\tau_{i+1}), W(\tau_{i+1})) \leq$$
$$\leq \operatorname{dist}^2(x(\tau_i), W(\tau_i))(1 + K(\tau_{i+1} - \tau_i)) + \alpha(d(\Delta))(\tau_{i+1} - \tau_i),$$

где $\operatorname{dist}(x, W(t)) = \min\limits_{y \in W(t)} \|x - y\|$, функция $\alpha(y) \to 0$ при $y \to 0 + 0$.

Доказательство. Построим множество в пространстве позиций (t, x), ограничивающее все рассматриваемые нами движения. Определим область достижимости из начальной позиции (t_*, x_*) как

$$X(t_*, x_*) = \{x(t|t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) : t \in [t_*, \Theta], u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta], v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]\}. \qquad (10)$$

Для произвольной позиции (t, x) будем обозначать через $\omega(t, x)$ ближайшую к x точку из сечения $W(t)$. Если таких точек несколько, то будем выбирать любую из них произвольным образом. Найдется такая константа $c > 0$, что для любых $x \in X(t_*, x_*)$ и $t \in [t_*, \Theta]$ $\|x - \omega(t, x)\| \leq c$. Следовательно $\omega(t, x) \in X^c(t_*, x_*)$, где $X^c(t_*, x_*)$– c-окрестность множества $X(t_*, x_*)$. Определим, наконец, множество

$$X = \{X(t, x) : t \in [t_*, \Theta], x \in X^c(t_*, x_*)\},$$

где $X(t, x)$ определено в (10). Все движения, рассматриваемые при доказательстве леммы, будут ограничены замкнутым множеством $\bar{X}$. Найдется константа $M > 0$ такая, что $\|f(t, x, u, v)\| \leq M$ при любых $t \in [t_*, \Theta]$, $x \in \bar{X}$, $u \in P$ и $v \in Q$. Также при $x \in \bar{X}$ функция f удовлетворяет условию локальной липшицевости по переменной x с константой L.

Рассмотрим произвольное разбиение Δ временного интервала $[t_*, \Theta]$, любое допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ и соответствующее движение $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, U_\varepsilon, v(\cdot))$ и произвольный момент $\tau_i \in \Delta\, (i < m)$. Обозначим $\omega_i = \omega(\tau_i, x(\tau_i))$ и $d_i = \|x(\tau_i) - \omega_i\|^2$. Рассмотрим постоянное управление v_i второго игрока, определяемое из условия

$$\min_{u \in P} \langle x(\tau_i) - \omega_i, f(\tau_i, x(\tau_i), u, v_i)\rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle x(\tau_i) - \omega_i, f(\tau_i, x(\tau_i), u, v)\rangle.$$

Так как множество W u-стабильно, то найдется движение $\omega(\cdot) \in \bar{X}(\tau_i, \omega_i, v_i)$ такое, что $\omega(\tau_{i+1}) \in W(\tau_{i+1})$. Кроме того, существует последовательность движений $\omega_k(\cdot) \in X(\tau_i, \omega_i, v_i)$, равномерно сходящаяся к $\omega(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Для каждого движения $\omega_k(\cdot)$ существует допустимое программное управление $u_k(\cdot)$ первого игрока на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ такое, что $\omega_k(\cdot) = x(\cdot|\tau_i, \omega_i, u_k(\cdot), v_i)$. Обозначим $u_i = U_\varepsilon(\tau_i, x(\tau_i))$. Зафиксируем индекс k и рассмотрим расстояние

$$\|x(\tau_{i+1})-\omega_k(\tau_{i+1})\|^2=$$

$$\left\|x(\tau_i)+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,x(t),u_i,v(t))dt-\omega(\tau_i)-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,\omega_k(t),u_k(t),v_i)dt\right\|^2=$$

$$=\|x(\tau_i)-\omega_i\|^2+$$

$$+2\langle x(\tau_i)-\omega_i,\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,x(t),u_i,v(t))dt-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,\omega_k(t),u_k(t),v_i)dt\rangle+$$

$$+\left\|\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,x(t),u_i,v(t))dt-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,\omega_k(t),u_k(t),v_i)dt\right\|^2. \quad (11)$$

Пользуясь ограниченностью функции f, оценим последнее слагаемое в (11)

$$\left\|\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,x(t),u_i,v(t))dt-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,\omega_k(t),u_k(t),v_i)dt\right\|^2\le$$

$$\le\left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\|f(t,x(t),u_i,v(t))dt-f(t,\omega_k(t),u_k(t),v_i)\|\,dt\right)^2\le(\tau_{i+1}-\tau_i)^2(2M)^2. \quad (12)$$

Исследуем теперь скалярное произведение из правой части равенства (11). Из непрерывности функции f на ограниченном и замкнутом множестве $[t_*,\Theta]\times\bar{X}\times P\times Q$ следует существование такой монотонной функции $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, что $\varphi(y)\to 0$ при $y\to 0+0$ и для любых $t_1,t_2\in[t_*,\Theta]$, $x\in\bar{X}$, $u\in P$ и $v\in Q$ справедливо неравенство

$$\|f(t_1,x,u,v)-f(t_2,x,u,v)\|\le\varphi(|t_1-t_2|).$$

С учетом последнего неравенства и свойства липшицевости функции f из оценок

$$\|f(t,x(t),u_i,v(t))-f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t))\|\le$$

$$\le\|f(t,x(\tau_i),u_i,v(t))-f(t,x(t),u_i,v(t))\|+\|f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t))-f(t,x(\tau_i),u_i,v(t))\|\le$$

$$\le L\|x(\tau_i)-x(t)\|+\varphi(|\tau_i-t|)$$

и

$$\|x(t)-x(\tau_i)\|=\left\|\int_{\tau_i}^{t} f(t,x(t),u_i,v(t)dt\right\|\le M(t-\tau_i)$$

получаем

$$2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,x(t),u_i,v(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t,\omega_k(t),u_k(t),v_i)dt\rangle \le$$

$$\le 2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,\omega_k(\tau_i),u_k(t),v_i)dt\rangle +$$

$$+ 2\|x(\tau_i)-\omega_i\|(\tau_{i+1}-\tau_i)\max_{t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]}[L(\|x(\tau_i)-x(t)\|+\|\omega_k(\tau_i)-\omega_k(t)\|)+2\varphi(t-\tau_i)] \le$$

$$\le 2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,\omega_k(\tau_i),u_k(t),v_i)dt\rangle +$$

$$+ 4c(\tau_{i+1}-\tau_i)(LM(\tau_{i+1}-\tau_i)+\varphi(\tau_{i+1}-\tau_i)). \quad (13)$$

Из неравенств (11), (12) и (13) получаем

$$\|x(\tau_{i+1})-\omega_k(\tau_{i+1})\|^2 \le$$

$$d_i + 4M^2(\tau_{i+1}-\tau_i)^2 +$$

$$+ 2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,\omega_k(\tau_i),u_k(t),v_i)dt\rangle +$$

$$+ 4c(\tau_{i+1}-\tau_i)(LM(\tau_{i+1}-\tau_i)+\varphi(\tau_{i+1}-\tau_i)). \quad (14)$$

Пользуясь условием липшицевости функции f, преобразуем выражение

$$2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,\omega_k(\tau_i),u_k(t),v_i)dt\rangle =$$

$$= 2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t)) - f(\tau_i,x(\tau_i),u_k(t),v_i) +$$

$$f(\tau_i,x(\tau_i),u_k(t),v_i) - f(\tau_i,\omega_k(\tau_i),u_k(t),v_i)dt\rangle \le 2Ld_i(\tau_{i+1}-\tau_i) +$$

$$2\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \langle x(\tau_i)-\omega_i, f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v(t)) - f(\tau_i,x(\tau_i),u_k(t),v_i)\rangle dt. \quad (15)$$

Так как выполняется условие седловой точки в маленькой игре, и управления u_i и v_i выбираются таким образом, что они образуют седловую точку в маленькой игре в позиции $(\tau_i, x(\tau_i))$ по направлению вектора $(x(\tau_i)-\omega_i)$, то для любых $u \in P$ и $v \in Q$ имеем

$$\langle x(\tau_i)-\omega_i, f(\tau_i,x(\tau_i),u_i,v)\rangle \le \langle x(\tau_i)-\omega_i, f(\tau_i,x(\tau_i),u,v_i)\rangle.$$

С учетом последнего неравенства преобразуем оценку (15)

$$2\langle x(\tau_i)-\omega_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, x(\tau_i), u_i, v(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, \omega_k(\tau_i), u_k(t), v_i)dt\rangle \leq$$
$$2Ld_i(\tau_{i+1}-\tau_i) + 2\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \langle x(\tau_i)-\omega_i, f(\tau_i, x(\tau_i), u_i, v(t)) - f(\tau_i, x(\tau_i), u_k(t), v_i)\rangle dt \leq$$
$$2Ld_i(\tau_{i+1}-\tau_i). \quad (16)$$

Из (14) и (16) получаем оценку

$$\|x(\tau_{i+1})-\omega_k(\tau_{i+1})\|^2 \leq d_i + 4M^2(\tau_{i+1}-\tau_i)^2 +$$
$$+ 4c(\tau_{i+1}-\tau_i)(LM(\tau_{i+1}-\tau_i) + \varphi(\tau_{i+1}-\tau_i)) + 2Ld_i(\tau_{i+1}-\tau_i) \leq$$
$$\leq d_i(1+2L(\tau_{i+1}-\tau_i)) + (\tau_{i+1}-\tau_i)(4Md(\Delta) + 4c(LMd(\Delta) + \varphi(d(\Delta)))).$$

Обозначим $K = 2L$ и $\alpha(d(\Delta)) = 4Md(\Delta) + 4c(LMd(\Delta) + \varphi(d(\Delta)))$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по k и, учитывая, что $\omega(\tau_{i+1}) \in W(\tau_{i+1})$, получаем

$$\mathrm{dist}^2(x(\tau_{i+1}), W(\tau_{i+1})) \leq \|x(\tau_{i+1}) - \omega(\tau_{i+1})\|^2 \leq$$
$$\leq \mathrm{dist}^2(x(\tau_i), W(\tau_i))(1 + K(\tau_{i+1}-\tau_i)) + \alpha(d(\Delta))(\tau_{i+1}-\tau_i).$$

Из определения функции φ получаем, что $\alpha(d(\Delta)) \to 0$ при стремлении диаметра разбиения к нулю. Лемма доказана. $\square$

Для дальнейших исследований нам понадобится следующая лемма, доказательство которой легко провести по индукции.

Лемма 7 (об экспоненциальной оценке). *Пусть Δ – произвольное разбиение отрезка $[t_*, \Theta]$ и для чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m \geq 0$ существуют константы $K > 0$ и $A > 0$ такие, что для всех $i < m$ выполняется условие*

$$\mu_{i+1} \leq \mu_i(1 + K(\tau_{i+1}-\tau_i)) + A(\tau_{i+1}-\tau_i).$$

Тогда для любого $i = 0, \ldots, m$ справедлива оценка

$$\mu_i \leq e^{K(\tau_i - t_*)}(\mu_0 + A(\tau_i - t_*)).$$

Лемма 8 (о глобальной оценке). *Пусть $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ u-стабильное множество с замкнутыми сечениями $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и U_ε – стратегия первого игрока, экстремальная к W. Тогда для любой начальной позиции (t_*, x_*) существуют константа $K \geq 0$ и функция $\alpha(\cdot) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что для любого разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ временного интервала $[t_*, \Theta]$, любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U_\varepsilon)$ и любого τ_i справедлива оценка:*

$$\mathrm{dist}^2(x(\tau_i), W(\tau_i)) \leq e^{K(\tau_i - t_*)}(\mathrm{dist}^2(x_*, W(t_*)) + \alpha(d(\Delta))(\tau_i - t_*)),$$

где функция $\alpha(y) \to 0$ при $y \to 0 + 0$.

Доказательство. Обозначим $\mu_i = \mathrm{dist}^2(x(\tau_i), W(\tau_i)) \geq 0$ $(i = 0, \ldots, m)$. Из лемм 6, 7 о локальной и экспоненциальной оценках получаем требумое неравенство. □

Из леммы 8 о глобальной оценке мгновенно следует следующая теорема о достаточных условиях разрешимости задачи наведения на множество M в момент Θ.

Теорема 2. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и существует u-стабильное множество $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ с замкнутыми сечениями $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, содержащее начальную позицию (t_*, x_*), и такое, что $W(\Theta) \subset M$. Тогда позиционная стратегия первого игрока U_ε экстремальная к W решает задачу наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ временного интервала $[t_*, \Theta]$ и любое движение $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U_\varepsilon)$. Из леммы 8 имеем

$$\mathrm{dist}^2(x(\Theta), W(\Theta)) \leq e^{K(\Theta - t_*)}\alpha(d(\Delta))(\Theta - t_*).$$

Из последнего неравенства, включения $W(\Theta) \subset M$ и стремления функции α к нулю при стремлении диаметра разбиения $d(\Delta)$ к нулю получаем $\mathrm{dist}^2(x(\Theta), M) \to 0$ при $d(\Delta) \to 0$, что и доказывает разрешимость задачи наведения. □

Аналогично формулируется и доказывается теорема о достаточных условиях разрешимости задачи уклонения от множества M в момент Θ.

Теорема 3. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и существует v-стабильное множество $Z \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ с замкнутыми сечениями $Z(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, содержащее начальную позицию (t_*, x_*), и такое, что $Z(\Theta) \cap M = \emptyset$. Тогда позиционная стратегия второго игрока V_ε экстремальная к Z решает задачу уклонения из позиции (t_*, x_*) от множества M в момент Θ.*

Теорема 2 доказана при выполнении условия седловой точки в маленькой игре. Рассмотрим пример, показывающий, что это условие является существенным.

Пример 8.

На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t)v(t)$$

с ресурсами управления первого и второго игроков, задаваемыми множествами $P = \{-1, 1\}$ и $Q = \{-1, 1\}$ соответственно. Терминальное множество представляет собой точку $M = \{1\}$.

При рассмотрении примера 6 было показано, что задача наведения из начальной позиции $(t_*, x_*) = (0, 0)$ на терминальное множество M в момент 1 в классе позиционных стратегий первого игрока не разрешима. Покажем, что из всех условий теоремы 2 о разрешимости задачи наведения не выполняется только условие седловой точки в маленькой игре. Действительно, множество

$$W = \{(t, x) : t \in [0, 1], x = t\}$$

является u-стабильным (см. упражнение 12), имеет замкнутые сечения, начальная позиция $(0,0) \in W$ и $W(1) = M$.

Проверим выполнение условия седловой точки в маленькой игре. Для произвольной позиции (t,x) и любого $s \in R^1$ имеем

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} (suv) = |s|, \quad \max_{v \in Q} \min_{u \in P} (suv) = -|s|.$$

Очевидно $|s| = -|s|$ только при $s = 0$, то есть условие седловой точки в маленькой игре не выполняется.

2.4 Множества, порожденные позиционными стратегиями

Зафиксируем произвольную позиционную стратегию $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока, начальную позицию (t_*, x_*) и разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$.

Определение 24. *Множеством, порожденным позиционной стратегией $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока из позиции (t_*, x_*) на разбиении Δ, называется множество позиций*

$$W_\Delta[t_*, x_*, U] = \{(t, x(t)) : t \in [t_*, \Theta], x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)\}$$

Отметим три основных свойства множества $W_\Delta[t_*, x_*, U]$.

1. Начальная позиция $(t_*, x_*) \in W_\Delta[t_*, x_*, U]$.

2. Если стратегия $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока решает из позиции (t_*, x_*) задачу наведения на терминальное множество M в момент Θ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если диаметр разбиения $d(\Delta) < \delta$, то $W_\Delta[t_*, x_*, U](\Theta) \subset M^\varepsilon$.

3. Множество $W_\Delta[t_*, x_*, U]$ u-стабильно.

Первое свойство очевидно. Докажем оставшиеся два. Если стратегия U решает из позиции (t_*, x_*) задачу наведения, то следовательно для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если диаметр разбиения $d(\Delta) < \delta$, то для каждого $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ справедливо $x(\Theta) \in M^\varepsilon$. Из способа построения множества $W_\Delta[t_*, x_*, U]$ получаем справедливость свойства 2.

Докажем теперь свойство u-стабильности. Рассмотрим любые $(t_1, x_1) \in W_\Delta$, $t_2 \in [t_1, \Theta]$ и произвольное допустимое программное управление второго игрока $v(\cdot)$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Найдется допустимое программное управление второго игрока $v_1(\cdot)$ на отрезке $[t_*, t_1]$ на котором $x_\Delta(t_1 | t_*, x_*, U, v_1(\cdot)) = x_1$. Рассмотрим новое допустимое программное управление второго игрока

$$v_2(t) = \begin{cases} v_1(t), & \text{при } t_* \le t \le t_1; \\ \\ v(t), & \text{при } t_1 < t \le t_2. \end{cases}$$

Этому управлению соответствует движение $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot | t_*, x_*, U, v_2(\cdot)) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ такое, что $x(t_1) = x_1$, и по определению $W_\Delta[t_*, x_*, U]$ справедливо включение $(t_2, x(t_2)) \in W_\Delta[t_*, x_*, U]$. Таким образом u-стабильность множества $W_\Delta[t_*, x_*, U]$ доказана.

Определим теперь множества, не зависящие от разбиения Δ.

Определение 25. *Множеством, порожденным позиционной стратегией U первого игрока из позиции (t_*, x_*), называется множество позиций*

$$W[t_*, x_*, U] = \bigcap_{\delta > 0} \bar{W}_\delta[t_*, x_*, U],$$

где $\bar{W}_\delta[t_*, x_*, U]$ – замыкание по t-сечениям множества $W_\delta[t_*, x_*, U] = \bigcup\limits_{\Delta : d(\Delta) < \delta} W_\Delta[t_*, x_*, U]$.

Последнее множество от разбиения временного отрезка не зависит. Сформулируем основные свойства множества $W[t_*, x_*, U]$ в виде теоремы.

Теорема 4. *Пусть позиционная стратегия U первого игрока решает задачу наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ. Тогда множество $W = W[t_*, x_*, U]$ обладает следующими свойствами:*

1. $(t_*, x_*) \in W$.

2. $W(\Theta) \subset M$.

3. W u-стабильно.

4. W имеет замкнутые t-сечения.

Доказательство. Свойство 4 замкнутости сечений следует непосредственно из определения W. Докажем остальные свойства.

1. Мы имеем $(t_*, x_*) \in W_\Delta[t_*, x_*, U]$ при любом Δ, следовательно $(t_*, x_*) \in W$.

2. Ранее было замечено, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ справедливо $W_\Delta[t_*, x_*, U](\Theta) \subset M^\varepsilon$. Следовательно и $W_\delta[t_*, x_*, U](\Theta) \subset M^\varepsilon$. Отсюда и из замкнутости множества M получаем $W(\Theta) \subset M$.

3. Из лемм 3, 4 следует, что множество $\bar{W}_\delta[t_*, x_*, U]$ u-стабильно при любом $\delta > 0$.

Рассмотрим любые $(t_1, x_1) \in W$, $t_2 \in [t_1, \Theta]$ и произвольное допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_1, t_2]$. Из определения множества W имеем $(t_1, x_1) \in \bar{W}_\delta[t_*, x_*, U]$ при всех $\delta > 0$. Следовательно, по свойству u-стабильности $\bar{W}_\delta[t_*, x_*, U]$, для любого $\delta > 0$ существует движение $x_\delta(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_1, v(\cdot))$ такое, что $(t_2, x_\delta(t_2)) \in \bar{W}_\delta[t_*, x_*, U]$. Функции $x_\delta(\cdot)$ образуют семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций и, следовательно, из этого семейства можно выделить последовательность $x_{\delta_k}(\cdot)$, равномерно сходящуюся на $[t_1, t_2]$ к некоторому движению $x(\cdot)$ при $\delta_k \to 0$ такому, что $x(t_1) = x_1$, $x(\cdot) \in \bar{X}(t_1, x_1, v(\cdot))$. Легко заметить, что при любых $0 < \delta_1 < \delta_2$ справедливо включение $\bar{W}_{\delta_1}[t_*, x_*, U] \subset \bar{W}_{\delta_2}[t_*, x_*, U]$. Следовательно, $x(t_2) \in W(t_2)$ и свойство u-стабильности W доказано.

$\square$

Сформулируем аналогичные результаты для второго игрока. Зафиксируем позиционную стратегию $V \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ второго игрока, начальную позицию (t_*, x_*) и разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$.

Определение 26. *Множеством, порожденным позиционной стратегией $V \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ второго игрока из позиции (t_*, x_*) на разбиении Δ, называется множество позиций*

$$Z_\Delta[t_*, x_*, V] = \{(t, x(t)) : t \in [t_*, \Theta], x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, V)\}$$

Определим три основных свойства множества $Z_\Delta[t_*, x_*, V]$.

1. Начальная позиция $(t_*, x_*) \in Z_\Delta[t_*, x_*, V]$.

2. Если стратегия $V \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ второго игрока решает из позиции (t_*, x_*) задачу уклонения от множества M в момент Θ, то существуют константы $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что если диаметр разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ удовлетворяет условию $d(\Delta) < \delta$, то $Z_\Delta[t_*, x_*, V](\Theta) \cap M^\varepsilon = \emptyset$.

3. Множество $Z_\Delta[t_*, x_*, V]$ v-стабильно.

Определение 27. *Множеством, порожденным позиционной стратегией V второго игрока из позиции (t_*, x_*), называется множество позиций*

$$Z[t_*, x_*, V] = \bigcap_{\delta > 0} \bar{Z}_\delta[t_*, x_*, V],$$

где $\bar{Z}_\delta[t_*, x_*, V]$ – замыкание по сечениям множества $Z_\delta[t_*, x_*, V] = \bigcup\limits_{\Delta : d(\Delta) < \delta} Z_\Delta[t_*, x_*, V]$.

Теорема 5. *Пусть позиционная стратегия V второго игрока решает задачу уклонения из позиции $[t_*, x_*]$ от терминального множества M в момент Θ. Тогда множество $Z = Z[t_*, x_*, V]$ обладает следующими свойствами:*

1. $(t_*, x_*) \in Z$.

2. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $Z(\Theta) \cap M^\varepsilon = \emptyset$.

3. Z v-стабильно.

4. Z имеет замкнутые t-сечения.

Упражнение 18. *Доказать теорему 5.*

Рассмотрим позиционную стратегию V второго игрока, которая решает из позиции (t_*, x_*) задачу уклонения от терминального множества M в момент Θ. Справедлива следующая теорема, которая играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

Теорема 6. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и позиционная стратегия V второго игрока решает из* *позиции* (t_*, x_*) *задачу уклонения от терминального множества* M *в момент* Θ. *Тогда существуют константа* $h > 0$ *и позиционная стратегия* V_* *второго игрока, решающая задачу уклонения из любой позиции* (t_*, x'_*) *такой, что* $\|x_* - x'_*\| < h$.

Доказательство. Рассмотрим множество $Z = Z[t_*, x_*, V]$, порожденное стратегией V из позиции (t_*, x_*), и позиционную стратегию V_* второго игрока экстремальную ко множеству Z. По теореме 5 существует $\varepsilon > 0$, для которого $Z(\Theta) \cap M^\varepsilon = \emptyset$.

Далее выберем произвольное разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ временного интервала $[t_*, \Theta]$, произвольную позицию (t_*, x'_*) и любое движение $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x'_*, V_*)$. Для движения $x(\cdot)$ под действием позиционной стратегии V_* второго игрока, экстремальной к v-стабильному множеству Z справедлива следующая оценка

$$\mathrm{dist}^2(x(\Theta), Z(\Theta)) \leq e^{K(\Theta - t_*)}(\|x_* - x'_*\|^2 + \alpha(d(\Delta))(\Theta - t_*)),$$

доказательство которой проводится аналогично доказательству леммы 8 о глобальной оценке. Здесь K – положительная константа и функция $\alpha(y) \to 0$ при $y \to 0 + 0$.

Из последней оценки следует существование констант $h > 0$ и $\delta > 0$ таких, что при $\|x_* - x'_*\| < h$ и $d(\Delta) < \delta$ для любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x'_*, V_*)$ справедливо $x(\Theta) \in Z(\Theta)^{\frac{\varepsilon}{2}}$. Следовательно $x(\Theta) \notin M^{\frac{\varepsilon}{2}}$ и стратегия V_* решает задачу уклонения из позиции (t_*, x'_*) от множества M в момент Θ при условии $\|x_* - x'_*\| < h$. $\square$

Упражнение 19. *Пусть для любой позиции* (t, x) *и вектора* $s \in R^n$ *выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Доказать, что из разрешимости задачи наведения из позиции* (t_*, x_*) *на множество* M *в момент* Θ *в классе допустимых контр-управлений первого игрока следует разрешимость задачи наведения из позиции* (t_*, x_*) *на множество* M *в момент* Θ *в классе позиционных стратегий первого игрока.*

2.5 Максимальные стабильные множества. Альтернатива

Сконструируем максимальное u-стабильное множество, которое может существовать в задаче наведения на терминальное множество M в момент Θ.

Определение 28. *Множество $W \subset [t_0, \Theta] \times R^n$ называется максимальным u-стабильным множеством в задаче наведения на терминальное множество M в момент Θ, если $W(\Theta) \subset M$ и для любого u-стабильного множества $W' \subset [t_0, \Theta] \times R^n$ такого, что $W'(\Theta) \subset M$, справедливо включение $W' \subset W$.*

Уберем из пространства позиций все те начальные позиции (t_*, x_*), из которых разрешима задача уклонения от множества M в момент Θ в классе позиционных стратегий второго игрока. Выброшенные позиции образуют множество $Z \subset [t_0, \Theta] \times R^n$ с открытыми сечениями $Z(t)$ при всех $t \in [t_0, \Theta]$. Докажем это. Рассмотрим любую позицию $(t_*, x_*) \in Z$. По теореме 6 существует стратегия второго игрока, решающая задачу уклонения из некоторой окрестности точки x_*. Таким образом, точка x_* содержится в $Z(t_*)$ вместе с некоторой окрестностью. Откуда и следует открытость t-сечений множества Z.

Обозначим через W множество всех оставшихся позиций, то есть

$$W = [t_0, \Theta] \times R^n \setminus Z. \tag{17}$$

Лемма 9. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Тогда множество W, определяемое (17), имеет замкнутые t-сечения и составляет максимальное u-стабильное множество такое, что $W(\Theta) = M$.*

Доказательство. Замкнутость сечений следует из свойств множества Z.

Докажем u-стабильность. Предположим, что W не является u-стабильным. То есть существует позиция $(t_*, x_*) \in W$, момент времени $\xi \in [t_*, \Theta]$ и допустимое программное управление $v_*(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \xi]$ такие, что для любого движения $x(\cdot) \in$

$\bar{X}(t_*, x_*, v_*(\cdot))$ справедливо $x(\xi) \notin W(\xi)$. Введем в рассмотрение множество

$$H = \{x(\xi) : x(\cdot) \in \bar{X}(t_*, x_*, v_*(\cdot))\}.$$

Множество H является замкнутым и из нашего предположения следует, что $H \cap W(\xi) = \emptyset$. По теореме 6 для любой точки $x \in H$ найдется позиционная стратегия второго игрока, решающая из некоторой окрестности точки x задачу уклонения от множества M в момент Θ. Так как множество H компактно, то его можно покрыть конечной системой таких окрестностей (см. [4]). Таким образом, существуют точки $x_i \in H$, $i = 1, \ldots, k$, соответствующие им числа $h_i > 0$ и позиционные стратегии V_i второго игрока такие, что

$$H \subset \bigcup_{i=1,\ldots,k} S^n_{h_i}(x_i),$$

и каждая стратегия V_i решает из h_i-окрестности точки x_i задачу уклонения от множества M в момент Θ, то есть существуют константы $\varepsilon_i > 0$ и $\delta_i > 0$ такие, что для любого разбиения Δ отрезка $[\xi, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta_i$, любого $x' \in R^n$ такого, что $\|x' - x_i\| \le h_i$, и любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(\xi, x', V_i)$ выполняется условие $x(\Theta) \notin M^{\varepsilon_i}$.

Определим множество

$$Z_v = \{(t, x(t)) : \quad t_* \le t \le \xi,\ x(\cdot) \in X(t_*, x_*, v_*(\cdot))\} \cup \left(\bigcup_{x \in H} Z[\xi, x, V_{i(x)}] \right),$$

где функция $i(x) \in \{1, \ldots, k\}$ и удовлетворяет условию $\|x - x_{i(x)}\| < h_{i(x)}$.

Z_v по построению является v-стабильным множеством, следовательно и его замыкание по сечениям $\bar{Z}_v$ v-стабильно. Так как стратегий V_i конечное число, то найдется $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) > 0$ такое, что $\bar{Z}_v(\Theta) \cap M^\varepsilon = \emptyset$. Следовательно по теореме 3 стратегия V_ε второго игрока, экстремальная к $\bar{Z}_v$ решает из позиции (t_*, x_*) задачу уклонения от множества M в момент Θ, что противоречит выбору точки $(t_*, x_*) \in W$. u-стабильность множества W доказана.

Покажем теперь, что любое u-стабильное множество W_u такое, что $W_u(\Theta) \subset M$, содержится в W. Пусть позиция $(t_*, x_*) \in W_u$ и при этом $(t_*, x_*) \notin W$. Из того, что $(t_*, x_*) \notin W$

следует, что не может существовать позиционной стратегии первого игрока, решающей задачу наведения из позиции (t_*, x_*) на множество M в момент Θ. Это следует из теоремы 1 о несовместности задач наведения и уклонения из одной позиции. Но с другой стороны из принадлежности позиции (t_*, x_*) множеству W_u следует, что стратегия первого игрока экстремальная к W_u решает из этой позиции задачу наведения. Получаем $W_u \subset W$.

Равенство $W(\Theta) = M$ очевидно. $\square$

Следствием данной леммы является теорема об альтернативной разрешимости задач наведения и уклонения.

Теорема 7 (об альтернативе). *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Тогда из любой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \Theta] \times R^n$ либо разрешима задача наведения на терминальное множество M в момент Θ в классе позиционных стратегий первого игрока, либо разрешима задача уклонения от терминального множества M в момент Θ в классе позиционных стратегий второго игрока.*

Упражнение 20. *Справедливо ли утверждение об альтернативной разрешимости задач наведения и уклонения для дифференциальной игры наведения-уклонения в момент Θ с начальной позицией (t_*, x_*) и терминальным множеством M в классе допустимых программных управлений первого и второго игроков (в классе допустимых контр-управлений первого и второго игроков)?*

Упражнение 21. *На отрезке времени $[t_*, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с ресурсными множествами $P = [-1, 0]$ и $Q = [0, 1]$ первого и второго игроков соответственно и терминальным множеством $M = [-1, 1]$.

Построить максимальное u-стабильное множество, оканчивающееся на M, и позиционную стратегию первого игрока, экстремальную к этому множеству.

3 Устойчивость решений дифференциальных игр

Доказанные ранее теоремы 2 и 3 о разрешимости дифференциальной игры наведения-уклонения в момент Θ с начальной позицией (t_*, x_*) и терминальным множеством M в классе позиционных стратегий игроков опирались на точную информацию о реализовавшейся позиции $(t, x(t))$ управляемой системы (1). Однако, бывают случаи, когда текущая позиция известна игрокам не точно. Например, неточное измерение фазовой переменной или запаздывание информации. Оказывается, такие помехи могут испортить позиционный способ управления, который решал поставленную задачу при точном измерении текущей позиции. Таким образом, решение оказывается неустойчивым.

Сформулируем понятие устойчивости позиционной стратегии. Пусть первый игрок выбрал позиционную стратегию $U \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$. И пусть в каждый момент времени $t \in [t_*, \Theta]$ вместо точного значения фазовой переменной $x(t)$ ему известно неточное значение $\tilde{x}(t)$ такое, что $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq h$, где $h > 0$ – точность измерения. Таким образом, вместо позиционной стратегии $U(t, x(t))$ в позиции $(t, x(t))$ первый игрок использует стратегию $U(t, \tilde{x}(t))$.

Определение 29. *Погрешностью измерения точности $h > 0$ будем называть любую функцию $\xi(\cdot) : [t_*, \Theta] \to R^n$ такую, что $\|\xi(t)\| \leq h$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$. Множество всех погрешностей измерения точности $h > 0$, определенных на отрезке $[t_*, \Theta]$, обозначим $\Xi_h[t_*, \Theta]$.*

Определение 30. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции (t_*, x_*) под действием позиционной стратегии $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ первого игрока и допустимого программного управления $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ второго игрока на разбиении Δ при* *погрешности измерения* $\xi(\cdot) \in \Xi_h[t_*, \Theta]$ *точности* $h > 0$ *называется решение* $x(\cdot)$ *дифференциального уравнения (1) с начальным условием* $x(t_*) = x_*$*, где* $u(t) = U(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i))$ *и* $\tilde{x}(\tau_i) = x(\tau_i) + \xi(\tau_i)$ $(t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, \ldots, m-1)$.

Обозначим это движение $x_\Delta(\cdot | t_*, x_*, U, v(\cdot), \xi(\cdot))$. Здесь погрешность измерения $\xi(\cdot)$ можно трактовать как дополнительное управление второго игрока.

Определение 31. *Пучком движений из заданной позиции* (t_*, x_*)*, порожденным позиционной стратегией* $U \in \mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$ *первого игрока на разбиении* Δ *при погрешности измерения точности* $h > 0$*, называется множество*

$$X_\Delta(t_*, x_*, U, h) = \{x_\Delta(\cdot | t_*, x_*, U, v(\cdot), \xi(\cdot)) : \, v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta],\, \xi(\cdot) \in \Xi_h[t_*, \Theta]\}.$$

Определение 32. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции* (t_*, x_*) *под действием позиционной стратегии* $V \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$ *второго игрока и допустимого программного управления* $u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ *первого игрока на разбиении* Δ *при погрешности измерения* $\xi(\cdot) \in \Xi_h[t_*, \Theta]$ *точности* $h > 0$ *называется решение* $x(\cdot)$ *дифференциального уравнения (1) с начальным условием* $x(t_*) = x_*$*, где* $v(t) = V(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i))$ *и* $\tilde{x}(\tau_i) = x(\tau_i) + \xi(\tau_i)$ $(t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, \ldots, m-1)$.

Обозначим это движение $x_\Delta(\cdot | t_*, x_*, u(\cdot), V, \xi(\cdot))$.

Определение 33. *Пучком движений из заданной позиции* (t_*, x_*)*, порожденным позиционной стратегией* $V \in \mathcal{V}_{pos}[t_*, \Theta]$ *второго игрока на разбиении* Δ *при погрешности измерения точности* $h > 0$*, называется множество*

$$X_\Delta(t_*, x_*, V, h) = \{x_\Delta(\cdot | t_*, x_*, u(\cdot), V, \xi(\cdot)) : \, u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta],\, \xi(\cdot) \in \Xi_h[t_*, \Theta]\}.$$

Определение 34. *Позиционная стратегия* U *первого игрока устойчиво решает из позиции* (t_*, x_*) *задачу наведения на терминальное множество* M *в момент* Θ*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $\delta > 0$ *и* $h > 0$ *такие, что для любого разбиения* Δ *отрезка*

$[t_*,\Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ для каждого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*,x_*,U,h)$ справедливо включение $x(\Theta) \in M^\varepsilon$.

Определение 35. *Позиционная стратегия V второго игрока устойчиво решает из позиции (t_*,x_*) задачу уклонения от терминального множества M в момент Θ, если существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $h > 0$ такие, что для любого разбиения Δ отрезка $[t_*,\Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ для каждого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*,x_*,V,h)$ выполняется условие $x(\Theta) \notin M^\varepsilon$.*

Рассмотрим пример неустойчивой позиционной стратегии первого игрока.

Пример 9.

На отрезке времени $[t_*,\Theta] = [0,1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с ресурсными множествами $P = [-2,2]$ первого игрока и $Q = [-1,1]$ второго игрока и терминальным множеством $M = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. Пусть задана начальная позиция $(t_*,x_*) = (0,0)$.

Множество $W = \{(t,x) :\ t \in [0,1],\ |x| \geq t\}$ является u-стабильным, содержит начальную позицию $(0,0)$ и $W(1) = M$. Для любой позиции (t,x) и $s \in R^1$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре. По теореме 2 позиционная стратегия U_ε первого игрока экстремальная ко множеству W и, определяемая по правилу

$$U_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} 2, & \text{при } x \geq 0, \\ -2, & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

решает задачу наведения из позиции $(0,0)$ на множество M в момент 1.

Пусть первый игрок измеряет фазовую переменную с погрешностью, не превышающей величину $h > 0$, и вместо величины $x(t)$ ему в каждый момент времени $t \in [0,1]$ известна величина $\tilde{x}(t)$ такая, что $|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq h$. Кроме того помеха выбирается некоторым неблагоприятным для первого игрока образом. Ей как бы управляет второй игрок.

Рассмотрим произвольное разбиение Δ отрезка $[0,1]$ с диаметром $d(\Delta) = \delta$, нулевое постоянное управление второго игрока $v = 0$ и соответствующее движение $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot|0, 0, U_\varepsilon, v, \xi(\cdot))$, где погрешность измерения $\xi(\cdot)$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 0, \ldots, m-1)$ удовлетворяет условию

$$\xi(t) = \begin{cases} -h, & \text{при } x(\tau_i) \geq 0, \\ h, & \text{при } x(\tau_i) < 0. \end{cases}$$

Пусть величина погрешности удовлетворяет неравенству $h > 2\delta$.

На начальном интервале $[\tau_0, \tau_1)$ первый игрок использует постоянное управление $u_0 = U_\varepsilon(\tau_0, \tilde{x}(\tau_0)) = U_\varepsilon(0, -h) = -2$. Получаем $x(\tau_1) = -2(\tau_1 - \tau_0) \in [-2\delta, 0)$.

Рассмотрим произвольный интервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Если $x(\tau_i) \in [-2\delta, 0)$, то $\tilde{x}(\tau_i) = x(\tau_i) + h > 0$ и первый игрок использует на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ постоянное управление $u_i = U_\varepsilon(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i)) = 2$. Получаем $x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) + 2(\tau_{i+1} - \tau_i) \in (-2\delta, 2\delta)$.

Если же $x(\tau_i) \in [0, 2\delta)$, то $\tilde{x}(\tau_i) = x(\tau_i) - h < 0$ и первый игрок использует на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ постоянное управление $u_i = U_\varepsilon(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i)) = -2$. Получаем $x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) - 2(\tau_{i+1} - \tau_i) \in [-2\delta, 2\delta)$.

Таким образом для любого $i = 0, \ldots, m$ выполняется включение $x(\tau_i) \in [-2\delta, 2\delta)$. При условии $\delta < \frac{1}{4}$ имеем $|x(1)| \leq 2\delta < \frac{1}{2}$ и следовательно $x(1) \notin M^{\frac{1}{2}}$. Получаем, что стратегия U_ε не решает из позиции $(0, 0)$ задачу наведения в случае неточного измерения фазовой переменной.

Упражнение 22. *Доказать u-стабильность множества W из примера 9.*

Следующая теорема дает достаточные условия, при которых стратегия экстремального сдвига первого игрока устойчиво решает задачу наведения.

Теорема 8. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие сед-*

ловой точки в маленькой игре и существует u-стабильное множество $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ с замкнутыми и выпуклыми сечениями $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, содержащее начальную позицию (t_*, x_*), и такое, что $W(\Theta) \subset M$. Тогда стратегия первого игрока U_ε экстремальная к W устойчиво решает задачу наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ.

Доказательство. Отметим основной момент доказательства. Для произвольной позиции (t, x) будем обозначать через $\omega(t, x)$ ближайшую к x точку из сечения $W(t)$. Так как сечения $W(t)$ являются выпуклыми и замкнутыми множествами при всех $t \in [t_*, \Theta]$, то для любой позиции (t, x) точка $\omega(t, x)$ будет определена единственным образом как проекция точки x на множество $W(t)$. Проекция на выпуклое и замкнутое множество обладает сжимающим свойством (см. [3]). То есть для любого $t \in [t_*, \Theta]$ и любых $x_1, x_2 \in R^n$ справедливо

$$\|\omega(t, x_1) - \omega(t, x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Таким образом, если погрешность измерения фазового вектора $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq h$, то $\|\omega(t, x(t)) - \omega(t, \tilde{x}(t))\| \leq h$.

Далее доказательство с небольшими изменениями повторяет доказательство лемм 6 и 8 о локальной и глобальной оценках и теоремы 2. □

Упражнение 23. *Доказать теорему 8.*

4 Процедура управления с поводырем

В предыдущем разделе показано, что позиционные стратегии не всегда являются устойчивыми по отношению к неточности измерения фазового вектора. В этом разделе предлагается другая процедура управления по принципу обратной связи, которая позволяет первому игроку устойчиво решать задачу наведения на терминальное множество M в момент Θ.

Пусть найдено u-стабильное множество W такое, что $(t_*, x_*) \in W$ и выполняется включение $W(\Theta) \subset M$, и пусть первый игрок измеряет фазовую переменную с точностью $h > 0$, и вместо величины $x(t)$ ему в каждый момент времени известна величина $\tilde{x}(t)$ такая, что $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq h$.

Рассмотрим процедуру управления, связанную с u-стабильным множеством W. Введем вспомогательную переменную $\omega(t) \in R^n$. Назовем ее *поводырем.* Движения поводыря $\omega(t)$ и фазовой переменной $x(t)$ будут строиться таким образом, чтобы они взаимно отслеживались. Движение $x(t)$ на отрезке $[t_*, \Theta]$ описывается дифференциальным уравнением (1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$ и зависит от допустимых программных управлений $u(\cdot)$ первого игрока и $v(\cdot)$ второго игрока. Способ формирования значений управления первого игрока будет описан далее. Выбором управления $v(\cdot)$ распоряжается второй игрок.

Динамика поводыря $\omega(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\omega}(t) = f(t, \omega(t), u^*(t), v^*(t)), \tag{18}$$

с начальным условием $\omega(t_*) = x_*$, где управлениями $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]$ и $v^*(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ полностью распоряжается первый игрок.

Будем рассматривать движения расширенной системы (1),(18).

Определение 36. *Позицией расширенной системы будем называть тройку* $(t, x, \omega) \subset [t_*, \Theta] \times R^n \times R^n$.

Система (1),(18) содержит четыре управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$, причем три из них находятся в распоряжении первого игрока, а второй игрок распоряжается только выбором управления $v(\cdot)$ в уравнении (1). Таким образом движением поводыря полностью распоряжается первый игрок. Определим способ формирования значений трех оставшихся управлений.

Определим в каждой расширенной позиции (t, x, ω) значения двух позиционных стратегий $U(t,x,\omega)$ первого игрока и $V^*(t,x,\omega)$ второго игрока так, что

$$\max_{v\in Q}\langle(x-\omega), f(t,x,U(t,x,\omega),v)\rangle = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle(x-\omega), f(t,x,u,v)\rangle,$$

$$\min_{u\in P}\langle(x-\omega), f(t,x,u,V^*(t,x,\omega))\rangle = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle(x-\omega), f(t,x,u,v)\rangle.$$

Значения управлений $u(t)$ и $v^*(t)$ будем определять с помощью позиционных законов управления U и V^*. Заметим, что два указанных управления выбираются так, чтобы движения исходной системы и поводыря взаимно отслеживались.

Значения оставшегося управления $u^*(t)$ определим с помощью позиционной стратегии $U_\varepsilon : (t,\omega) \to P$, экстремальной к множеству W. Такой выбор управления позволяет удержать движение поводыря в сколь угодно малой окрестности множества W.

Зафиксируем произвольное разбиение Δ отрезка $[t_*, \Theta]$.

Определение 37. *Движением управляемой системы (1), исходящим из начальной позиции (t_*, x_*) под действием процедуры управления с поводырем первого игрока экстремальной к множеству W и допустимого программного управления $v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta]$ второго игрока, на разбиении Δ при погрешности измерения $\xi(\cdot) \in \Xi_h[t_*, \Theta]$ точности $h > 0$, называется компонента $x(\cdot)$ решения $(x(\cdot), \omega(\cdot))$ системы дифференциальных уравнений (1),(18) с начальным условием $x(t_*) = x_*$ и $\omega(t_*) = x_*$, где $u(t) = U(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i), \omega(\tau_i))$, $u^*(t) = U_\varepsilon(\tau_i, \omega(\tau_i))$, $v^*(t) = V^*(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i), \omega(\tau_i))$, $\tilde{x}(\tau_i) = x(\tau_i) + \xi(\tau_i)$ $(t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \dots, m-1)$. Компонента $\omega(\cdot)$ называется движением поводыря.*

Обозначим движение управляемой системы через $x(\cdot|t_*, x_*, W, v(\cdot), \xi(\cdot))$.

Определение 38. *Пучком движений из заданной начальной позиции (t_*, x_*), порожденным процедурой управления с поводырем первого игрока экстремальной к множеству W на разбиении Δ при погрешности измерения точности $h > 0$, называется множество*

$$X_\Delta(t_*, x_*, W, h) = \{x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, W, v(\cdot), \xi(\cdot)) : \, v(\cdot) \in \mathcal{V}[t_*, \Theta], \, \xi(\cdot) \in \Xi_h[t_*, \Theta]\}.$$

Определение 39. *Процедура управления с поводырем первого игрока экстремальная к множеству W устойчиво решает из позиции (t_*, x_*) задачу наведения на терминальное множество M в момент Θ, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $h > 0$ такие, что для любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для каждого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, W, h)$ справедливо $x(\Theta) \in M^\varepsilon$.*

Теорема 9. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и существует u-стабильное множество $W \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ с замкнутыми сечениями $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, содержащее начальную позицию (t_*, x_*), и такое, что $W(\Theta) \subset M$. Тогда процедура управления с поводырем первого игрока экстремальная к множеству W устойчиво решает из позиции (t_*, x_*) задачу наведения на терминальное множество M в момент Θ.*

Доказательство. Существует ограниченное и замкнутое множество $X \subset R^n$, содержащее все рассматриваемые при доказательстве теоремы движения, в том числе и результаты измерения фазовой переменной. Найдется константа $M > 0$ такая, что $\|f(t, x, u, v)\| \leq M$ при любых $t \in [t_*, \Theta]$, $x \in X$, $u \in P$ и $v \in Q$. Также при $x \in X$ функция f удовлетворяет условию локальной липшицевости по переменной x с константой L.

Рассмотрим произвольное разбиение Δ отрезка $[t_*, \Theta]$, произвольное допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ и погрешность измерения $\xi(\cdot)$ точности $h > 0$. Процедура управления с поводырем первого игрока экстремальная к W определяет на разбиении Δ при погрешности измерения $\xi(\cdot)$ движение $x(\cdot) = x_\Delta(\cdot | t_*, x_*, W, v(\cdot), \xi(\cdot))$ и соответствующее ему движение поводыря $\omega(\cdot)$. Оценим расстояние между этими движениями.

Обозначим $d_i = \|x(\tau_i) - \omega(\tau_i)\|^2$, $u_i^* = U_\varepsilon(\tau_i, \omega(\tau_i))$, $u_i = U(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i), \omega(\tau_i))$,

$v_i^* = V^*(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i), \omega(\tau_i))$. Аналогично лемме о локальной оценке для любого i ($i < m$) имеем

$$d_{i+1} = \|x(\tau_{i+1}) - \omega(\tau_{i+1})\|^2 =$$

$$= \left\| x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, x(t), u_i, v(t))dt - \omega(\tau_i) - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, \omega(t), u_i^*, v_i^*)dt \right\|^2 \leq$$

$$\leq d_i + 4M^2(\tau_{i+1} - \tau_i)^2 +$$

$$+ 2\langle x(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, x(t), u_i, v(t))dt - f(t, \omega(t), u_i^*, v_i^*)dt \rangle. \quad (19)$$

Оценим последнее скалярное произведение в (19) с учетом того, что существует константа $c > 0$ такая, что $\|x_1 - x_2\| \leq c$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

$$2\langle x(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, x(t), u_i, v(t))dt - f(t, \omega(t), u_i^*, v_i^*)dt \rangle \leq$$

$$\leq 2\langle x(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, x(\tau_i), u_i, v(t))dt - f(\tau_i, \omega(\tau_i), u_i^*, v_i^*)dt \rangle +$$

$$+ 4c(\tau_{i+1} - \tau_i)(LM(\tau_{i+1} - \tau_i) + \varphi(\tau_{i+1} - \tau_i)),$$

где монотонная функция $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ удовлетворяет условию $\varphi(y) \to 0$ при $y \to 0+$ (см. вывод оценки (13)). Продолжим последнее неравенство.

$$2\langle x(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, x(t), u_i, v(t))dt - f(t, \omega(t), u_i^*, v_i^*)dt \rangle \leq$$

$$\leq 2\langle x(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, x(\tau_i), u_i, v(t))dt - f(\tau_i, x(\tau_i), u_i^*, v_i^*)dt \rangle +$$

$$+ 4c(\tau_{i+1} - \tau_i)(LM(\tau_{i+1} - \tau_i) + \varphi(\tau_{i+1} - \tau_i)) + 2Ld_i(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Перейдем в последнем неравенстве от $x(\tau_i)$ к $\tilde{x}(\tau_i)$.

$$2\langle x(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t, x(t), u_i, v(t))dt - f(t, \omega(t), u_i^*, v_i^*)dt \rangle \leq$$

$$\leq 2\langle \tilde{x}(\tau_i) - \omega(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i), u_i, v(t))dt - f(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i), u_i^*, v_i^*)dt \rangle +$$

$$+ 4c(\tau_{i+1} - \tau_i)(LM(\tau_{i+1} - \tau_i) + \varphi(\tau_{i+1} - \tau_i)) + 2Ld_i(\tau_{i+1} - \tau_i) +$$

$$+ 4cLh(\tau_{i+1} - \tau_i) + 4Mh(\tau_{i+1} - \tau_i). \quad (20)$$

Из (19) и (20) с учетом того, что пара (u_i, v_i^*) образует седловую точку в маленькой игре в позиции $(\tau_i, \tilde{x}(\tau_i))$ по направлению вектора $(\tilde{x}(\tau_i) - \omega(\tau_i))$, получаем следующее неравенство

$$d_{i+1} \leq d_i + 4M^2(\tau_{i+1} - \tau_i)^2 + 4c(\tau_{i+1} - \tau_i)(LM(\tau_{i+1} - \tau_i) + \varphi(\tau_{i+1} - \tau_i)) +$$
$$2Ld_i(\tau_{i+1} - \tau_i) + 4cLh(\tau_{i+1} - \tau_i) + 4Mh(\tau_{i+1} - \tau_i) \leq$$
$$d_i(1 + 2L(\tau_{i+1} - \tau_i)) + 4(\tau_{i+1} - \tau_i)(M^2 d(\Delta) + cLMd(\Delta) + c\varphi(d(\Delta)) + cLh + Mh).$$

Обозначим $K = 2L$ и $\alpha = 4(M^2 d(\Delta) + cLMd(\Delta) + c\varphi(d(\Delta)) + cLh + Mh)$. Для чисел d_i справедлива лемма 7 об экспоненциальной оценке и, следовательно, для любого $i = 0, \ldots, m$ верно следующее неравенство

$$d_i \leq e^{K(\tau_i - t_*)}(\tau_i - t_*)\alpha.$$

Так как $\alpha \to 0$ при $d(\Delta) \to 0$ и $h \to 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta_1 > 0$ и $h > 0$, что при $d(\Delta) < \delta_1$

$$\|x(\Theta) - \omega(\Theta)\| = \sqrt{d_m} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее из u-стабильности множества W, способа выбора стратегии U_ε, как стратегии экстремального сдвига на множество W, и теоремы 2 следует существование константы $\delta_2 >$ такой, что при $d(\Delta) < \delta_2$ справедливо неравенство

$$\mathrm{dist}(\omega(\Theta), W(\Theta)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $d(\Delta) \leq \min(\delta_1, \delta_2)$ и погрешности измерения фазовой переменной точности h расстояние $\mathrm{dist}(x(\Theta), W(\Theta)) \leq \varepsilon$ и значит $x(\Theta) \in M^\varepsilon$. Произвольность выбора движения $x(\cdot)$ из пучка движений $X_\Delta(t_*, x_*, W, h)$ доказывает теорему. $\square$

5 Задача наведения для систем с простыми движениями

В этом и следующем разделах рассматриваются два специальных класса дифференциальных игр и приводятся эффективные методы их решения, разработанные А.В. Кряжимским.

На отрезке времени $[t_*, \Theta]$ рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \tag{21}$$

называемую *системой с простыми движениями*. Здесь фазовый вектор $x \in R^n$. Кроме того будем считать, что ресурсные множества P первого игрока, Q второго игрока и терминальное множество M – выпуклые, замкнутые и ограниченные множества.

Рассмотрим задачу наведения из заданной начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ в различных классах законов управления первого игрока.

5.1 Задача наведения в классе контр-управлений первого игрока

Рассмотрим *искусственную игру наведения-уклонения в момент* Θ *с начальной позицией* (t_*, x_*) *и терминальным множеством* M, в которой игроки используют постоянные на всем временном интервале $[t_*, \Theta]$ управления. Пусть второй игрок в искусственной игре выбирает свое управление, не имея никакой информации об управлении первого игрока, а первому игроку при выборе своего управления известно управление противника. Условие гарантированного выигрыша второго игрока в искусственной игре в позиции (t_*, x_*) можно записать в следующем виде.

Условие конечномерного уклонения (УКУ) . Существует $v \in Q$ такое, что для любого $u \in P$ справедливо

$$x_* + u(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \notin M.$$

Лемма 10 (о неразрешимости). *Пусть в позиции* (t_*, x_*) *выполнено условие конечномерного уклонения. Тогда задача наведения из позиции* (t_*, x_*) *на множество* M *в момент* Θ *не разрешима ни в классе* $\mathcal{U}[t_*, \Theta]$, *ни в классе* $\bar{\mathcal{U}}[t_*, \Theta]$, *ни в классе* $\mathcal{U}_{pos}[t_*, \Theta]$.

Доказательство. Возьмем постоянное управление $v \in Q$ второго игрока, при котором выполняется УКУ, и любое допустимое программное управление $u(\cdot)$ первого игрока. Рассмотрим движение $x(\cdot|t_*, x_*, u(\cdot), v)$, соответствующее этим управлениям.

$$x(\Theta) = x_* + \int_{t_*}^{\Theta} u(t)dt + v(\Theta - t_*).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{t_*}^{\Theta} u(t)dt = \frac{\int_{t_*}^{\Theta} u(t)dt}{(\Theta - t_*)}(\Theta - t_*).$$

Из выпуклости и замкнутости P имеем

$$\frac{\int_{t_*}^{\Theta} u(t)dt}{(\Theta - t_*)} = u \in P.$$

Следовательно из УКУ

$$x(\Theta) = x_* + u(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \notin M$$

Получаем, что задача наведения не разрешима в классе допустимых программных управлений первого игрока.

Рассмотрим теперь произвольное допустимое контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока. Управление $u(t) = \bar{u}(t, v)$ является программным управлением и по доказанному ранее не решает задачу наведения.

Докажем неразрешимость задачи наведения в классе позиционных стратегий первого игрока. Рассмотрим произвольную позиционную стратегию U первого игрока и разбиение Δ отрезка $[t_*, \Theta]$. Определим область достижимости системы (21) при фиксированном управлении v второго игрока

$$G = \{x(\Theta|t_*, x_*, u(\cdot), v) : \, u(\cdot) \in \mathcal{U}[t_*, \Theta]\}.$$

Из ранее доказанного следует, что множество G можно представить в виде

$$G = \{x_* + u(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) : \, u \in P\},$$

то есть вместо всевозможных допустимых программных управлений первого игрока можно использовать только постоянные управления. Множество G замкнуто и из УКУ следует, что $G \cap M = \emptyset$ и следовательно эти множества строго отделимы, то есть $G \cap M^{\varepsilon} = \emptyset$ при некотором $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $x(\cdot) = x_{\Delta}(\cdot|t_*, x_*, U, v) \in X_{\Delta}(t_*, x_*, U)$. Справедливо $x(\Theta) \in G$ и следовательно $x(\Theta) \notin M^{\varepsilon}$. Получаем, что задача наведения не разрешима и в классе позиционных стратегий первого игрока. □

Сформулируем обратное к УКУ условие, гарантирующее выигрыш первого игрока в искусственной игре.

Условие конечномерного наведения (УКН) . Для любого $v \in Q$ существует $u \in P$ такое, что справедливо включение

$$x_* + u(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \in M.$$

Оказывается, что выигрыш первого игрока в искусственной игре гарантирует решение задачи наведения на множество M в момент Θ в классе допустимых контр-управлений первого игрока. Докажем это.

Лемма 11 (о разрешимости). *Пусть в позиции (t_*, x_*) выполнено условие конечномерного наведения. Тогда существует стационарное (не зависящее от времени) допустимое контр-управление первого игрока $\bar{u} : Q \to P$ такое, что для любого $v \in Q$*

$$m(v) = x_* + \bar{u}(v)(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \in M, \tag{22}$$

и это контр-управление решает из позиции (t_*, x_*) задачу наведения на терминальное множество M в момент Θ.

Доказательство. Существование такого контр-управления $\bar{u}(\cdot)$ следует из УКН. Докажем, что оно решает задачу наведения. Рассмотрим произвольное допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$ и соответствующее движение $x(\cdot) = x(\cdot|t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), v(\cdot))$ для которого

$$\dot{x}(t) = \bar{u}(v(t)) + v(t) = \frac{m(v(t)) - x_*}{\Theta - t_*}.$$

Отсюда и из включения (22)

$$x(\Theta) = x_* + \int_{t_*}^{\Theta} \frac{m(v(t)) - x_*}{\Theta - t_*} dt = \frac{1}{\Theta - t_*} \int_{t_*}^{\Theta} m(v(t)) dt \in M.$$

Вопрос допустимости управления $\bar{u}(\cdot)$ мы не рассматриваем. □

Из лемм 11 и 10 о разрешимости и неразрешимости следует теорема.

Теорема 10. *Задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ разрешима в классе допустимых контр-управлений первого игрока тогда и только тогда когда в позиции (t_*, x_*) выполняется условие конечномерного наведения. При выполнении УКН стационарное контр-управление $\bar{u}(\cdot)$, определенное в лемме 11, решает задачу наведения.*

Условие конечномерного наведения можно сформулировать в более простой редуцированной форме.

Определение 40. *Точка $v \in Q$ называется крайней точкой множества Q, если не существует $v_1, v_2 \in Q$ таких, что $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Обозначим множество всех крайних точек множества Q через Q^*.*

Рассмотрим для примера множества на плоскости. У многоугольника крайними точками являются его вершины. У круга все граничные точки являются крайними.

Редуцированное условие конечномерного наведения (РУКН). Для любого $v \in Q^*$ существует $u \in P$ такое, что справедливо

$$x_* + u(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \in M.$$

Докажем, что РУКН эквивалентно УКН.

Лемма 12. *Редуцированное условие конечномерного наведения эквивалентно условию конечномерного наведения.*

Доказательство. Любую точку $v \in Q$ можно представить в виде выпуклой линейной комбинации конечного числа крайних точек множества Q

$$v = \sum_i \lambda_i v_i^*, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Для любой крайней точки $v_i^* \in Q^*$ справедливо УКН, то есть существует $u_i^* \in P$ такое, что

$$x_* + u_i^*(\Theta - t_*) + v_i^*(\Theta - t_*) \in M.$$

Следовательно из выпуклости множества M получаем

$$\sum_i \lambda_i (x_* + u_i^*(\Theta - t_*) + v_i^*(\Theta - t_*)) \in M.$$

Отсюда

$$x_* + \sum_i \lambda_i u_i^* + v(\Theta - t_*) \in M.$$

Множество P выпукло, следовательно $u = \sum\limits_i \lambda_i u_i^* \in P$ и значит УКН выполняется для любой точки $v \in Q$. $\square$

Геометрическое представление РУКН. Перепишем РУКН в следующем виде. Для любого $v \in Q^*$ существует $u \in P$ такое, что справедливо

$$u(\Theta - t_*) \in M - x_* - v(\Theta - t_*),$$

или для любого $v \in Q^*$

$$P(\Theta - t_*) \cap M - x_* - v(\Theta - t_*) \neq \emptyset, \tag{23}$$

Таким образом, для проверки выполнения РУКН строятся множества $P(\Theta - t_*)$ и $M - x_*$. Затем для всех $v \in Q^*$ последнее множество сдвигается на вектор $-v(\Theta - t_*)$ и проверяется его пересечение со множеством $P(\Theta - t_*)$, оно должно быть не пусто при всех $v \in Q^*$. Рассмотрим пример.

Пример 10.

На отрезке времени $[t_*, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим двумерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t).$$

Пусть ресурсное множество P представляет собой отрезок с концами в точках $(-\sqrt{2}, 0)$ и $(\sqrt{2}, 0)$, множество Q – отрезок с концами в точках $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а терминальное множество M – отрезок с концами в точках $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Данные множества изображены на рисунке 4.

В соответствии с теоремой 10, проверим выполнения РУКН вида (23), для определения всех тех начальных позиций $(0, x_*)$, из которых разрешима задача наведения на множество M в момент 1 в классе допустимых контр-управлений первого игрока.

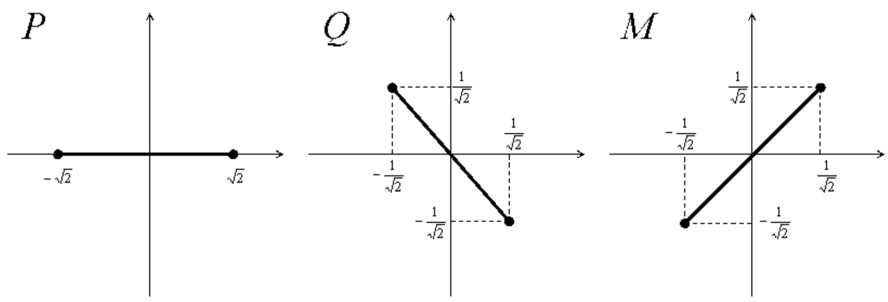

Рис. 4. Ресурсы управления игроков и терминальное множество.

Множество Q имеет две крайние точки $v_1^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_2^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, и $\Theta - t_* = 1$. Условие (23) для данной задачи принимает вид

$$P \cap M - x_* - v_1^* \neq \emptyset \quad \text{и} \quad P \cap M - x_* - v_2^* \neq \emptyset.$$

Из геометрического представления РУКН (рисунок 5) следует, что задача наведения разрешима только при $x_* = 0$. Во всех остальных позициях условие (23) не выполняется хотя бы для одной крайней точки множества Q. Контр-управление $\bar{u}(v)$ первого игрока, решающее задачу наведения из позиции $(0, 0)$, определяется по формуле

$$\bar{u}^1(v) = -2v^1, \quad \bar{u}^2(v) = 0.$$

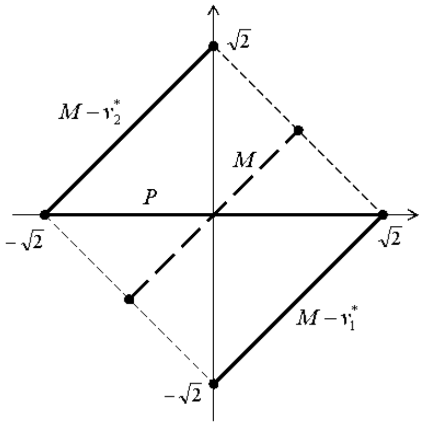

Рис. 5. Геометрическое представление РУКН в позиции $(t_*, x_*) = (0, 0)$.

5.2 Задача наведения в классе позиционных стратегий первого игрока

Обозначим через W множество всех начальных позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \Theta] \times R^n$ из которых разрешима задача наведения на терминальное множество M в момент Θ в классе контр-управлений первого игрока. Из теоремы 10 следует, что множество W состоит из всех позиций, в которых выполняется условие конечномерного наведения.

$$W = \{(t_*, x_*) : \forall v \in Q\, \exists u \in P,\, x_* + u(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \in M\}. \tag{24}$$

Очевидно $W(\Theta) = M$. Если позиция $(t_*, x_*) \in W$, то задача наведения из этой позиции разрешима в классе контр-управлений первого игрока, иначе задача наведения в классе контр-управлений не разрешима.

Лемма 13. *Множество W, определяемое формулой (24), u-стабильно и имеет замкнутые сечения $W(t)$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный момент времени $t_* \in [t_0, \Theta]$ и последовательность точек $x_i \in R^n$ таких, что $x_i \to x_0$ и во всех позициях (t_*, x_i) выполняется УКН, то есть для любого $v \in Q$ существует $u_i \in P$ такое, что

$$x_i + u_i(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \in M.$$

Переходя к пределу в последнем включении (если надо, выделяя подпоследовательность), получаем с учетом замкнутости и ограниченности множеств P и M

$$x_0 + u_0(\Theta - t_*) + v(\Theta - t_*) \in M,$$

где $u_0 \in P$. То есть в позиции (t_*, x_0) выполняется УКН и $(t_*, x_0) \in W$ Следовательно множество $W(t)$ замкнуто.

Докажем свойство u-стабильности. Пусть позиция $(t_*, x_*) \in W$. Следовательно по теореме 10 найдется стационарное контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока такое, что для любого допустимого программного управления $v(\cdot)$ второго игрока на отрезке $[t_*, \Theta]$

$$(t, x(t|t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), v(\cdot))) \in W$$

при всех $t \in [t_*, \Theta]$. Последнее утверждение, доказывающее свойство u-стабильности, следует из того, что контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ решает задачу наведения из любой позиции $(t, x(t|t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), v(\cdot)))$ при всех $t \in [t_*, \Theta]$, и соответственно каждая такая позиция принадлежит множеству W. $\square$

Теорема 11. *Задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ разрешима в классе позиционных стратегий $\mathcal{U}_{pos}[t_*, \theta]$ первого игрока тогда и только тогда, когда в этой позиции выполняется условие конечномерного наведения.*

Доказательство. Пусть в позиции (t_*, x_*) выполнено УКН. Тогда эта позиция принадлежит множеству W, определяемому формулой (24). По лемме 13 множество W u-стабильно и имеет замкнутые t-сечения, следовательно по теореме 2 задача наведения из позиции (t_*, x_*) разрешима с помощью позиционной стратегии первого игрока, экстремальной к W.

Если УКН не выполнено, то в позиции (t_*, x_*) выполнено условие конечномерного уклонения и по лемме 10 задача наведения не разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока. $\square$

Пример 11.

Для иллюстрации последней теоремы рассмотрим дифференциальную игру из примера 10 и построим множество W тех позиций, в которых выполняется УКН, то есть множество всех начальных позиций, из которых разрешима задача наведения на терминальное множество M в момент Θ в классе позиционных стратегий первого игрока.

Ранее было показано, что $W(0) = \{0\}$ и $W(1) = M$. Рассмотрим теперь произвольный момент времени $t \in (0,1)$ и найдем все $x \in R^2$ такие, что в позиции (t,x) выполняется УКН.

Построим множества $P(1-t)$, $M - v_1^*(1-t)$ и $M - v_2^*(1-t)$. Из рисунка 6 следует, что УКН будет выполняться для всех точек x из отрезка с концами в точках $\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$. Получаем множество

$$W = \{(t,x) \in [0,1] \times R^2 :\, x_1 = x_2, \|x\| \leq t\}.$$

Сечение множества W в момент $t \in [0,1]$ изображено на рисунке 7.

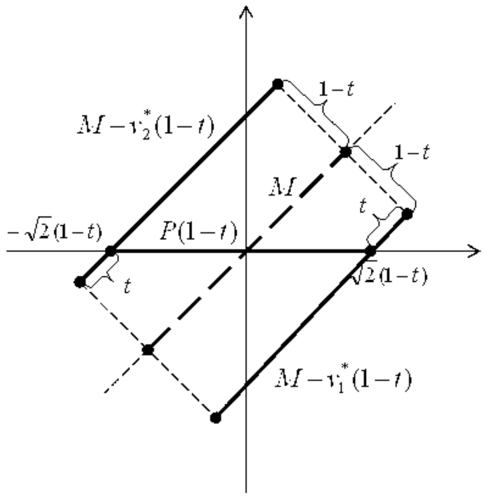

Рис. 6. Геометрическое представление РУКН в позиции $(t,0)$.

Позиционная стратегия U_ε первого игрока экстремальная к W вычисляется в позиции $(t,x) \in [0,1] \times R^2$ по формуле

$$U_\varepsilon(t,x) \in Arg\min\langle x - \omega(t,x), u\rangle,$$

где $\omega(t,x) = (\omega^1(t,x), \omega^2(t,x)) \in R^2$ – ближайшая к x точка множества $W(t)$. Следовательно

$$U_\varepsilon(t,x) = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sgn}(x^1 - \omega^1(t,x)),\, 0).$$

На рисунке 8 изображена линия переключения, делящая фазовую плоскость на две области. Слева от этой линии первый игрок использует управление $u = (\sqrt{2}, 0)$, справа $u = (-\sqrt{2}, 0)$. На линии переключения управление нулевое.

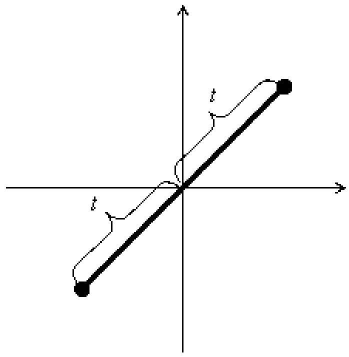

Рис. 7. t-сечение множества W.

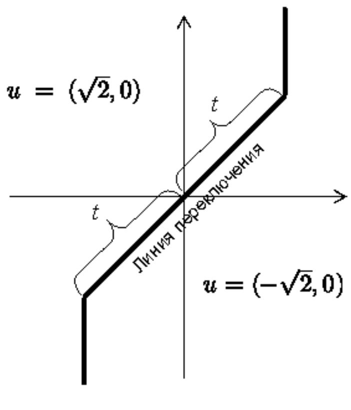

Рис. 8. Линия переключения управления.

Теорема 11 доказывает эквивалентность задачи наведения из начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ в классе контр-управлений первого игрока и искусственной игры, в которой игроки используют постоянные на всем временном интервале $[t_*, \Theta]$ управления. Естественным представляется попробовать развить данную теорию для управляемых систем более общего вида, например,

$$\dot{x}(t) = a(t)u(t) + b(t)v(t).$$

Для такой системы условие гарантированного выигрыша первого игрока в искусственной игре имеет следующий вид.

Для любого $v \in Q$ существует $u \in P$ такое, что

$$x(t_*) + u \int\limits_{t_*}^{\Theta} a(t)dt + v \int\limits_{t_*}^{\Theta} b(t)dt \in M. \tag{25}$$

Рассмотрим пример, показывающий, что наличие системы с простыми движениями в общем случае является существенным условием.

Пример 12.

На отрезке времени $[t_*, \Theta] = [0, 2\pi]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = t \cdot u(t) - \sin t \cdot v(t),$$

с ресурсными множествами $P = [0, 1]$ первого игрока, $Q = [0, 1]$ второго игрока и терминальным множеством $M = \{0\}$.

Пусть задана начальная позиция $(t_*, x_*) = (0, 0)$. Докажем выполнение условия (25). Действительно, для любого постоянного управления $v \in Q$ второго игрока и постоянного управления $u = 0$ первого игрока справедливо включение

$$x(0) + 0 \int\limits_{0}^{2\pi} tdt + v \int\limits_{0}^{2\pi} (-\sin t)dt = 0 \in M.$$

Покажем, что тем не менее задача наведения из позиции $(0, 0)$ на множество M в момент 2π не разрешима в классе допустимых контр-управлений первого игрока. Возьмем любое допустимое контр-управление $\bar{u}(\cdot)$ первого игрока и программное управление второго игрока

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, \frac{3\pi}{2}], \\ 1, & \text{при } t \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

Соответствующее движение $x(\cdot) = x(\cdot|0,0,\bar{u}(\cdot),v(\cdot))$ оценим с учетом неотрицательности управления первого игрока

$$x(2\pi) = \int\limits_{0}^{2\pi} t\bar{u}(t,v(t))dt + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(-\sin t)dt \geq \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\sin tdt = 1 \notin M.$$

Получаем $x(2\pi) \geq 1$ и следовательно задача наведения не разрешима в классе контр-управлений первого игрока.

Упражнение 24. *На отрезке времени $[t_*,\Theta] = [0,1]$ рассмотрим двумерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad x \in R^2,$$

с ресурсными множествами $P = \{(u^1,u^2): |u^1| \leq 1, u^2 = 0\}$ первого игрока, $Q = \{(v^1,v^2): v^1 = 0, 0 \leq v^2 \leq 1\}$ второго игрока и терминальным множеством $M = \{(x^1,x^2): |x^1| \leq 2, |x^2| \leq 1\}$.

Построить максимальное u-стабильное множество W такое, что $W(\Theta) = M$, и стратегию первого игрока экстремальную к W.

6 Одномерные задачи наведения

Рассмотрим одномерную управляемую систему, динамика которой на отрезке времени $[t_0,\Theta]$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f_1(t,x(t),u(t)) + f_2(t,x(t),v(t)),$$

где $x \in R^1$, $f_1: [t_0,\Theta] \times R^1 \times P \to R^1$, $f_2: [t_0,\Theta] \times R^1 \times Q \to R^1$, P и Q – замкнутые и ограниченные в R^1 множества (выпуклости множеств не требуется). Функции f_1 и f_2 непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию локальной липшицевости по фазовой переменной.

Пусть задана начальная позиция (t_*,x_*) и терминальное множество $M = [m^-,m^+]$, представляющее собой отрезок. Рассмотрим задачу наведения из позиции (t_*,x_*) на множество

M в момент Θ в классе позиционных стратегий первого игрока.

Определим функции:

$$f_1^-(t,x) = \min_{u \in P} f_1(t,x,u), \quad f_1^+(t,x) = \max_{u \in P} f_1(t,x,u),$$

$$f_2^-(t,x) = \min_{v \in Q} f_2(t,x,v), \quad f_2^+(t,x) = \max_{v \in Q} f_2(t,x,v).$$

Определение 41. *Верхним барьером $x^{-+}(\cdot)$ называется, определенное на отрезке $[t_0, \Theta]$, решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x}(t) = f_1^-(t, x(t)) + f_2^+(t, x(t)),$$

с краевым условием

$$x(\Theta) = m^+.$$

Определение 42. *Нижним барьером $x^{+-}(\cdot)$ называется, определенное на отрезке $[t_0, \Theta]$, решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x}(t) = f_1^+(t, x(t)) + f_2^-(t, x(t)),$$

с краевым условием

$$x(\Theta) = m^-.$$

Определение 43. *Барьерной стратегией первого игрока называется позиционная стратегия U, в каждой позиции (t,x) удовлетворяющая условию*

$$U(t,x) \in Arg \min_{u \in P} f_1(t,x,u), \text{ при } x > x^{-+}(t),$$

$$U(t,x) \in Arg \max_{u \in P} f_1(t,x,u), \text{ при } x < x^{+-}(t),$$

$U(t,x)$ – любое значение из P, при $x^{+-}(t) \le x \le x^{-+}(t)$.

Заметим, что данное определение корректно при условии $x^{+-}(t) \le x^{-+}(t)$ для всех $t \in [t_0, \Theta]$.

Лемма 14 (о верхнем барьере). *Пусть для всех $t \in [t_*, \Theta]$ выполняется неравенство $x^{+-}(t) \le x^{-+}(t)$ и начальная позиция (t_*, x_*) удовлетворяет условию $x_* \le x^{-+}(t_*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ справедливо неравенство $x(\tau_i) \le x^{-+}(\tau_i) + \varepsilon$ при всех $i = 0, \dots, m$. Здесь U – барьерная стратегия первого игрока.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$ и произвольное движение $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$. Этому движению соответствует некоторое допустимое программное управление $v(\cdot)$ второго игрока. Обозначим $\mu_i = x(\tau_i) - x^{-+}(\tau_i)$, $i = 0, \dots, m$. По условию леммы $\mu_0 \le 0$.

Пусть некоторое $\mu_i > 0$, тогда имеем

$$\begin{aligned}\mu_{i+1} = x(\tau_{i+1}) - x^{-+}(\tau_{i+1}) = \\ = x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1(t, x(t), u_i)dt + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_2(t, x(t), v(t))dt - \\ - x^{-+}(\tau_i) - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1^-(t, x^{-+}(t))dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_2^+(t, x^{-+}(t))dt,\end{aligned}$$

где $u_i = U(\tau_i, x(\tau_i))$. Преобразуем последнее выражение далее как в лемме 6 о локальной оценке

$$\begin{aligned}\mu_{i+1} \le \mu_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1(\tau_i, x(\tau_i), u_i) - f_1^-(\tau_i, x^{-+}(\tau_i))dt + \\ + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_2(\tau_i, x(\tau_i), v(t)) - f_2^+(\tau_i, x^{-+}(\tau_i))dt + \alpha(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i),\end{aligned}$$

где монотонная функция $\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ и $\alpha(y) \to 0$ при $y \to 0 + 0$. Так как $\mu_i > 0$, то из определения барьерной стратегии следует $f_1(\tau_i, x(\tau_i), u_i) = f_1^-(\tau_i, x(\tau_i))$. Учитывая также, что $f_2(\tau_i, x(\tau_i), v(t)) \le f_2^+(\tau_i, x(\tau_i))$, получаем

$$\mu_{i+1} \leq \mu_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_1^-(\tau_i, x(\tau_i)) - f_1^-(\tau_i, x^{-+}(\tau_i))dt +$$
$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_2^+(\tau_i, x(\tau_i)) - f_2^+(\tau_i, x^{-+}(\tau_i))dt + \alpha(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Так как функции f_1 и f_2 удовлетворяют условию локальной липшицевости по переменной x, то и функции f_1^- и f_2^+ также удовлетворяют условию локальной липшицевости по переменной x с константами $L_1 > 0$ и $L_2 > 0$. Следовательно,

$$\mu_{i+1} \leq \mu_i + (L_1 + L_2)\mu_i(\tau_{i+1} - \tau_i) + \alpha(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i). \tag{26}$$

Рассмотрим теперь случай $\mu_i \leq 0$. Тогда управление $u_i = U(\tau_i, x(\tau_i))$ определяется произвольным образом. Функции f_1 и f_2 ограничены в некоторой области, содержащей все рассматриваемые движения, и, следовательно, найдется такая константа $c > 0$, что

$$\mu_{i+1} \leq \mu_i + c(\tau_{i+1} - \tau_i) \leq c(\tau_{i+1} - \tau_i) \leq cd(\Delta).$$

Введем величину $\bar{\mu}_i = \max\{\mu_i, cd(\Delta)\} > 0$. Справедлива оценка

$$\bar{\mu}_{i+1} \leq \bar{\mu}_i(1 + (L_1 + L_2)(\tau_{i+1} - \tau_i)) + \alpha(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i). \tag{27}$$

Докажем это. В случаем $\mu_i > 0$ из (26) и неравенства $\mu_i \leq \bar{\mu}_i$ имеем

$$\mu_{i+1} \leq \bar{\mu}_i + (L_1 + L_2)\bar{\mu}_i(\tau_{i+1} - \tau_i) + \alpha(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Так как

$$cd(\Delta) \leq \bar{\mu}_i \leq \bar{\mu}_i + (L_1 + L_2)\bar{\mu}_i(\tau_{i+1} - \tau_i) + \alpha(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i),$$

то выполняется неравенство (27). Если $\mu_i \leq 0$ то

$$\mu_{i+1} \leq cd(\Delta) = \bar{\mu}_i,$$

и, следовательно,

$$\bar{\mu}_{i+1} = \max\{\mu_{i+1}, cd(\Delta)\} = cd(\Delta) = \bar{\mu}_i.$$

То есть оценка (27) верна и в этом случае.

Для чисел $\bar{\mu}_i$ применим лемму 7 об экспоненциальной оценке. Получаем

$$\mu_i \le \bar{\mu}_i \le e^{(L_1+L_2)(\tau_i - t_*)}\alpha(d(\Delta))(\tau_i - t_*).$$

для любого $i = 0, \dots, m$. Следовательно

$$x(\tau_i) \le x^{-+}(\tau_i) + e^{(L_1+L_2)(\tau_i - t_*)}\alpha(d(\Delta))(\tau_i - t_*) \le x^{-+}(\tau_i) + e^{(L_1+L_2)(\Theta - t_*)}\alpha(d(\Delta))(\Theta - t_*).$$

Из стремления функции α к нулю при $d(\Delta) \to 0$ следует утверждение леммы. □

Аналогичным образом доказывается лемма о нижнем барьере.

Лемма 15 (о нижнем барьере). *Пусть для всех $t \in [t_*, \Theta]$ выполняется неравенство $x^{+-}(t) \le x^{-+}(t)$ и начальная позиция (t_*, x_*) удовлетворяет условию $x_* \ge x^{+-}(t_*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ и для любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ справедливо $x(\tau_i) \ge x^{+-}(\tau_i) - \varepsilon$ при всех $i = 0, \dots, m$. Здесь U – барьерная стратегия первого игрока.*

Следствием лемм 14 и 15 о верхнем и нижнем барьерах является следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть для всех $t \in [t_*, \Theta]$ выполняется неравенство $x^{+-}(t) \le x^{-+}(t)$ и начальная позиция (t_*, x_*) удовлетворяет условию $x^{+-}(t_*) \le x_* \le x^{-+}(t_*)$. Тогда барьерная стратегия U первого игрока решает задачу наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ.*

Доказательство. Из лемм о верхнем и нижнем барьерах для любого $\varepsilon > 0$ следует существование такого $\delta > 0$, что для любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \delta$ для любого движения $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ справедливо

$$x^{+-}(\Theta) - \varepsilon \le x(\Theta) \le x^{-+}(\Theta) + \varepsilon.$$

Из определения барьеров следует, что

$$m^- - \varepsilon \le x(\Theta) \le m^+ + \varepsilon.$$

и, следовательно, $x(\Theta) \in M^{\varepsilon}$. □

Определим теперь область начальных позиций, из которых не разрешима задача наведения. Для этого модифицируем определения верхнего и нижнего барьеров.

Определение 44. *Смещенным верхним барьером* $x^{-+}_{\tau,\beta}(\cdot)$ *называется, определенное на отрезке* $[\tau, \Theta]$*, решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x}(t) = f_1^-(t, x(t)) + f_2^+(t, x(t))$$

с краевым условием

$$x(\tau) = x^{-+}(\tau) + \beta.$$

Здесь $\tau \in [t_0, \Theta]$ *и* $\beta > 0$.

Определение 45. *Смещенным нижним барьером* $x^{+-}_{\tau,\beta}(\cdot)$ *называется, определенное на отрезке* $[\tau, \Theta]$*, решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x}(t) = f_1^+(t, x(t)) + f_2^-(t, x(t))$$

с краевым условием

$$x(\tau) = x^{+-}(\tau) - \beta.$$

Здесь $\tau \in [t_0, \Theta]$ *и* $\beta > 0$.

Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 16 (о равномерной отделимости от верхнего барьера). *Для любых* $\tau \in [t_0, \Theta]$ *и* $\beta > 0$ *существует константа* $\sigma > 0$ *такая, что выполняется неравенство*

$$x^{-+}_{\tau,\beta}(t) > x^{-+}(t) + \sigma, \quad t \in [\tau, \Theta].$$

Лемма 17 (об уклонении от верхнего барьера). *Пусть позиция* (t_*, x_*) *удовлетворяет условию* $x_* > x^{-+}(t_*)$*. Тогда существует константа* $\sigma > 0$ *такая, что для любой* *позиционной стратегии U первого игрока и любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ существует движение $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ для которого*

$$x(\Theta) > x^{-+}(\Theta) + \frac{\sigma}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ и стратегию U первого игрока. Определим позиционную стратегию V второго игрока по правилу

$$V(t, x) \in Arg \max_{v \in Q} f_2(t, x, v).$$

Возьмем теперь другое разбиение Δ_2 отрезка $[t_*, \Theta]$, содержащее в себе все точки разбиения Δ, и рассмотрим движение $x(\cdot)$ под действием позиционных стратегий U и V. Причем первый игрок будет изменять свое управление в моменты времени из разбиения Δ, а второй игрок в моменты времени из разбиения Δ_2. Очевидно $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$.

Обозначим $\beta = x_* - x^{-+}(t_*) > 0$. Аналогично доказательству леммы 14 о верхнем барьере можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом диаметре разбиения Δ_2 движение $x(\cdot)$ и смещенный верхний барьер $x^{-+}_{t_*,\beta}(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$x(\Theta) > x^{-+}_{t_*,\beta}(\Theta) - \varepsilon.$$

Применяя лемму 16 о равномерной отделимости от верхнего барьера и положив $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$, получаем искомое неравенство

$$x(\Theta) > x^{-+}_{t_*,\beta}(\Theta) - \varepsilon > x^{-+}(\Theta) + \sigma - \varepsilon = x^{-+}(\Theta) + \frac{\sigma}{2}.$$

$\square$

Аналогичные леммы формулируются для нижнего барьера.

Лемма 18 (о равномерной отделимости от нижнего барьера). *Для любых $\tau \in [t_0, \Theta]$ и $\beta > 0$ существует константа $\sigma > 0$ такая, что выполняется неравенство*

$$x^{+-}_{\tau,\beta}(t) < x^{+-}(t) - \sigma, \quad t \in [\tau, \Theta].$$

Лемма 19 (об уклонении от нижнего барьера). *Пусть позиция (t_*, x_*) удовлетворяет условию $x_* < x^{+-}(t_*)$. Тогда существует константа $\sigma > 0$ такая, что для любой позиционной стратегии U первого игрока и любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$ существует движение $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ для которого*

$$x(\Theta) < x^{+-}(\Theta) - \frac{\sigma}{2}.$$

Следствием данных лемм является теорема о неразрешимости задачи наведения.

Теорема 13. *Пусть для позиции (t_*, x_*) либо $x_* > x^{-+}(t_*)$, либо $x_* < x^{+-}(t_*)$. Тогда задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ не разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока.*

Заметим, что при доказательстве последней теоремы никаких условий на взаимное расположение верхнего и нижнего барьеров не требовалось.

Мы исследовали два случая расположения начальной позиции и барьеров. В области позиций I (рисунок 9) согласно теореме 12 разрешима задача наведения в классе позиционных стратегий первого игрока. Область II является на данном этапе не исследованной. Из всех остальных областей задача наведения согласно теореме 13 решения не имеет. Таким образом, остается неизученным случай, когда на отрезке $[t_*, \Theta]$ барьеры имеют точки пересечения, но при этом $x^{+-}(t_*) \le x_* \le x^{-+}(t_*)$ (область II на рисунке 9).

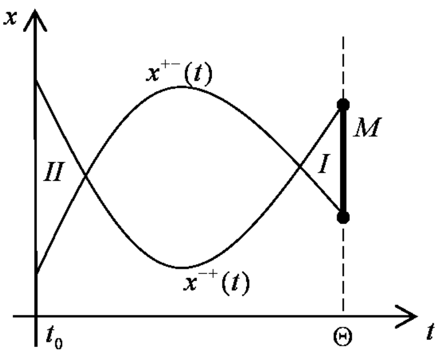

Рис. 9. Взаимное расположение верхнего и нижнего барьеров.

Определение 46. *Множеством несовместимости барьеров назовем множество*

$$T = \{t \in [t_0, \Theta] : x^{-+}(t) < x^{+-}(t)\}.$$

Теорема 14. *Пусть для начальной позиции (t_*, x_*) выполняется условие $T \cap [t_*, \Theta] \neq \emptyset$. Тогда задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ не разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока.*

Доказательство. Существует отрезок $[\xi_1, \xi_2] \subset T \cap [t_*, \Theta]$ и $\alpha > 0$ такие, что $x^{-+}(t) < x^{+-}(t) - \alpha$ при всех $t \in [\xi_1, \xi_2]$.

Рассмотрим произвольную позиционную стратегию U первого игрока, произвольное разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметром $d(\Delta) < \xi_2 - \xi_1$ и движение $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$. Найдется момент $\tau_k \in [\xi_1, \xi_2]$. Обозначим $x_k = x(\tau_k)$. Для x_k справедливо либо $x_k > x^{-+}(\tau_k) + \frac{\alpha}{2}$ либо $x_k < x^{+-}(\tau_k) - \frac{\alpha}{2}$. Пусть $x_k > x^{-+}(\tau_k) + \frac{\alpha}{2}$.

Определим сужение разбиения $\bar{\Delta} = (\tau_i)_{i=k}^m$ на отрезок $[\tau_k, \Theta]$. Обозначим $\beta = x_k - x^{-+}(\tau_k) > \frac{\alpha}{2}$. Применим лемму 17 об уклонении от верхнего барьера. Следовательно, существует $\sigma^+ > 0$ и $\bar{x}(\cdot) \in X_{\bar{\Delta}}(\tau_k, x_k, U)$ такие, что $\bar{x}(\Theta) > x^{-+}(\Theta) + \frac{\sigma^+}{2} = m^+ + \frac{\sigma^+}{2}$.

Рассмотрим "склеенное"движение $y(\cdot)$:

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{при } t \in [t_*, \tau_k], \\ \bar{x}(t), & \text{при } t \in (\tau_k, \Theta]. \end{cases}$$

Очевидно $y(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ и $y(\Theta) = \bar{x}(\Theta) > m^+ + \frac{\sigma^+}{2}$.

В случае $x_k < x^{+-}(\tau_k) - \frac{\alpha}{2}$ аналогично построим движение $y(\cdot)$ для которого $y(\Theta) < m^- - \frac{\sigma^-}{2}$. Получаем величину гарантированного отклонения

$$\varepsilon = \min\{\frac{\sigma^-}{2}, \frac{\sigma^+}{2}\}.$$

Мы доказали, что всегда найдется движение $y(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, U)$ для которого $y(\Theta) \notin M^\varepsilon$. Следовательно, задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ не разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока. □

Сформулируем критерий разрешимости задачи наведения, который является следствием теорем 12, 13 и 14.

Теорема 15. *Задача наведения из позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент Θ разрешима в классе позиционных стратегий первого игрока тогда и только тогда, когда выполняются два условия*

1. $T \cap [t_*, \Theta] = \emptyset$.

2. $x_* \in [x^{+-}(t_*), x^{-+}(t_*)]$.

Если условия 1 и 2 выполняются, то барьерная стратегия U первого игрока решает задачу наведения.

Упражнение 25. *На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = x(t)u(t) + v(t),$$

с ресурсами управления первого и второго игроков, задаваемыми множествами $P = [-1, 1]$ и $Q = [-1, 1]$ соответственно. Терминальное множество представляет собой отрезок $M = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Построить множество всех начальных позиций (t_*, x_*) из которых разрешима задача наведения на множество M в момент 1 в классе позиционных стратегий первого игрока. Найти барьерную стратегию первого игрока.

7 Попятная процедура построения максимального u-стабильного множества в задаче наведения

7.1 Аппроксимирующая система множеств

Рассмотрим метод построения t_*-сечения максимального u-стабильного множества W в задаче наведения на терминальное множество M в момент Θ. Выберем разбиение $\Delta =$

$(\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$. Определим индуктивно множества $W_\Delta^0, W_\Delta^1, \ldots, W_\Delta^m \subset R^n$, начиная с последнего множества. Положим $W_\Delta^m = M$. Пусть уже определено множество W_Δ^i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, определим множество W_Δ^{i-1} как множество всех $x \in R^n$ таких, что для любого $v \in Q$

$$G(\tau_i, \tau_{i-1}, x, v) \cap W_\Delta^i \neq \emptyset,$$

где $G(t, t_*, x_*, v) = \{x(t) : x(\cdot) \in \bar{X}(t_*, x_*, v)\}$ – область достижимости из позиции (t_*, x_*) при постоянном управлении v второго игрока.

Определение 47. *Систему множеств $W_\Delta^0, W_\Delta^1, \ldots, W_\Delta^m$ будем называть аппроксимирующей системой множеств.*

Множество W_Δ^0 будем считать некоторой аппроксимацией сечения $W(t_*)$.

Лемма 20. *Множества $W_\Delta^0, W_\Delta^1, \ldots, W_\Delta^m$ замкнуты.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Терминальное множество M замкнуто. Пусть теперь замкнуто множество W_Δ^i. Докажем замкнутость W_Δ^{i-1}. Рассмотрим любую последовательность точек $x_i \in W_\Delta^{i-1}$, сходящуюся к точке x_0, и предположим, что $x_0 \notin W_\Delta^{i-1}$. То есть существует $v \in Q$ для которого $G(\tau_i, \tau_{i-1}, x_0, v) \cap W_\Delta^i = \emptyset$. Множество $G(\tau_i, \tau_{i-1}, x_0, v)$ замкнуто и непрерывно зависит от начальной точки x_0. Следовательно в некоторой окрестности точки x_0 для всех x будет выполняться $G(\tau_i, \tau_{i-1}, x, v) \cap W_\Delta^i = \emptyset$. Но с другой стороны для точек x_i имеем $G(\tau_i, \tau_{i-1}, x_i, v) \cap W_\Delta^i \neq \emptyset$. Получаем, что $x_0 \in W_\Delta^{i-1}$, и множество W_Δ^{i-1} замкнуто. □

Заметим, что система множеств $W_\Delta^0, W_\Delta^1, \ldots, W_\Delta^m$ *аппроксимационно u-стабильна* в следующем смысле. Для любого $i = 0, \ldots, m-1$, $x_* \in W_\Delta^i$ и $v \in Q$ выполняется

$$G(\tau_{i+1}, \tau_i, x_*, v) \cap W_\Delta^{i+1} \neq \emptyset.$$

Лемма 21. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Если $x_* \in R^n \backslash W_\Delta^i$, то из позиции (τ_i, x_*) разрешима* *задача уклонения от терминального множества M в момент Θ в классе позиционных стратегий второго игрока.*

Доказательство. Доказательство леммы проводится с помощью индукции по моментам τ_i из разбиения Δ, начиная с самого последнего. Базис индукции очевиден. Предположим, что в момент τ_k ($k \in \{1, \ldots, m\}$) для любой точки $x_* \in R^n \backslash W_\Delta^k$ из позиции (τ_k, x_*) разрешима задача уклонения в классе позиционных стратегий второго игрока. Покажем что тогда, если $x_* \in R^n \backslash W_\Delta^{k-1}$, то из позиции (τ_{k-1}, x_*) также разрешима задача уклонения.

Для любой точки $x_* \notin W_\Delta^{k-1}$ найдется управление $v \in Q$, для которого $G(\tau_k, \tau_{k-1}, x_*, v) \cap W_\Delta^k = \emptyset$. Далее аналогично доказательству леммы 9 строится v-стабильное множество с замкнутыми сечениями, содержащее позицию (τ_{k-1}, x_*) и не пересекающееся в конечный момент времени с терминальным множеством. Отсюда следует разрешимость задачи уклонения из позиции (τ_{k-1}, x_*). $\square$

Рассмотрим произвольное разбиение $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[t_*, \Theta]$. Обозначим класс всех допустимых программных управлений второго игрока, принимающих постоянное значение на каждом из полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ($i = 0, \ldots, m-1$), через $\mathcal{V}_\Delta$. Введем пучок движений, порожденный позиционной стратегией U первого игрока

$$X_\Delta(t_*, x_*, U, \mathcal{V}_\Delta) = \{x_\Delta(\cdot|t_*, x_*, U, v(\cdot) : \, v(\cdot) \in \mathcal{V}_\Delta\}.$$

Справедлива лемма о пересечении пучков движений.

Лемма 22. *Для любых $x_* \in R^n$, позиционных стратегий U первого игрока и V второго игрока и любого разбиения Δ отрезка $[t_*, \Theta]$*

$$X_\Delta(t_*, x_*, U, \mathcal{V}_\Delta) \cap X_\Delta(t_*, x_*, V) \neq \emptyset.$$

Упражнение 26. *Даказать лемму 22.*

7.2 Сходимость попятной процедуры

Выберем произвольную последовательность разбиений $\Delta_k = (\tau_i^k)_{i=0}^{m_k}$ отрезка $[t_*, \Theta]$ с диаметрами $d(\Delta_k) \to 0$. Положим

$$\tilde{W}(t_*) = \bigcap_{k=1}^{\infty} W^0_{\Delta_k}.$$

Из леммы 21 следует лемма.

Лемма 23. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Тогда если $x_* \in R^n \backslash \tilde{W}(t_*)$, то из позиции (t_*, x_*) разрешима задача уклонения от множества M в момент Θ в классе позиционных стратегий второго игрока.*

На основе аппроксимирующей системы множеств $W^0_{\Delta_k}, W^1_{\Delta_k}, \ldots, W^{m_k}_{\Delta_k}$ определим по сечениям новое множество $W_k \subset [t_*, \Theta] \times R^n$ по правилу

$$W_k(t) = W^i_{\Delta_k}, \text{ при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, \ldots, m_k - 1,$$

$$W_k(\Theta) = M.$$

Теперь определим для первого игрока стратегию U_k *экстремального сдвига на аппроксимирующую систему множеств* $W^0_{\Delta_k}, W^1_{\Delta_k}, \ldots, W^{m_k}_{\Delta_k}$, как позиционную стратегию экстремальную к множеству W_k.

Справедлив аналог лемм о локальной и глобальной оценках.

Лемма 24. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и $x_* \in \tilde{W}(t_*)$. Тогда существуют константа $K \geq 0$ и функция $\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что для любого $k = 1, 2, \ldots,$ движения $x(\cdot) \in X_{\Delta_k}(t_*, x_*, U_k, \mathcal{V}_{\Delta_k})$ и любого $i = 0, \ldots, m_k - 1$ справедлива оценка:*

$$\operatorname{dist}^2(x(\tau^k_{i+1}), W_k(\tau^k_{i+1})) \leq$$
$$\operatorname{dist}^2(x(\tau^k_i), W_k(\tau^k_i))(1 + K(\tau^k_{i+1} - \tau^k_i)) + \alpha(d(\Delta_k))(\tau^k_{i+1} - \tau^k_i),$$

где функция $\alpha(y) \to 0$ при $y \to 0+0$, U_k – стратегия экстремального сдвига на аппроксимирующую систему множеств $W^0_{\Delta_k}, W^1_{\Delta_k}, \ldots, W^{m_k}_{\Delta_k}$.

Доказательство леммы проводится абсолютно аналогично доказательству леммы 6 о локальной оценке с использованием свойста аппроксимационной u-стабильности системы множеств $W^0_{\Delta_k}, W^1_{\Delta_k}, \ldots, W^{m_k}_{\Delta_k}$.

Лемма 25. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и $x_* \in \tilde{W}(t_*)$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots$ и любого движения $x(\cdot) \in X_{\Delta_k}(t_*, x_*, U_k, \mathcal{V}_{\Delta_k})$ справедлива оценка:*

$$\mathrm{dist}^2(x(\Theta), W_k(\Theta)) \leq e^{K(\Theta - t_*)} \alpha(d(\Delta_k))(\Theta - t_*),$$

где константа K и функция α определены в предыдущей лемме.

Лемма 26. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре и $x_* \in \tilde{W}(t_*)$. Тогда из позиции (t_*, x_*) задача уклонения от терминального множества M в момент Θ в классе позиционных стратегий второго игрока не разрешима.*

Доказательство. Предположим, что найдется позиционная стратегия V второго игрока, решающая задачу уклонения. То есть найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta_1 > 0$, что при диаметре разбиения $d(\Delta) < \delta_1$ для любого $x(\cdot) \in X_\Delta(t_*, x_*, V)$ выполняется $x(\Theta) \notin M^\varepsilon$.

Из леммы 25 следует, что существует такое $\delta_2 > 0$, что при диаметре разбиения $d(\Delta_k) < \delta_2$ для любого $x(\cdot) \in X_{\Delta_k}(t_*, x_*, U_k, \mathcal{V}_{\Delta_k})$ выполняется $x(\Theta) \in M^{\frac{\varepsilon}{2}}$. По лемме 22

$$X_{\Delta_k}(t_*, x_*, U_k, \mathcal{V}_\Delta) \cap X_{\Delta_k}(t_*, x_*, V) \neq \emptyset.$$

При достаточно большом k имеем $d(\Delta_k) < \min(\delta_1, \delta_2)$ и, следовательно, приходим к противоречию с разрешимостью задачи уклонения. □

Теорема 16. *Пусть для любой позиции (t, x) и вектора $s \in R^n$ выполняется условие* *седловой точки в маленькой игре. Тогда*

$$\tilde{W}(t_*) = W(t_*).$$

Доказательство. Из леммы 23 следует включение $W(t_*) \subset \tilde{W}(t_*)$. Из леммы 26 и теоремы об альтернативе имеем $\tilde{W}(t_*) \subset W(t_*)$. Теорема доказана. □

Упражнение 27. *На отрезке времени $[t_0, \Theta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему*

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t),$$

с ресурсами управления первого и второго игроков, задаваемыми множествами $P = [0, 1]$ и $Q = [0, 1]$ соответственно. Терминальное множество представляет собой отрезок $M = [-1, 1]$.

(а) Для произвольного разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i=0}^m$ отрезка $[0, 1]$ построить аппроксимирующую систему множеств $W_\Delta^0, W_\Delta^1, \ldots, W_\Delta^m$.

(б) Построить множество W всех начальных позиций (t_*, x_*) из которых разрешима задача наведения на множество M в момент 1 в классе позиционных стратегий первого игрока.

(в) Сравнить множества W_Δ^i с идеальными $W(\tau_i)$, $i = 0, \ldots, m$.

8 Численный метод построения максимального u-стабильного множества в задаче наведения

Рассмотрим управляемую систему, описываемую на отрезке времени $[0, T]$ дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \tag{28}$$

где $x(t) \in R^n$, управления игроков выбираются из множеств $u(t) \in P \subset R^p$, $v(t) \in Q \subset R^q$. Пусть ресурсные множества P, Q и терминальное множество M являются компактами.

Считаем, что функция f удовлетворяет следующим двум условиям, необходимым для существования, единственности и продолжимости решения (28) при любых начальных данных.

Условие 1. *Для любых $x \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$ функция $f(x,u,v)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию локальной липшицевости по переменной x.*

Условие 2. *Существует константа $C \geq 0$ такая, что для всех $x \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$*

$$\|f(x,u,v)\| \leq C(1 + \|x\|).$$

Пусть также выполняется условие, обеспечивающее замкнутость множества достижимости управляемой системы (28) из начальной позиции $(0,0)$ при любом фиксированном допустимом программном управлении второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ (см. [10]):

Условие 3. *Вектограмма $f(x,P,v) = \{y \in R^n : y = f(x,u,v), u \in P\}$ – выпуклое множество для любых $x \in R^n$ и $v \in Q$.*

Рассмотрим задачу наведения из произвольной начальной позиции (t_*, x_*) на терминальное множество M в момент T в классе позиционных стратегий первого игрока. Важную роль при решении задачи наведения играют множества, обладающие свойством u-стабильности. Пусть найдено макимальное u-стабильное множество $W \subset [0,T] \times R^n$, для которого выполняется включение $W(T) \subset M$. Ранее показано (см. теорему 2), что при выполнении условия седловой точки в маленькой игре, задача наведения на множество M в момент T разрешима из любой начальной позиции $(t_*, x_*) \in W$ в классе позиционных стратегий первого игрока. Таким образом задача наведения сводится к построению максимального u-стабильного множества W в задаче наведения. Далее рассмотрим численный метод приближенного построения множества W.

8.1 Оператор стабильного поглощения. Свойства телесных множеств

Разобьем временной интервал $[0, T]$ на m одинаковых частей точками τ_i:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = T, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = \frac{T}{m} = h.$$

Обозначим это разбиение Δ_m. Будем приближенно вычислять сечения $W(\tau_i)$ в точках разбиения Δ_m. За основу взяты операторные конструкции, подробно исследованные в работе [8], и являющиеся развитием конструкций, исследованных в разделе 7.1. Ниже приведены некоторые определения и леммы необходимые в дальнейшем.

Определение 48. *Введем оператор Π_h, ставящий в соответствие любому компактному множеству $A \subset R^n$ множество*

$$\Pi_h A = \bigcap_{v \in Q} \bigcup_{u \in P} \{x \in R^n : \, x + hf(x, u, v) \in A\}.$$

Оператор Π_h называется оператором стабильного поглощения.

Используя оператор Π_h, зададим рекуррентную последовательность множеств W_i:

$$W_m = M,$$

$$W_{i-1} = \Pi_h W_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Данные множества являются аналогом аппроксимирующей системы множеств, определенной в разделе 7.1. Для формулировки ряда свойств множеств W_i введем определение телесности множества $A \subset R^n$. Будем обозначать $S_a^n = \{x \in R^n : \, \|x\| \leq a\}$ – шар радиуса a с центром в нуле. Также для произвольного компактного множества $A \subset R^n$ и некоторой константы $\alpha > 0$ обозначим

$$B(\alpha, A) = \partial A + S_\alpha^n, \quad W(\alpha, A) = B(\alpha, A) \cap A,$$

$$l_{\alpha,A} : B(\alpha, A) \to \partial S_1^n$$

– некоторая непрерывная функция,

$$K(x, \omega, r, l_{\alpha,A}) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq \omega} (x + l_{\alpha,A}(x)\tau + S_{\tau r}^n).$$

Определение 49. *Компактное множество* $A \subset R^n$ *удовлетворяет условию телесности с положительными константами* α, ω, r *и функцией* $l_{\alpha,A}$, *если для любого* $x \in W(\alpha, A)$

$$K(x, \omega, r, l_{\alpha,A}) \subset A.$$

Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти в работе [8]. Мы будем использовать ее без доказательства.

Лемма 27. *Пусть терминальное множество* M *удовлетворяет условию телесности с положительными константами* α, ω, r *и функцией* $l_{\alpha,M}$, *функция* $f(x, u, v)$ *дважды непрерывно дифференцируема по* x *в* R^n, *а также выполняются условия* 1–3. *Тогда существуют константы* $0 < \Theta \leq 1$, $m_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\omega_0 > 0$ *и* $r_0 > 0$ *такие, что при* $T \leq \Theta$ *и* $m \geq m_0$ *множества* $W_i, i = 0, \dots, m$ *удовлетворяют условию телесности с константами* α_0, ω_0, r_0 *и функцией*

$$l_{\alpha_0, W_i}(x) = l_{\alpha,M}(x), \quad x \in B(\alpha_0, W_i).$$

Кроме того для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $m_1 \geq m_0$, *что при* $m \geq m_1$ *для любого* $i = 0, \dots, m$

$$d(W(\tau_i), W_i) \leq \varepsilon,$$

где под расстоянием между множествами здесь и далее подразумевается расстояние Хаусдорфа.

В следующем разделе будет рассмотрен конструктивный метод приближенного построения множеств W_i, $i = 0, \dots, m$.

8.2 Дискретная по времени, фазовым координатам и множествам управления схема приближенного построения максимальных u-стабильных множеств

Далее будем предполагать, что условия леммы 27 выполнены, и конечный момент времени удовлетворяет условию $T \le \Theta$.

Из условия 2 следует существование компактного множества K, ограничивающего любое решение уравнения (28) на отрезке $[0, T]$, оканчивающееся на множестве M. То есть для любых $x_1 \in M$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}[0,T]$ и $t \in [0,T]$ выполняется

$$x(t|T, x_1, u(\cdot), v(\cdot)) \in K.$$

Из условия 1 следует липшицевость функции $f(x, u, v)$ при $x \in K + S_1^n$, $u \in P$, $v \in Q$ по переменной x с константой Липшица L и ограниченность по норме константой R.

Определим функцию

$$F_h(x, u, v) = x + hf(x, u, v)$$

и рассмотрим ее при фиксированных значениях u и v как функцию переменной x.

Лемма 28. *Пусть выполняется условие* 1*, тогда при* $h \le h_0^{-1} = \min\left(\frac{1}{2L}, \frac{1}{4R}\right)$ *функция* $F_h(x, u, v)$ *имеет обратную функцию* $F_h^{-1}(x, u, v)$*, определенную для любых* $x \in K + S_{\frac{3}{4}}^n$*,* $u \in P$ *и* $v \in Q$ *и принимающую значения из* $K + S_1^n$*.*

Доказательство. Для любых $y \in K + S_{\frac{3}{4}}^n$, $u \in P$ и $v \in Q$ рассмотрим отображение

$$G_y(x) = y - hf(x, u, v).$$

При $h \le \frac{1}{4R}$

$$G_y(K + S_1^n) \subset y + S_{\frac{1}{4}}^n \subset K + S_1^n.$$

А при $h \le \frac{1}{4L}$ отображение G_y является сжимающим на $K + S_1^n$ и следовательно уравнение $G_y(x) = x$ имеет на множестве $K + S_1^n$ единственное решение. Значит, для любого $y \in K + S_{\frac{3}{4}}^n$ однозначно определен $x = F_h^{-1}(y, u, v) \in K + S_1^n$. □

Таким образом, используя утверждение леммы 28, оператор Π_h при $h \le h_0^{-1}$ и $A \subset K + S^n_{\frac{3}{4}}$можно записать в виде:

$$\Pi_h A = \bigcap_{v \in Q} \bigcup_{u \in P} F_h^{-1}(A, u, v).$$

Выберем некоторую малую величину $\delta > 0$ и на множестве P зададим конечное множество точек $\tilde{P}_\delta = \{u_i \in P\}$ такое, что для любого $u \in P$ найдется $u_i \in \tilde{P}_\delta$ для которого $\|u - u_i\| \le \delta$. Аналогично определим множество $\tilde{Q}_\delta = \{v_j \in Q\}$ такое, что для любого $v \in Q$ найдется $v_j \in \tilde{Q}_\delta$ для которого $\|v - v_j\| \le \delta$.

Введем оператор

$$\Pi_{h,\delta} A = \bigcap_{v_j \in \tilde{Q}_\delta} \bigcup_{u_i \in \tilde{P}_\delta} F_h^{-1}(A, u_i, v_j).$$

8.3 Дискретизация фазового пространства

Опишем теперь полностью дискретную схему приближенного построения максимальных u-стабильных множеств. Выберем некоторую малую величину $\gamma > 0$ и зададим в пространстве R^n равномерную сетку с узлами в точках $b_{i_1,\ldots,i_n} = (b^1_{i_1}, \ldots, b^n_{i_n})$:

$$\cdots < b^i_{-1} < b^i_0 = 0 < b^i_1 < \ldots, \quad b_{j+1} - b_j = \tfrac{\gamma}{\sqrt{n}},\ j = -\infty, \ldots, \infty,$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Множество всех точек $b_{i_1,\ldots,i_n}$ обозначим через

$$B_\gamma = \{b_{i_1,\ldots,i_n} : i_j = -\infty, \ldots, \infty,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Для каждой точки $b = (b^1, \ldots, b^n) \in B_\gamma$ определим множество

$$c_\gamma(b) = \{x \in R^n : |x_i - b^i| \le \frac{\gamma}{2\sqrt{n}},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Будем называть множество $c_\gamma(b)$ ячейкой, а точку b – ее центром.

Для произвольного компактного множества $A \subset R^n$ определим множество $B_\gamma(A) \subset B_\gamma$:

$$B_\gamma(A) = \{b \in B_\gamma : c_\gamma(b) \cap A \ne \emptyset\}.$$

Далее для произвольного множества $\tilde{B} \subset B_\gamma$ зададим множество

$$X(\tilde{B}) = \bigcup_{b \in \tilde{B}} c_\gamma(b).$$

Заметим, что для любого компакта $A \subset R^n$ справедлива оценка

$$A \subset X(B_\gamma(A)) \subset A + S^n_\gamma. \tag{29}$$

Для произвольного ограниченного множества $\tilde{B} \subset B_\gamma$ и любых $u \in P$, $v \in Q$ определим отображение

$$\tilde{F}^{-1}_{h,\gamma}(\tilde{B}, u, v) = \{b \in B_\gamma :\ F_h(b, u, v) \in X(\tilde{B}) + S^n_\gamma\}.$$

С использованием отображения $\tilde{F}^{-1}_{h,\gamma}$ для произвольного ограниченного множества $\tilde{B} \subset B_\gamma$ определим оператор

$$\tilde{\Pi}_{h,\gamma}\tilde{B} = \bigcap_{v_j \in \tilde{Q}_\delta} \bigcup_{u_i \in \tilde{P}_\delta} \tilde{F}^{-1}_{h,\gamma}(\tilde{B}, u_i, v_j).$$

Также для множества $\tilde{B} \subset B_\gamma$ определим аналог σ-окрестности множества, где $\sigma \geq 0$ произвольная величина

$$B^\sigma_\gamma(\tilde{B}) = \{b \in B_\gamma :\ c_\gamma(b) \cap X(\tilde{B}) + S^n_\sigma \neq \emptyset\}.$$

Для отображения B^σ_γ имеем оценку

$$X(\tilde{B}) + S^n_\sigma \subset X(B^\sigma_\gamma(\tilde{B})) \subset X(\tilde{B}) + S^n_{\sigma+\gamma}.$$

Далее зададим рекуррентную последовательность множеств $\tilde{W}_i$:

$$\begin{aligned} &\tilde{W}_m = B_\gamma(M), \\ &\tilde{W}_{i-1} = B^\sigma_\gamma(\tilde{\Pi}_{h,\gamma}\tilde{W}_i), \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

где $\sigma > 0$ – некоторый параметр.

Полученные множества $\tilde{W}_i$ будем рассматривать, как аппроксимацию сечений максимального u-стабильного множества W в моменты времени $\tau_i \in \Delta_m$. Для оценки погрешности аппроксимации справедлива следующая теорема, доказательство которой можно найти в работе [11].

Теорема 17. *Пусть выполняются условия:*

1. Функция $f(x,u,v)$ локально липшицева по совокупности переменных и дважды непрерывно дифференцируема по x при $x \in R^n$, $u \in P$ и $v \in Q$.

2. Существует константа $C \geq 0$ такая, что для всех $x \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$

$$\|f(x,u,v)\| \leq C(1+\|x\|).$$

3. Вектограмма $f(x,P,v) = \{y \in R^n : y = f(x,u,v), u \in P\}$ – выпуклое множество для любых $x \in R^n$ и $v \in Q$.

4. Терминальное множество M удовлетворяет условию телесности с некоторыми положительными константами α, ω, r и функцией $l_{\alpha,M}$.

Тогда существуют такие константы $0 < \Theta \leq 1$, $\varepsilon_* > 0$, $c_1 > 1$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ и $H_0 > 1$, что если конечный момент времени $T \leq \Theta$, то для любого $0 < \varepsilon \leq \min(\frac{1}{4}, \varepsilon_*)$ существуют такие константы $m_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, что если $m \geq m_0$, $\gamma \leq \gamma_0$, $\delta \leq \delta_0$ и выполняются условия согласования

$$c_1^m\gamma + \frac{c_2}{c_1-1}c_1^m\delta + \frac{c_3}{c_1-1}c_1^m\gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\sigma = 2H_0 L_{uv}^{-1}(h)\delta,$$

то для любого $i = 0,\ldots,m$

$$d(W(\tau_i), X(\tilde{W}_i)) \leq \varepsilon.$$

Список литературы

[1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967.

[2] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука. 1977.

[3] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс. 2002.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1976.

[5] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.

[6] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1964.

[7] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1974.

[8] Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наукова думка. 1992.

[9] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981.

[10] Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. Сер. математика и механика. 1959. N 2. С. 25–32.

[11] Камзолкин Д.В. О построении максимальных стабильных мостов для одного класса нелинейных дифференциальных игр сближения // Дифференциальные уравнения. 2006, том 42, № 3, С.338–346.

Предметный указатель